HAL
open science

Analyse fréquentielle des dérivateurs algébriques

Francisco de Asís García Collado, Brigitte d'Andréa-Novel, Michel Fliess, Hugues Mounier

To cite this version:

Francisco de Asís García Collado, Brigitte d'Andréa-Novel, Michel Fliess, Hugues Mounier. Analyse fréquentielle des dérivateurs algébriques. XXIIe Colloque GRETSI, Sep 2009, Dijon, France. inria-00394972

HAL Id: inria-00394972

https://inria.hal.science/inria-00394972v1

Submitted on 13 Jun 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse fréquentielle des dérivateurs algébriques

Francisco de Asís GARCÍA COLLADO[1], Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL[2], Michel FLIESS[3], Hugues MOUNIER[4]

[1]Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales – Universidad Politécnica de Madrid
C/ José Gutiérrez Abascal, 2 – 28006 Madrid, Espagne

[2]Mines ParisTech - Centre de Robotique
60 bld. Saint-Michel, 75272 Paris cedex 06, France

[3]INRIA-ALIEN & LIX (CNRS, UMR 7161)
École polytechnique, 91128 Palaiseau, France

[4]Institut d'Électronique Fondamentale (CNRS, UMR 8622)
Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France

fco.garcia.collado@alumnos.upm.es, brigitte.dandrea-novel@mines-paristech.fr
Michel.Fliess@polytechnique.edu, hugues.mounier@ief.u-psud.fr

Résumé – On analyse les performance de dérivateurs numériques récents, de nature algébrique, qui ont permis de résoudre bien des questions en automatique, signal et finance. La discrétisation d'un tel dérivateur, qui s'exprime en temps continu comme une intégrale, sur une courte fenêtre de temps, du signal multiplié par un certain polynôme temporel, est un filtre numérique, linéaire et fini, facile à implanter. On en déduit une formule empirique prédisant la réponse en fréquence. Les calculs sont détaillés pour la dérivée d'ordre 1, et appliqués à des données expérimentales afin d'estimer l'accélération longitudinale d'un véhicule. Les résultats, excellents, sont comparés à ceux obtenus avec un filtre numérique standard de la bibliothèque *Matlab/Simulink*.

Abstract – This communication is devoted to the performance evaluation of new numerical differentiators, of algebraic flavor, which lead to the solution of many pending questions in control, signal and finance. The continuous-time expression of such a differentiator is an integral over a short time window of the signal multiplied by some polynomial time function. It yields a finite linear digital filter, which is easily implemented. An empirical formula is deduced, which predicts the frequency response of this filter. The computations, which are detailed for a 1st order derivation, are applied to experimental data in order to estimate the longitudinal acceleration of some vehicle. Our results, which are excellent, are compared to those given by a standard filter from the *Matlab/Simulink* toolbox.

1 Introduction

1.1 Généralités

De nouvelles méthodes de dérivation numérique des signaux bruités [1], apparues en 2004 (*cf.* [9]), ont été, depuis, développées [15] et utilisées avec succès en automatique, signal, image et finance (*cf.* [4, 7, 8, 10, 12]). Ces dérivateurs, de nature algébrique, sont basés sur l'approximation d'un signal par son développement de Taylor tronqué. On fait glisser la fenêtre d'estimation, qui est toujours fort courte, et on utilise le calcul opérationnel pour estimer les coefficients souhaités. Les résultats s'expriment comme intégrales sur la fenêtre d'estimation $[t; t + T_e]$ (t étant l'instant courant et T_e la taille de la fenêtre) du signal $f(t)$, multiplié par un certain polynôme temporel, qui caractérise le dérivateur. Cette intégrale peut, par exemple, être évaluée numériquement par la méthode des trapèzes. La formule itérative obtenue peut alors s'interpréter comme la sortie d'un filtre numérique fini, dont les entrées sont les points d'intégration successifs $f(t_k)$. L'analyse de la fonction de transfert démontre que le filtre est toujours stable. L'examen des diagrammes de Bode permet de relier la fréquence de coupure du filtre aux paramètres associés.

1.2 Quelques calculs

Soit, pour illustrer ce qui précède, $x(t)$ un signal dont on veut estimer la dérivée première. Approchons $x(t)$ autour de $t = 0$ par le polynôme de Taylor tronqué jusqu'à l'ordre de la dérivation souhaitée, ici 1 : $p(t) = a_0 + a_1 t$. De cette façon, l'identification des coefficients est immédiate : a_0 et a_1 sont des estimateurs en $t = 0$ du signal et de sa dérivée. Avec les notations classiques du calcul opérationnel (*cf.* [19]), il vient, pour $t \geq 0$:

$$P(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} \tag{1}$$

On cherche à éliminer a_0 car on veut estimer a_1. Pour cela on multiplie (1) par s :

$$sP(s) = a_0 + \frac{a_1}{s} \tag{2}$$

1. La littérature sur les dérivateurs numériques de signaux bruités est considérable. Elle ne saurait être analysée ici, par manque de place. Renvoyons à [10] pour une bibliographie plus conséquente.

puis on dérive l'expression obtenue par rapport à s pour supprimer a_0 :

$$P(s) + s\frac{\mathrm{d}P(s)}{\mathrm{d}s} = -\frac{a_1}{s^2}. \tag{3}$$

Avant de revenir au domaine temporel, une multiplication par s^{-N}, avec $N > 1$, $N = 2$ par exemple, est nécessaire pour obtenir uniquement des intégrales :

$$s^{-2}P(s) + s^{-1}\frac{\mathrm{d}P(s)}{\mathrm{d}s} = -s^{-4}a_1. \tag{4}$$

On revient au domaine temporel en rappelant (*cf.* [19]) que $\frac{d}{ds}$ correspond à la multiplication par $-t$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{6\left(\int_{t_0}^{t} \tau x(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} x(\kappa)\mathrm{d}\kappa\mathrm{d}\tau\right)}{t^3} \\ &= \frac{6\left(\int_{t_0}^{t} \tau x(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_{t_0}^{t} (t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau\right)}{t^3} \\ &= \frac{6\int_{t_0}^{t} \big(\tau x(\tau) - (t-\tau)x(\tau)\big)\mathrm{d}\tau}{t^3} \end{aligned} \tag{5}$$

Cet exemple permet de comprendre la variété possible d'estimateurs que l'on peut obtenir par cette méthode, en modifiant, par exemple, l'ordre du polynôme de Taylor ou l'entier N.

2 Dérivateurs et filtres numériques

Les propriétés du calcul opérationnel permettent de généraliser (5) en écrivant tout estimateur algébrique d'une dérivée d'ordre quelconque du signal $x(t)$ sous la forme $\int_{t_1}^{t_n} \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t$, où $\alpha(t)$ est un polynôme temporel caractérisant ledit estimateur. Il vient avec une discrétisation trapézoïdale régulièrement espacée :

$$\int_{t_1}^{t_n} f(t)\mathrm{d}t = T_e\sum_{k=1}^{n} f(t_k) - \frac{T_e}{2}\big(f(t_1) + f(t_n)\big) \tag{6}$$

où $f(t) = \alpha(t)x(t)$, T_e est la période d'échantillonnage et n le nombre d'échantillons utilisés. La fonction de transfert correspondant à l'expression (6), considérée comme définissant un filtre linéaire, numérique et fini [2], est

$$H(z) = \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k z^{k-1}}{z^n} \tag{7}$$

où c_k sont les coefficients des $x(t_k)$ en (8). Si on considère les échantillons $x(t_k)$ comme les composantes de l'état, le nouvel arrivant u comme l'entrée et la valeur de l'intégrale à chaque instant comme la sortie y, il lui correspond la représentation d'état en temps discret :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} X_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} X_k + 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Ces filtres sont stables car tous les pôles sont nuls. Les zéros, par contre, ne peuvent s'exprimer simplement.

Remarque 1 *Les estimateurs correspondant à ces filtres présentent un retard pur égal au nombre d'échantillons utilisés pour calculer l'intégrale, multiplié par la période d'échantillonnage. Les simulations numériques confirment ce fait* [3].

3 Le paramètre nT_e

3.1 Généralités

L'entier N du § 1.2 est lié aux nombres d'intégrales itérées et donc à la puissance de débruitage [4]. Rappelons que la formule de Cauchy permet de réduire ces intégrales à une formule de type (5). Le produit nT_e, issu du § 2, a une signification physique car il s'agit de la taille, en unités de temps, de la fenêtre glissante d'intégration : nT_e est facilement réglable en ajustant le nombre d'échantillons n et la période d'échantillonnage T_e, à condition de ne pas dépasser la fréquence d'acquisition maximale des capteurs, qui est $f_{e_{max}} = 1/T_{e_{min}}$. Les diagrammes de Bode d'une famille d'estimateurs de la dérivée, avec $N = 2$ et $nT_e = \sqrt{5 \cdot 10^{-10}}$ ont été analysés en faisant varier n de 1 à 50, T_e étant réglé pour chaque valeur, de sorte que le produit nT_e reste constant. On constate que toutes les fréquences de coupure des 50 estimateurs sont très proches, autour de $2.73 \cdot 10^4$Hz, qui correspond à la moyenne de toutes les fréquences. La même expérience a été réalisée, mais avec $nT_e = 5 \cdot 10^{-10}$, c'est-à-dire le carré de la valeur nT_e précédente. En conséquence, la nouvelle fréquence de coupure moyenne est $1.22 \cdot 10^9$Hz. La figure 1 regroupe ces diagrammes. À partir de

$$\frac{\log_{10}(n_2T_{e_2})}{\log_{10}(n_1T_{e_1})} = 2, \qquad \frac{\log_{10}(f_{c_2})}{\log_{10}(f_{c_1})} = 2.05 \tag{9}$$

on déduit l'expression empirique :

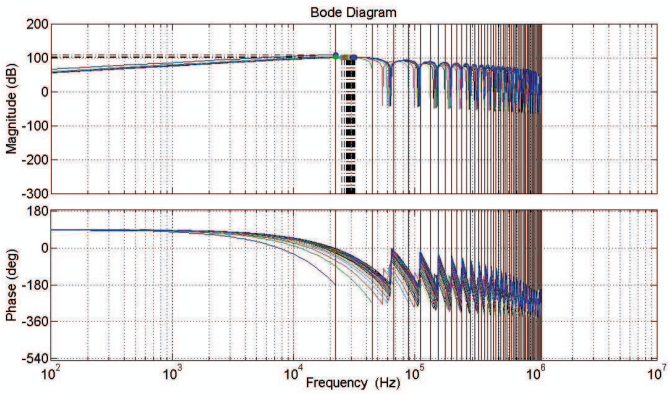
$$\frac{\log_{10}(n_2T_{e_2})}{\log_{10}(n_1T_{e_1})} \approx \frac{\log_{10}(f_{c_2})}{\log_{10}(f_{c_1})} \Rightarrow f_{c_2} \approx 10^{\frac{\log_{10}(f_{c_1})\log_{10}(n_2T_{e_2})}{\log_{10}(n_1T_{e_1})}} \tag{10}$$

Il est donc possible, d'après (10), de prédire la fréquence de coupure f_{c_2} d'un estimateur dont la fenêtre glissante d'intégration $n_2T_{e_2}$ est fixée, et définie par les limitations des capteurs, à condition de connaître la réponse en fréquence f_{c_1} d'un autre estimateur de la même famille et le paramètre $n_1T_{e_1}$ associé.

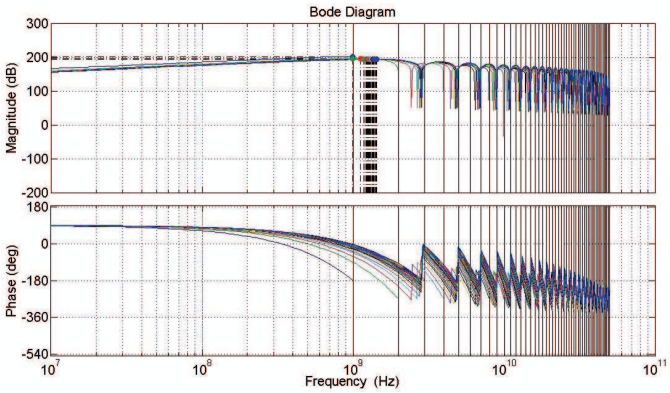
2. Renvoyons, par exemple, à [1, 3, 16] pour des rappels sur les filtres numériques.

3. Voir [15] pour des développements théoriques importants sur les retards.

4. Voir [5] pour une explication théorique. Le lecteur intéressé trouvera en [13] une excellente présentation générale.



(a) Famille d'estimateurs avec $nT_e = \sqrt{5 \cdot 10^{-10}}$



(b) Famille d'estimateurs avec $nT_e = 5 \cdot 10^{-10}$

FIGURE 1 – Famille d'estimateurs de la dérivée avec $N = 2$ et paramètres nT_e différents

TABLE 1 – Résumé des figures 1a et 1b

Figure	nT_e	f_c	$\log_{10} nT_e$	$\log_{10} f_c$
1a	$\sqrt{5 \cdot 10^{-10}}$s	$2.73 \cdot 10^4$Hz	-4.65	4.44
1b	$5 \cdot 10^{-10}$s	$1.22 \cdot 10^9$Hz	-9.30	9.09

3.2 Exemple de prédiction

La figure 2 présente un résultat de simulation pour $n_2 T_{e_2} = 10^{-6}$s et un nombre d'échantillons n variant entre 1 et 50. Les fréquences de coupure obtenues sont dans l'intervalle $[5 \cdot 10^5; 7.21 \cdot 10^5]$Hz, soit en moyenne $6.11 \cdot 10^5$Hz. Or, la valeur prédite de f_{c_2} d'après l'équation (10) où f_{c_1} et $n_1 T_{e_1}$ sont donnés par le cas 1a du tableau 1 vaut :

$$f_{c_2} \approx 10^{\frac{4.44 \cdot \log_{10}(10^{-6})}{-4.65}} = 5.29 \cdot 10^5\text{Hz} \qquad (11)$$

ce qui donne une erreur tout à fait convenable par rapport à la moyenne : $\frac{|5.29 \cdot 10^5 - 6.11 \cdot 10^5|}{6.11 \cdot 10^5} \cdot 100 = 13.35\%$. Ainsi, la formule empirique (10) permet de prédire avec une bonne précision la fréquence de coupure de l'estimateur pour un choix donné de n et T_e.

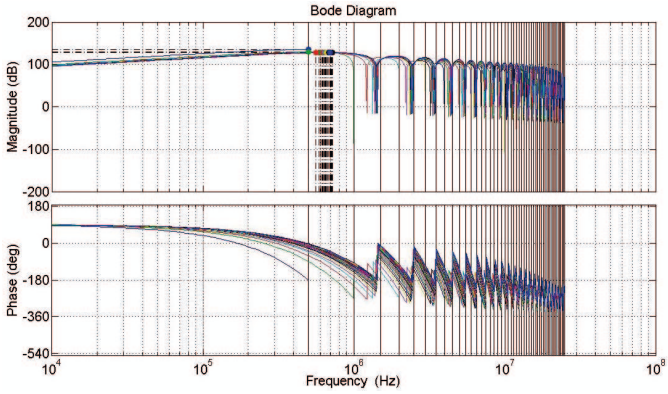


FIGURE 2 – Prédiction de la réponse en fréquence pour des estimateurs avec $nT_e = 10^{-6}$

4 Application à l'automobile

Ces dérivateurs numériques sont recommandés pour des systèmes bruités car le lissage dû à l'intégrale peut être optimisé pour chaque application, en faisant varier N, comme déjà expliqué. Cette caractéristique permet de ne pas installer de filtres supplémentaires, ce qui est capital pour réduire le temps de calcul, notamment dans des applications temps réel.

Examinons les performances grâce à un essai concret : l'estimation de l'accélération longitudinale d'une voiture à partir de la vitesse longitudinale[5]. Deux capteurs ont été embarqués, l'un pour mesurer l'accélération, l'autre la vitesse. Les données enregistrées permettent la comparaison suivante :

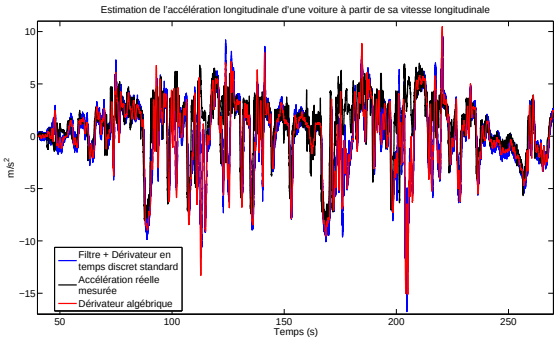
- On a utilisé, pour estimer l'accélération,
  - un filtre, ici une *moyenne mobile*, et un dérivateur en temps discret classique de *Matlab/Simulink*,
  - un dérivateur algébrique.
- On a représenté l'accélération réelle mesurée par le capteur embarqué et les deux accélérations estimées.

La figure 3a montre en bleu l'estimation donnée par le dérivateur en temps discret. Elle est tellement bruitée que les résultats ainsi calculés sont inexploitables. Dans la figure 3b on a zoomé la figure pour mieux comparer les estimations avec l'accélération réelle. On note les propriétés suivantes :

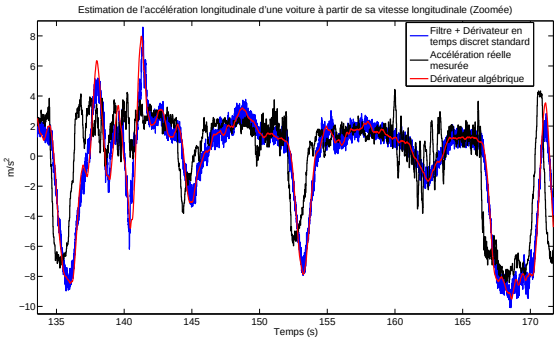
1. L'allure de la courbe du dérivateur algébrique présente une bonne ressemblance avec l'accélération réelle.
2. La courbe est la plus douce car le dérivateur algébrique a filtré la plupart des bruits.
3. On a dû placer un filtre avant le dérivateur standard pour débruiter le signal alors que l'estimateur algébrique n'en a nul besoin.
4. Les estimations des dérivateurs algébriques sont decalées par rapport à l'accélération réelle, comme annoncé en remarque 1.

On a utilisé un dérivateur algébrique issu d'un polynôme du premier ordre, avec $N = 2$ pour introduire l'effet de filtrage de l'intégrale et $nT_e = 200 \cdot 0.005 = 1$s comme taille de la fenêtre d'intégration. On a pris la même fenêtre pour le filtre auxiliaire du dérivateur en temps discret. La période d'échantillonnage est la plus réduite que le capteur puisse satisfaire.

5. Voir [17, 18] pour davantage de détails sur ce type d'applications.



(a) Comparaison entre les deux estimations et l'accélération réelle



(b) Détail zoomée de la figure précédente. Comparaison entre les deux estimations et l'accélération réelle

FIGURE 3 – Application d'un dérivateur algébrique pour estimer l'accélération longitudinale d'une voiture

Les 200 échantillons ont été choisis pour observer le décalage entre signal réel et estimation.

5 Conclusion

Il n'existe aucune difficulté pour étendre ce qui précède aux estimateurs paramétriques de [6, 11, 14]. Les comparaisons du § 4 confirment l'intérêt de ces nouveaux estimateurs en *analyse technique* (*cf.* [2]), qui est un domaine de la finance quantitative, populaire chez beaucoup de professionnels, comme les *traders*, car, rappelons-le, les moyennes mobiles y jouent un rôle essentiel pour déterminer les *tendances*.

Références

[1] K.J. Åstrom, B. Wittenmark, *Computer-Controlled Systems: Theory and Design* (3rd ed.), Prentice-Hall, 1996.

[2] T. Béchu, E. Bertrand, J. Nebenzahl, *L'analyse technique* (6e éd.), Economica, 2008.

[3] M. Bellanger, *Traitement numérique du signal* (8e éd.), Dunod, 2006.

[4] G. Fedele, F. Chiaravalloti, C. Join, An algebraic derivative-based approach for the zero-crossings estimation, *17th Europ. Signal Processing Conf.*, Glasgow, 2009. `http://hal.inria.fr/inria-00389872/fr/`

[5] M. Fliess, Analyse non standard du bruit, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, **342**, 2006, p. 797-802.

[6] M. Fliess, Critique du rapport signal à bruit en communications numériques, *ARIMA*, **9**, 2008, p. 419-429. `http://hal.inria.fr/inria-00311719/fr/`

[7] M. Fliess, C. Join, Commande sans modèle et commande à modèle restreint, *e-STA*, **5**, 2008, n° 4, p. 1-23. `http://hal.inria.fr/inria-00288107/fr/`

[8] M. Fliess, C. Join, Towards new technical indicators for trading systems and risk management, *15th IFAC Symp. on System Identif.*, Saint-Malo, 2009. `http://hal.inria.fr/inria-00370168/fr/`

[9] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, H. Sira-Ramírez, Compression différentielle de transitoires bruités, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, **339**, 2004, p. 821-826.

[10] M. Fliess, C. Join, H. Sira-Ramírez, Non-linear estimation is easy, *Int. J. Model. Identif. Control*, **4**, 2008, p. 12-27. `http://hal.inria.fr/inria-00158855/fr/`

[11] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, An algebraic framework for linear identification, *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, **9**, 2003, p. 151-168.

[12] C. Join, S. Tabbone, Robust curvature extrema detection based on new numerical derivation, *Advanced Concepts Intelligent Vision Systems*, Juan-les-Pins, 2008. `http://hal.inria.fr/inria-00300799/fr/`

[13] C. Lobry, T. Sari, Nonstandard analysis and representation of reality, *Int. J. Control*, **81**, 2008, p. 517-534.

[14] M. Mboup, Parameter estimation via differential algebra and operational calculus, *Manuscrit*, 2006. `http://hal.inria.fr/inria-00138294/fr/`

[15] M. Mboup, C. Join, M. Fliess, Numerical differentiation with annihilators in noisy environments, *Numer. Algor.*, **50**, 2009, p. 439-467.

[16] A.V. Oppenheim, R.W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1999.

[17] J. Villagra, B. d'Andréa-Novel, M. Fliess, H. Mounier, Estimation of longitudinal and lateral vehicle velocities: an algebraic approach, *Amer. Control Conf.*, Seattle, 2008. `http://hal.inria.fr/inria-00263844/fr/`

[18] J. Villagra, B. d'Andréa-Novel, M. Fliess, H. Mounier, Synthèse algébrique d'estimateurs de vitesses longitudinale et latérale d'une automobile, *e-STA*, **5**, 2008, n° 3, p. 12-27. `http://hal.inria.fr/inria-00289015/fr/`

[19] K. Yosida, *Operational Calculus: A Theory of Hyperfunctions* (traduit du japonais), Springer, 1984.