

Algorithme rapide pour la restauration d'image régularisée sur les coefficients d'ondelettes

Mikael Carlavan, Pierre Weiss, Laure Blanc-Féraud, Josiane Zerubia

▶ **To cite this version:**

Mikael Carlavan, Pierre Weiss, Laure Blanc-Féraud, Josiane Zerubia. Algorithme rapide pour la restauration d'image régularisée sur les coefficients d'ondelettes. GRETSI, Sep 2009, Dijon, France. inria-00417654

HAL Id: inria-00417654
https://inria.hal.science/inria-00417654

Submitted on 16 Sep 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Algorithme rapide pour la restauration d'image régularisée sur les coefficients d'ondelettes

Mikael Carlavan[1], Pierre Weiss[2], Laure Blanc-Féraud[1], Josiane Zerubia[1]

[1]Projet ARIANA - CNRS/INRIA/UNSA, INRIA Sophia Antipolis
2004 route des Lucioles, 06902 Sophia Antipolis, France

[2]Institute for Computational Mathematics, Kowloon Tong, Hong Kong
pierre.armand.weiss@gmail.com, {mcarlava,blancf,zerubia}@sophia.inria.fr

Résumé − De nombreuses méthodes de restauration d'images consistent à minimiser une énergie convexe. Nous nous focalisons sur l'utilisation de ces méthodes et considérons la minimisation de deux critères contenant une norme l^1 des coefficients en ondelettes. La plupart des travaux publiés récemment proposent un critère à minimiser dans le domaine des coefficients en ondelettes, utilisant ainsi un *a priori* de parcimonie. Nous proposons un algorithme rapide et des résultats de déconvolution par minimisation d'un critère dans le domaine image, avec un *a priori* de régularité exprimé dans le domaine image utilisant une décomposition redondante sur une trame. L'algorithme et le modèle proposés semblent originaux pour ce problème en traitement d'images et sont performants en terme de temps de calculs et de qualité de restauration. Nous montrons des comparaisons entre les deux types d'*a priori*.

Abstract − Many image restoration techniques are based on convex energy minimization. We focus on the use of these techniques and consider the minimization of two criteria holding a l^1-norm of wavelet coefficients. Most of the recent research works are based on the minimization of a criterion in the wavelet coefficients domain, namely as a sparse *a priori*. We propose a fast algorithm and deconvolution results obtained by minimizing a criterion in the image domain using a redundant decomposition on a frame. The algorithm and model proposed are unusual for this problem and very efficient in term of computing time and quality of restoration results. We show comparisons between the two different *a priori*.

1 Introduction

Nous considérons le modèle d'acquisition d'image suivant :

$$g = Hu + b \tag{1}$$

$u \in \mathbb{R}^n$ est la scène observée, $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une transformation linéaire connue (typiquement, la PSF « Point Spread Function » représentant la réponse impulsionnelle du système d'acquisition), $b \in \mathbb{R}^p$ est un bruit additif issu de l'électronique du système (considéré ici comme blanc et gaussien) et $g \in \mathbb{R}^p$ est l'image observée. En général, H est mal conditionné. Retrouver l'image originale u à partir de notre observation g est alors un problème mal posé. Pour régulariser le problème, une approche couramment utilisée consiste à minimiser un *a priori*. Les *a priori* les plus classiques sont ceux avec une régularisation par variation totale [1], sur une base d'ondelettes [2], ou par un critère de parcimonie sur une trame [5] ou sur un dictionnaire de formes [11]. En utilisant un *a priori* de parcimonie, le problème à résoudre devient :

$$\arg\min_{c \in \mathbb{R}^m} \left\{ \frac{\lambda}{2} \|H\tilde{W}c - g\|_2^2 + \|c\|_1 \right\} \tag{2}$$

où c sont les coefficients de l'image u exprimée dans le domaine des ondelettes, $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est l'opérateur de transformée en ondelettes ($\tilde{W} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est l'opérateur de reconstruction) et λ est le paramètre de régularisation.

L'idée du critère de parcimonie est que les signaux complexes comme les images peuvent être représentés sur un petit nombre ($\ll n$) d'atomes élémentaires mieux adaptés au traitement d'images. Dans ce travail, nous nous intéressons également au problème de restauration d'images, mais nous utilisons une régularisation dans le domaine image directement. Ceci s'écrit :

$$\arg\min_{u \in \mathbb{R}^n} \left\{ \underbrace{\frac{\lambda}{2} \|Hu - g\|_2^2 + \|Wu\|_1}_{\Psi(u)} \right\} \tag{3}$$

Les modèles (2) et (3) sont équivalents lorsque W est une décomposition sur une base (cas $m = n$), mais sont différents pour une décomposition sur une trame ($m > n$). Dans ce cas, *Elad et al.* ont récemment montré que le modèle (3) semble donner de meilleurs résultats [16]. Or les récents travaux en traitement d'images suggèrent que les représentations sur des trames ou plus généralement sur des dictionnaires permettent de représenter des signaux

plus complexes et sont donc mieux adaptées au traitement d'images [5, 11, 19]. Il est donc naturel de se demander quel modèle privilégier lorsque W est une décomposition sur une trame.

D'un point de vue numérique, (2) et (3) sont deux problèmes convexes non différentiables relativement proches. L'approche classique pour résoudre (2) consiste à utiliser des algorithmes de type « Iterative Shrinkage/Thresolding ». Ceux-ci utilisent l'opérateur proximal et procèdent de façon itérative à un seuillage (seuillage doux dans le cas de (2)) des coefficients d'ondelettes [2]. Néanmoins, leur taux de convergence peut devenir très lent si le problème est mal conditionné. Pour résoudre ce problème, des versions en « deux temps » telles que [5, 18] sont apparues. Mais là encore, la convergence reste assez lente. Une amélioration pour rendre ces algorithmes plus rapides été proposée dans [4].

La principale difficulté pour résoudre (3) est que l'opérateur proximal ne se calcule pas explicitement sur $\|Wu\|_1$, nous ne pouvons donc pas utiliser les algorithmes précédemment cités. Avec trois approches différentes les auteurs de [9, 10, 12] ont proposé le même algorithme pour résoudre (3). Néanmoins, la convergence reste également lente.

Nous proposons ici un algorithme rapide pour résoudre (3) et montrons des résultats sur un problème de déconvolution et de débruitage. Nous essayons également d'apporter des éléments de comparaison des deux *a priori*.

2 Algorithme rapide pour l'*a priori* de régularité

Une technique permettant de résoudre (3) consiste à lisser la norme l^1, puis à utiliser un algorithme de descente du premier ordre. En raison de cette régularisation, ces algorithmes convergent en $O(\frac{1}{\sqrt{k}})$ où k est le nombre d'itérations, alors que les algorithmes résolvant (2) convergent en général en $O(\frac{1}{k})$.

Deux algorithmes perfomants de descente du premier ordre multi-pas ont récèmment vu le jour [7, 8]. Ces algorithmes sont optimaux pour la minimisation de fonctions convexes différentiables et convergent en $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. L'idée de [7] et [8] est que l'on peut accélérer les schémas classiques de descente de premier ordre si, à chaque itération, le pas de la descente est calculé en tenant compte des gradients aux itérations précédentes. Nous allons voir que ces algorithmes permettent d'envisager la résolution de problèmes tels que (3). L'algorithme que nous proposons repose sur les récentes avancées en optimisation convexe réalisées par Y. Nesterov [7]. Notre méthode consiste à lisser le problème (3) afin de le rendre différentiable, puis d'utiliser la version accélérée de l'algorithme de Y. Nesterov. Nous régularisons la norme l^1 de la façon suivante :

$$\|u\|_{1,\mu} = \sum_{i=1}^{n} \psi_\mu(|u_i|) \tag{4}$$

avec :

$$\psi_\mu(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \geq \mu, \\ \frac{x^2}{2\mu} + \frac{\mu}{2} & \text{sinon} \end{cases} \tag{5}$$

Cette régularisation permet d'obtenir une meilleure approximation de la norme l^1 que celle couramment utilisée [15] :

$$\psi_\mu(x) = \sqrt{x^2 + \mu^2}$$

Nous définissons :

$$\Psi_\mu(u) = \frac{\lambda}{2}\|Hu - g\|_2^2 + \|Wu\|_{1,\mu} \tag{6}$$

Le problème (3) peut donc se réécrire sous la forme suivante :

$$\arg\min_{u \in \mathbb{R}^n} (\Psi_\mu(u)) \tag{7}$$

$\Psi_\mu(u)$ est une fonction convexe et différentiable avec un gradient Lipschitz continu :

$$\|\nabla\Psi_\mu(u) - \nabla\Psi_\mu(v)\|_2 \leq L_\Psi \|u - v\|_2 \tag{8}$$

$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $L_\Psi = \lambda\|H\|_2^2 + \frac{1}{\mu}\|W\|_2^2$. Nous pouvons alors appliquer l'algorithme de Y. Nesterov afin de résoudre (7). Il s'écrit comme suit :

Algorithm 1

Initialiser $A = 0$, $w = 0$.
Choisir un point de départ u_0.
Choisir un paramètre de régularisation μ.
for k to N **do**
  $t = \frac{2}{L_\Psi}$
  $a = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4At}}{2}$
  $v_k = u_0 - w$
  $y_k = \frac{Au_k + av_k}{A + a}$
  $u_{k+1} = y_k - \frac{1}{L_\Psi}\nabla\Psi_\mu(y_k)$
  $w = w + a\nabla\Psi_\mu(u_{k+1})$
  $A = A + a$
end for

En raison de la régularisation de la norme de l^1, cet algorithme ne permet pas d'atteindre le taux de convergence optimal $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Nous pouvons montrer que cet algorithme, malgré la régularisation, converge en $O\left(\frac{1}{k}\right)$ [14], c'est à dire à la même vitesse qu'un seuillage itéré. A. Nemirovski a cependant demontré que l'on ne peut résoudre, avec une méthode du premier ordre, les problèmes tels que (3) avec un meilleur taux de convergence que $O\left(\frac{1}{k}\right)$ [17]. Notre algorithme est donc, dans un sens, « optimal ».

Le paramètre μ définit la précision de la régularisation de la norme l^1. Son choix a une grande influence sur les perfomances de l'algorithme. Une valeur trop grande donne un algorithme très rapide, mais nous éloigne fortement de la solution. Néanmoins, une valeur trop faible rend l'algorithme très lent sur les premières itérations. Pour une image prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, 255]$, nous fixerons $\mu = 0.1$. Avec ce choix, l'algorithme décroit $\Psi_\mu(u_k) - \Psi_\mu(u^*)$ d'un facteur 1000 en moins de 50 itérations.

3 Simulations

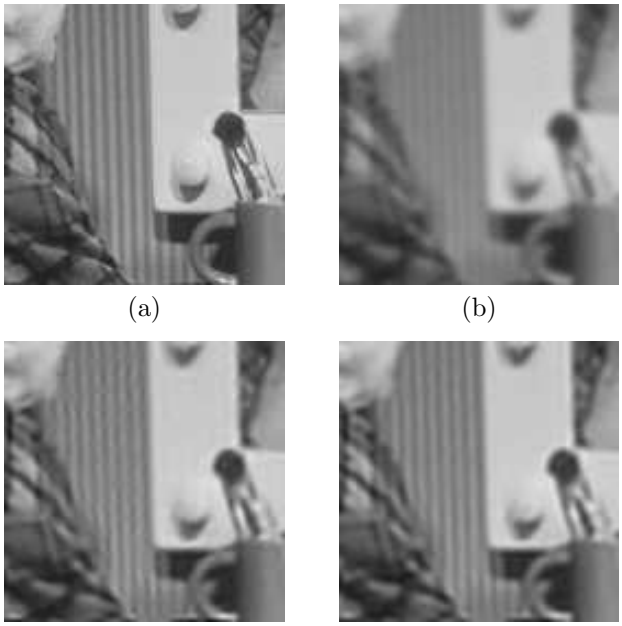
Nous avons testé cet algorithme sur un problème de déconvolution et débruitage. Nous avons également voulu vérifier le comportement des deux *a priori* sur ce type de problème. Le problème (2) a été résolu en utilisant itérativement l'opérateur proximal [6].

Les ondelettes réelles non-redondantes (définissant une base) ne sont pas invariantes par rotation et translation, leur utilisation pour la restauration d'image par (2) ou (3) donne de mauvais résultats. Nous proposons donc d'utiliser la transformée en ondelettes complexes « dual-tree » [3], qui présente une quasi-invariance par translation et rotation. Cette transformée étant redondante (d'un facteur 4 en 2D), c'est une représentation sur une trame, ainsi (2) et (3) ne sont plus équivalents.

Le paramètre de régularisation λ a été choisi de façon à avoir, pour chacun des deux modèles :

$$\|Hu_N - g\|_2 \approx \|b\|_2 \tag{9}$$

La figure 1 montre les résultats obtenus en utilisant les deux *a priori*. Les images restaurées sont encore légèrement floues. On sait que le seuillage doux (issu de l'opérateur proximal utilisé pour résoudre (2)) sur des coefficients en ondelettes provoque un lissage de l'image. Bien que nous ne puissions pas calculer explicitement la projection sur $\|Wu\|_1$, ce comportement semble également s'appliquer sur (3). Pour cette raison, notre image de test est fortement convoluée mais faiblement bruitée : H est une fonction gaussienne de variance $\sigma_H = 1.7$, et b est un bruit blanc gaussien de variance $\sigma_b = 2$ (l'image de test prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 255]$). Même si les $PSNR$ des images obtenues sont similaires, les résultats visuels sont très différents. En effet, nous remarquons que globalement le modèle de parcimonie présente plus d'artéfacts que le modèle de régularité. Ceci est nettement visible sur la texture du fond de l'image. Ces résultats semblent donc confirmer l'idée de [16] selon laquelle l'*a priori* de régularité donne de meilleurs résultats lorsque W est une décomposition redondante sur une trame.



(a) (b) (c) (d)

FIG. 1 – Restauration d'une image floue et bruitée : (a) image de référence, (b) image observée floue et bruitée ($PSNR = 25.6\ dB$), (c) résultat du modèle de parcimonie ($PSNR = 28.9\ dB$), et (d) résultat du modèle de régularité ($PSNR = 29.1\ dB$).

La figure 2 montre la courbe de convergence de notre algorithme et d'une descente de gradient pour résoudre (3). L'algorithme proposé permet de diviser $\Psi_\mu(u_k) - \Psi_\mu(u^*)$ d'un facteur 1000 (suffisant pour obtenir une stabilité visuelle) en 30 itérations, tandis que, pour le même nombre d'itérations, la descente de gradient ne divise $\Psi_\mu(u_k) - \Psi_\mu(u^*)$ que d'un facteur 10. Même si la complexité de notre algorithme est deux fois plus importante que celle d'une descente de premier ordre, le gain en temps de calcul est très important.

4 Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle méthode pour la résolution de méthodes variationnelles avec *a priori* de régularité défini sur les coefficients en ondelettes. Cette méthode est performante en terme de temps de calculs et très simple à implanter. Nous avons également comparé deux *a priori* régulièrement utilisés en traitement d'images. Bien que les $PSNR$ des deux *a priori* soient similaires, l'*a priori* de régularité permet de reconstruire une image de meilleure qualité que l'*a priori* de parcimonie lorsque l'image est décomposée sur une trame. De futurs travaux seront réalisés afin de comparer ces deux *a priori* en utilisant une décomposition sur un dictionnaire.

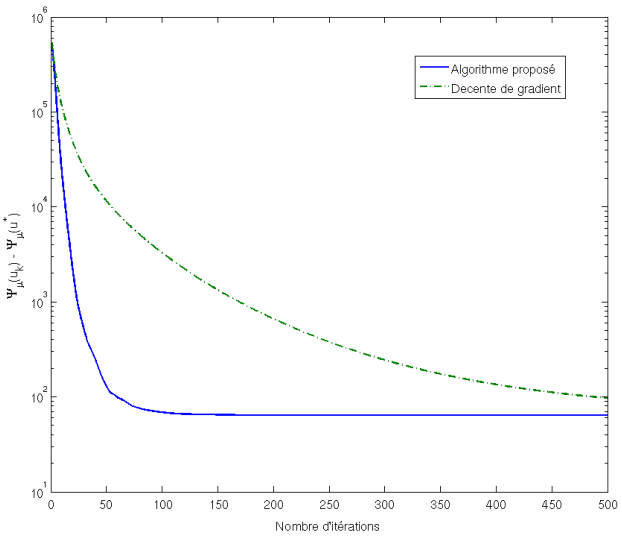


FIG. 2 – Convergence de l'algorithme proposé et d'une méthode classique de descente de premier ordre.

5 Remerciements

Les auteurs remercient l'entreprise CS-SI pour le financement partiel de ce travail de recherche, en particulier Anne Chanié et Rosario Ruiloba de CS-SI pour leur collaboration.

Références

[1] L. Rudin and S. Osher and E. Fatemi, *Nonlinear Total Variation Based Noise Removal*, Physica D, 60 (1-4) :259-268, 1992.

[2] A. Chambolle and R. DeVore and N.-Y. Lee and B. J. Lucier, *Nonlinear wavelet image processing : Variational problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage*, IEEE Trans. Image Processing, 7(3) :319-335, 1998.

[3] I. W. Selesnick and R. G. Baraniuk and N. G. Kingsbury, *The Dual-Tree Complex Wavelet Transform*, IEEE Signal Processing Magazine, 22(6) :123-151, 2005.

[4] C. Vonesch and M. Unser, *A Fast Multilevel Algorithm for Wavelet-Regularized Image Restoration*, IEEE Transactions on Image Processing, 18(3) : 509-523, Mar. 2009.

[5] C. Chaux and P. L. Combettes and J.-C. Pesquet and V. R. Wajs, *A variational formulation for frame based inverse problems*, Inverse Problems, 23(4) :1495-1518, Aug. 2007.

[6] P. L. Combettes and V. R. Wajs, *Signal Recovery by Proximal Forward-Backward Splitting*, Multiscale Modeling & Simulation, 4(4) :1168-1200,2005.

[7] Y. Nesterov, *Gradient methods for minimizing composite objective function*, CORE Discussion Paper 76, 2007.

[8] A. Beck and M. Teboulle, *A fast iterative shrinkage thresholding algorithm for linear inverse problems*, SIAM Journal on Imaging Sciences, 2(1) :183-202, 2009.

[9] J. Bect and L. Blanc-Féraud and G. Aubert and A. Chambolle, *A l^1-unified variational framework for image restoration*, Proc. European Conference on Computer Vision (ECCV), 1-13, May 2004, Prague, Czech Republic.

[10] I. Daubechies and M. Defrise and C. De Mol, *An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 57(11) :1413-1457, 2004.

[11] J.-L. Starck and M. Elad and D.L. Donoho, *Redundant Multiscale Transforms and their Application for Morphological Component Analysis*, Advances in Imaging and Electron Physics, 132, 2004.

[12] M.A.T. Figueiredo and R.D. Nowak, *An EM algorithm for wavelet-based image restoration*, IEEE Transactions on Image Processing, 12(8) :906-916, Aug. 2003.

[13] P. L. Combettes and J.-C. Pesquet, *Proximal Thresholding Algorithm for Minimization over Orthonormal Bases*, SIAM J. on Optimization, 18(4) :1351-1376, 2007.

[14] P. Weiss, *Algorithmes rapides d'optimisation convexe. Application à la reconstruction d'images et à la détection de changements*, Thèse de Doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis, France, 2008.

[15] P. Weiss and L. Blanc-Féraud and G. Aubert, *Efficient schemes for total variation minimization under constraints in image processing*, SIAM journal on Scientific Computing, 31(3) :2047-2080, 2008.

[16] M. Elad and P. Milanfar and R. Rubinstein, *Analysis Versus Synthesis in Signal Priors*, Inverse Problems 23(3) :947-968, Jun. 2007.

[17] A. Nemirovski, *Information-based complexity of linear operator equations*, Journal of Complexity, 8 :153-175, 1992.

[18] P.L. Combettes and J.-C. Pesquet, *A Douglas-Rachford Splitting Approach to Nonsmooth Convex Variational Signal Recovery*, IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing,1(4) :564-574, 2007.

[19] J.-L. Starck and M. Elad and D.L. Donoho, *Image decomposition via the combination of sparse representations and a variational approach*, IEEE Transactions on Image Processing, 14(10) :1570-1582, Oct. 2005.