



**HAL**  
open science

## Modèle graphique ou champ Markovien Gaussien en image : estimation du graphe de voisinage

Rania Bengrich, Dhafer Malouche, Sylvie Sevestre-Ghalila

► **To cite this version:**

Rania Bengrich, Dhafer Malouche, Sylvie Sevestre-Ghalila. Modèle graphique ou champ Markovien Gaussien en image : estimation du graphe de voisinage. 41èmes Journées de Statistique, SFdS, Bordeaux, 2009, Bordeaux, France, France. inria-00386779

**HAL Id: inria-00386779**

**<https://inria.hal.science/inria-00386779v1>**

Submitted on 22 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# MODÈLE GRAPHIQUE OU CHAMP MARKOVIEU GAUSSIEN EN IMAGE : ESTIMATION DU GRAPHE DE VOISINAGE

Rania Bengrich & Dhafer Malouche & Sylvie Sevestre-Ghalila

*U2S-ENIT, Université El Manar, Tunisie*

*Laboratoire MAP5, Université Paris Descartes, France.*

## Abstract

Le recours aux champs Markoviens en modélisation d'image a connu un grand succès vu qu'ils permettent de traduire les interactions spatiales entre les niveaux des pixels par leur graphe de voisinage. Ce dernier les fait appartenir à la classe des modèles graphiques, dont l'utilisation s'avère de plus en plus importante dans plusieurs domaines. Nous proposons alors, dans ce travail, d'associer les deux notions : modélisation graphique et champs de Markov dans le but d'estimer le graphe de voisinage d'un champ Markovien gaussien, pour les textures en image. En effet, en image, et pour les textures en particulier, le graphe de voisinage du champ Markovien est supposé être périodique vu sa stationnarité. C'est la répétition de la même période spatiale dont l'estimation permet de déduire la structure du graphe de voisinage global. Pour ce faire, nous avons recours aux méthodes de la modélisation graphique, tout en tenant en considération l'*a priori* sur la structure de tel graphe. Nous évaluons notre estimation à l'aide des taux d'erreur introduits par Dudoit, Land et Pollard (2004).

## Abstract

Markov Random fields have found widespread use in modeling image. They allow to describe spatial interaction between level's pixel, by their neighbor's graph. Since, Markov random field is assumed to be an undirected graphical model. That's why we propose to associate these two concepts : Markov random fields and graphical model to estimate the neighbor's graph of a gaussian Markov random field, for texture in image. In fact, the neighbor's graph is to be periodic since Markov random field is to be stationary for image. It is a repetition of the same spatial period which estimation allows to deduce the global one. For this, we use graphical methods and we take the *a priori* structure of this graph into account. For the method evaluation, we use the error rates induced by Dudoit, Land et Pollard (2004).

## 1 Introduction

Les champs Markoviens trouvent en image un vaste domaine d'application. Le recours à ces champs a connu un grand succès en image avec Besag

(1974), Geman et Graffigne (1996), Chalmond (2000)... En effet, ils constituent un outil performant pour la segmentation d'image (Cesmeli et Wang (2001)), la reconstruction 3D (Pellet, Bloch, Herment et Sured (1996)) et l'analyse tomographique (Retraint, Peyrin et Dinten (1998)). Modéliser la texture par un champ Markovien permet de traduire les interactions entre pixels. Celles à considérer sont formalisées par le graphe de voisinage dont l'étendue est quantifiée par l'ordre du champ.

En pratique, cet ordre est généralement choisi subjectivement par le traicteur d'image. En effet, sa détermination peut être obtenue par la significativité des paramètres du champ. C'est l'idée de Gimel'farb (1996) qui utilise l'analogie paramètres d'interaction du champ avec les matrices de cooccurrence. On peut aussi citer les travaux de Stan, Palubinskas et Datcu (2002) qui utilisent une loi a priori sur les paramètres pour estimer l'ordre du champ dans le contexte Bayésien.

Par son graphe de voisinage, un champ Markovien est aussi un modèle graphique (Frey et Jojic (2005)) où le graphe de voisinage n'est autre que le graphe non orienté de ce modèle. Il traduit donc les relations d'indépendances conditionnelles entre les diverses variables du champ Markovien.

C'est pourquoi nous proposons d'exploiter les outils de la modélisation graphique pour extraire la structure du graphe de voisinage dans le cas Gaussien de part son succès en image et en modélisation graphique.

## 2 Champ Markovien : Un modèle graphique

Soient  $S \subset \mathbb{Z}^2$  une grille régulière, et  $(X_s, s \in S)$  un champ Markovien prenant ses valeurs dans un espace d'états  $E^{|S|}$ . Par définition, un tel champ vérifie la propriété de Markov suivante :  $\forall s \in S$  et  $\forall x \in E^{|S|}$ , on a

$$P(X_s = x_s \mid X_r = x_r, r \neq s) = P(X_s = x_s \mid X_r = x_r, r \in \mathcal{N}_s)$$

où  $\mathcal{N}_s$  est l'ensemble des voisins du site  $s$ . L'étendue du voisinage du site  $s$  permet de définir l'ordre du champ. Il est réduit aux quatre plus proches voisins dans le cas du premier ordre, aux huit plus proches sites pour l'ordre 2... La structure du voisinage est représenté par un graphe non orienté  $\mathcal{G} = (\mathcal{V} = S, \mathcal{E} \subseteq S \times S)$  dit *graphe voisinage*.

Pour permettre l'estimation des paramètres du champ en image, ce dernier est supposé stationnaire. Le graphe de voisinage est alors la répétition du même sous graphe ou période spatiale, qui traduit l'interaction entre les niveaux des pixels. La figure 1 représente le graphe de voisinage et sa période pour différents ordre.

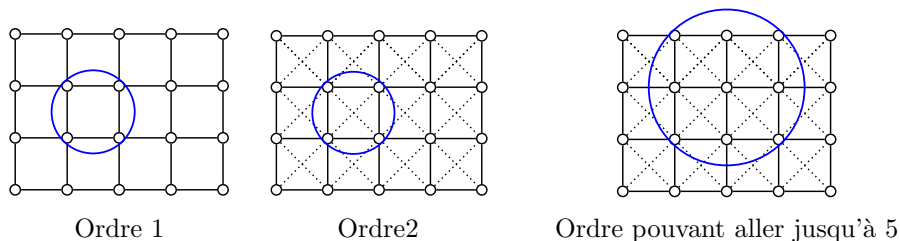


Figure 1: Pour les ordres 1,2 et 5 : graphe de voisinage et une période entourée

Un modèle graphique associé à un graphe non orienté étant une famille de probabilité sur un vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_{|S|}) \in E^{|S|}$  vérifiant

$$\forall s, u \in S, \text{ if } s \not\sim_G u \Rightarrow X_s \perp\!\!\!\perp X_u \mid X_{-su}$$

Un champ Markov est un modèle graphique dont le graphe est le graphe de voisinage du champ.

La mise en œuvre de l'outil champ Markovien en image par l'hypothèse de positivité sur la mesure qui, de part le théorème d'Ahmersley-Clifford, conduit à l'équivalence des 3 propriétés de Markov ((Guyon (1993), Lauritzen 1996)). Un champ Markovien en image vérifie alors la propriété de Markov globale par sa positivité.

### 3 Estimation du graphe de voisinage

La notion de périodicité du graphe de voisinage dans le cas stationnaire a été utilisée par Eichler (2008) dans le cas unidimensionnel. Nous proposons ici de l'étendre au cas bidimensionnel.

L'idée est donc de déterminer une période du graphe pour pouvoir conclure de la structure du graphe de voisinage du champ Markovien. C'est pourquoi nous proposons ici d'estimer une période du graphe supposé ici de taille maximale égale à  $p = 3 \times 3$  pixels permettant alors d'estimer une période du graphe de voisinage d'un champ dont l'ordre peut aller jusqu'à l'ordre 5.

On subdivise alors la texture Markovienne en  $n$  fenêtres  $\{w_1, \dots, w_n\}$  de taille  $p = 3 \times 3$ . Chaque fenêtre étant choisie séparées par l'ensemble des voisins des pixels qui la compose. Chaque  $(w_i)$  est choisie séparée des fenêtres voisines par l'ensemble des voisins de ses pixels  $\mathcal{N}_{w_i}$ .

Ainsi, les variables  $Y_w = (X_w | X_{\mathcal{N}_w} = x_w)$  sont alors indépendantes.

Par la simplicité de mise en œuvre, nous supposons que  $X = (X_s, s \in S)$  est un champ Markovien Gaussien centré. Par conséquent, pour

chaque fenêtre  $w \in (w_1, \dots, w_n)$  le vecteur  $Y_w$  est un modèle graphique Gaussien, de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\Gamma = \frac{1}{\sigma^2}B$  où  $B$  est la matrice des paramètres d'interaction entre les pixels (Besag (1974)). Ainsi,  $(Y_{w_1}, \dots, Y_{w_n})$  constitue un  $n$ -échantillon de  $Y_w$ .

L'estimation du graphe du modèle correspondant aux données extraites revient à tester la présence ou l'absence d'arête liant deux pixels. La structure symétrique du graphe de voisinage d'un champ Markovien illustre la répétition d'un même type d'arêtes pour un ordre donné. Ceci est expliqué par la structure de la matrice des paramètres  $B$  (Guyon (1974)). Nous nous limitons alors à tester la nullité des paramètres du champ différents. Nous nous intéressons à des ordres du champ ne dépassant pas 5. Nous avons donc 12 tests à effectuer.

Les méthodes d'estimation de la modélisation graphique se basent sur des tests de vraisemblance. Pour ce faire, nous commençons par établir son expression, en tenant compte de la forme particulière du modèle Markovien Gaussien (Besag 1974) dont la densité jointe du vecteur  $Y_w$  s'écrit :

$$f_{Y_w}(y) = |2\pi\Gamma|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{s \in w} y_s^2 - \sum_{s \in w} y_s \sum_{r \in \mathcal{N}_s} \beta_{rs} y_r \right] \right\}$$

La vraisemblance s'écrit par la suite

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, B, \sigma) = & -\frac{np}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{n}{2} \ln \det(B) \\ & -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{w \in (w_1, \dots, w_n)} \sum_{s \in w} y_{w_s}^2 - \sum_{w \in (w_1, \dots, w_n)} \sum_{s \in w} y_{w_s} \sum_{r \in \mathcal{N}_s} \beta_{rs} y_{w_r} \right] \end{aligned}$$

La statistique du test du rapport de vraisemblance suit un  $\chi^2$  de degré de liberté égale aux nombre de paramètres à tester. Nous utilisons la méthode des tests multiples en se référant à la méthode d'ajustement des  $p$ -valeurde Holm (1979). Cette méthode a été utilisée en modélisation graphique pour l'approche *SIN* (Drton et Perlman (2007)).

## 4 Expérimentations

A l'aide de l'échantillonneur de Gibbs, nous simulons des textures Markoviennes, en tenant compte de la condition de Dobrushin lors du choix des paramètres du champ pour garantir d'éviter la transition de phase. Nous adoptons, en outre, l'hypothèse des bords toriques (Guyon (1993)).

Nous appliquons la méthode proposée à des échantillons de 1000 textures de taille  $64 \times 64$  pixels, d'ordre 2 et de paramètres données dans la figure 2.

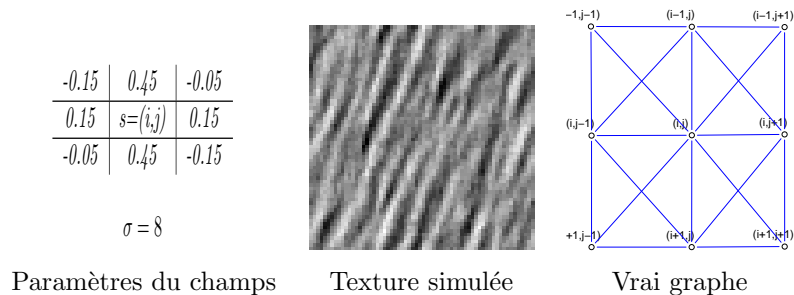


Figure 2: Simulation d'un champ Markovien Gaussien d'ordre 2.

Pour évaluer les méthodes présentées, nous comparons le graphe estimé au vrai graphe. Pour ce faire, nous avons recours aux taux d'apparition des arêtes introduits par Dudoit, Land et Pollard (2004), à savoir le *true discovery rate (TDR)*, *true positive rate (TPR)*, le *false positive rate (FPR)* et le *false discovery rate*. Nous y ajoutons le taux d'obtention du vrai graphe *TVG*.

La table ci-dessous permet d'apprécier la qualité des résultats. Com-

TDR	TPR	FPR	FDR	TVG
0.963	0.993	0.024	0.037	0.818

parés à ceux obtenus par l'application brute des techniques graphiques utilisées aux observations de  $Y_w$ , l'introduction de la structure *a priori* du graphe de voisinage dans la vraisemblance a permis une amélioration sensible de l'estimation du graphe. De plus, elle a permis aussi de réduire le nombre de tests à élaborer à celui des paramètres du champ ce qui bien sûr diminue le temps calcul.

## Bibliographie

- [1] Besag, J.E. (1974), *Spatial interaction and statistical analysis*. Remote Sensing Technology Institute, German Aerospace Center (DLR).
- [2] Pellot, C., Bloch, I., Herment, A., and Sureda, F. (1996). *An attempt to 3D reconstruct vessel morphology from x-ray projections and intravascular ultrasounds modeling and fusion*. Computerized Medical Imaging and Graphics, 20(3), 119185.
- [3] Cesmeli, E. et Wang, D.L. (2001). *Texture segmentation using gaussian-Markov random fields and neural oscillator networks*. IEEE Transactions on neural networks, 12(2), 394404.
- [4] Chalmond, B. (2000). *Éléments de modélisation pour l'analyse d'images (Mathématiques et Applications)*. Springer Verlag.
- [5] Krishnamachari, S. and Chellappa, R., (1997). *Multiresolution*

- Gauss-Markov random field models for texture segmentation*. IEEE Transactions on image processing, 6(2), 251-267.
- [6] Stan, S., Palubinskas, G. and Datcu, M. (2002). *Bayesian selection of the neighbourhood order for Gauss-Markov texture models*. J. Roy. Statist. Soc. B-36, 192-236.
- [7] Retraint, F., Peyrin, F., Dinten, J.M. (1998), *3D regularized binary image reconstruction from three 2D projections using a randomized ICM algorithm*. Int. J. Imaging Systems and Technology, 9(2-3), 135-146.
- [8] Drton, M. and Perlman, M. D. (2007). *A SINful approach to Gaussian graphical model selection*. J. Statist. Plann. Inference. To appear.
- [9] Dudoit, S., van der Laan, M.J. and Pollard, K. S. (2004). *Multiple testing. Part I. Single-step procedures for control of general Type I error rates*. Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology, 3(1):Article 13.
- [10] Edwards, D. (2000), *Introduction to Graphical Modelling*. Second Edition, Springer.
- [11] Eichler, M. (2008), *Learning causal structures in multivariate time series*. Mathematical Aspects of Graphical Models.
- [12] Frey, B.J and Jojic, N., (2005). *A comparison of algorithms for inference and learning in probabilistic graphical models*. IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, 27(9), 1392-1416.
- [13] Geman, S. et Graffigne, C. (1986). *Markov random field image models and their applications to computer vision*. In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 14961517, Berkley, California
- [14] Gimel'farb, G.L. (1996), *Texture modeling by multiple pairwise pixel interactions*. IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, 18(11), 1110-1114.
- [15] Guyon, X., (1993). *Champs aléatoires sur un réseau, modélisation, statistique et applications*. Masson.
- [16] Holm, S. (1979), *A simple sequentially rejective multiple test procedure*, Scand. J. Statist 6, 65-70.
- [17] Lauritzen, S.L. (1996). *Graphical models*. Oxford Statistical Science Series, Clarendon Press, Oxford, UK.