



**HAL**  
open science

## Conception d'un réseau WDM protégé par sous-réseaux

Jean-Claude Bermond, Lilian Chacon, David Coudert, Francois Tillerot

### ► To cite this version:

Jean-Claude Bermond, Lilian Chacon, David Coudert, Francois Tillerot. Conception d'un réseau WDM protégé par sous-réseaux. 2ème Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications (AlgoTel'00), Karell Bertet and Isabelle Chrisment and Eric Fleury, May 2000, La Rochelle, France. pp.83-88. inria-00429292

**HAL Id: inria-00429292**

**<https://inria.hal.science/inria-00429292>**

Submitted on 2 Nov 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Conception d'un réseau WDM protégé par sous-réseaux

Jean-Claude BERMOND<sup>1</sup>, Lilian CHACON<sup>2</sup>, David COUDERT<sup>1</sup>,  
François TILLEROT<sup>2</sup>

<sup>1</sup> MASCOTTE – Projet Commun CNRS/INRIA/UNSA – 2004, route des Lucioles – F 06902 SOPHIA ANTIPOLIS cedex

<sup>2</sup> France Télécom R&D – Technopole Anticipa – 2, avenue Pierre Marzin – F 22307 LANNION cedex

---

Nous proposons une modélisation de la construction d'un réseau WDM protégé comme l'extension du problème classique de couverture des arêtes d'un graphe. Un ensemble de résultats est donné pour la réalisation de l'instance *All-to-All* sur un réseau en anneau.

**Mots-clés** : dimensionnement, routage, réseaux optiques, cycle designs, covering designs

---

## 1 Introduction

### 1.1 Contexte

Dans le contexte actuel d'une forte augmentation de trafic, il est important de prévoir une augmentation de la capacité des réseaux de transport. Le *multiplexage en longueurs d'onde* ou WDM (*Wavelength Division Multiplexing*) consiste à transmettre plusieurs signaux sur une même fibre, en utilisant une longueur d'onde différente par signal. Cette technique permet ainsi de multiplier la capacité de transmission des fibres optiques. Les problèmes de routage et d'allocation de ressources dans les réseaux WDM non sécurisés ont fait l'objet d'études depuis plusieurs années [Beau00]. Cette étude analyse la construction d'un réseau WDM sécurisé à partir d'une couverture du réseau de départ par des sous-réseaux protégés indépendamment les uns des autres.

### 1.2 Définition du problème

Le problème de la définition d'une couche optique se divise en deux sous-problèmes : le calcul du routage physique des demandes sur le réseau et l'allocation des ressources pour l'acheminement des demandes avec ce routage. La sécurisation du réseau, indispensable pour pallier les pannes d'équipements et de liens, consiste à calculer un reroutage du trafic interrompu dans le cas d'une panne et à surdimensionner la couche optique en conséquence. Les ressources utilisées pour la sécurisation sont appelées ressources de réserve. On distingue deux mécanismes de sécurisation : la *protection* et la *restauration*.

La protection est un mécanisme automatique dans le sens où les ressources de réserve utilisées en cas de panne sont prédéterminées et dédiées. En revanche, la restauration est un mécanisme de sécurisation qui calcule un chemin de réserve à partir des ressources disponibles dans le réseau au moment de la panne (réserve partagée). La *protection par sous-réseaux* peut être vue comme une solution intermédiaire car elle permet de partager la ressource de réserve, dans un domaine limité au sous-réseau, de façon prédéterminée en utilisant des mécanismes automatiques de reconfiguration en cas de panne (fig. 1).

Cet article aborde le problème de la définition d'une couche optique dans le cas d'une protection par des sous-réseaux : le but est de parvenir à un recouvrement du graphe des demandes par un ensemble de cycles modélisant des anneaux optiques. La topologie en anneaux est privilégiée dans les réseaux de transport car elle minimise la complexité du routage en garantissant la sécurisation contre toute panne simple.

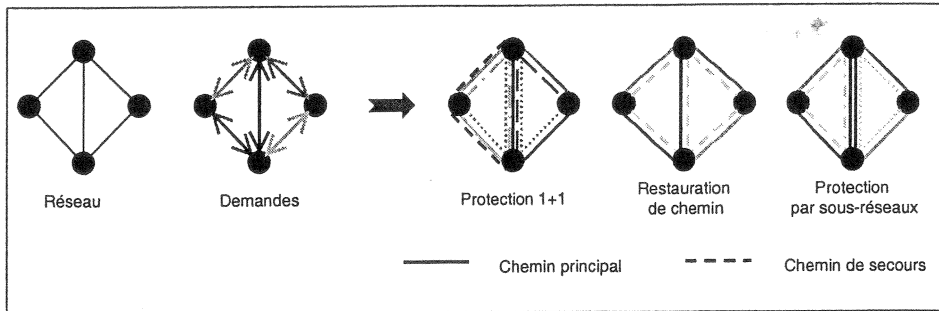


FIG. 1 Les techniques de sécurisation

## 2 Modélisation du problème

### 2.1 Graphe physique et graphe logique

Les infrastructures d'un réseau optique de télécommunications sont modélisées par un graphe, appelé *graphe physique*, et noté  $G$ . Les sommets représentent les brasseurs optiques et les arêtes les liens en fibres optiques. Souvent, le graphe physique ne comporte pas de régularité particulière, hormis la connexité nécessaire à l'acheminement des demandes et à la sécurisation du réseau. Ici, nous considérons le cas où  $G$  est un anneau, modélisé par le cycle (non orienté) de longueur  $n$ , noté  $C_n$ .

L'ensemble des demandes sur un réseau de télécommunications est modélisé par un graphe, appelé *graphe logique*, où les sommets correspondent à ceux du graphe physique et où les arêtes représentent les demandes (appelées aussi *requêtes*) entre les nœuds du réseau.

On considère que les demandes sont symétriques, c'est-à-dire qu'à toute demande de trafic du nœud  $A$  vers le nœud  $B$  correspond une demande de trafic identique du nœud  $B$  vers le nœud  $A$ . Cette hypothèse se traduit dans la modélisation par l'utilisation de *graphes non orientés*.

L'ensemble des requêtes est appelé une *instance* et le graphe logique sera noté  $I$ . Une instance importante est celle de l'échange total (*All-to-All*) où chaque nœud du réseau communique avec tous les autres. Dans ce cas, le graphe logique  $I$  est le graphe complet d'ordre  $n$ , noté  $K_n$ .

Les hypothèses prises sur le graphe physique et le graphe logique peuvent paraître restrictives. En fait, le réseau des infrastructures, modélisé par un graphe quelconque, ne présente pas de régularités particulières mais la première phase de la conception d'un réseau WDM va consister à définir un ensemble de cycles sur ce graphe et à ramener la demande globale sur le réseau maillé à une demande locale à chaque anneau. On suppose que les nœuds des différents cycles sont choisis de façon à répartir uniformément les demandes entre les nœuds et à garantir un partage optimal des ressources. On se ramène ainsi à un graphe physique en anneau et à un graphe logique complet.

### 2.2 Routage et allocation

Le *routage*  $R$  d'une instance  $I$  est un ensemble de chemins qui établit la correspondance entre  $I$  et  $G$  : pour chaque demande, on calcule un ou plusieurs chemins physiques sur les infrastructures du réseau entre l'origine et la destination. Les demandes étant symétriques, on utilise ici un routage symétrique où le chemin de  $A$  vers  $B$  est identique au chemin de  $B$  vers  $A$ .

La phase d'allocation de ressources constitue une seconde phase du dimensionnement. Elle consiste à déterminer sur quelles longueurs d'onde sont transmises les requêtes et à calculer le nombre et la charge des liaisons WDM nécessaires sur chaque tronçon.

### 2.3 Problème de conception d'un réseau WDM par des sous-réseaux

La sécurisation par sous-réseaux se modélise en cherchant à couvrir les arêtes du graphe logique  $I$  par des graphes  $I_k$ . En général, on souhaite que les  $I_k$  aient un petit nombre de sommets et un cas intéressant est celui où  $I_k$  est un cycle. Le problème de la couverture des arêtes d'un graphe (et tout particulièrement de  $K_n$ ) par des graphes a été étudié dans la littérature, en particulier lorsque tous les  $I_k$  sont isomorphes à un graphe donné.

Mais ici, au problème général de couverture s'ajoute une contrainte liée à l'existence du graphe physique  $G$  sur lequel doivent être routées les requêtes du graphe logique  $I$ . Le problème consiste à déterminer une couverture de  $I$  par des graphes  $I_k$  de telle sorte qu'il existe pour chaque graphe  $I_k$  un *routage disjoint* sur  $G$ . Trouver un routage disjoint revient à trouver une allocation de chemin aux requêtes de  $I_k$  telle que deux chemins n'utilisent pas le même lien physique.

Sur l'exemple de la fig. 2, les requêtes du graphe logique (fig. 2b) doivent être acheminées sur le graphe physique représenté fig. 2a. Une première solution de couverture du graphe logique par deux  $C_4$  est donnée fig. 2c. En cas de panne sur le lien 3-4, les requêtes 1-3, 2-4 et 3-4 sont affectées sans possibilité de reroutage : l'anneau optique 1-2-4-3-1 ne permet pas un routage disjoint. La solution proposée n'est donc pas admissible. En revanche, la seconde solution (couverture par un  $C_4$  et deux  $C_3$ ), représentée fig. 2d, permet un routage disjoint de toutes les demandes. Elle est donc solution du problème.

En résumé, le problème s'énonce donc ainsi : *Trouver une couverture des arêtes du graphe logique  $I$  par des graphes  $I_k$  d'un certain type telle que, pour chaque  $I_k$ , il existe un routage disjoint dans le graphe physique  $G$ . L'objectif est alors de minimiser le nombre de graphes  $I_k$  de la couverture.*

Ici, nous considérons surtout le cas où  $G$  est un cycle  $C_n$ ,  $I$  est le graphe complet  $K_n$  et les  $I_k$  sont des cycles  $C_k$  de longueur  $k$ .

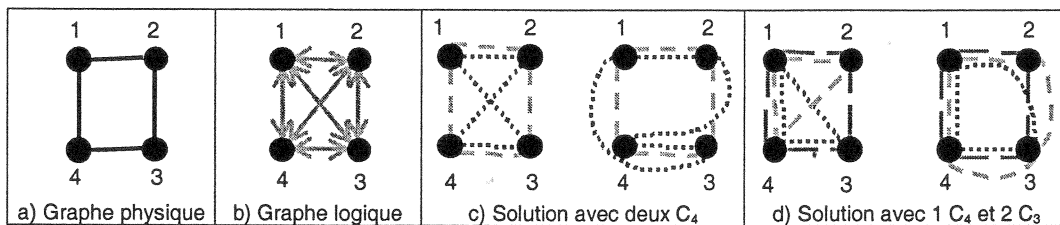


FIG. 2 Exemple de couverture par cycles

#### Satisfaction de la contrainte de routage disjoint pour des cycles

Si on cherche une couverture par des  $C_3$  (ou  $K_3$ ), la contrainte est satisfaite dès que  $G$  contient un cycle hamiltonien ou bien si  $G$  est 3-connexe. La 2-connexité ne suffit pas comme le montre l'exemple de la fig. 3 ou le triangle ABC ne vérifie pas la contrainte.

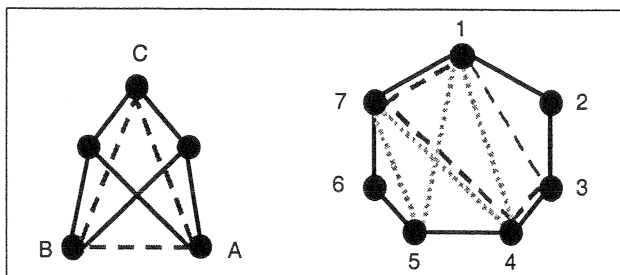


FIG. 3 Contrainte de routage disjoint

Si on cherche une couverture par des  $C_k$ , la contrainte est satisfaite dès que  $G$  est  $(k+1)$ -connexe ; en effet, par  $k$  points, il passe alors toujours un cycle.

**Propriété :** Dans le cas où  $G$  est un  $C_n$  dont les sommets sont ordonnés de 1 à  $n$ , le graphe  $C_k$  satisfait la contrainte de routage disjoint si ses sommets sont « ordonnés cycliquement modulo  $n$  ».

Ainsi pour  $n = 7$ , le cycle (4, 7, 1, 3, 4) ou (4, 3, 1, 7, 4) satisfait la contrainte mais le cycle (1, 4, 7, 5, 1) non car on ne peut router de manière disjointe sur  $C_7$  les arêtes 4 - 7 et 5 - 1 (fig. 3).

### Résultats voisins (couverture sans contrainte de routage disjoint)

Le problème considéré ici n'a pas été étudié dans la littérature, mais si on supprime la contrainte de routage disjoint, le problème se ramène à la couverture des arêtes d'un graphe  $I$  par des graphes  $I_k$ . Ce problème est bien connu quand  $I = K_n$  et  $I_k$  est isomorphe à  $K_k$  sous le nom de *covering designs* (voir les surveys de de Stinson [Sti96] et Mills et Mullin [MiMu92]). Dans le cas où on cherche exactement une partition des arêtes, on est ramené à l'existence de  $(n, k, 1)$ -*design*. En particulier, pour une couverture par des  $C_3$ , on a le résultat suivant (voir [StRo82] et [MiMu92]) :

**Théorème :** Le nombre minimum de  $C_3$  nécessaires pour couvrir les arêtes de  $K_n$  est égal à  $\left\lceil \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\rceil$ .

Si  $n \equiv 1$  ou  $3 \pmod{6}$ , on a une partition des arêtes de  $K_n$  en  $\frac{n(n-1)}{6}$   $K_3$ , appelés triplets de Steiner.

Si  $I_k$  est isomorphe à  $C_k$ , le problème de la partition des arêtes de  $K_n$  en  $C_k$  a été étudié dans la littérature sous le nom de *cycle-designs* (voir le survey [LiRo92] et [BeSo77][BeSo78]). La couverture des arêtes de  $K_n$  par des cycles (autres que  $C_3$ ) a été considérée dans [Ber75], où on trouve le résultat suivant :

**Théorème :** Le nombre minimal de  $C_4$  nécessaires pour couvrir les arêtes de  $K_n$  est :

$$\left\lceil \frac{n}{4} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\rceil + \varepsilon(n) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \varepsilon(n) = 1 & \text{si } n \equiv 3 \pmod{8} \\ \varepsilon(n) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La partition des arêtes de  $K_n$  en graphes isomorphes à un graphe donné est considérée dans la littérature [BeSo75][Hei96].

### Résultats sur le problème (couverture avec contrainte de routage disjoint)

Soit  $\rho(n)$  le nombre minimum de cycles nécessaires pour couvrir les arêtes de  $K_n$  avec la contrainte qu'il existe un routage disjoint dans le graphe physique  $C_n$  pour chaque cycle de la couverture. En utilisant le fait que les cycles doivent avoir leurs sommets ordonnés cycliquement, on montre que :

**Théorème :** Pour  $n = 2p + 1$ ,  $\rho(2p + 1) \geq \frac{p(p+1)}{2}$  ; pour  $n = 2p$ ,  $\rho(2p) \geq \frac{p^2 + 1}{2}$

*Preuve :* Soit  $C_k^j$  un cycle de longueur  $k$  de la couverture de  $K_n$ . La propriété de routage disjoint implique que les sommets sont ordonnés cycliquement modulo  $n$  et  $C_k^j$  peut s'écrire  $(a_1^j, a_2^j, \dots, a_k^j, a_1^j)$  avec les  $a_i^j$  allant en croissant modulo  $n$ . Posons  $\alpha_i^j = a_{i+1}^j - a_i^j$  pour  $i = 1, \dots, k$  avec  $a_{k+1}^j = a_1^j$ . La propriété de routage disjoint nous donne  $\sum_i \alpha_i^j = n$ . On appelle différence (inférieure à  $\frac{n}{2}$ ) d'une arête  $(x, y)$  la valeur  $|y - x|$  modulo  $n$ .

Dans le cas impair ( $n = 2p + 1$ ), on doit trouver  $n$  arêtes de différence  $d$  pour  $1 \leq d \leq p$ . Chaque apparition d'une différence correspond à un  $\alpha_i^j$ , soit sous la forme  $d$ , soit sous la forme  $(n - d)$  ; on

a donc  $\sum_{i,j} \alpha_i^j \geq \sum_{d=1}^p nd = n \frac{p(p-1)}{2}$ . Or,  $\sum_i \alpha_i^j = n$  ; donc si on a  $\rho$  cycles dans la couverture,  $\rho n \geq n \frac{p(p-1)}{2}$ , soit  $\rho \geq \frac{p(p-1)}{2}$ .

Dans le cas pair ( $n = 2p$ ), on doit trouver  $n$  arêtes de différence  $d$  pour  $1 \leq d \leq (p-1)$  et  $\frac{n}{2} = p$  arêtes de différence  $p$ . De plus, le degré de chaque sommet, égal à  $(n-1)$ , est impair ; donc toute couverture par des cycles (dont le degré de chaque sommet est égal à 2) doit avoir en chaque sommet une arête répétée. On a donc au moins  $p = \frac{n}{2}$  arêtes supplémentaires ayant chacune une différence supérieure ou égale à 1. Donc  $\sum_{i,j} \alpha_i^j \geq \left( \sum_{d=1}^{p-1} nd \right) + pp + p = p(p^2 + 1)$ . Or,  $\sum_i \alpha_i^j = n$  ; donc si on a  $\rho$  cycles dans la couverture,  $2p\rho \geq p(p^2 + 1)$  soit  $\rho \geq \frac{p^2 + 1}{2}$ .

Dans le cas où  $n$  est impair, on peut montrer :

**Théorème :** Si  $n = 2p + 1$ ,  $\rho(2p + 1) = \frac{p(p+1)}{2}$ . De plus, la couverture est réalisée par  $p$   $C_3$  et  $\frac{p(p-1)}{2} C_4$ .

*Preuve* (par induction sur  $p$ ) :  $K_3$  est couvert par un  $C_3$  donc le théorème est vrai pour  $p = 1$ . Supposons que le théorème est vrai au rang  $p$  et considérons  $n = 2(p+1) + 1 = 2p + 3$ . Les arêtes de  $K_{2p+3}$  peuvent être vues comme l'union de celles d'un  $K_{2p+1}$  (sur les sommets  $0, 1, \dots, p, p+2, \dots, 2p+1$ ), celles d'un  $K_3$  (sur les sommets  $0, p+1, 2p+2$ ) et celles d'un graphe biparti complet  $K_{2p,2}$  (sur les sommets  $1, \dots, p, p+2, \dots, 2p+1$  d'une part et  $p+1, 2p+2$  d'autre part).  $K_{2p+1}$  se décompose en  $\frac{p(p+1)}{2}$  cycles dont  $p$   $C_3$  et  $\frac{p(p-1)}{2} C_4$  (hypothèse de récurrence) et  $K_3$  se décompose en un  $C_3$ . La décomposition de  $K_{2p,2}$  est donnée par les  $C_4$  suivants :  $(i, p+1, p+i+1, 2p+2, i)$  pour  $1 \leq i \leq p$ . Ces cycles couvrent les arêtes de  $K_{2p,2}$  et vérifient la contrainte de routage disjoint. Donc,  $K_{2p+3}$  se décompose en  $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$  cycles dont  $(p+1) C_3$  et  $\frac{p(p+1)}{2} C_4$ .

On voit donc que, dans ce cas, une couverture optimale n'utilise que de très petits cycles. Si on avait voulu couvrir uniquement avec des  $C_3$ , il en aurait fallu de l'ordre de  $\frac{n^2}{6}$ .

**Conjecture :** Si  $n = 2p$ ,  $\rho(2p) = \left\lceil \frac{p^2 + 1}{2} \right\rceil$  ; la couverture peut être réalisée avec des  $C_3$  et  $C_4$  uniquement.

Nous avons pu montrer que :

- si la conjecture est vraie pour  $n = 4p + 2$ , alors elle est vraie pour  $n = 4p + 4$
- la conjecture est vraie pour  $n \leq 16$  (par programmation linéaire)

- si la conjecture est vraie, alors la couverture de  $K_n$  est réalisée par  $2 C_3$  et  $(2p^2 + 2p - 1) C_4$  si  $n = 2(2p + 1)$  et  $4 C_3$  et  $(2p^2 - 3) C_4$  si  $n = 4p$

Enfin, nous avons aussi par induction une couverture avec moins de  $\left( \left\lceil \frac{p^2 + 1}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{p}{8} \right\rfloor - 1 \right) C_3$  ou  $C_4$ .

### 3 Conclusion

Le problème de la construction d'un réseau WDM protégé a été considéré comme l'extension du problème classique de couverture des arêtes d'un graphe par ajout d'une contrainte de routage disjoint. Dans le cas particulier de l'instance *All-to-All* ( $K_n$ ) sur un anneau, nous proposons une construction en un nombre minimum de sous-réseaux (cycles) pour  $n = 2p + 1$  et donnons une borne inférieure pour  $n = 2p$ . Nous conjecturons que l'égalité est atteinte pour tout  $n = 2p$  avec des anneaux de longueur 3 et 4. Une extension de ce problème est envisagée pour des instances de type  $\lambda$ - $K_n$  et un graphe physique modélisé par une grille torique.

### Références

- [BBGHPV97] B. Beauquier, J.-C. Bermond, L. Gargano, P. Hell, S. Perennes, U. Vaccaro, *Graph problems arising from Wavelength-Routing in All-Optical Networks*, Proc. Conference WOCS97, Geneva, April 1997
- [Beau00] B. Beauquier. *Communications dans les réseaux optiques par multiplexage en longueur d'onde*, Thèse, Université de Nice Sophia Antipolis, Janvier 2000
- [Ber75] J.-C. Bermond, *Cycles dans les graphes et G-configurations*, Thèse d'Etat, Université Paris Sud Orsay, 1975
- [BeSo75] J.-C. Bermond, D. Soiteau, *Graph Decomposition and G-designs*, Proc. 5th British Combinatorial Conference, Aberdeen, 1975, Congressus Numerantium 15, Utilitas Math. Pub., 1975, pp 53-72.
- [BeSo77] J.-C. Bermond, D. Soiteau, *Cycles and circuit designs, odd case*, Beitrage zur Graphentheorie und deren Anwendungen Proc. Coll. Oberhof 1977, Ilmenau, pp 11-32, 1978
- [BeSo78] J.-C. Bermond, C. Huang, D. Soiteau, *Balanced Cycle and Circuit Designs: even cases*, Ars Combinatoria, 5, pp 293-318, 1978
- [Cost239] European Cooperation in the Field Of Scientific and Technical Research, Ultra High Capacity Optical Transmission Networks, Final Report of Action Cost 239
- [Hei96] K. Heinrich, *Graph decompositions and Designs*, The CRC handbook of Combinatorial designs by C.J. Colbourn et J.H Dinitz, CRC Press, chap. 22, 1996
- [LiRo92] C.C. Lindner and C.A. Rodger, *Decomposition into Cycles II : cycle systems*, Contemporary designs a collection of surveys by J. H. Dinitz et D.R. Stinson, Wiley, 1992
- [MiMu92] W.H. Mills and R.C. Mullin, *Coverings and Packings*, Contemporary designs a collection of surveys by J. H. Dinitz et D.R. Stinson, Wiley, 1992
- [Sti96] D.R. Stinson, *Coverings*, The CRC handbook of Combinatorial designs by C.J. Colbourn et J.H Dinitz, CRC Press, chap. 8, 1996
- [StRo82] R.G. Stanton and M.J. Rogers, *Packings and coverings by triples*, Ars combinatoria, 13, pp 61-69, 1982