

L'algorithme EM et le Modèle de Mélanges de Gaussiennes Généralisées pour la Segmentation d'images.

N. Nacereddine, A. Tabbone, *LORIA, Nancy, France*

D. Ziou, *DMI, Univ. Sherbrooke, Canada*

L. Hamami, *ENP, Alger, Algérie*

Plan

- Introduction
- Aperçu sur l'algorithme EM
- Mise en œuvre des MMGG pour la segmentation d'images
- Résultats et évaluations
- Conclusion

Introduction

- Histogramme des niveaux de gris de l'image
- Approche paramétrique de la segmentation d'images
- Modèle de mélange de distributions gaussienne et gaussienne généralisée
- Objectif de la méthode utilisée

Aperçu sur l'algorithme EM

- Soit $\chi = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ un ensemble de N réalisations d'un vecteur aléatoire X de dimension d et avec une densité de probabilité $f(x_i)$, $i = 1, \dots, N$.
- La fonction de densité paramétrée peut être écrite comme une combinaison des fonctions de densité de M composantes C_m ($m = 1, \dots, M$) caractérisant un modèle de mélange fini :

$$f(x_i | \Theta) = \sum_{m=1}^M \pi_m f_m(x_i | \theta_m)$$

où $\Theta = (\pi_1, \dots, \pi_M, \theta_1, \dots, \theta_M)$ et π_m est la probabilité à priori de la $m^{\text{ième}}$ composante et satisfait les conditions suivantes :

$$\pi_m \geq 0 \text{ et } \sum_{m=1}^M \pi_m = 1$$

En présence d'observations iid, la vraisemblance peut être exprimée comme :

$$L(\Theta) = \prod_{i=1}^N f(x_i | \Theta) = \prod_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \pi_m f_m(x_i | \theta_m)$$

Aperçu sur l'algorithme EM (suite)

- Etant χ , une observation partielle du phénomène considéré
- Maximisation de $L(\Theta)$ est difficile à réaliser directement.
- Utilisation de l'algorithme EM qui est une technique itérative de maximisation de loi de vraisemblance en présence de données incomplètes.
- On introduit une variable aléatoire Z correspondant aux données manquantes telle que :

$$z_i = (z_{i1}, \dots, z_{iM}) \quad z_{im} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in C_m \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Soit $Y = (\chi, Z)$ les données complètes, alors la log vraisemblance complète sera :

$$\log L_c(\Theta / Y) = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M z_{im} \log[\pi_m f(x_i / \theta_m)]$$

Dans la suite, $L_c(\Theta)$ désignera $\log L_c(\Theta / Y)$

Algorithme EM pour les modèles de mélange

Entrées : χ , M , $\Theta^{(0)} = (\pi_1^{(0)}, \dots, \pi_M^{(0)}, \theta_1^{(0)}, \dots, \theta_M^{(0)})$, ε : le seuil de convergence de l'algorithme

Sortie : Un maximum θ^* de la loi de vraisemblance

$t \leftarrow 0$;

Répéter

(E-Etape) Calcul des probabilités a posteriori $\hat{z}_{im}^{(t)}$

$$z_{im}^{(t)} = P(m/x_i, \Theta^{(t)}) = \frac{\pi_{im} f(x_i / \theta_m^{(t)})}{\sum_{l=1}^M \pi_{il} f(x_i / \theta_l^{(t)})}$$

(M-Etape) Maximisation de $L_c(\hat{\Theta}^{(t)})$

$$\hat{\Theta}^{(t+1)} = \arg \max_{\Theta} Q(\Theta / \hat{\Theta}^{(t)}) \quad \text{où} \quad Q(\Theta / \hat{\Theta}^{(t)}) = E[L_c(\Theta) / X, \hat{\Theta}^{(t)}]$$

$t \leftarrow t+1$;

Jusqu'à $\left\| Q(\Theta / \hat{\Theta}^{(t)}) - Q(\Theta / \hat{\Theta}^{(t-1)}) \right\| < \varepsilon$

Distribution gaussienne généralisée

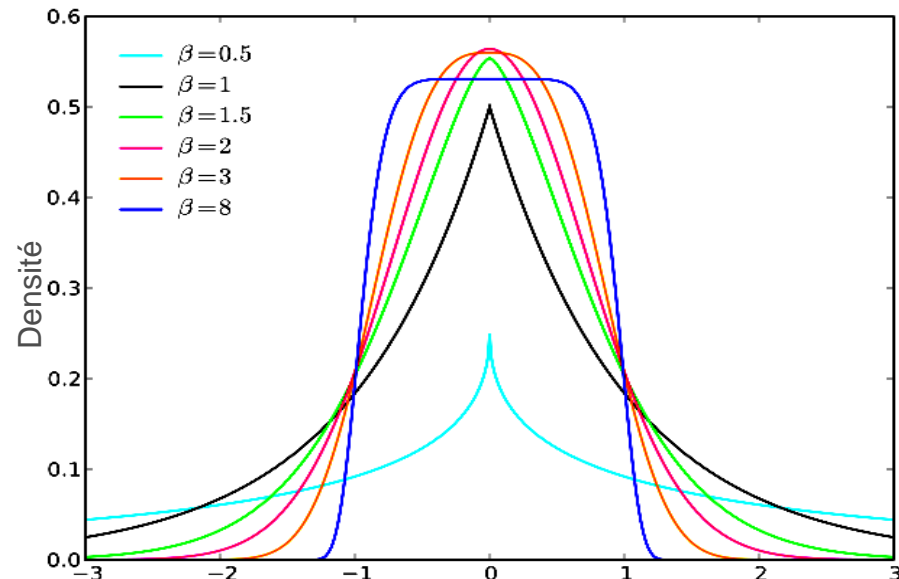
L'expression analytique de la distribution gaussienne généralisée (DGG) monovariante est donné par

$$f(x / \theta_m) = \frac{\beta_m}{2\alpha_m \Gamma(1/\beta_m)} e^{-[|x - \mu_m| / \alpha_m]^{\beta_m}}$$

où $\theta_m = \{ \mu_m, \alpha_m, \beta_m \}$ représentent respectivement :

- le vecteur moyenne,
- les paramètres de changement d'échelle et
- les paramètres de forme

$\beta_m \rightarrow 0$	Impulsion
$\beta_m = 1$	Distr. Laplace
$\beta_m = 2$	Distr. normale
$\beta_m \rightarrow \infty$	Distr. uniforme



Estimation des paramètres du GGMM

- Soit h_g ($g \in [0, L-1]$ où L est le nombre de niveaux de gris) l'histogramme normalisé de l'image χ de taille $U \times V$ qui est une approximation de la densité de probabilité réelle de l'image.
- L'histogramme est ainsi estimé par un mélange de DGG monovariables.

La log-vraisemblance complète sera exprimé par :

$$L_c(\Theta) = \sum_{g=1}^{L-1} \sum_{m=1}^M z_{g,m} h_g \log [\pi_m f(g / \theta_m)]$$

Dans E-Etape, les probabilités *a posteriori* sont données par

$$z_{g,m}^{(t)} = \pi_m f(g / \theta_m^{(t)}) / \sum_{l=1}^M \pi_l f(g / \theta_l^{(t)})$$

Estimation des paramètres du GGMM (suite)

Dans M-Step, l'estimation de Θ donnera : $\pi_m^{(t+1)} = \sum_{g=1}^{L-1} z_{g,m}^{(t)} h_g$

$$f(\mu_m^{(t+1)}) = \sum_{g=0}^{L-1} z_{g,m}^{(t)} h_g \text{sign} |g - \mu_m^{(t+1)}|^{\beta_m^{(t)} - 1} = 0 \quad (1) \quad \text{où} \quad \text{sign}(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u < 0 \\ 1 & \text{si } u > 0 \end{cases}$$

$$\alpha_m^{(t+1)} = \left[\frac{\beta_m^{(t)} \sum_{g=0}^{L-1} z_{g,m}^{(t)} h_g \text{sign} |g - \mu_m^{(t)}|^{\beta_m^{(t)} - 1}}{\sum_{g=0}^{L-1} z_{g,m}^{(t)} h_g} \right]^{1/\beta_m^{(t)}}$$

$$g(\beta_m^{(t+1)}) = \sum_{g=0}^{L-1} z_{g,m}^{(t)} h_g \left[\frac{1}{\beta_m^{(t+1)}} + \frac{1}{\beta_m^{(t+1)^2}} \Psi(1/\beta_m^{(t+1)}) - \left(\frac{|g - \mu_m^{(t)}|}{\alpha_m^{(t)}} \right)^{\beta_m^{(t+1)}} \log \left(\frac{|g - \mu_m^{(t)}|}{\alpha_m^{(t)}} \right) \right] = 0 \quad (2)$$

où $\Psi(\xi) = \Gamma'(\xi)/\Gamma(\xi)$ avec $\Gamma(\xi) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\xi-1} dt$

Les équations non linéaires (1) et (2) sont résolues par la méthode de Newton-Raphson.

Génération de l'image segmentée

Les valeurs finales des probabilités *a posteriori* des différentes partitions de l'image segmentée sont représentées par $z_{g,m}^{(t_f)}$ ($m=1,\dots,M$).

On peut affecter la réalisation (niveau de gris) optimale $S(u,v)$ pour chaque pixel de coordonnées (u,v) selon la règle de décision de Bayes

$$S(u, v) = \begin{cases} \mu_1^{t_f} & \text{si } z_{g,1}^{t_f} = \max_m \{z_{g,m}^{t_f} : m = 1, \dots, M\} \\ \vdots \\ \mu_M^{t_f} & \text{si } z_{g,M}^{t_f} = \max_m \{z_{g,m}^{t_f} : m = 1, \dots, M\} \end{cases}$$

où $\mu_m^{t_f}$ ($m = 1, \dots, M$) sont les valeurs finales d'estimation du paramètre de moyenne.

Critères d'évaluation

Le critère d'évaluation de segmentation utilisé se base sur la mesure de l'homogénéité et est donné par

$$U = 1 - \sum_{j=1}^M \frac{\omega_j \sigma_j^2}{\sigma_T^2}$$

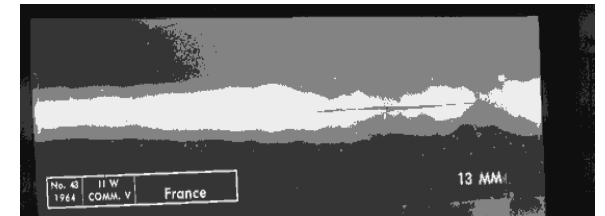
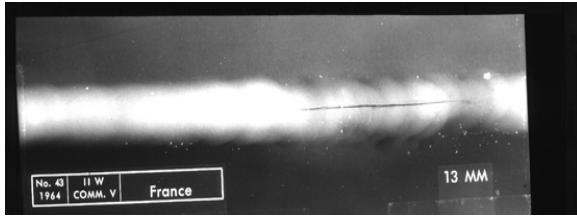
où ω_j , σ_j^2 et σ_T^2 sont, respectivement, le rapport surfacique de la $j^{\text{ème}}$ région de l'image segmentée, les variances de la région j et de l'image totale.

L'erreur ε est donnée par la différence en valeur absolue entre l'histogramme original et l'histogramme estimé, i.e. :

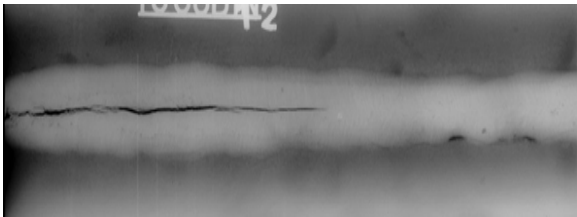
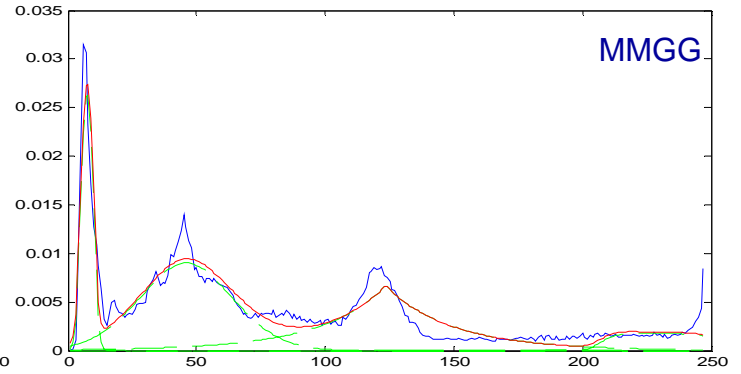
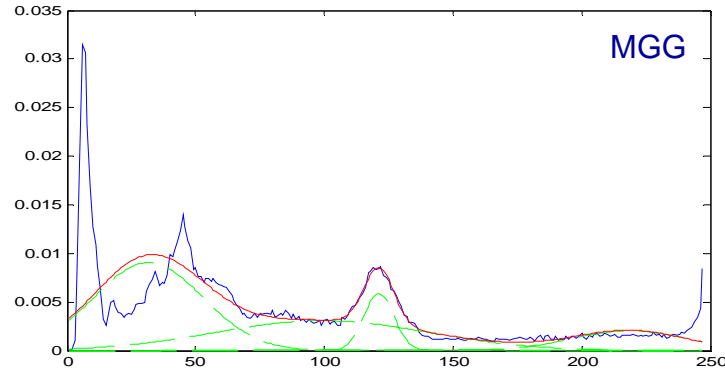
$$\varepsilon(p, q) = \left| h(p, q) - \hat{h}(p, q) \right|$$

avec : $p = \text{image (a), } \dots, \text{image (h)}$; $q = \text{GMM, GGMM}$

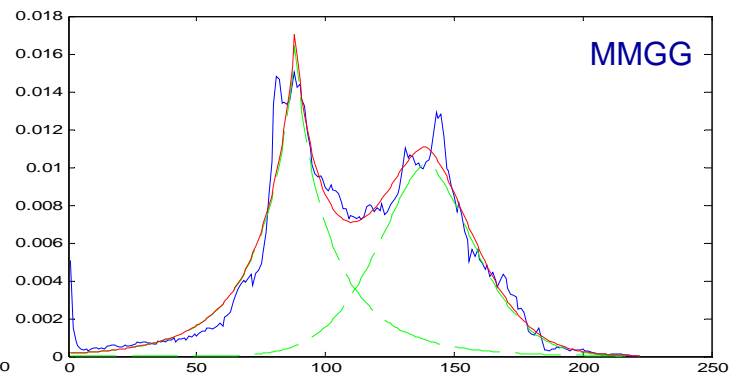
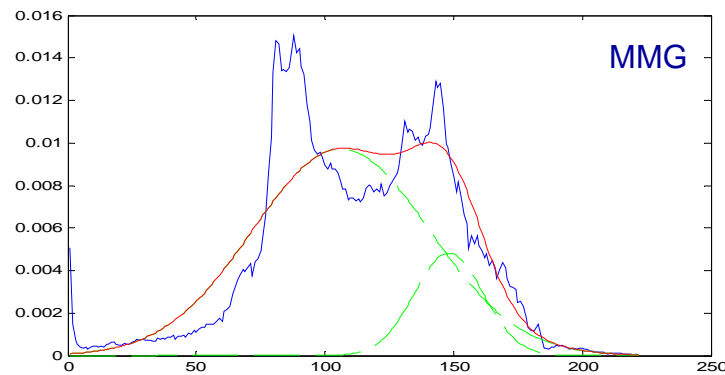
Résultats

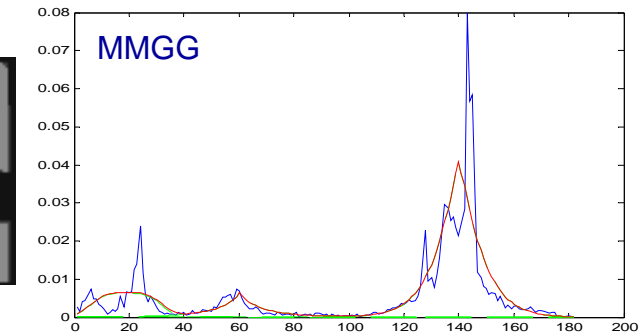
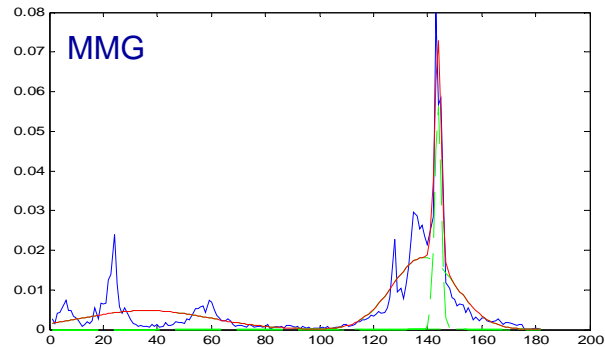
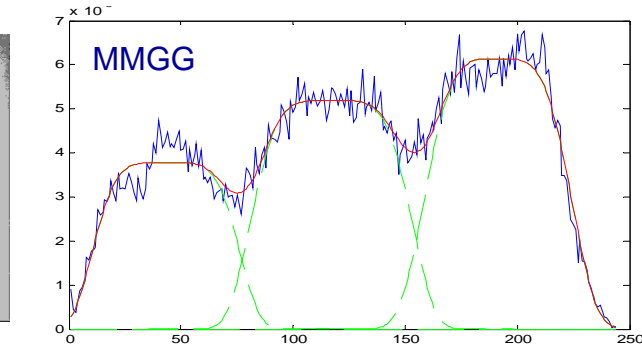
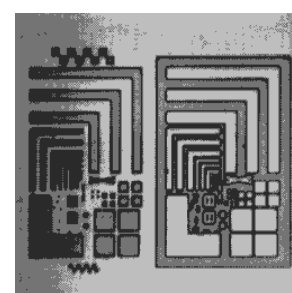
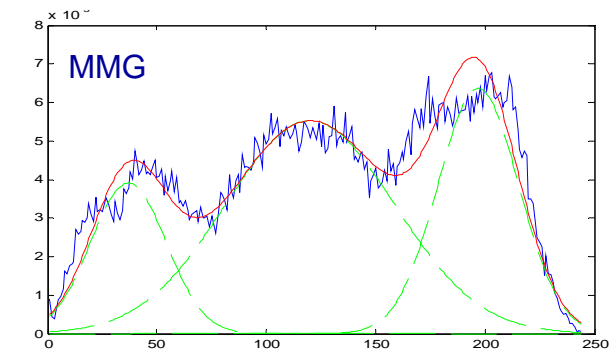
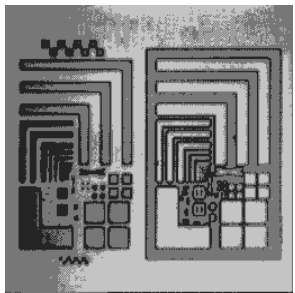
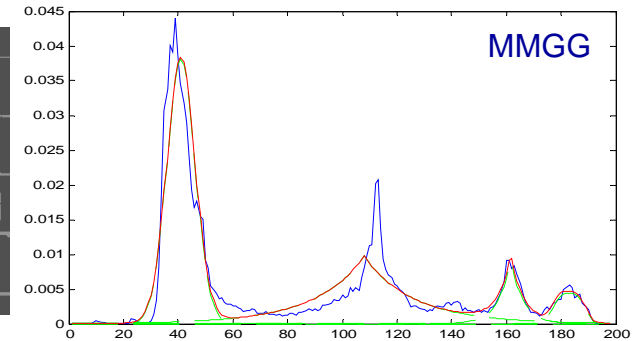
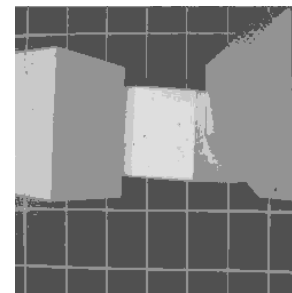
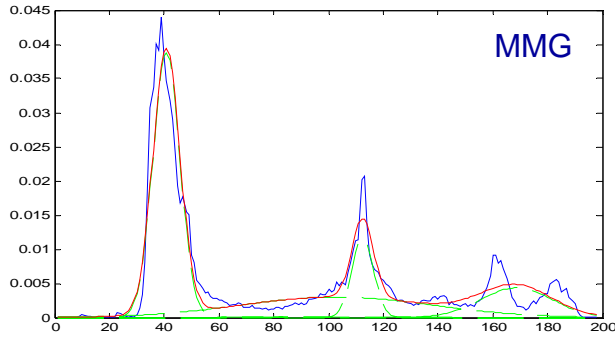
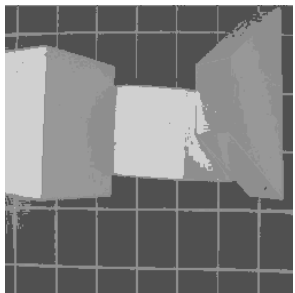
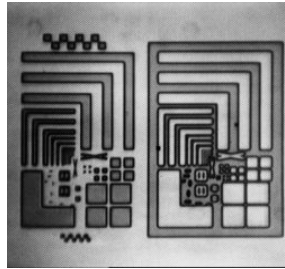
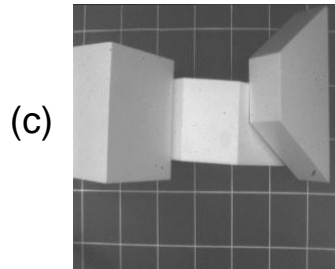


(a)



(b)





Résultats (suite)

Évaluation de la segmentation par GMM et GGMM

Images	# Modes (M)	MMG			MMGG		
		$\mu^{(t_f)}$	U	$\varepsilon (\times 10^{-4})$	$\mu^{(t_f)}$	U	$\varepsilon (\times 10^{-4})$
(a)	4	[31 98 120 218]	0.909	13	[6 45 123 229]	0.923	10
(b)	2	[105 147]	0.215	11	[87 138]	0.706	5
(c)	4	[40 102 111 168]	0.907	15	[40 107 161 182]	0.914	16
(d)	3	[36 119 196]	0.846	4	[42 116 190]	0.892	2
(e)	3	[35 143 138]	0.909	23	[18 59 139]	0.956	25

Conclusion

Dans ce travail, on montre que la flexibilité du modèle de mélange basé sur la gaussienne généralisée :

- favorise une restitution plus fiable, par rapport au modèle gaussien, de l'emplacement des différents modes réellement contenus dans l'image d'une part,
- et permet une approximation plus précise de la forme des modes, d'autre part.