HAL
open science

# Méthodes Numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts

Vincent Acary

## To cite this version:

Vincent Acary. Méthodes Numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts. JNRR'09 - 7èmes Journées Nationales de la Recherche en Robotique, Nov 2009, Neuvy-Sur-Barangeon, France. inria-00425090v2

**HAL Id: inria-00425090**

**https://inria.hal.science/inria-00425090v2**

Submitted on 3 Nov 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthodes Numériques pour la simulation des systèmes multi–corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary, INRIA Grenoble Rhône–Alpes
Bipop
Inovallée , 655 avenue de l'Europe
Montbonnot
+33 (0)4 76 61 52 29, vincent.acary@inrialpes.fr

*Résumé* - ***Il s'agira dans cet exposé de brosser le tableau des méthodes numériques de simulation des mécanismes en présence de contact unilatéral, de frottement et d'impacts. Un bref état de l'art sur les formulations de la dynamique et les méthodes d'intégration en temps dans le cas standard sera tout d'abord présenté. On reviendra sur le choix des variables, la formulation des liaisons ainsi que sur les techniques d'intégration en temps des équations différentielles algébriques d'index 3 issues de la mécanique. Nous aborderons ensuite le problème plus difficile des contraintes unilatérales, du frottement de Coulomb et des impacts, où une bonne partie des techniques exposées dans l'état de l'art ne s'applique plus directement. Deux techniques majeures d'intégration en temps seront décrites : les méthodes à détection d'événements et les méthodes à capture d'événements. Nous verrons les avantages et les inconvénients de ces deux approches et nous donnerons quelques clés de sélection des techniques au regard du problème considéré. Enfin, les méthodes de résolution du problème discret à chaque pas de temps qui relèvent des techniques d'optimisation numérique non régulière seront décrites ainsi que leur mise en œuvre dans la plate–forme Siconos.***

*Mots-clés* - ***Dynamique des systèmes multi–corps, contact, frottement de Coulomb, méthodes numériques d'intégration en temps***

## I. Formulation de la dynamique régulière des systèmes multi–corps avec liaisons parfaites

Nous donnons dans cette partie quelques indications sur la formulation des équations du mouvement, dans le cas particulier de la dynamique des systèmes multi–corps avec liaisons bilatérales parfaites.

### *A. Formulation générique des équations du mouvement*

En considérant que le système est représenté par un jeu de coordonnées $q(t) \in I\!R^{n_q}$ donnant de manière univoque sa configuration et par un vecteur $v(t) \in I\!R^{n_v}, n_v \leqslant n_q$ décrivant sa vitesse, une formulation générique des équations du mouvement peut être donnée par,

$$\begin{cases} \dot{q} = T(t,q)v, & \text{(1a)} \\ M(q)\dot{v} = F(t,q,v,u), & \text{(1b)} \\ \dot{u} = d(t,q,v,u), & \text{(1c)} \end{cases}$$

où $M \in I\!R^{n_v \times n_v}$ est une matrice symétrique et positive (semi-)définie qui représente l'inertie, $F \in I\!R^{n_v}$ est le vecteur des efforts appliqués au système et des effets gyroscopiques. Le vecteur $u \in I\!R^{n_u}$ peut être considéré comme un vecteur de commandes donné par une dynamique (1c). Enfin l'opérateur $T \in I\!R^{n_q \times n_v}$

relie grâce à (1a) les dérivées en temps des coordonnées aux vitesses. Il convient d'ajouter à ce système d'Équations Différentielles Ordinaires (EDO) les conditions de Cauchy $q(t_0) = q_0$, $v(t_0) = v_0$ et $u(t_0) = u_0$ pour former un problème à valeur initiale complet (problème de Cauchy).

Le terme générique est associé à la formulation (1) car nous verrons dans la suite qu'il peut contenir les formalismes de Lagrange et de Newton–Euler ainsi que des formalismes mixtes.

Usuellement, pour un système multi–corps, des liaisons holonomes sont prises en compte sous la forme

$$g(t, q) = 0, \tag{2}$$

où $g \in I\!R^{n_g}$ est supposé suffisamment régulière et dont la matrice Jacobienne,

$$G(t, q) = J_g(t, q) = \nabla_q^\top g(t, q) \in I\!R^{n_g \times n_q}, \tag{3}$$

est supposée de rang plein (on a au moins $n_g \leqslant n_q$). Si la liaison est considérée comme parfaite (pas de travail dans la liaison), on peut alors augmenter le système (1) grâce aux multiplicateurs de Lagrange $\lambda \in I\!R^{n_g}$,

$$\begin{cases} \dot{q} = T(t, q)v, & \text{(4a)} \\ M(q)\dot{v} = F(t, q, v, u) - T^\top(t, q)G^\top(t, q)\lambda, & \text{(4b)} \\ \dot{u} = d(t, q, v, u, \lambda), & \text{(4c)} \\ g(t, q) = 0. & \text{(4d)} \end{cases}$$

Le système obtenu est une Équation Différentielle Algébrique (EDA). La contrainte (2) peut être reformulée de manière équivalente au niveau des vitesses,

$$\dot{g}(t, q) = G(t, q)\dot{q} + g_t(t, q) = G(t, q)T(t, q)v + g_t(t, q) = 0, \tag{5}$$

et au niveau des accélérations,

$$\begin{aligned} \ddot{g}(t, q) &= G(t, q)\ddot{q} + \left[\nabla_q^T(G(t, q)\dot{q}) + 2\frac{\partial}{\partial t}(G(t, q))\right]\dot{q} + g_{tt}(t, q) \\ &= G(t, q)T(t, q)\dot{v} + \left[\frac{d}{dt}(G(t, q)T(t, q)) + \frac{\partial}{\partial t}(G(t, q))T(t, q)\right]v + g_{tt}(t, q) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

*Remarque 1:* L'introduction des liaisons parfaites par la simple donnée de l'équation (2) est une méthode directement issue de la Mécanique Analytique de Lagrange et du principe de Hamilton. Cette méthode postule l'existence de multiplicateurs pour laisser invariant la contrainte parfaite. Cette méthode élégante est toutefois peu mécanique. En particulier, les dimensions physiques des multiplicateurs ne sont pas précisées. Pour une écriture plus générale et plus mécanique des "lois de forces" dans les liaisons, il convient d'introduire une loi de comportement qui précisent quelle est la nature de ces forces. □

Le choix des paramètres, l'écriture mécanique des liaisons ainsi que la génération des équations restent des problèmes entiers lorsque l'on s'attaque à des problèmes concrets. En postulant le Principe Fondamental de la dynamique d'une particule matérielle, il reste une très grande variété de méthodes possibles pour former le système (4). En faire un panorama complet est hors de portée de cet article. Des ouvrages et des articles de synthèses sur ce sujet peuvent tout de même être cités [63], [82], [140], [145], [147], [162], [166]. Nous essaierons dans la suite de donner les principales approches utilisées classiquement.

*B. Le formalisme de Lagrange et les coordonnées minimales*

Le formalisme de Lagrange s'appuie sur le choix d'un jeu de coordonnées indépendantes, dites *coordonnées généralisées*. Les vitesses, dites elles aussi *vitesses généralisées*, sont directement les dérivées des coordonnées,

$$v(t) = \dot{q}(t), n_v = n_q. \tag{7}$$

On postule alors l'existence de l'énergie cinétique, le plus souvent comme une fonction quadratique des vitesses

$$E(t, q, v) = \frac{1}{2} v^\top(t) M(q) v(t), \tag{8}$$

et d'une énergie potentielle $V(q)$. On forme le Lagrangien $L(t, q, v) = E(t, q, v) - V(q)$ et le principe de Hamilton postule que l'évolution du système, c'est à dire, $q(t), v(t)$ est un extremum de l'intégrale du Lagrangien, appelée action. Cela conduit aux équations de Euler-Lagrange qui sont les conditions nécessaires à cet extremum,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E(t, q, v)}{\partial v}\right) - \frac{\partial E(t, q, v)}{\partial q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = Q(q, t). \tag{9}$$

Les forces non conservatives (ne dérivant pas d'un potentiel) peuvent être incluses en termes de forces généralisées $Q(q, t)$ qui sont souvent identifiées grâce au théorème des puissances virtuelles. L'écriture explicite des équations de Lagrange conduit à la forme suivante

$$\begin{cases} a) & \dot{q} = v, \\ b) & M(q)\dot{v} + N(q, v) = Q(t, q) - \dfrac{\partial V(q)}{\partial q}, \end{cases} \tag{10}$$

où $N(q, v)$ contient les forces gyroscopiques

$$N_{gyr}(q, v) = \left[ -\sum_{r,s} \left( \frac{\partial M_{kr}(q)}{\partial q_s} - \frac{\partial M_{rs}(q)}{\partial q_k} \right) v_s v_r, \quad k \in 1 \ldots n_v \right]^T, \tag{11}$$

et le gradient de l'énergie cinétique par rapport aux coordonnées $\dfrac{\partial E(t, q, v)}{\partial q}$. En simplifiant, on obtient

$$N(q, v) = \frac{1}{2} \left[ -\sum_{r,s} \left( \frac{\partial M_{kr}(q)}{\partial q_s} - \frac{\partial M_{rs}(q)}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ks}(q)}{\partial q_r} \right) v_s v_r, \quad k \in 1 \ldots n_v \right]^T. \tag{12}$$

La méthode lagrangienne fournit un moyen simple de décrire un système multi–corps par un jeu de coordonnées minimales. Une grande partie de la difficulté réside dans le choix de coordonnées minimales pour des systèmes élaborés. Par contre, elle conduit à des opérateurs d'inertie non linéaires et denses, qui induisent un coût de calcul élevé pour l'évaluation des Jacobiens et leurs inversions (opérations d'algèbres linéaires) dans le cas de stratégies implicites d'intégration en temps. De plus, elle ne donne pas directement d'informations sur les efforts dans les liaisons. En particulier, la mise en œuvre de la "loi de forces" pour les liaisons plus complexes (frottement, adhésion, lubrification, ...) devient pratiquement impossible dans un contexte purement lagrangien. Parmi les choix de coordonnées Lagrangiennes possibles, la méthode de Hartenberg–Denavit [79] est l'une des plus utilisées pour les chaînes cinématiques ouvertes comme en Robotique [16], [55], [132].

*Remarque 2:* Dans un formalisme purement lagrangien, les coordonnées sont indépendantes ainsi les liaisons et les multiplicateurs associés n'ont pas lieu d'apparaître. Cependant, dans la pratique, il est parfois difficile de trouver un jeu simple de paramètres indépendants. Pensons par exemple à une chaîne

cinématique bouclée. Dans ce cas, il convient de rajouter les contraintes sur les coordonnées de la manière suivante

$$\left\{\begin{array}{lrcl} a) & \dot{q} & = & v, \\ b) & M(q)\dot{v} + N(q,v) & = & Q(t,q) - \dfrac{\partial V(q)}{\partial q} + F_u(t,u) - G^\top(t,q)\lambda, \\ c) & \dot{u} & = & d(t,q,v,u,\lambda), \\ d) & g(t,q) & = & 0. \end{array}\right. \tag{13}$$

Dans [99] et les références dans cet article, on trouvera des méthodes d'élimination des contraintes pour retrouver des coordonnées minimales. On peut citer les méthodes algébriques d'élimination comme la formulation de Maggi/Kane [34], [98], [128] basée sur la formulation de contraintes en vitesses (5), les formulations basées sur le noyau de la Jacobienne des contraintes [83], ou encore les formulations de Udwadia and Kalaba [161] basées sur l'écriture des contraintes en accélération (6). Nous reviendrons sur ce point dans la partie I-E lorsqu'il sera question de réduction d'index. □

*C. Le formalisme de Newton et Euler et les coordonnées absolues*

Dans le formalisme (classique) de Newton et Euler, les vitesses d'un solide rigide sont choisies comme la vitesse d'un point du solide, le plus souvent le centre de gravité notée $v_G = \dot{x}_G$, exprimée dans un référentiel galiléen et un vecteur de vitesse angulaire noté $\Omega$ exprimé dans un repère attaché au solide. En notant la matrice de rotation[1] $R$ du référentiel galiléen vers le référentiel attaché au solide, on peut au moins écrire une relation de la forme[2]

$$\tilde{\Omega} = R^T\dot{R} \text{ ou de manière équivalente } \dot{R} = R\tilde{\Omega}. \tag{14}$$

Sans entrer dans les détails de l'obtention des équations de Newton–Euler à partir du Principe Fondamental de la Dynamique d'un point matériel [114], elles peuvent être exprimées comme

$$\left\{\begin{array}{rcl} M\dot{v}_G & = & F_{ext}(x_G, v_G, \Omega, R), \\ I\dot{\Omega} + \Omega \times I\Omega & = & M_{ext}(x_G, v_G, \Omega, R), \\ \dot{x}_G & = & v_G, \\ \dot{R} & = & R\tilde{\Omega}, \quad R^{-1} = R^T, \quad \det(R) = 1. \end{array}\right. \tag{15}$$

où $M = m\, I_{3\times 3}$ est la matrice de masse diagonale constante, $m \in I\!R$ est la masse et $I$ est la matrice constante des moments d'inertie. Ces équations peuvent aussi être exprimées en fonction de la vitesse angulaire $\omega = R\Omega$ dans le même repère galiléen que $v_G$. Dans ce cas, la matrice des moments d'inertie n'est plus constante dans le temps. En choisissant comme paramètre $q = [x_G, R]^T$ et comme vitesse $v = [v_g, \omega]$ et en incluant des liaisons parfaites entre les corps, on voit aisément qu'il est possible d'écrire les équations (15) dans le formalisme général (1) (voir [166] ou [82] par exemple pour plus détails ).

Le choix de la matrice de rotation comme paramètres de configuration des objets est souvent maladroit en termes de taille et de manipulation. En pratique, la matrice de rotation est elle-même paramétrée par un jeu de paramètres $\Theta$ de sorte que $R = R(\Theta)$ et les dérivées en temps peuvent s'exprimer formellement par

$$\omega = P(\Theta)\dot{\Theta} \quad \text{ou} \quad \Omega = Q(\Theta)\dot{\Theta}. \tag{16}$$

Si les paramètres sont indépendants, la relation $\omega = R\Omega$ implique $R = PQ^{-1}$. La littérature sur le paramétrage des rotations est vaste (voir [10], [73], [88], [96], [148]). Citons simplement les paramétrages les plus usuels : description géométrique des rotations (Angles d'Euler, de Bryant/Cardan), paramètres de Rodrigues $b \in I\!R^3$ provenant de la forme de Cayley de la matrice de rotation, $9$ cosinus directeurs

[1] $R^{-1} = R^T, \det(R) = 1$, *i.e* $R \in SO^+(3)$

[2] pour un vecteur $x \in I\!R^3$, on note la matrice $\tilde{\Omega}$ la matrice définie par $\tilde{\Omega}x = \Omega \times x$

(éléments de la matrice de rotation ), quaternions unitaires $(q_0, q), q_0 \in I\!R, q \in I\!R^3$ ou paramètres d'Euler $p = (e_0 e)^T, e_0 \in I\!R, e \in I\!R^3$, vecteur de rotation cartésien $\Phi \in I\!R^3$ exprimé en termes des invariants linéaires $\Phi = \phi, n, \phi \in I\!R, n \in I\!R^3$, vecteur de rotation conforme, les paramètres linéaires, *etc*.

Le formalisme de Newton–Euler génère usuellement un plus grand nombre de paramètres pour un système multi–corps donné. Par contre, les opérateurs d'inertie sont simples et directement inversibles. Une partie des non–linéarités du système est concentrée dans l'opération de rotation. De plus, les opérateurs conservent la structure de graphe inhérentes au système et permet donc de manipuler des matrices creuses. Un autre avantage de ce formalisme est qu'il permet d'introduire une grande variété de lois de forces dans le cas de liaisons non parfaites.

### *D. Les formulations mixtes et spécifiques*

A partir des deux formalismes présentés dans les parties précédentes, de nombreuses stratégies peuvent être développées mixant les avantages et les inconvénients des méthodes précédentes.

On peut en effet tenter à partir des équations de Newton–Euler de réduire le nombre de paramètres en utilisant la structure de graphe du système multi–corps (voir [108], [109], [151], [166]) et en écrivant les équations de Newton–Euler non plus au centre de gravité mais à un point de liaison. On perd alors une partie de l'intérêt du formalisme mais on réduit le nombre d'inconnues. Pour réduire le coût d'inversion des opérateurs d'inertie dans les formulations de Lagrange et Newton–Euler "réduites", de nombreux algorithmes ont été mis au point pour utiliser au maximum la structure d'arbre des système multi–corps. On peut citer [11], [105], [123], [157], [163] pour l'approche récursive dans le formalisme Newton–Euler et [85], [152] dans le formalisme de Lagrange (voir aussi [65] pour une rapide revue de ces travaux). On trouvera dans [60] une revue des méthodes dites semi–récursives mêlant Newton–Euler et Lagrange et dans [156] une comparaison des méthodes classiques.

On peut aussi tenter de substituer les équations de paramètrisations des vitesses angulaires (16) dans les équations du mouvement (15) afin d'obtenir un jeu de paramètres non nécessairement indépendants mais dont la vitesse s'exprime directement en fonction des paramètres comme dans (7). Dès lors, on peut tenter d'exprimer le lagrangien et de déduire les équations de Lagrange. Cette approche permet de se remettre dans le cadre confortable de Lagrange pour écrire les équations d'un grand système dynamique. Naturellement, les paramètres de rotation $\Theta$ n'étant pas usuellement indépendants (sauf pour les descriptions géométriques en dehors des singularités) des contraintes bilatérales artificielles apparaissent dans le jeu d'équations.

Nous avons déjà rappelé les principaux inconvénients du jeu minimal de coordonnées (opérateurs denses et non-linéaires, accès aux multiplicateurs). Cette formulation bénéficie pourtant de nombreux avantages en termes de complexité de calculs grâce aux méthodes récursives. Une approche due à [103] et à [164] permet de s'affranchir des précédents inconvénients en conservant les méthodes récursives qui peuvent être implémentée directement dans un code de calcul d'algèbre linéaire adapté (projection récursive). On pourra aussi consulter [165].

Pour finir ce rapide et partiel survol des méthodes de formulations de la dynamique, il convient de souligner que les méthodes que nous avons évoquées jusqu'ici sont mal adaptées aux cas de systèmes multi–corps flexibles. La mise en œuvre du comportement flexible peut être réalisée par des méthodes directes basées principalement sur les éléments finis. Dans ce cas, seules les formulations des systèmes à coordonnées maximales tirent leur épingle du jeu. Pour ces problèmes qui sont depuis plus d'une décennie un des principaux challenges de la communauté des systèmes multi–corps, plusieurs approches ont été proposées qui peuvent être classées en suivant le travail de [47] :

– *L'approche du référentiel galiléen ("inertial frame").* Dans cette approche intimement liée à la Mécanique des solides déformables et des structures ainsi qu'aux éléments finis non-linéaires, toutes les variables (translations et rotations) aux noeuds du maillage ainsi que les variables décrivant les solides rigides sont exprimées dans un unique référentiel galiléen. De ce point de vue, on retrouve

une caractéristique de la méthode de Lagrange mêlant indifféremment les corps rigides et les corps déformables. Cette approche très générale peut prendre en compte des phénomènes non-linéaires usuels en Mécanique des Milieux Continus comme les grandes déformations, les non–linéarités géométriques et les comportements des matériaux non linéaires (plasticité, endommagement, rupture, fatigue, ...). Le fait que les non–linéarités géométriques soient prises en compte au même titre que les grandes déformations en Mécanique non linéaire des matériaux induit un coût de mise en œuvre très important et souvent prohibitif pour une prise en compte simple de l'élasticité dans une système multi–corps. L'approche est cependant très générique et peu d'hypothèses sont faites sur le comportement mécanique du système. Citons pour cette approche les grands classiques sur les éléments finis [19], [32], [58], [86], [170].

– *L'approche du repère co–rotationnel ("co-rotational frame")* Cette approche a été proposée pour simplifier les calculs des forces élastiques dans les modèles éléments finis en grandes rotations (voir [31], [51], [56], [57]). Les variables des maillages éléments finis sont toujours les translations et rotations aux noeuds mais exprimées dans un repère dit co–rotationnel qui suit le mouvement global de l'élément. Cette approche est basée sur l'hypothèse que la déformation de l'élément reste faible par rapport à un repère "attaché" à l'élément. Le mouvement global est donc décomposé comme un mouvement de rigide du repère co–rotationnel et un mouvement en petites perturbations dans ce dernier. Le gain en termes de calcul est clair. Les calculs dans ce repère co–rotationnel reviennent à la théorie de l'élasticité linéaire, ou éventuellement, de la Mécanique non linéaire en petites perturbations.
– *L'approche du repère flottant ("floating frame of reference")* L'approche du repère flottant que l'on peut attribuer à [66] repose sur la définition d'un repère flottant intermédiaire au niveau d'un corps qui serait le repère attaché au solide si celui était rigide. Le mouvement de ce repère est décrit par la méthode d'Euler comme pour un solide rigide. Dans ce repère flottant, des variables sont ajoutées pour tenir compte de l'élasticité du corps. Comme pour l'approche co–rotationnelle, le coût de calcul de l'élasticité reste faible par contre le calcul des termes d'inertie est assez compliqué. On trouvera [72], [149], [150] dans les détails nécessaires à la mise en œuvre de la méthode.

### *E. Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index*

Dans cette partie, nous revenons maintenant sur la formulation définie en (4) en omettant pour simplifier la commande

$$\left\{\begin{array}{lrcl} a) & \dot{q} & = & T(t,q)v, \\ b) & M(q)\dot{v} & = & F(t,q,v) - T^{\top}(t,q)G^{\top}(t,q)\lambda, \\ d) & g(t,q) & = & 0. \end{array}\right. \tag{17}$$

Son analyse mathématique en vue de son intégration numérique en temps relève de la théorie des EDA. Pour une présentation générale des EDA, de leurs propriétés et de leur intégration numérique, nous renvoyons aux ouvrages classiques suivants [18], [42], [71], [78]. Une notion fondamentale en EDA est la notion d'index dont on peut trouver de nombreuses définitions équivalentes sur des cas simples et non pathologiques. La définition différentielle de l'index peut être donnée de manière grossière comme le nombre de fois ou l'on doit dériver la contrainte pour obtenir une système d'EDO pour les variables $q, v$ et le multiplicateur $\lambda$. Dans le système (17), il convient de dériver trois fois la contrainte si la matrice

$$\left[\begin{array}{cc} M(q) & T^{\top}(t,q)G^{\top}(t,q) \\ G(t,q)T(t,q) & 0 \end{array}\right], \tag{18}$$

est inversible pour presque tout $t$ et $q$ au voisinage de la solution. Plus l'index d'une EDA est élevé, plus son analyse et sa résolution numérique est difficile. De manière courante, on emploie une réduction d'index afin de contourner ses difficultés. On considère pour cela les dérivés des contraintes données par

(5) et par (6) pour obtenir une EDA d'index 2 et 1 respectivement. Il faut cependant noter que si les EDA d'index réduit sont équivalentes en termes de solutions pour des conditions initiales consistantes, elles ne le sont pas nécessairement en temps discret lorsque l'on pratique une intégration numérique. D'un point de vue théorique, elles sont aussi différentes car elles ne requièrent pas les mêmes conditions initiales et différent sur les résultats d'existence et d'unicité [42], [76], [78].

*Remarque 3:* D'une manière générale, la réduction d'index ne résout pas tous les problèmes. En effet, l'opération de différentiation des contraintes est en général une opération instable d'une point de vue numérique et conduit à des systèmes moins bien conditionnés [50]. Nous donnerons dans la suite des références sur les méthodes et les formulations d'index réduits dans la partie II. □

## II. Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

Dans cette partie, nous passons en revue rapidement les principales méthodes d'intégration numérique du système (17) et ses reformulations d'index réduits. Ces formulations peuvent être vues comme des extensions non triviales des méthodes standards d'intégration des équations différentielles ordinaires raides [42], [76], [78]. Pour un exposé de synthèse, nous renvoyons à [13].

### *A. Méthodes à un pas. Méthodes implicites de Runge–Kutta (IRK) et méthodes d'extrapolation*

Considérons tout d'abord les méthodes à un pas et principalement les méthodes IRK pour les systèmes raides [76], [78]. Comme pour les autres méthodes, l'efficacité et l'ordre de convergence de ces méthodes varient fortement avec l'index :

- Pour le problème d'index 1 (contraintes en accélération), la convergence et l'ordre de consistance sont étudiés dans [76]. L'ordre de la méthode de Runge–Kutta est conservé pour les variables différentielles mais on observe une chute de l'ordre pour les multiplicateurs.
- Pour le problème d'index 2 (contraintes en vitesse), la convergence est démontrée dans [44], [75], [76], [78], [89] pour certaines classes de méthodes IRK. On observe une réduction de l'ordre pour les variables différentielles et les multiplicateurs pour les méthodes génériques. Seules les méthodes dites "stiffly accurate" conservent leurs ordres pour les variables différentielles. Pour les méthodes génériques, les méthodes de RK projetées [17] et partitionnées [120] ont été introduites ainsi que des modifications sur la manière d'imposer les contraintes dans [90].
- Pour le problème d'index 3 (contraintes en position), des résultats similaires peuvent être trouvés dans [76] mais les difficultés numériques sont encore moins maîtrisées et conduisent à des réductions d'ordre. Ceci étant principalement dû à la propagation des erreurs sur les multiplicateurs.

Ces méthodes sont implantées dans le célèbre code RADAU5 [78] et le code HEM5 [40] pour une version adaptée aux systèmes mécaniques. Pour terminer sur les méthodes à un pas, il convient de citer les extensions des méthodes d'extrapolation dans le contexte de EDA. En particulier les travaux de Lubich [103] et le code MEXX [104] peuvent être mentionnés. On trouvera dans [74] de nombreux codes de calculs basés sur les méthodes à un pas.

### *B. Méthodes multi–pas et BDF*

Les méthodes BDF (Backward differentiation formulas) introduites par Gear [68] ont été étendues aux EDA d'index 2 et 3 dans [71], [102] et [134]. Pour les problèmes d'index 1, ces méthodes sont particulièrement efficaces et sont capables d'atteindre des ordres élevés. Pour les problèmes d'index 2, les méthodes BDF jusqu'à l'ordre 6 convergent pour des pas de temps variables. Pour les problèmes d'index 3, la convergence est aussi démontrée jusqu'à l'ordre 6 pour un pas de temps fixe [43], [102]. Ces méthodes sont implantées dans la famille de code DASSL et leurs améliorations DASRT, DASPK, DASOPT [133]. Les autres travaux standards sur les méthodes et les formulations d'index réduits dans le cadre des BDF sont les méthodes " stabilized index-2 or GGL method" [70] et des méthodes équivalentes d'index 1 [69].

*Remarque 4:* Il convient tout de même d'apporter quelques éclaircissements à ces résultats de convergence. Ces résultats portent généralement sur les variables différentielles du système et non sur les multiplicateurs. Comme nous l'avons déjà noté dans la remarque 3, la réduction d'index conduit à des systèmes moins bien conditionnés. D'autre part, le traitement direct des systèmes d'index $3$ conduit à un conditionnement de la matrice des itérations en $\mathcal{O}(h^{-3})$. Une analyse de sensibilité menée par [12] montre que les erreurs dans les multiplicateurs en position, en vitesse et en accélération se propagent respectivement à l'ordre $\mathcal{O}(h^{-1}), \mathcal{O}(h^{-2})$ et $\mathcal{O}(h^{-3})$. Si la résolution de ces contraintes à chaque pas de temps n'est pas faite avec une extrême précision, limitée naturellement par la précision machine, les erreurs se propagent rapidement et font chuter l'ordre apparent de la méthode. Pour tenter de contourner ce problème, une méthode de changement d'échelle ("rescaling") a été proposée dans [134] qui est reprise et étendue dans [37]. □

### *C. Stabilisation et élimination de la violation des contraintes*

Pour les méthodes basées sur une formulation d'index réduit, les contraintes en position et voire en vitesses ne sont pas vérifiées en temps discret par la méthode numérique. L'emploi de formulation d'index réduit conduit donc à une dérive des contraintes en position et des vitesses pour les formulations d'index $1$ et seulement des vitesses pour les formulations d'index $2$. Plusieurs techniques peuvent être employées pour contrôler cette dérive. En voici une liste non exhaustive des méthodes utilisées en pratique (voir [24] pour une synthèse) :

- *Les méthodes de stabilisation* issues de la technique originale de Baumgarte [27] sont largement utilisées en pratique et reviennent à remplacer la contrainte originale en accélération $\ddot{g}(t,q) = 0$ par

$$\ddot{g}(t,q) + 2\alpha\dot{g}(t,q) + \beta^2 g(t,q) = 0. \tag{19}$$

  où $\alpha = \beta \in I\!R$ est souvent choisi pour atteindre l'amortissement critique. Cette stabilisation peut naturellement être analysée dans le contexte de la théorie de la commande [124]. Bien que le choix des paramètres $\alpha$ et $\beta$ dépendent de l'application et peut conduire à augmenter la raideur du problème et donc le coût de calcul, ces méthodes restent efficaces sur certaines applications. Par contre, il faut noter qu'aucune des contraintes n'est exactement satisfaite. On trouvera dans [52], [101], [131] des améliorations de la formulation de Baumgarte concernant le choix des paramètres pour la plupart basées sur la théorie de la commande.
- *Les méthodes de pénalisation* sont basées sur la régularisation de la contrainte $g(t,q)$ en ajoutant dans le lagrangien un terme de la forme $1/2p^2 g^\top(t,q)g(t,q)$. Il convient de noter que l'on retrouve par cette technique un système d'EDO mais dans lequel les contraintes ne sont pas exactement satisfaites. Dans ce cas, la quantité $\bar{\lambda} = p^2 g(t,q)$ approche le multiplicateur de Lagrange. L'idée de la stabilisation de la contrainte vient alors naturellement en écrivant [129], [130]

$$\dot{\lambda} = p^2(\dot{g}(t,q)). \tag{20}$$

  Une amélioration substantielle de cette technique est proposée dans [28], [29] et revient à une technique de pénalisation exacte dite de Lagrangien augmenté.
- *Les méthodes d'élimination par projections* sont basées sur une projection à chaque pas de temps du résultat de l'intégration numérique sur la variété invariante définie par les contraintes en position et en vitesse. De nombreuses méthodes peuvent être trouvées dans la littérature sur l'application de cette idée aux systèmes mécaniques, soit par projection géométrique [33], [160], [168] ou par projection dans la métrique cinétique [30].

On trouvera dans [59], [146] et [67] des comparaisons numériques de ces différentes approches.

### D. Les améliorations pour la mécanique des systèmes multi–corps flexibles

Dans le cas des systèmes multi–corps flexibles, de nouvelles difficultés apparaissent qui sont inhérentes à la technique de discrétisation en espace, comme par exemple les éléments finis. La discrétisation en espace augmente substantiellement la taille des problèmes et injecte dans la dynamique des modes parasites à haute fréquence. Pour le problème de la taille des calculs, les formulations et les méthodes numériques d'intégration qui nécessitent de nombreuses variables intermédiaires et qui ne préservent pas la structure creuse ou bande des matrices du problème discret en espace sont à proscrire. Les formulations de type Maggi/Kane qui s'appuient sur le calcul du noyau de la matrice jacobienne des contraintes sont difficilement utilisables. De même, les formulations de Lagrange en coordonnées minimales éliminant les contraintes explicitement conduisent à des systèmes pleins qui sont très lourds à traiter numériquement. Enfin les méthodes à un pas d'ordre élevé qui ont besoin de nombreuses évaluations de la dynamique au sein même d'un pas de temps ainsi que de l'emploi de nombreuses variables intermédiaires ne sont plus viables.

En dynamique des structures flexibles, la méthode de Newmark [122] et surtout ses généralisations comme la méthode HHT [84], [87] et les $\alpha-$schémas généralisés [54] sont les outils de base pour la simulation de la dynamique. Leurs propriétés en termes d'amortissement numérique paramétrable des hautes fréquences, de conservation du caractère creux des opérateurs et leur parcimonie en variables intermédiaires en font des outils incontournables bien que leur ordre reste faible ($\leqslant 2$). Une autre classe de schémas d'intégration des structures flexibles est composée des schémas à conservation d'énergie ou à déclin d'énergie dus aux travaux précurseurs de Simo *et. al.* [153], [154] pour l'élasto–dynamique et pour les systèmes rigides [100], [155]. Ces schémas font partie de la grande famille des schémas symplectiques ou intégrateurs variationnels qui assurent la conservation d'une grandeur en temps discret (voir pour plus de détails [77], [107] ). Une comparaison et une revue de ces schémas dans le contexte de la dynamique des structures est disponible dans [97].

Récemment, de nombreux travaux ont porté leur intérêt sur ces schémas pour les systèmes multi–corps flexibles. Pour les schémas à conservation d'énergie et à déclin d'énergie, on peut citer les travaux de Bauchau *et. al.* [20]–[23], [25], [26] dans lesquels les méthodes d'intégration en temps sont construites pour annuler le travail effectué dans les liaisons parfaites en temps discret. Dans le même esprit, on pourra consulter [35], [36], [38]. Les schémas de la famille de Newmark ont eux aussi été étudiés et appliqués aux systèmes multi–corps flexibles dans [47], [72] et les démonstrations de convergence peuvent être trouvées dans [91], [106] pour les formulations d'index $2$ et [14], [46], [48] pour les formulations d'index $3$. On trouvera dans [121] une comparaison entre les méthodes BDF d'ordre faible et les méthodes de Newmark et HHT.

## III. La dynamique non–régulière du contact frottant avec impacts

Dans cette partie, un bref survol de la formulation des systèmes mécaniques avec contact frottant et impacts est réalisé. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur sur les ouvrages [2], [45], [135], [158].

### A. Formulation lagrangienne régulière des contraintes unilatérales

Les contraintes unilatérales entre les corps peuvent être considérées dans une formulation lagrangienne sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{q} = v, & \text{(21a)} \\ M(q)\dot{v} + F(t,q,v,u) = G^{\top}(t,q)\lambda, & \text{(21b)} \\ \dot{u} = d(t,q,v,u,\lambda), & \text{(21c)} \\ g_k(t,q) = 0, \quad k \in \mathcal{E} & \text{(21d)} \\ g_k(t,q) \geqslant 0, \quad \lambda_k \geqslant 0, \quad \lambda_k g_k(t,q) = 0 \quad k \in \mathcal{I}. & \text{(21e)} \end{cases}$$

où $\mathcal{E} \subset I\!N$ et $\mathcal{I} \subset I\!N$ représentent respectivement les ensembles d'indices des contraintes bilatérales et unilatérales. La condition (21e) est appelée la *condition de complémentarité*, ou *condition de Signorini* qui être écrite de manière équivalente

$$0 \leqslant g_k(t,q) \perp \lambda_k \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\lambda_k \in N_{I\!R^+}(g_k(t,q)), \quad \text{pour tout } k \in \mathcal{I}. \tag{22}$$

Le symbole $N_K$ représente le cône normal à un ensemble $K$ (pour le cas convexe voir [113], [141]). En construisant l'ensemble $\Phi(t)$ admissible pour toutes les coordonnées généralisées comme

$$\Phi(t) = \{q \mid g_k(t,q) = 0, k \in \mathcal{E}, \quad g_k(t,q) \geqslant 0, k \in \mathcal{I}\}, \tag{23}$$

l'ensemble des contraintes peut être mise sous la forme

$$-G^\top(t,q)\lambda \in N_{\Phi(t)}(q) \tag{24}$$

La dynamique (21b-d-e) revient alors à une Inclusion Différentielle (ID)

$$-\left[M(q)\dot{v} + F(t,q,v,u)\right] \in N_{\Phi(t)}(q). \tag{25}$$

*B. Formulation lagrangienne non régulière des contraintes unilatérales*

Afin de simplifier la présentation, nous allons considérer uniquement des contraintes holonomes et nous omettrons la commande. La dynamique (25) n'est généralement pas régulière. Si les vitesses normales au contact $\dot{g}_k(q)$ sont positives avant une prise de contact, un impact, c'est à dire un saut dans les vitesses, doit se produire pour respecter les contraintes en position. Mathématiquement, les vitesses sont considérées comme des fonctions à variations bornées en temps et l'accélération devient une mesure différentielle, notée $dv$ associée à la vitesse $v$ [116]. Les multiplicateurs sont eux aussi des mesures comportant un atome (mesure de Dirac) lors des sauts ; on considère alors la mesure impulsion $di$. La dynamique s'écrit alors comme une Inclusion Différentielle à Mesures (IDM) [115], [143], [144]

$$-\left[M(q)dv + F(t,q,v^+)dt\right] = -G^\top(q)\, di. \tag{26}$$

où $v^+$ (respectivement $v^-$) est la fonction définie comme la limite à droite (à gauche) de la fonction à variations bornées $v$ et $dt$ la mesure de Lebesgue. L'écriture de la contrainte unilatérale sous forme d'inclusion conduit à

$$-G^\top(q)\, di \in N_\Phi(q). \tag{27}$$

Lors des sauts de vitesses, une loi d'impact doit être ajoutée afin de définir la vitesse après impact. Par simplicité, choisissons la loi d'impact de Newton

$$v^+(t) = -ev^-(t), \text{ pour tout } t \text{ tel que } g(q) = 0. \tag{28}$$

où $e$ est le coefficient de restitution. Une écriture compacte de l'inclusion (27) contenant la loi d'impact a été donnée par Moreau [117] comme

$$-G^\top(q)\, di \in N_{T_\Phi(q)}(v^+ + ev^-), \tag{29}$$

où $T_K$ définit le cône tangent à un ensemble $K$. Cela conduit à processus de rafle de second ordre de Moreau

$$-\left[M(q)dv + F(t,q,v^+)dt\right] \in N_{T_\Phi(q)}(v^+ + ev^-). \tag{30}$$

Cette IDM peut se mettre sous une forme utilisant la complémentarité plutôt que les inclusions dans les cônes

$$\begin{cases} -\left[M(q)dv + F(t,q,v^+)dt\right] = -G^\top(q)\, di, & \text{(31a)} \\ U = G(q)v, & \text{(31b)} \\ \text{si } g(q) \leqslant 0, \text{ alors } 0 \leqslant U^+ + eU^- \perp di \geqslant 0. & \text{(31c)} \end{cases}$$

*Remarque 5:* La contrainte de positivité sur la mesure $di$ dans (31c) peut être interprétée grossièrement de la manière suivante. Considérons que la mesure de décompose sous la forme $di = \lambda(t)dt + p\delta$, où $\lambda$ est le multiplicateur standard supposé être une fonction régulière du temps et $p$ l'amplitude associé à la mesure de Dirac. L'inégalité $di \geqslant 0$ revient à imposer $\lambda(t) \geqslant 0$ presque partout et $p \geqslant 0$ à l'instant du saut. □

*Remarque 6:* L'écriture de l'inclusion (29) peut être interprétée comme une écriture des contraintes unilatérales au niveau des vitesses. Elle apparaît dès lors similaire à un processus de réduction d'index comme on l'a vu pour les EDA dans la partie I-E. □

### *C. Décomposition en temps de la dynamique non régulière*

En négligeant les mesures singulières, la mesure différentielle $dv$ et la mesure d'impulsion $di$ peuvent se décomposer sous la forme suivante

$$\begin{aligned} dv &= \gamma dt + (v^+ - v^-)d\nu, \\ dr &= \lambda dt + pd\nu, \end{aligned} \tag{32}$$

où $\gamma$ est l'accélération standard donnée par $\ddot{q}$ presque partout et $d\nu = \sum_i \delta_{t_i}$ est une somme de mesures de Dirac supportées aux instants $t_i$. On écrira dans la suite $pd\nu = \sum_i p_i \delta_{t_i}$. En injectant la décomposition (32) dans la dynamique (31), on obtient

– *les équations d'impact* aux instants $t_i$,

$$\begin{cases} M(q(t_i))(v^+(t_i) - v^-(t_i)) = G^\top(q(t_i))p_i, \\ U^+(t_i) = G(q(t_i))v^+(t_i), \quad U^-(t_i) = G(q(t_i))v^-(t_i), \\ 0 \leqslant U^+(t_i) + eU^-(t_i) \perp p_i \geqslant 0, \end{cases} \tag{33}$$

– et *les équations du mouvement régulier* entre les impacts pout $t \in ]t_i, t_{i+1}[$

$$\begin{cases} M(q)\gamma + F(t,q,v) = G^\top(q)\,\lambda, \\ U = G(q)v, \\ \text{si } g(q) \leqslant 0, \text{ alors } 0 \leqslant U \perp \lambda \geqslant 0. \end{cases} \tag{34}$$

### *D. Autres formalismes*

En prenant garde à l'écriture des contraintes sur des paramètres différents des coordonnées généralisées, le contact unilatéral peut être aussi inclus dans les autres formalismes d'équations du mouvement présentés dans la partie I. On trouvera dans [2] le cas du formalisme de Newton–Euler. De manière plus générale, la formulation (4) avec les contraintes unilatérales conduit à une ID régulière similaire (25)

$$\begin{cases} a) & \dot{q} = T(t,q)v, \\ b) & -[M(q)\dot{v} + F(t,q,v,u)] \in T^\top(t,q)N_{\Phi(t)}(q), \\ c) & \dot{u} = d(t,q,v,u,\lambda). \end{cases} \tag{35}$$

L'écriture du processus de rafle équivalent à (30) peut être étendue de la même manière.

### *E. Le frottement de Coulomb*

Comme nous l'avons déjà souligné, l'introduction de loi de forces plus élaborées que les simples contraintes parfaites est difficile dans le formalisme de Lagrange. Pour apporter un sens mécanique à la description de la liaison, on introduit généralement un repère local au point de contact $C$ noté $(C, n, t_1, t_2)$ et la notion de forces de liaisons dans ce repère $R$ qui se décompose dans le repère local comme $R = R_{\text{N}}n + R_{\text{T}}$ avec $R_{\text{T}} = R_{\text{T}_1}t_1 + R_{\text{T}_2}t_2$. De la même manière, la vitesse locale au contact se décompose

comme $U = U_{\text{N}} n + U_{\text{T}}$. Des relations cinématiques entre les variables locales au contact et les dérivées en temps de paramètres donnent

$$U = G(t,q)\dot{q} + j(t), \tag{36}$$

et de manière duale pour les contributions des efforts dans la dynamique

$$r = G^{\top}(t,q)R, \tag{37}$$

qui s'écrit alors

$$M(q)\dot{v} + F(t,q,v,u) = T^{\top}(t,q)r = T^{\top}(t,q)G^{\top}(t,q)R. \tag{38}$$

Le contact unilatéral peut alors être reformulé dans ces variables locales au contact comme

$$0 \leqslant g_{\text{N}} \stackrel{\Delta}{=} g(q) \perp R_{\text{N}} \geqslant 0, \tag{39}$$

et en vitesse/impulsion avec la loi d'impact de Newton comme

$$\text{si } g_{\text{N}} \leqslant 0 \text{ alors } 0 \leqslant U_{\text{N}}^{+} + eU_{\text{N}}^{-} \perp dI_{\text{N}} \geqslant 0, \tag{40}$$

où $dI_{\text{N}}$ est la mesure d'impulsion normale dans le repère local.

Le frottement de Coulomb peut quant à lui être exprimé comme :

$$\text{si } g_{\text{N}} \leqslant 0, \begin{cases} \text{Si } U_{\text{T}} = 0 \quad \text{alors } R \in \mathbf{C} \\ \text{Si } U_{\text{T}} \neq 0 \quad \text{alors } R \in \partial\mathbf{C} \text{ et il existe } a \geqslant 0 \text{ tel que } R_{\text{T}} = -aU_{\text{T}} \end{cases} \tag{41}$$

où $\mathbf{C}$ est le cône de frottement donné par $\mathbf{C} = \{R, | \, \|R_{\text{T}}\| \leqslant \mu R_{\text{N}}\}$ où $\mu$ est le coefficient de frottement. Le frottement peut lui aussi être formulé comme une inclusion dans un cône ou comme une condition de complémentarité sur un cône du second–ordre [2], [3], [49] en écrivant

$$-\hat{U} \stackrel{\Delta}{=} -\begin{bmatrix} U_{\text{N}} + \mu\|U_{\text{T}}\| \\ U_{\text{T}} \end{bmatrix} \in N_C(R) \Longleftrightarrow \mathbf{C}^{*} \ni \hat{U} \perp R \in \mathbf{C} \Longleftrightarrow -R \in N_{C^{*}}(\hat{U}) \tag{42}$$

où $\mathbf{C}^{*}$ est le cône dual de $\mathbf{C}$ [141].

La dynamique régulière s'écrit alors pour un contact

$$\begin{cases} M(q)\dot{v} + F(t,q,v) = T^{\top}(t,q)G^{\top}(t,q)R \\ U = G(t,q)T(t,q)v + j(t) \\ \text{Si } g(q) \leqslant 0 \text{ alors } -R \in N_{C^{*}}(\hat{U}) \text{ sinon } R = 0 \end{cases} \tag{43}$$

En suivant le travail effectué pour les contrainte unilatérales et en incluant la loi d'impact de Newton, l'inclusion différentielle à mesure peut s'écrire

$$\begin{cases} M(q)dv + F(t,q,v^{+})dt = T^{\top}(t,q)G^{\top}(t,q)dI \\ U^{+} = G(t,q)T(t,q)v^{+} + j(t), \quad U^{-} = G(t,q)T(t,q)v^{-} + j(t) \\ \text{Si } g(q) \leqslant 0 \text{ alors } -dI \in N_{C^{*}}(\hat{U}^{+} + eU_{\text{N}}^{-}n) \text{ sinon } dI = 0 \end{cases} \tag{44}$$

*Remarque 7:* On trouvera dans [2] une écriture plus générique pour de multiples points de contact ainsi qu'une discussion sur les modèles de frottement de la littérature en Mécanique et en Automatique. □

## IV. Intégration en temps spécifiques de la dynamique non–régulière

Dans cette partie, quelques éclairages sont donnés sur l'intégration en temps des systèmes mécaniques non réguliers. On commencera par introduire deux grandes familles d'intégrateurs dans la partie IV-A puis nous nous focaliserons dans la partie IV-A.2 sur les schémas à capture d'évènements. Là encore, nous renvoyons à [2] pour de plus amples détails.

### A. Deux grandes classes d'intégrateurs

Deux grandes classes d'intégrateurs en temps peuvent être utilisées pour résoudre les systèmes dynamiques non réguliers. Les schémas à détection d'évènements (event–driven schemes) et les schémas à capture d'évenements (time–stepping schemes). Les évènements sont les instants où l'évolution n'est pas régulière ; les instant d'impact, de passage de l'adhérence au glissement en sont les principaux exemples.

*1) Les schémas à détection d'évènements :* Ces schémas sont basés sur l'hypothèse que les évènements sont bien séparés dans le temps (au moins à la précision machine) et que l'on peut les détecter avec précision. Le principe d'intégration est alors simple. On intègre la dynamique régulière (34) avec l'un des intégrateurs présentés dans la partie II entre deux évènements et l'on résout les équations d'impact à l'instant de l'évènement. Les avantages, symbolisés par $\oplus$ et les inconvénients de ces méthodes symbolisés par $\ominus$ peuvent être résumés ainsi

- $\oplus$ Ordre de précision élevé sur les phases régulières
- $\ominus$ Pas de preuve de convergence
- $\ominus$ Extrême sensibilité aux seuils numériques de détection d'évènements et de statuts des contacts
- $\ominus$ Réduction d'index coûteuse et difficile en particulier pour le contact avec frottement 3D.
- $\ominus$ Problème aux accumulations d'événements en temps fini

Pour résumé, ces schémas sont performants pour des systèmes où le nombre d'évènements est faible et s'ils sont bien séparés. Bien que le principe soit simple, l'efficacité et la robustesse des codes sont très difficiles à assurer. On trouvera dans [1], [135] des exemples de mise en œuvre de ces méthodes pour le contact frottant 2D. Les détails généraux sur le développement de telles méthodes peuvent être trouvés dans [2, Chapitre 8].

*2) Schémas à capture d'événements :* Ces schémas sont eux basés sur une intégration directe de l'IDM (30) ou des formulations équivalentes. Le pas de temps n'est pas choisi en fonction des évènements mais en fonction de l'erreur locale commise comme dans les schémas classiques pour les systèmes réguliers. Les avantages et les inconvénients de ces méthodes peuvent être résumés ainsi

- $\oplus$ Preuve de convergence [110], [125]–[127].
- $\oplus$ Robustesse et stabilité sur des problèmes de grandes tailles
- $\oplus$ Intégration des problèmes avec accumulations d'événements en temps fini
- $\ominus$ Ordre de précision faible ($\leqslant 1$)

Ces schémas sont performants sur des systèmes où le nombre d'évènements est élevé. Bien que l'ordre soit faible, leur robustesse et leur stabilité permet d'envisager des applications complexes comme les matériaux granulaires, les chaînes cinématiques avec jeu dans les liaisons, *etc.*. Les deux principaux schémas de ce type sont dus à Moreau [117]–[119] avec ses extensions pour les corps flexibles [92] et à Paoli et Schatzman [126], [127].

### B. Le schéma à capture d'événements de Moreau

Afin de préciser les idées sur la mise en œuvre du schéma de Moreau [117], nous donnons ici sa formulation en temps discret pour du contact unilatéral en formulation lagrangienne. Considérons une discrétisation en temps $t_k \in [t_o, T], k \in \{1 \dots N\}$, le schéma peut s'écrire pour un pas de temps $h = t_{k+1} - t_k$ et un ensemble de points de contact $\mathcal{I} = \{1 \dots m\}$ comme

$$\begin{cases} M(q_{k+\theta})(v_{k+1} - v_k) - h\tilde{F}_{k+\theta} = G^\top(q_{k+\theta})P_{k+1}, & \text{(45a)} \\ q_{k+1} = q_k + hv_{k+\theta}, & \text{(45b)} \\ U_{k+1} = G(q_{k+\theta})\, v_{k+1} & \text{(45c)} \\ -P_{k+1} \in N_{T_{\mathbb{R}^m_+}(\tilde{g}_{\mathrm{N},k+\gamma})}(U_{k+1} + eU_k), & \text{(45d)} \\ \tilde{g}_{\mathrm{N},k+\gamma} = g(q_k) + h\gamma U_k, \quad \gamma \in [0,1]. & \text{(45e)} \end{cases}$$

avec $\theta \in [0,1], \gamma \geqslant 0$ et la convention $x_{k+\theta} = (1-\theta)x_{k+1} + \theta x_k$. La valeur $\tilde{g}_{\mathrm{N},k+\gamma}$ est une prédiction des contraintes actives. Le terme $\tilde{F}_{k+\theta}$ représente une discrétisation consistante des efforts appliqués au système dont le détail peut être trouvé dans [2]. Les ingrédients de base de ce schéma qui en font son efficacité sont le traitement entièrement implicite des contraintes au niveau des vitesses et l'écriture de schémas en vitesse/impulsion. En effet, la variable $P_{k+1}$ approche non pas les multiplicateurs $\lambda$ mais bien l'impulsion sur les pas de temps, c'est à dire,

$$P_{k+1} \approx \int_{]t_k,t_{k+1}]} dI. \tag{46}$$

Cette caractéristique permet au schéma de rester consistant lors des impacts. Ce schéma a prouvé son efficacité sur de nombreuses applications (voir par exemple [4]–[6], [41], [93], [118], [136]–[139], [142], [169])

*C. Résolution du problème discret en temps*

Pour simplifier encore, considérons le problème linéaire correspondant à (45) en supposant que la dynamique est linéaire sous la forme

$$\begin{cases} Mdv + (Cv^+ + Kq)dt = F_{ext}(t) + G^\top dI, \\ U = Gv, \\ \text{Si } g(q) \leqslant 0 \text{ alors } -dI \in N_{C^*}(\hat{U}^+ + eU_{\mathrm{N}}^- n) \text{ sinon } dI = 0. \end{cases} \tag{47}$$

Le schéma (45) pour un ensemble de contact $\alpha \in \mathcal{I}$ est alors donné par

$$\begin{cases} \widehat{M}(v_{k+1} - v_{\text{free}}) = p_{k+1} = \sum_\alpha p_{k+1}^\alpha \\ U_{k+1}^\alpha = G^\alpha\, v_{k+1}; \qquad p_{k+1}^\alpha = G^{\alpha,\top}\, P_{k+1}^\alpha \\ \widehat{U}_{k+1}^\alpha = \left[U_{\mathrm{N},k+1}^\alpha + eU_{\mathrm{N},k}^\alpha + \mu^\alpha\, ||U_{\mathrm{T},k+1}^\alpha||, U_{\mathrm{T},k+1}^\alpha\right]^T \\ \text{pour tout } \alpha \in \mathcal{I}_{a,k+1} \\ \mathbf{C}^{\alpha,*} \ni \widehat{U}_{k+1}^\alpha \perp P_{k+1}^\alpha \in \mathbf{C}^\alpha \\ \text{pour tout } \alpha \notin \mathcal{I}_{a,k+1} \\ P_{k+1}^\alpha = 0 \end{cases} \tag{48}$$

en notant $\mathcal{I}_{a,k+1} = \{\alpha \mid y_{k+\gamma} \leqslant 0\} \subset \mathcal{I}$ l'ensemble des indices des contraintes supposées actives, $\widehat{M} = [M + h\theta C + h^2\theta^2 K]$ la matrice des itérations et $v_{\text{free}}$ la vitesse libre donnée par

$$v_{\text{free}} = v_k + \widehat{M}^{-1}\left[-hCv_k - hKq_k - h^2\theta K v_k + h\left[\theta(F_{\text{ext}})_{k+1}) + (1-\theta)(F_{\text{ext}})_k\right]\right]. \tag{49}$$

Le problème (48) est un problème de complémentarité sur un cône du second–ordre. Dans le cas sans frottement, le problème se ramène à un problème de complémentarité linéaire ou un problème quadratique convexe. Ces problème classiques en optimisation numérique peuvent être résolus par une grande variété de méthodes numériques. La plupart des méthodes pour le contact sans frottement ont été étendues pour le frottement mais la non–convexité du problème reste un challenge majeur pour les algorithmes numériques. Pour terminer, donnons une liste non exhaustive des algorithmes les plus utilisés pour le contact frottant

- Méthodes de Newton généralisées [9], [53]
- Méthodes de projection/splitting pour les inéquations variationnelles [61], [62], [64], [95]
- Méthodes de point fixe sur le seuil de frottement [80], [81], [94]
- Méthodes sur la minimisation d'une fonctionnelle [49]

Une revue des méthodes de résolution de ce problème peut être trouvée dans [2], [159], [167] et [158].

## V. Un exemple de mise en œuvre et d'application dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Nous terminons cet article par la présentation d'un exemple de mise en œuvre des techniques de simulation des systèmes dynamiques non réguliers grâce au logiciel Siconos et un exemple de poursuite de trajectoires avec contact et impacts.

### *A. Siconos : logiciel open–source pour la simulation, l'analyse et la commande des systèmes non réguliers.*

Les fonctionnalités de la plate-forme Siconos sont la modélisation, l'analyse, la simulation et la coommande des systèmes dynamiques non réguliers. La plate-forme est constituée d'un noyau de modélisation et de simulation. Les routines numériques (Siconos/Numerics) sont en Fortran 77 et en C pour des raisons de performance. Cette bibliothèque d'outils numériques est surmontée d'un module en C++ (Siconos/Kernel) se chargeant de la modélisation et du pilotage les simulations. L'interface de commande (Siconos/FrontEnd) en mode expert est en Python. La plate-forme a été mise en œuvre pour pouvoir satisfaire plusieurs métiers des sciences de l'ingénierie en se basant sur un noyau de simulation commun et abstrait proche des formulations issues des mathématiques appliquées. Ce noyau permet de simuler plusieurs types de systèmes dynamiques non réguliers avec des techniques de calcul différentes. Le logiciel Siconos est un logiciel open–source distribué sous licence GPL. Pour plus d'informations et pour son téléchargement, on pourra consulter l'adresse suivante : `http://siconos.gforge.inria.fr`.

Une liste non exhaustive des fonctionnalités peut être dressée :

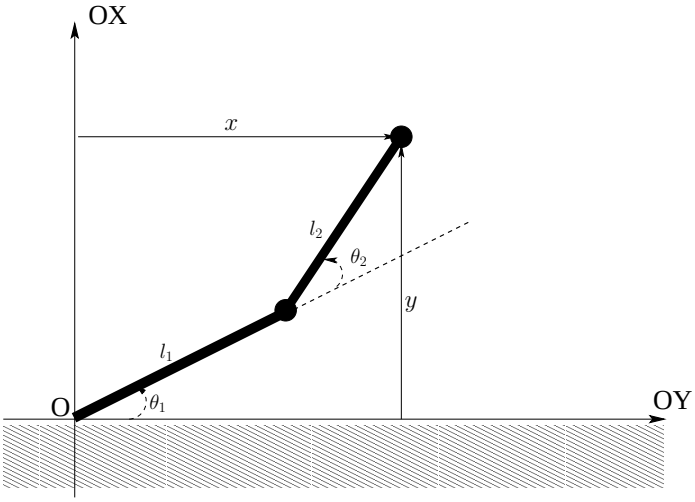
- Siconos/Numerics
  - Solveurs de complémentarité linéaire et non linéaire
  - Solveurs de problème de frottement 3D avec impact par différentes techniques
  - Méthodes de Newton généralisées
- Siconos/Kernel
  - Modélisation des systèmes mécaniques lagrangiens et de Newton-Euler
  - Modélisation des systèmes du premier ordre non réguliers (Système de Filippov, de complémentarité linéaire et non linéaire)
  - Simulation par schémas à capture d'évènements et détection d'évènements.
  - Gestion des entrées/Sorties pour la commande (Actionneurs et Capteurs)
- Siconos/FrontEnd
  - Interface Python auto–générée
  - Interface partielle pour Matlab et Scilab
- Siconos/Examples
  - Exemples de Mécanique et de Robotique simple (bras manipulateurs)
  - Exemples d'Électronique

Pour une présentation plus détaillée de la plate–forme, on renvoie à [8] et [2].

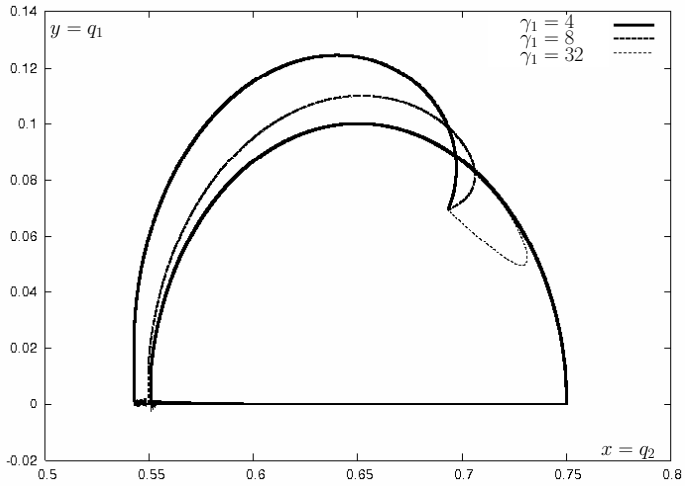
### *B. Poursuite de trajectoires avec contact et impact*

A titre d'exemple, la mise en œuvre de la simulation d'une loi de commande commutée basée sur la commande passive des systèmes est illustrée dans cette partie. On considère un manipulateur simple à deux degrés de libertés décrit dans la figure 1(a). La trajectoire désirée est un demi arc de cercle pendant la phase libre et une phase de contact maintenu sur le plan $OY$ suivant le diamètre du demi cercle. La commande est basée sur une approche normale de la contrainte avec une accumulation finie d'impacts pour réaliser la stabilisation sur la surface. Pour des détails sur la conception et l'analyse de cette commande, on pourra consulter [39], [111], [112].

La simulation a été réalisée dans Siconos avec le schéma de Moreau pour prendre en compte l'accumulation d'impacts. Plus de détails sur cette implémentation peuvent être trouvés dans [7]. On donne à




(a) Manipulateur planaire à deux degrés de libertés




(b) Simulation de la poursuite de la trajectoire en fonction d'un gain de la commande $\gamma_1$.

| $e_N$ \ $h$ | $10^{-3}s$ | $10^{-4}s$ | $10^{-5}s$ | $10^{-6}s$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.2 | $n_i = 3$ | $n_i = 5$ | $n_i = 6$ | $n_i = 8$ |
| 0.5 | $n_i = 6$ | $n_i = 9$ | $n_i = 12$ | $n_i = 16$ |
| 0.7 | $n_i = 9$ | $n_i = 16$ | $n_i = 23$ | $n_i = 29$ |
| 0.9 | $n_i = 23$ | $n_i = 40$ | $n_i = 64$ | $n_i = 81$ |
| 0.95 | $n_i = 32$ | $n_i = 67$ | $n_i = 108$ | $n_i = 161$ |

TABLE I

NOMBRE D'IMPACT SIMULÉ EN FONCTION DU PAS DE TEMPS ET DU COEFFICIENT DE RESTITUTION

titre illustratif le nombre d'impact simulés en fonction du pas temps et du coefficient de restitution dans le tableau I.

## REMERCIEMENTS

Ce travail est soutenu via le projet ANR SALADYN `http://saladyn.gforg.inria.fr` du programme COSINUS ANR-08-COSI-014-01.

## REFERENCES

[1] M. Abadie. Dynamic simulation of rigid bodies : Modelling of frictional contact. In B. Brogliato, editor, *Impacts in Mechanical Systems : Analysis and Modelling*, volume 551 of *Lecture Notes in Physics (LNP)*, pages 61–144. Springer, 2000.

[2] V. Acary and B. Brogliato. *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems : Applications in Mechanics and Electronics*, volume 35 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer Verlag, 2008.

[3] V. Acary and F. Cadoux. *5th Contact Mechanics International Symposium CMIS2009*, chapter Applications of an existence result for the Coulomb friction problem. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer Verlag, 2009.

[4] V. Acary and M. Jean. Numerical simulation of monuments by the contacts dynamics method. In DGEMN-LNEC-JRC, editor, *Monument-98, Workshop on seismic perfomance of monuments*, pages 69–78. Laboratório Nacional de engenharia Civil (LNEC), November 12-14 1998.

[5] V. Acary and M. Jean. Numerical modeling of three dimensional divided structures by the non smooth contact dynamics method : Application to masonry structure. In B.H.V. Topping, editor, *The Fifth international Conference on Computational Structures Technology 2000*, pages 211–222. Civil-Comp Press, 6-8 September 2000.

[6] V. Acary and Y. Monerie. Nonsmooth fracture dynamics using a cohesive zone approach. Research Report RR-6032, INRIA, 2006.

[7] V. Acary, C.I. Morarescu, F. Pérignon, and B. Brogliato. Numerical simulation of nonsmooth systems and switching control with the siconos/control toolbox. In *6th Euromech Nonlinear Dynamics Conference, ENOC 2008*,, St Petersburg., 29 June 2008.

[8] V. Acary and F. Pérignon. An introduction to Siconos. Technical Report TR-0340, INRIA, http ://hal.inria.fr/inria-00162911/en/, 2007.

[9] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92(3) :353–375, 1991.

[10] J. Argyris. An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32 :85–155, 1982.

[11] W.W. Armstrong. Recursive solution to the equations of motion of a n-link manipulator. In *Proc. 5th World Congress, Theory of Machines and Mechanisms*, volume 2, July 1979.

[12] M. Arnold. A pertubation analysis for the dynamical simulation of mechanical multibody systems. *Appl. Numer. Math.*, 18 :37–56, 1995.

[13] M. Arnold. Numerical methods for simulation in applied dynamics. In Arnold and Schiehlen [15], pages 191–246.

[14] M. Arnold and O. Brüls. Convergence of the generalized-$\alpha$ scheme for constrained mechanical systems. *Multibody System Dynamics*, 18(2) :185–202, 2007.

[15] M. Arnold and W. Schiehlen, editors. *Simulation Techniques in Applied Dynamics*, volume 507 of *CISM Courses and Lectures*. Springer, 2008.

[16] H. Asada and J. Slotine. *Robot Analysis and Control*. John Wiley & Sons, 1986.

[17] U. Ascher and L. R. Petzold. Projected implicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic equations. *Siam J. Numer. Anal.*, 28 :1097–1120, 1991.

[18] U.M. Ascher and L.R. Petzold. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential–Algebraic Equations*. SIAM, 1998.

[19] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, second edition, 1996.

[20] C.L. Bauchau, O.A. Botasso. On the design of energy preserving and decaying schemes for flexible, nonlinear multibody systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 169 :61–79, 1999.

[21] O. Bauchau, G. Damilano, and N.J. Theron. Numerical integration of non-linear elastic multibody systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 :2727–2751, 1995.

[22] O.A. Bauchau. Computational schemes for flexible nonlinear multi-body systems. *Multibody System Dynamics*, 2 :169–225, 1998.

[23] O.A. Bauchau, C.L. Bottasso, and L. Trainelli. Robust integration schemes for flexible multibody systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(3–4) :395–420, 2003.

[24] O.A. Bauchau and A. Laulusa. Review of contemporary approaches for constraint enforcement in multibody systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 3(1) :011005, 2008.

[25] O.A. Bauchau and N.J. Theron. Energy decaying for nonlinear elastic multibody systems. *Computers & Structures*, 59(02) :317–332, 1996.

[26] O.A. Bauchau and N.J. Theron. Energy decaying scheme for non-linear beam models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134 :37–56, 1996.

[27] J. Baumgarte. Stabilization of constraints and integral of motion for nonpenetrating rigid bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1 :1–16, 1972.

[28] E. Bayo, J. García de Jalón, A. Avello, and J. Cuadrado. An efficient computational method for real–time multibody dynamic simulation in fully cartesian coordinates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92 :377–395, 1991.

[29] E. Bayo, J. García de Jalón, and M.A. Serna. A modified lagrangian formulation for the dynamic analysis of constrained mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71 :183–195, 1988.

[30] E. Bayo and Ledesma. R. Augmented Lagrangian and mass–orthogonal projection methods for constrained multibody dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 5 :209–231, 1996.

[31] T. Belytschko and J. Hsieh. Non–linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7(3) :255–271, 1973.

[32] T. Belytschko, W.K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Wiley, New York, 2000.

[33] W. Blajer. Elimination of constraint violation and accuracy aspects in numerical simulation of multibody systems. *Multibody System Dynamics*, 7 :265–284, 2002.

[34] M. Borri, C. bottasso, and P. Mantegazza. Equivalence of kane's and maggi's equations. *Meccanica*, 25 :272–274, 1990.

[35] M. Borri, C.L. Bottasso, and L. Trainelli. Integration of elastic multibody systems by inveriant energy/dissipating algorithms. Part I :Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :3669–3699, 2001.

[36] M. Borri, C.L. Bottasso, and L. Trainelli. Integration of elastic multibody systems by inveriant energy/dissipating algorithms. Part I :Numerical schemes and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :3701–3733, 2001.

[37] C.L. Bottasso, O. Bauchau, and A. Cardona. Time-step-size-independent conditioning and sensitivity to perturbations in the numerical solution of index three differential algebraic equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2007.

[38] C.L. Bottasso and L. Trainelli. An attempt at the classification of energy decaying schemes for structural and multibody dynamics. *Multibody Systems Dynamics*, 12 :173–185, 2004.

[39] J.-M. Bourgeot and B. Brogliato. Tracking control of complementary lagrangian systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(6) :1839–1866, 2005.

[40] V. Brasey. HEM5 users's guide. Technical report, Université de Genève, Suisse, 1994.

[41] I. Bratberg, F. Radjai, and A. Hansen. Dynamic rearrangements and packing regimes in randomly deposited two-dimensional granular beds. *Physical Review E, Stat. Nonlin. Soft Matter Phys.*, 66(3) :(3 Pt 1) :031303, 2002.

[42] K.E. Brenan, S. Campbell, and L.R. Petzold. *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. North-holland, 1989.

[43] K.E. Brenan and B.E. Engquist. Backward differentiation approximations of nonlinear differential/algebraic systems. *Mathematics of Computation*, 51(184) :659–676, 1988.

[44] K.E. Brenan and L.R. Petzold. The numerical solution of higher index differential/algebraic equations by implicit methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 26(4) :976–996, 1989.

[45] B. Brogliato. *Nonsmooth Mechanics : Models, Dynamics and Control*. Springer-Verlag, London, 2nd edition, 1999.

[46] O. Brüls and M. Arnold. The generalized-alpha scheme as a linear multistep integrator : Toward a general mechatronic simulator. *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 3(4), 2008.

[47] O. Brüls, A. Cardona, and M. Géradin. Modeling, simulation and control of flexible multibody systems. In Arnold and Schiehlen [15], pages 21–74.

[48] O. Brüls and J.C. Golinval. On the numerical damping of time integrators for coupled mechatronic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6–7) :577–588, 2008.

[49] F. Cadoux. *Analyse convexe et optimisation pour la dynamique non–reguliére*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2009.

[50] S.L. Campbell and B. Leimkuhler. Differentiation of constraints in differential–algebraic equations. *Mech. Struct. & Mach.*, 19(1) :19–39, 1991.

[51] A. Cardona and M. Géradin. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26 :2403–2438, 1988.

[52] C.O. Chang and P.E. Nikravesh. An adaptive constraint violation stabilization method for dynamic analysis of mechanical systems. *ASME J. Mech. Transm. Autom. Des.*, 107 :488–492, 1985.

[53] P.W. Christensen and J.S. Pang. Frictional contact algorithms based on semismooth newton methods. In M. Fukushima & L. Qi, editor, *Reformulation - Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods*, pages 81–116, Dordrecht, 1998. Kluwer Academic Publishers.

[54] J. Chung and G.M. Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized-$\alpha$ method. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of A.S.M.E*, 60 :371–375, 1993.

[55] J. Craig. *Introduction to Robotics — Mechanics and Control*. Addison–Wesley, 1986.

[56] C. Crisfield and G.F. Moita. A co-rotationnal formulation for 2-d continua including incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(15), 1996.

[57] M.A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 1. Wiley, New York, 1991,1997.

[58] M.A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 2. Wiley, New York, 1997.

[59] J. Cuadrado, J. Cardenal, and E. Bayo. Modeling and simulation methods for efficient real–time simulation of multibody dynamics. *Multibody systems Dynamics*, 1 :259–280, 1997.

[60] J. de García Jalón, E. Álvarez, F.A. de Ribera, Rodríguez I., and F.J. Funes. A fast and simple semi-recursive formulation for multi-rigid-body systems. *Computational Methods in Applied Sciences*, 2 :1–23, 2005.

[61] G. De Saxcé and Z.-Q. Feng. The bipotential method : A constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Mathemetical and Computer Modelling*, 28(4) :225–245, 1998.

[62] G. De Saxcé and Z.-Q. Feng. New inequality and functional for contact with friction : The implicit standard material approach. *Mech. Struct. & Mach.*, 19 :301–325, 1991.

[63] E. Eich-Soellner and C. Führer. *Numerical methods in multibody dynamics*. Teubner, 1998. Reprint Lund university 2002.

[64] F. Facchinei and J. S. Pang. *Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, volume I & II of *Springer Series in Operations Research*. Springer Verlag NY. Inc., 2003.

[65] R. Featherstone and D.E. Orin. Robot dynamics : Equations and algorithms. In *ICRA IEEE Int. Conf. Robotics & Automation*, pages 826–834, 2000.

[66] B. Fraeijs de Veubeke. The dynamics of flexible bodies. *International Journal of Engineering Science*, 14 :895–913, 1976.

[67] J. García de Jalón and E. Bayo. *Kinematic and Dynamic of Multibody Systems : The Real–Time Challenge*. Springer Verlag, 1994.

[68] C.W. Gear. *Numerical Initial Value Problems of Ordinary Differential Equations*. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1971.

[69] C.W. Gear. Differential–algebraic equation index transformations. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 9(1), 1988.

[70] C.W. Gear, B. Leimkuhler, and G.K. Gupta. Automatic integration of Euler-Lagrange equations with constraints. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 12–13 :77–90, 1985.

[71] E. Griepentrog and R. März. *Differential–Algebraic Equations and their Numerical Treatment*. Teubner, Leipzig, 1986.

[72] M. Géradin and A. Cardona. *Flexible Multibody Dynamics : A finite element Approach*. J. Wiley & Sons, New York, 2001.

[73] M. Géradin and D. Rixen. Parametrization of finite rotations in computational dynamics : a review. *Revue européenne des éléments finis*, 4(5-6) :497–554, 1995. Numéro spécial, rotations finies en mécanique des solides et des structures, Ibrahimbegović, A & Géradin, M., éditeurs.

[74] E. Hairer. Personal web page. http ://www.unige.ch/˜hairer/.

[75] E. Hairer and L. Jay. *Contributions in numerical mathematics*, chapter Implicit Runge-Kutta methods for higher index differential-algebraic systems, pages 213–224. Number 2 in World Sci. Ser. Appl. Anal. Springer, 1993.

[76] E. Hairer, Ch. Lubich, and M. Roche. *The Numerical Solution of Differential–Algebraic Systems by Runge–Kutta Methods*. Springer–Verlag, 1987.

[77] E. Hairer, Ch. Lubich, and G. Wanner. *Geometric numerical integration. Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations.* Springer, second edition, 2006.

[78] E. Hairer and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems.* Springer, 1996.

[79] R. Hartenberg and I. Denavit. *Kinematic Synthetis of Linkages*. MacGraw–Hill, 1964.

[80] J. Haslinger. Least square method for solving contact problems with friction obeying coulomb's law. *Applications of mathematics*, 29(3) :212–224, 1984.

[81] J. Haslinger, I. Hlaváček, and J. Nečas. Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics. In P.G. Ciarlet and J.L. Lions, editors, *Handbook of Numerical Analysis*, volume IV, Part 2, pages 313–485, Amsterdam, 1996, 1996. North-Holland.

[82] E.J. Haug. *Computer Aided Kinematics and Dynamics*, volume 1 : Basic methods. Allyn and Bacon, Boston, 1989.

[83] H. Hemani and F.C. Weimer. Modeling of nonholonomic dynamic systems with applications. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of A.S.M.E*, 48 :177–182, 1981.

[84] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, and R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for the time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, 5 :283–292, 1977.

[85] J.M. Hollerbach. A recursive Lagrangiqn formulation of manipulators dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-10(11) :730–736, 1980.

[86] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 1987.

[87] T.J.R. Hughes and M. Hulbert. Space-time finite element for elastodynamics : Formulation and error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66 :339–363, 1988.

[88] A. Ibrahimbegović. On the choice of finite rotation parameters. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149 :49–71, 1997.

[89] L. Jay. Convergence of a class of Runge-Kutta methods for differential-algebraic systems of index 2. *BIT*, 33(1) :137–150, 1993.

[90] L. Jay. Specialized Runge-Kutta methods for index 2 differential algebraic equations. *Math. Comput.*, 75 :641–654, 2006.

[91] L. Jay and D. Negrut. Extensions of the HHT–method to differential-algebraic equations in mechanics. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 26 :190–208, 2007.

[92] M. Jean. The non smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :235–257, 1999. Special issue on computational modeling of contact and friction, J.A.C. Martins and A. Klarbring, editors.

[93] M. Jean, V. Acary, and Y. Monerie. Non-smooth contact dynamics approach of cohesive materials. *Philosopihical Transactions of the Royal Society, Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 359(1789) :2497–2518, 15 December 2001. Non-smooth Mechanics, A Theme Issue compiled and edited by F.G. Pfeiffer.

[94] M. Jean and G. Touzot. Implementation of unilateral contact and dry friction in computer codes dealing with large deformations problems. *J. Méc. Théor. Appl.*, 7(1) :145–160, 1988.

[95] F. Jourdan, P. Alart, and M. Jean. A Gauss-Seidel like algorithm to solve frictional contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155 :31–47, 1998.

[96] T.R. Kane. *Dynamics*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1968.

[97] E. Kuhl and M.A. Crisfield. Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45 :569–599, 1999.

[98] A. Kurdila, J.G. Papastavridis, and M.P. Kamat. Role of maggi's equations in computational methods for constrained multibody systems. *J. Guid. Control. Dyn.*, 13(1) :113–120, 1990.

[99] O. A. Laulusa, A. and. Bauchau. Review of classical approaches for constraint enforcement in multibody systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 3(1) :011004, 2008.

[100] D. Lewis and J.C. Simo. Conserving algorithms for the dynamics of Hamiltonian systems on Lie groups. *Journal of Nonlinear Science*, 4(3) :253–299, 1994.

[101] S.T. Lin and M.C. Hong. Stabilization method for numerical integration of multibody mechanical systems. *ASME J. Mech. Des.*, 120 :565–572, 1998.

[102] P. Lötstedt and L.R. Petzold. Numerical solution of nonlinear algebraic equations with algebraic constraints : I - convergence results for backward differentation formulas. *Mathematics of Computation*, 46(174) :491–516, 1986.

[103] Ch. Lubich. Extrapolation integrators for constrained multibody systems. *IMPACT Comp. Sci. Eng.*, 3 :213–243, 1991.

[104] Ch. Lubich, U. Nowak, U. Pöhle, and Ch. Engstler. MEXX – Numerical software for the integration of constrained mechanical multibody systems. Technical report, Konrad–Zuse–Zentrum für informationstechnik Berlin, Germany, 1992.

[105] J. Luh, M. Walker, and R. Paul. On–line computational scheme for mechanical manipulators. In *IFAC/IFIP Symposium Information Control Problems, Manufacturing Technology*, Stuttgart, Germany, Oct 22–24 1979.

[106] Ch. Lunk and B. Simeon. Solving constrained mechanical systems by the family of Newmark and $\alpha$–methods. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 86(10) :772–784, 2006.

[107] J. Marsden and M. West. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*, 10 :357–514, 2001.

[108] J.J. McPhee. On the use of linear graph theory in multibody system dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 1996.

[109] J.J. McPhee, M.G. Ishac, and G.C. Andrews. Wittenburg's formulation of multibody dynamics equations from a graph-theoretic perspective. *Mechanism and machine theory*, 31(2) :201–213, 1996.

[110] M.D.P. Monteiro Marques. *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems. Shocks and Dry Friction*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol.9. Birkhauser, Basel, 1993.

[111] C.I. Morarescu and B. Brogliato. Passivity-based switching control of flexible-joint complementarity mechanical systems. *Automatica*, in press.

[112] C.I. Morarescu and B. Brogliato. Trajectory tracking control of multiconstraint complementarity lagrangian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, in press.

[113] J.J. Moreau. *Fonctionnelles Convexes*. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, subventionné par le CNRS, Collège de France, Paris., 1967.

[114] J.J. Moreau. *Mécanique Classique*. Masson, 1968.

[115] J.J. Moreau. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. *Journal of Differential Equations*, 26 :347–374, 1977.

[116] J.J. Moreau. Bounded variation in time. In J.J Moreau, P.D. Panagiotopoulos, and G. Strang, editors, *Topics in Nonsmooth Mechanics*, pages 1–74, Basel, 1988. Bikhäuser.

[117] J.J. Moreau. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In J.J. Moreau and Panagiotopoulos P.D., editors, *Nonsmooth Mechanics and Applications*, number 302 in CISM, Courses and lectures, pages 1–82. CISM 302, Spinger Verlag, Wien-New York, 1988.

[118] J.J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics : Application to granular materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, supp.(4) :93–114, 1994.

[119] J.J. Moreau. Numerical aspects of the sweeping process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :329–349, 1999. Special issue on computational modeling of contact and friction, J.A.C. Martins and A. Klarbring, editors.

[120] A. Murua. Partitioned half-explicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic systems of index 2. *Computing*, 59(1) :43–61, 1997.

[121] D. Negrut, L.O. Jay, and N. Khude. A discussion of low–order numerical integration formulas for rigid and flexible multibody dynamics. *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 4, 2009.

[122] N.N. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, 85(EM3) :67–94, 1959.

[123] D.E. Orin, R.B. McGhee, M. Vukobratovic, and G. Hartoch. Kinematic and kinetic analysis of open–chain linkages utilizing Newton–Euler methods. *Math. Biosciences*, 43 :107–130, 1979.

[124] G.P. Ostermeyer. On Baumgarte stabilization for differential algebraic equations. In E.J. Haug and R.C. Deyo, editors, *Real–time Integration Methods for Mechanical System Simulation*, pages 193–207. Springer Verlag, 1990.

[125] L. Paoli. An existence result for non-smooth vibro-impact problems. *Journal of Differential Equations*, 211 :247–281, 2005.

[126] L. Paoli and M. Schatzman. A numerical scheme for impact problems I : The one-dimensional case. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 40(2) :702–733, 2002.

[127] L. Paoli and M. Schatzman. A numerical scheme for impact problems II : The multi-dimensional case. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 40(2) :734–768, 2002.

[128] J.G. Papastavridis. Maggi's equations of motion and the determination of constraint reactions. *J. Guid. Control. Dyn.*, 13(2) :213–220, 1990.

[129] K.C. Park and J.C. Chiou. Stabilization of computational procedures for constrained dynamical systems. *J. Guid. and Control Dyn.*, 11(4) :183–195, 1988.

[130] K.C. Park, J.C. Chiou, and J.D. Downer. Explicit–implicit staggered procedure for multibody dynamic analysis. *J. Guid. and Control Dyn.*, 13(3) :945–967, 1990.

[131] T.W. Park and E.J. Haug. A hybrid numerical integration method for machine dynamic simulation. *ASME J. Mech. Transm. Autom. Des.*, 108 :211–216, 1986.

[132] R. Paul. *Robot Manipulators : Mathematics, Programming and Control*. MIT Press, 1981.

[133] L.R. Petzold. DASSL. A differential/algebraic system solver. Technical report, Lawrence Livermore National Lab., CA (United States), 1982.

[134] L.R. Petzold and P. Lötstedt. Numerical solution of nonlinear algebraic equations with algebraic constraints : II - Practical implementation. *SIAM J. Sci. and Stat. Comput.*, 7(3) :720–733, 1986.

[135] F. Pfeiffer and C. Glocker. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. Non-linear Dynamics. John Wiley & Sons, 1996.

[136] F. Radjai and S. Roux. Turbulentlike fluctuations in a quasistatic flow of granular media. *Physical Review Letters*, 89 :064302, 2002.

[137] F. Radjai and D.E. Wolf. Features of static pressure in dense granular media. *Granular Matter*, 1(1) :3–8, 1998.

[138] M. Renouf and P. Alart. Conjugate gradient type algorithms for frictional multicontact problems : applications to granular materials. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194(18-20) :2019–2041, 2004.

[139] M. Renouf, F. Dubois, and P. Alart. A parallel version of the Non Smooth Contact Dynamics algorithm applied to the simulation of granular media. *J. Comput. Appl. Math.*, 168 :375–38, 2004.

[140] R.E. Roberson and R. Schwertassek. *Dynamics of Multibody Systems*. Springer Verlag, Berlin, 1988.

[141] R.T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.

[142] G. Saussine, F. Dubois, C. Bohatier, C. Cholet, P.E. Gautier, and J.J. Moreau. Modelling ballast behaviour under dynamic loading, part 1 : a 2D polygonal discrete element method approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(19–22) :2841–2859, 2006.

[143] M. Schatzman. Sur une classe de problèmes hyperboliques non linéaires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Série A*, 1973.

[144] M. Schatzman. A class of nonlinear differential equations of second order in time. *Nonlinear Analysis, T.M.A*, 2(3) :355–373, 1978.

[145] W. Schiehlen. Dynamics of complex multibody systems. *SM Arch*, 9 :159–195, 1984.

[146] W. Schiehlen. Computational aspects in multibody system dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 90 :569–582, 1991.

[147] W. Schiehlen. Multibody system dynamics : root and perpectives. *Multibody System Dynamics*, 1(2) :149–188, 1997.

[148] M.D. Schuster. Survey of attitude representations. *Journal of Astronautical Sciences*, 41(4) :439–517, 1993.

[149] A. A. Shabana. *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge University Press, second edition, 1998.

[150] A.A. Shabana and R. Schwertassek. Equivalence of the floating frame of reference approach and finite element formulation. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 33(3) :417–432, 98.

[151] P. Shi and J.J. McPhee. Dynamics of flexible multibody systems using virtual work and linear graph theory. *Multibody System Dynamics*, 4(4) :355–381, 2000.

[152] W.M. Silver. On the equivalence of Lagrangian and Newton–Euler dynamics for manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 1(2) :60–70, 1982.

[153] J.C. Simo and N. Tarnow. The discrete energy-momentum method. conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 43 :757–792, 1992.

[154] J.C. Simo, N. Tarnow, and K.K. Wong. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100(1) :63–116, 1992.

[155] J.C. Simo and K. Wong. Unconditionnally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31 :19–52, 1991.

[156] W. Stelze, A. Kecskeméthy, and M. Hiller. A comparative study of recursive method. *Archive of Applied Mechanics*, 66(1–2) :9–19, 1995.

[157] Y. Stepanenko and M. Vukobratovic. Dynamics of articulated open–chain active mechanisms. *Math. Biosciences*, 28 :137–170, 1976.

[158] C. Studer. *Numerics of Unilateral Contacts and Friction. – Modeling and Numerical Time Integration in Non-Smooth Dynamics*, volume 47 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer Verlag, 2009.

[159] Laursen. T.A. *Computational Contact and Impact Mechanics – Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer Verlag, 2003. 1st ed. 2002. Corr. 2nd printing,.

[160] Z. Terze, D. Lefeber, and O. Muftić. Null space integration method for constrained multibody systems with no constraint violation. *Multibody System Dynamics*, 6(3) :229–243, 2001.

[161] F.E. Udwadia and R.E. Kalada. *Analytical Dynamics : A New Approach*. Cambrigde University Press, 2007.

[162] R. von Schwerin. *Multibody System Simulation. Numerical Methods, Algorithms and Software*. Springer, 1999.

[163] M.W. Walker and D.E. Orin. Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms. *Trans. ASME J. Dynamic Systems, Measurements & Control*, 1982.

[164] R.A Wehage. Application of matrix partitioning and recursive projection to $\mathrm{O}(n)$ solution of constrained equations of motion. *Advances in Design Automation, ASME*, pages 221–230, 1988.

[165] R.A Wehage, A.A. Shabana, and Y.L. Hawang. Projection methods in flexible multibody dynamics. II : Dynamics and recursive projection methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992.

[166] J. Wittenburg. *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. Teubner, Stuttgart, 1977. second edition, Springer 2007.

[167] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Springer Verlag, second edition, 2006. originally published by John Wiley & Sons Ltd., 2002.

[168] S. Yoon, R.M. Howe, and D.T. Greenwood. Geometric elimination of constraint violations in numerical simulation of Lagrange equations. *ASME J. Mech. Des.*, 116 :1058–1064, 1994.

[169] A. Zervos, I. Vardoulakis, M. Jean, and P. Lerat. Numerical investigation of granular interfaces kinematics. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 5(4) :305–324, 2000.

[170] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method, Fourth Edition*, volume 1 & 2. Mc Graw-Hill, fourth edition, 1989, 1991.