



**HAL**  
open science

## Mesures aléatoires banachique. Application aux séries stationnaires

Tawfik Benchikh, Alain Boudou, Yves Romain

► **To cite this version:**

Tawfik Benchikh, Alain Boudou, Yves Romain. Mesures aléatoires banachique. Application aux séries stationnaires. 41èmes Journées de Statistique, SFdS, Bordeaux, 2009, Bordeaux, France, France. inria-00386579

**HAL Id: inria-00386579**

**<https://inria.hal.science/inria-00386579>**

Submitted on 22 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mesures aléatoires opératorielle et banachique. Application aux séries stationnaires

Tawfik BENCHIKH<sup>1a,1b</sup>, Alain BOUDOU<sup>2</sup>, Yves ROMAIN<sup>3</sup>

<sup>1a,2,3</sup> Laboratoire de Statistique et Probabilités, UMR CNRS C55830, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex. France.

<sup>1b</sup>LDM, Université Djilali Liabes BP 89, SBA, 22000, Algérie.

e-mail : tbenchikh@univ-sba.dz, boudou@cict.fr, romain@cict.fr

---

**Résumé.** Nous étudions des mesures aléatoires à valeurs dans l'espace de Banach  $\mathcal{K}(H, E)$  des opérateurs compacts de l'espace de Hilbert  $H$  dans l'espace de Banach  $E$  : elles sont nommées *mesures aléatoires opératorielles*. Ensuite, nous étudions l'intégrale stochastique qui leurs est associée et nous établissons le lien entre cette intégrale et les séries stationnaires d'opérateurs compacts. Ces résultats sont utilisés pour définir des *mesures aléatoires banachiques* et l'intégrale stochastique par rapport à ces mesures. Enfin, nous proposons l'approximation d'une série strictement stationnaire banachique au moyen d'une transformée de Fourier d'une mesure aléatoire banachique.

## Operatorial and Banach space-valued random measures. Application to stationary series

**Abstract.** We study random measures with values in the Banach space  $\mathcal{K}(H, E)$  of compact operators, where  $H$  is a Hilbert space and  $E$  is a Banach space : they are called *operatorial random measures*. Then we study the stochastic integral which is associated and we establish the relation between this integral and the stationary series of compact operators. These results are used to define *Banach space-valued random measures* and the stochastic integral with regard to these measures. Endly, we propose the approximation of a strictly stationary series by the Fourier transform of a Banach space-valued random measure.

---

### 1. Introduction et notations

Soit  $E$  (resp.  $H$ ) un espace de Banach (resp. de Hilbert) complexe séparable et  $\mathcal{L}(H, E)$  (resp.  $\mathcal{K}(H, E)$ ) l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés (resp. compacts) de  $H$  dans  $E$ . L'application bijective  $h \in H \rightarrow \langle \cdot, h \rangle \in H'$  est notée  $\mathcal{I}$ , où  $H'$  est le dual topologique de  $H$ .

Étant donné un opérateur  $K$  de  $\mathcal{L}(H, E)$ , on appelle *opérateur quasi-transposé* de  $K$ , que l'on note  ${}^qK$ , l'opérateur antilinéaire  $\mathcal{I}^{-1} \circ {}^tK$ , c'est-à-dire tel que, pour tout  $(e', h)$  de  $E' \times H$ , on a :  $\langle h, {}^qKe' \rangle = (e', Kh)_{E'E}$ .

Lorsque  $X$  est un élément de  $L^2_E(\mathcal{A}) (= L^2_E(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}))$ , l'application qui, à  $y$  de  $L^2(\mathcal{A})$ , associe  $\int yXd\mathbb{P}$  de  $E$ , est notée  $\tilde{X}$  et appelée "*opérateur canoniquement associé (o.c.a.) à  $X$* "; c'est un opérateur compact. En [6], l'application  $e' \in E' \mapsto e' \circ X \in L^2_E(\mathcal{A})$  est appelée *opérateur cylindrique associé à  $X$* ; à une conjugaison complexe près, il s'agit du quasi-transposé de  $\tilde{X}$ . Lorsque  $F$  est un second espace de Banach, on peut vérifier que, pour tout  $(\varphi, X)$  de  $\mathcal{L}(E, F) \times L^2_E(\mathcal{A})$ ,  $\varphi \circ X$  appartient à  $L^2_F(\mathcal{A})$  et  $\widetilde{\varphi \circ X} = \varphi \circ \tilde{X}$ .

On dit qu'un opérateur  $K$  de  $\mathcal{K}(H, E)$ , *se factorise au travers d'un opérateur de Hilbert-Schmidt* lorsqu'il existe un espace de Hilbert séparable  $H_1$ , un opérateur de Hilbert-Schmidt  $\psi$  de  $H$  dans  $H_1$  et un élément  $\varphi$  de  $\mathcal{L}(H_1, E)$  tels que  $K = \varphi \circ \psi$ . On montre que (cf. [2]), si l'o.c.a.  $\tilde{X}$  se factorise

au travers d'un opérateur de Hilbert-Schmidt, alors, à tout  $T$  de  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{A}))$ , on peut associer un et un seul élément  $Y$  de  $L^2_E(\mathcal{A})$  tel que  $\tilde{Y} = \tilde{X} \circ T$ .

Dans ce texte, nous utilisons fréquemment les notions de mesures aléatoires hilbertiennes (m.a.) et de mesures spectrales (m.s.) (à valeurs projecteurs), qui sont particulièrement étudiées en [4].

## 2. Mesure aléatoire opératorielle

DÉFINITION 2.1- Une mesure aléatoire opératorielle (m.a.o.)  $Z$  est une application de  $\mathcal{B}$ , tribu de Borel de  $\Pi = [-\pi, \pi[$ , dans  $\mathcal{K}(H, E)$ , telle que :

- i) pour tout couple  $(A, B)$  d'éléments disjoints de  $\mathcal{B}$ ,  $Z(A \cup B) = Z(A) + Z(B)$  et  $Z(A) \circ {}^q(Z(B)) = 0$ ;
- ii) pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{B}$  convergeant en décroissant vers  $\emptyset$ ,  $\lim_n Z(A_n) = 0$ .

Dans la suite, on note indifféremment  $Z(A)$  et  $ZA$ .

Si  $Z$  est une m.a.o., alors, pour tout  $e'$  de  $E'$ , l'application  $Z^{e'}$  qui, à  $A$  de  $\mathcal{B}$ , associe  ${}^q(ZA)e'$  de  $H$  est une m.a.; de plus, pour tout couple  $(e', f')$  d'éléments de  $E'$ , les m.a.  $Z^{e'}$  et  $Z^{f'}$  sont stationnairement corrélées. En [1], on démontre le résultat de décomposition suivant :

PROPOSITION 2.2- Si  $Z$  est une m.a.o., il existe une et une seule mesure spectrale  $\varepsilon$  sur  $\mathcal{B}$  pour  $H_Z = \overline{\text{vect}}\{{}^q(ZA)e'; (e', A) \in E' \times \mathcal{B}\}$  telle que, si l'on note  $j$  l'injection canonique de  $H_Z$  dans  $H$ , on ait :  $ZA = Z\Pi \circ j \circ \varepsilon A \circ j^*$ , pour tout  $A$  de  $\mathcal{B}$ .

Étant donné une m.s.  $\varepsilon$  sur  $\mathcal{B}$  pour l'espace de Hilbert  $H_1$  et  $f$  un élément de l'ensemble  $\mathcal{M}$  des applications bornées et mesurables de  $\Pi$  dans  $\mathbb{C}$ , on montre que :

- pour tout  $X$  de  $H_1$ , l'application  $Z_\varepsilon^X : A \in \mathcal{B} \mapsto \varepsilon AX \in H_1$  est une m.a.,
- l'application  $\varepsilon_f : X \in H_1 \mapsto \int f dZ_\varepsilon^X \in H_1$  est linéaire et bornée.

Ces résultats permettent d'introduire la

DÉFINITION 2.3- On appelle intégrale de  $f$ , élément de  $\mathcal{M}$ , par rapport à la m.a.o.  $Z$ , l'opérateur  $Z\Pi \circ j \circ \varepsilon_f \circ j^*$ , que l'on note  $\int f dZ$ .

Il est facile de vérifier la linéarité de cette intégrale et que  $\int \mathbb{1}_A dZ = ZA$ , pour tout  $A$  de  $\mathcal{B}$ .

Remarquons que l'intégrale par rapport à une m.a.o. est liée à l'intégrale par rapport à une m.a.; en effet, lorsque  $Z$  est une m.a.o., pour tout  $(f, e')$  de  $\mathcal{M} \times E'$ , on a :  ${}^q(\int f dZ)e' = \int \tilde{f} dZ^{e'}$ .

## 3. Séries stationnaires

On dit qu'une série  $(K_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  d'éléments de  $\mathcal{K}(H, E)$  est stationnaire lorsque, pour tout couple  $(n, m)$  d'éléments de  $\mathbb{Z}$ ,  $K_n \circ {}^q K_m = K_{n-m} \circ {}^q K_0$ . On montre alors (cf. [1]) qu'il existe une et une seule m.a.o.  $Z$  telle que  $\int e^{i \cdot n} dZ = K_n$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ .

Étant donné  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une série d'éléments de  $L^2_E(\mathcal{A})$ , D. Bosq (cf. [3]) la définit comme stationnaire lorsque, pour tout  $e'$  de  $E'$ ,  $(e' \circ X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est stationnaire et lorsque, pour tout couple  $(e', f')$  d'éléments de  $E'$ , les séries  $(e' \circ X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(f' \circ X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sont stationnairement corrélées. Comme, pour tout  $(e', f') \times (n, m)$  de  $E'^2 \times \mathbb{Z}^2$ , on a  $\langle e' \circ X_n, f' \circ X_m \rangle = \langle {}^q \widetilde{X}_m f', {}^q \widetilde{X}_n e' \rangle = \langle e', \widetilde{X}_n \circ {}^q \widetilde{X}_m f' \rangle_{E', E}$ , on peut affirmer qu'une série  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est stationnaire si et seulement si la série des o.c.a.  $(\widetilde{X}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est stationnaire.

En particulier, lorsque  $E = \mathbb{C}^p$  on retrouve la définition usuelle d'une série multidimensionnelle stationnaire adoptée notamment en [5].

Afin d'introduire la notion de la stationnarité au sens strict, munissons  $F = E^{\mathbb{Z}}$  de la plus petite tribu  $\mathcal{F}$  rendant les applications coordonnées mesurables et notons  $\Theta$  l'application de  $F$  dans lui-même, qui, à  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  associe  $(e_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ . On a alors :  $\Theta^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ . Lorsque  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une série banachique d'éléments de  $L^2_E(\mathcal{A})$ , l'application mesurable  $\check{X} : \omega \in \Omega \mapsto (X_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}} \in F$

est appelée *variable aléatoire trajectoire associée à la série*  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Nous sommes alors en mesure d'introduire la :

**DÉFINITION 3.1-** Une série  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  d'éléments de  $L_E^2(\mathcal{A})$  est dite *stationnaire au sens strict* lorsque la loi de la variable aléatoire trajectoire associée  $\check{X}$  est invariant par  $\Theta$ , c'est-à-dire telle que  $\Theta(\check{X}(\mathbb{P})) = \check{X}(\mathbb{P})$ .

Lorsque  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une série banachique stationnaire au sens strict, on montre que :

- i) L'application  $\mathcal{J} : T \in L_E^2(F, \mathcal{F}, \check{X}(\mathbb{P})) \mapsto T \circ \check{X} \in L_E^2(\Omega, \check{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$  est une bijection linéaire qui conserve la norme ;
- ii) l'application  $J : t \in L^2(F, \mathcal{F}, \check{X}(\mathbb{P})) \mapsto t \circ \check{X} \in L^2(\Omega, \check{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$  est une isométrie surjective ;
- iii) l'application  $\mathcal{V} : T \in L_E^2(F, \mathcal{F}, \check{X}(\mathbb{P})) \mapsto T \circ \Theta \in L_E^2(F, \mathcal{F}, \check{X}(\mathbb{P}))$  est une bijection linéaire qui conserve la norme ;
- iv) l'application  $V : t \in L^2(F, \mathcal{F}, \check{X}(\mathbb{P})) \mapsto t \circ \Theta \in L^2(F, \mathcal{F}, \check{X}(\mathbb{P}))$  est un opérateur unitaire.

Il est clair que  $\mathcal{U} = \mathcal{J} \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{J}^{-1}$  est un endomorphisme bijectif de  $L_E^2(\Omega, \check{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$  qui conserve la norme, et que  $U = J \circ V \circ J^{-1}$  un est opérateur unitaire de  $L^2(\Omega, \check{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$ . On peut alors affirmer que, pour tout  $Y$  de  $L_E^2(\Omega, \check{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$ , et, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ ,  $\widetilde{U^n Y} = \widetilde{Y} \circ U^{-n}$ . De ce fait,  $(U^n Y)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une série stationnaire. L'opérateur  $\mathcal{U}$  joue le rôle d'un opérateur de décalage car, pour tout  $(S, n)$  de  $\mathcal{L}(E) \times \mathbb{Z}$ , on a :  $\mathcal{U}(S \circ X_n) = S \circ X_{n+1}$ . Bien entendu la série  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est stationnaire car  $\mathcal{U}^n(X_0) = X_n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ . De plus, pour tout  $(e', n)$  de  $E' \times \mathbb{Z}$ , on a  $U(\widetilde{X_n e'}) = \widetilde{X_{n+1} e'}$ .

#### 4. Mesure aléatoire banachique

**DÉFINITION 4.1-** Une application  $Z$  de  $\mathcal{B}$  dans  $L_E^2(\mathcal{A})$  est une *mesure aléatoire banachique (m.a.b.)* lorsque

- i) pour tout couple  $(A, B)$  d'éléments disjoints de  $\mathcal{B}$  :  $Z(A \cup B) = ZA + ZB$  et  $\widetilde{ZA} \circ \widetilde{ZB} = 0$  ;
- ii) pour tout suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  d'éléments de  $\mathcal{B}$  convergeant en décroissant vers  $\emptyset$  :  $\lim_{n \rightarrow \infty} ZA_n = 0$ .

Il est alors facile de vérifier que l'application  $\widetilde{Z}$  qui, à  $A$  de  $\mathcal{B}$ , associe  $\widetilde{ZA}$  de  $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{A}), E)$  est un m.a.o. appelée *m.a.o. associée à la m.a.b. Z*.

**DÉFINITION 4.2-** On dit qu'un élément  $f$  de  $\mathcal{M}$  est *intégrable par rapport à la m.a.b. Z* lorsqu'il existe un élément de  $L_E^2(\mathcal{A})$ , appelé *intégrale de f par rapport à Z* et noté  $\int f dZ$ , dont l'o.c.a. est égal à  $\int f d\widetilde{Z}$ .

De ce fait, si  $f$  de  $\mathcal{M}$  est intégrable par rapport à  $Z$ , on a :  $\widetilde{\int f dZ} = \int f d\widetilde{Z}$ . Cette intégrale est bien sûr linéaire et on montre que, pour tout  $A$  de  $\mathcal{B}$ ,  $\mathbb{1}_A$  est intégrable par rapport à  $Z$  et que  $\int \mathbb{1}_A dZ = ZA$ . De plus, lorsque, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ ,  $e^{i \cdot n}$  est intégrable par rapport à une m.a.b.  $Z$ , la série  $(\int e^{i \cdot n} dZ)_{n \in \mathbb{Z}}$  est stationnaire.

Enfin, on a la condition suffisante suivante de décomposition de type "transformée de Fourier banachique" (cf. [2]).

**PROPOSITION 4.3-** Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une série banachique stationnaire d'éléments de  $L_E^2(\mathcal{A})$  telle que  $\widetilde{X_0}$  se factorise au travers d'un opérateur de Hilbert-Schmidt, alors il existe une m.a.b.  $Z$  telle que  $X_n = \int e^{i \cdot n} dZ$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ .

#### 5. Approximation d'une série strictement stationnaire

Supposons que  $E$  admet une base  $\{x_k; k \in \mathbb{Z}\}$ , c'est-à-dire, que, à tout  $e$  de  $E$ , on peut associer une et une seule suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{C}$  telle que  $e = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p \alpha_k x_k$ . L'application  $f_k$  qui, à un élément  $e$  de  $E$ , associe le complexe  $\alpha_k$  appartient au dual  $E'$ . La famille  $\{f_k; k \in \mathbb{N}\}$  est

appelée *suite des coefficients fonctionnels associée à  $\{x_k; k \in \mathbb{N}\}$*  (cf. [7]). Si, pour tout  $p$  de  $\mathbb{N}$ , on pose  $S_p = \sum_{k=0}^p f_k \otimes x_k$ , où  $f_k \otimes x_k$  est l'application qui, à  $e$  de  $E$  associe  $(f_k, e)_{E', E} x_k$  de  $E$ , on peut affirmer que, pour tout  $e$  de  $E$ ,  $e = \lim_p S_p(e)$  et que  $\|e\| \leq \sup\{\|S_p e\|; p \in \mathbb{N}\} \leq C\|e\|$ .

De plus, on montre que, pour tout  $X$  de  $L_E^2(\mathcal{A})$ , on a  $\lim_p S_p \circ X = X$ .

Considérons une série  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  d'éléments de  $L_E^2(\mathcal{A})$  stationnaire au sens strict et  $\epsilon$  un réel strictement positif. Comme la suite  $(S_p \circ X_0)_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers  $X_0$ , il existe donc un entier  $p$  tel que  $\|X_0 - S_p \circ X_0\| \leq \epsilon$ . Par ailleurs, la série  $(S_p \circ X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est stationnaire et l'opérateur  $\widetilde{S_p \circ X_0} = S_p \circ \widetilde{X_0} = \sum_{k=0}^p ({}^q \widetilde{X_0} f_k) \otimes x_k$  se factorise au travers d'un opérateur de Hilbert-Schmidt ([2]). D'après la proposition 4.3, il existe une m.a.b.  $Z_\epsilon$  telle que  $S_p \circ X_n = \int e^{i \cdot n} dZ_\epsilon$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ . Adoptant les notations du paragraphe 3, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ , il vient :

$$\|X_n - \int e^{i \cdot n} dZ_\epsilon\| = \|X_n - S_p \circ X_n\| = \|\mathcal{U}^n(X_0) - \mathcal{U}^n(S_p \circ X_0)\| = \|X_0 - S_p \circ X_0\| \leq \epsilon.$$

Nous venons de démontrer la

PROPOSITION 5.1- Lorsque  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une série d'éléments de  $L_E^2(\mathcal{A})$  stationnaire au sens strict, à tout élément  $\epsilon$  de  $\mathbb{R}_+^*$ , on peut associer une m.a.b.  $Z_\epsilon$  telle que  $\|X_n - \int e^{i \cdot n} dZ_\epsilon\| \leq \epsilon$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ .

Enfin, on signale au lecteur intéressé qu'il peut trouver en [2] le cas particulier des m.a.b. à spectre fini et une application aux séries stationnaires périodiques.

**Remerciements.** Nous remercions les membres du groupe de travail *Staph* du LSP de Toulouse pour les échanges fructueux.

## Références

- [1] Benchikh T., Boudou A., Romain Y., (2006), Mesures aléatoires opératorielles. *Publi. Labo. Stat. Proba.* 11-2006, Univ. P. Sabatier, Toulouse\*.
- [2] Benchikh T., Boudou A., Romain Y., (2006), Mesures aléatoires banachiques. *Publi. Labo. Stat. Proba.*, 12-2006, Univ. P. Sabatier, Toulouse\*.
- [3] Bosq D., (2000), *Linear Processes in Function Spaces. Theory and Applications.* Lecture Notes in Statistics, 149, Springer-Verlag, New York.
- [4] Boudou A., Romain Y., (2002), On spectral and random measures associated to discrete and continuous-time processes. *Statistics and Probability Letters* 59, 145-157.
- [5] Brillinger D., (2001), *Time Series Analysis and Theory.* Society for Industrial Applied mathematics, Philadelphia.
- [6] Chobanjan S.A., Weron A., (1981), Existence of the linear prediction for Banach space-valued gaussian processes. *J. Multivar. Anal.*, 11, 69-80.
- [7] Singer I., (1970), *Bases in Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin.

\* consultable à l'adresse : <http://www.lsp.ups-tlse.fr/publicationsdulsp/toutespublis.html>.