Formulation économique d'une carte de contrôle aux attributs utilisant une taille d'échantillonnage variable

Imen Kooli, Mohamed Limam

▶ **To cite this version:**

Imen Kooli, Mohamed Limam. Formulation économique d'une carte de contrôle aux attributs utilisant une taille d'échantillonnage variable. 41èmes Journées de Statistique, SFdS, Bordeaux, 2009, Bordeaux, France, France. inria-00386597

HAL Id: inria-00386597

https://inria.hal.science/inria-00386597

Submitted on 22 May 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FORMULATION ECONOMIQUE D'UNE CARTE DE CONTROLE AUX ATTRIBUTS UTILISANT UNE TAILLE D'ECHANTILLONNAGE VARIABLE

Imen Kooli & Mohamed Limam

Laboratoire de Recherche Opérationnelle, de Décision et de Contrôle de processus.
Institut Supérieur de Gestion de Tunis. 2000 Le Bardo. Tunisie.

ABSTRACT

The design of a control chart requires the specification of three decision variables, namely the sample size, *n*, the sampling interval, *h*, and the action limit under which the process must be stopped for potential repair. When at least one decision variable is allowed to vary from an inspection time to another, the related chart is called an adaptive control chart. Many researches have shown that adaptive control charts are more effective than the traditional static charts in detecting process shifts and yields also lower costs. Papers dealing with the economic design have been concentrated on the case where variable control charts are used to monitor the process. In this presentation, an attribute control chart specially an *np* chart using a variable sample size is treated. The economic formulation of the adaptive *np* chart is developed and the optimal designs minimizing the cost per hour are found. In order to detect how the input parameters affect decision variables, an experimental design where each factor takes two possible levels is conducted. We found that the use of the proposed chart leads always to a reduction in cost.

RESUME

L'implémentation d'une carte de contrôle nécessite la détermination de trois variables de décision, à savoir, la taille de l'échantillon, *n*, le temps de prise du prochain échantillon, *h*, et la limite de contrôle au dessus de laquelle le procédé sera arrêté pour réglage. Lorsque au moins une des variables de décision peut varier d'un temps de prélèvement à un autre, la carte sera référencié une carte dynamique. Plusieurs recherches ont trouvé que les cartes de contrôle dynamiques sont plus performantes que les cartes traditionnelles à paramètres fixes en ce qui concerne la détection des changements du processus et qu'elles fournissent aussi un moindre coût. Les travaux antérieurs concernant l'implémentation économique, n'avaient traité que le cas où une carte aux mesures est adoptée pour le contrôle du procédé. Dans cette présentation, une carte de contrôle aux attributs, plus spécifiquement, la carte *np* où la taille de l'échantillon est variable est traitée. La formulation économique de la carte *np* dynamique est développée et les variables de décision optimales qui minimisent le coût par heure sont déterminées. Pour déceler l'impact des inputs du modèle sur le comportement des variables de décision, un plan d'expérience dans lequel chaque facteur prend deux niveaux possibles est généré. Nous avons trouvé que l'emploi de la carte proposée résulte dans tous les cas en un gain en coût.

Mots-clés : Statistique des processus, Qualité.

INTRODUCTION

Une carte de contrôle est l'un des outils de base utilisé pour la maîtrise statistique des procédés. Elle permet de visualiser la variabilité du procédé de production en distinguant les causes aléatoires des causes assignables.

Pour implémenter une carte de contrôle, l'opérateur doit spécifier les trois variables de décision suivantes : la taille de l'échantillon à prendre, le temps de prise du prochain échantillon et la position des limites de contrôle. Dans la littérature, il existe deux approches pour la détermination des variables de décision optimales, à savoir, l'approche statistique et l'approche économique.

Selon l'approche statistique, les variables de décision optimales sont ceux qui minimisent la période opérationnelle moyenne (POM) de la carte de contrôle.

Etant donné que d'une part, l'utilisation d'une carte de contrôle engendre différents coûts tel que le coût d'échantillonnage, le coût des fausses alertes, le coût de restitution du procédé dans le bon état, et d'autre part que l'objectif de la plupart des entreprises étant de minimiser les coûts subis, il serait plus commode d'adopter l'approche économique. Dans ce cas, les variables de décision optimales seront choisies tel que le coût d'utilisation de la carte de contrôle est à sa valeur minimale.

La formulation économique des cartes de contrôle était initialement traitée par Duncan (1956) et ce pour les cartes de contrôle aux mesures $\overline{X}$. Depuis, plusieurs recherches ont traité la formulation économique. Une revue de la littérature des différents résultats était traitée par Montgomery (1980). Les modèles présentés concernaient le cas où les trois variables de décision sont maintenues à la même valeur pendant le contrôle du procédé.

Les travaux récents ont prouvé que lorsque au moins une des variables de décision peut varier de l'instant t à l'instant $t+1$ selon le positionnement de la statistique étudiée à l'instant t sur la carte de contrôle, cette modification aura un impact bénéfique sur les propriétés statistiques et engendrera un coût moindre que celui obtenu si une carte à paramètres fixes est implémentée.

Reynolds et al. (1988) ont été les premiers auteurs à proposer une carte de contrôle $\overline{X}$ dynamique où le temps de prise du prochain échantillon dépend de la position de la statistique actuelle sur la carte de contrôle. Ils ont trouvé que la carte proposée réduit le temps nécessité pour déclarer un déréglage du procédé lorsque celui-ci opère dans l'état hors contrôle.

Ultérieurement, Prabhu et al. (1993) ont développé une carte $\overline{X}$ où la taille de l'échantillon à prendre lors du prochain prélèvement est choisie parmi deux valeurs possibles n_1 et n_2. La carte proposée permet de réduire la POM. La formulation économique de ce type de carte été traité par Park et Reynolds (1994).

Dans un travail subséquent, Zimmer et al. (1998) ont traité le cas où la taille du prochain échantillon peut être choisie parmi trois valeurs possibles n_1, n_2 et n_3. Ils ont conclu que le fait d'utiliser trois valeurs possibles donne des valeurs de la POM très proche de ceux obtenus si seulement deux valeurs sont permises.

Les cartes aux attributs, spécialement la carte np sont utilisées lorsque l'opérateur voudrait contrôler le nombre d'unités non conformes présent dans un échantillon. La formulation économique de la carte np à paramètres fixes été traité par Duncan (1978). Les propriétés statistiques des cartes np dynamiques ont été étudiées par Epprecht et al. (2003), Wu et Luo (2002) et Wu et Luo (2004). La formulation économique des cartes np dynamiques n'était pas traitée auparavant.

Dans le cadre de cette présentation, nous allons proposer un modèle économique pour les cartes aux attributs employant une taille d'échantillonnage variable. Nous mesurerons aussi le gain en coût par rapport à la carte classique où les paramètres sont maintenus au même niveau.

DESCRIPTION DE LA CARTE NP DYNAMIQUE

Comme décrit par la Figure 1, la carte de contrôle est divisée en trois régions : I_1, I_2 et I_3. La limite de contrôle additionnelle d_2 est utilisée afin de pouvoir choisir la taille du prochain échantillon parmi deux valeurs possibles n_1 et n_2 avec $n_1 \leq n_2$.

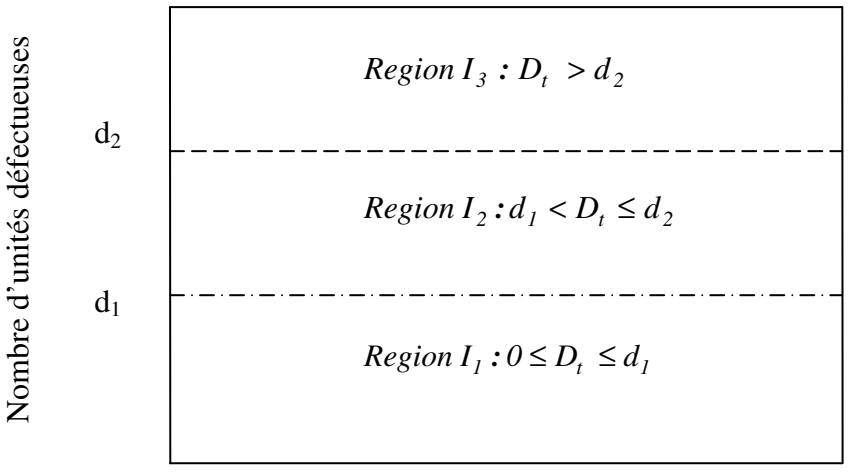

Figure 1 : Opération de la carte np avec une taille d'échantillonnage variable

Si à un instant donné, la statistique reportée sur le graphique se trouve au dessous de la limite supérieure, le processus sera déclaré maîtrisé sinon il sera identifié comme étant non maîtrisé et dans ce cas des actions doivent être prises afin qu'il retourne dans le bon état.

Soient
D_t : Le nombre d'unités défectueuses observées au $t^{ième}$ prélèvement,
et
N_{t+1} : La taille de l'échantillon à prendre à l'instant $t+1$.

Il s'en suit que N_{t+1} peut être exprimé en fonction de D_t comme suit :

$$N_{t+1} = \begin{cases} n_1 & si \quad D_t \in I_1 \\ n_2 & si \quad D_t \in I_2 \end{cases} \qquad \text{Avec } D_t \sim BIN(n_t, p_k)$$

Où $k = 0$ si le processus opère sous contrôle et $k = 1$ si le processus se trouve dans l'état hors contrôle, avec $p_1 > p_0$.

Il est à noter que la taille du premier échantillon à prendre sera égale à la valeur n_2. La même valeur sera utilisée aussi après chaque fausse alerte (Park et Reynolds (1994)). Si à un instant donné, la statistique D_t se trouve dans la région I_3, le processus sera arrêté afin d'identifier la cause du déréglage du procédé de fabrication.

Etant donné que la loi de D_t dépend du positionnement de la statistique D_{t-1} sur la carte, les chaînes de Markov seront employées pour décrire l'évolution du processus stochastique D_t, $t \geq 1$. Selon l'état k $(k = 0,1)$ du procédé de production, la matrice de transition de l'instant t à l'instant t+1 sera la suivante :

$$P_k = \begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & p_{13}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & p_{23}^{(k)} \\ p_{31}^{(k)} & p_{32}^{(k)} & p_{33}^{(k)} \end{pmatrix} \quad k = 0, 1.$$

Avec $p_{ij} = P(D_k \in I_j / D_{k-1} \in I_i)$, $i, j = 1,2,3$. Plus précisément on aura :

$$p_{i1}^{(k)} = \sum_{x=0}^{d_1} C_x^{n_i} p_k^x (1 - p_k)^{n_i - x},$$

$$p_{i2}^{(k)} = \sum_{x=d_1+1}^{d_2} C_x^{n_i} p_k^x (1 - p_k)^{n_i - x},$$

et

$$p_{i3}^{(0)} = 1 - p_{i1}^{(0)} - p_{i2}^{(0)}.$$

Il est à signaler que si le processus fonctionne dans l'état hors contrôle, l'état *3* sera un état absorbant.

Lorsqu'on s'intéresse à l'implémentation économique, l'opération d'une carte de contrôle est généralement décrite par des cycles de production formés d'une période maîtrisé suivi d'une période de déréglage. La Figure 2 montre la composition d'un cycle de production. Lorsque la cause assignable est détectée, un nouveau cycle commence.

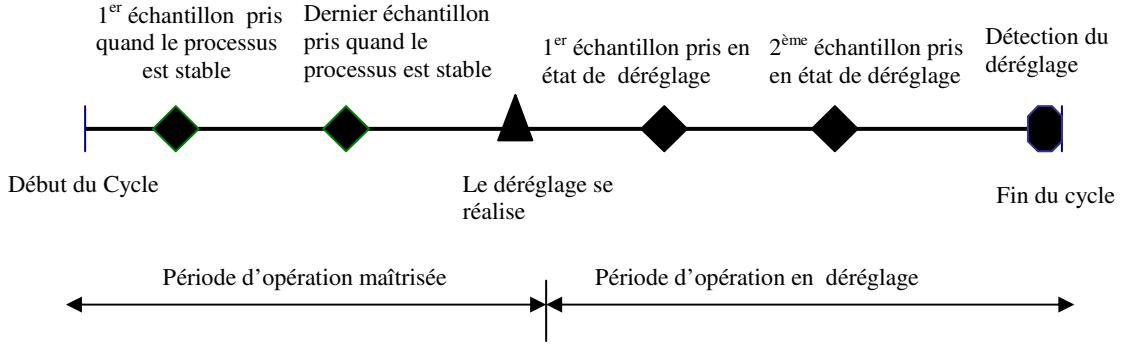

Figure 2 : Composition d'un cycle de production.

Afin d'établir la formulation économique, les notations suivantes doivent être déterminées :
L_0 : Coût d'une fausse alerte subi si le procédé est arrêté alors qu'il fonctionne dans le bon état.
L_1 : Coût de restitution du procédé dans le bon état.
Le coût d'échantillonnage inclut une composante fixe, b , et une composante variable, c.
M : Coût par heure subi lors de la production d'unités non conformes sachant que le processus fonctionne en mode de déréglage.

Les paramètres suivants liés au fonctionnement du procédé doivent aussi être évaluées :
λ : Fréquence de réalisation du déréglage.
p_0 : Proportion d'unités non conformes si le processus se trouve dans l'état maîtrisé.
p_1 : Proportion d'unités non conformes si le processus se trouve dans l'état non maîtrisé.

Soit $S = \{L_0, L_1, M, b, c, \lambda, p_0, p_1\}$ .Une fois l'ensemble S est spécifié, les termes suivants doivent être modélisés :
$E(CL_0)$: Durée espérée de la période maîtrisée.
$E(S_0)$: Nombre d'échantillons pris pendant la période maîtrisée.
$E(O_0)$: Nombre d'observations prises pendant la période maîtrisée.
$E(CL_1)$: Durée espérée de la période de déréglage.
$E(S_1)$: Nombre d'échantillons pris pendant la période de déréglage.
$E(O_1)$: Nombre d'observations prises pendant la période de déréglage.
Le coût total par cycle de production sera alors :
$$E(TC) = b * [E(S_0) + E(S_1)] + c * [E(O_0) + E(O_1)] + L_0 * \alpha * E(S_0) + M * h * [E(S_1) - \tau] + L_1$$
avec
h : Le nombre d'heures séparant deux échantillons successives,
et
τ : Le temps espéré d'occurrence de la cause assignable.
L'espérance de la durée du cycle de production est :
$E(CL) = E(CL_0) + E(CL_1)$.
Il s'en suit que le coût par unité de temps est :
$E(TCU) = E(TC) / E(CL)$.
L'étape suivante sera de déterminer les cinq variables de décision optimales : $d_1^*, d_2^*, n_1^*, n_2^*$ et h^* .

Nous avons modélisé la fonction de coût unitaire. Pour déceler l'impact des inputs sur le comportement des solutions optimales, nous avons conduit un plan d'expérience où chaque facteur de l'ensemble S peut prendre deux niveaux, un niveau faible et un niveau élevé. Nous avons trouvé que la carte dynamique aboutit toujours à un gain en coût par rapport à la carte à paramètres fixes.

Bibliographie

[1] Duncan, A.J. (1956) The economic design of $\overline{X}$ charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(274), 228–242.

[2] Montgomery, D.C. (1980) The economic design of control charts: A review and literature survey. *Journal of Quality Technology*, 12(2), 75–87.

[3] Reynolds, M.R., Amin, R.W., Arnold, J.C. et Nachlas, J.A. (1988) $\overline{X}$ charts with variable sampling interval. *Technometrics,* 30(2), 181–192.

[4] Prabhu, S.S., Runger, G.C. et Keats, J.B. (1993) $\overline{X}$ chart with adaptive sample sizes. *International Journal of Production Research*, 31(12), 2895-2909.

[5] Park, C. et Reynolds, M.R. (1994) Economic design of a variable sample size $\overline{X}$ chart. *Communications in Statistic and Simulation,* 32(2):467–483.

[6] Zimmer, L.S., Montgomery, D.C. et Runger G.C. (1998) Evaluation of a Three-state adaptive sample size $\overline{X}$ control charts. *International Journal of Production Research*, 36(3), 733-743.

[7] Duncan, A.J. (1978) The economic design of *p* charts to maintain current control of a process: Some numerical results. *Technometrics*, 20(3):235–243.

[8] Epprecht, E.K., Costa A.F.B. et Mendes, F.C.T. (2003) Adaptive control charts for attributes. *IIE Transactions*, 35:567–582.

[9] Wu Z. et Luo, H. (2002) Optimal *np* control charts with variable sample sizes or variable sampling intervals. *Economic Quality Control,* 17(1), 39–61.

[10]. Wu Z. et Luo H. (2004) Optimal design of the adaptive sample size and sampling interval *np* control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 20,553–570.