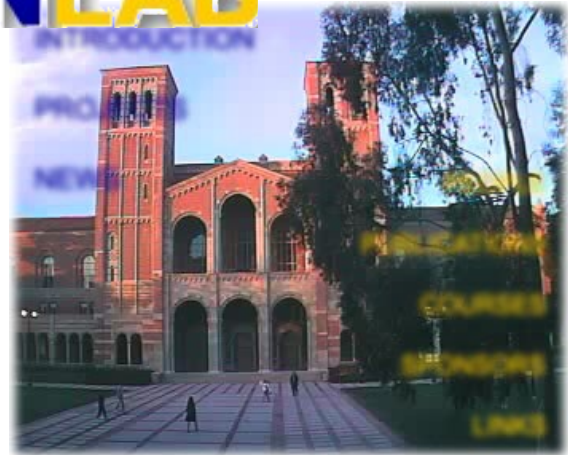


# Méthode de “Fast Marching” générique pour “Shape From Shading”

**E. Prados & S. Soatto**

**UCLA VISION LAB**

**RFIA 2006  
janvier 2006, Tours**



# Équation générique explicite pour le problème du Shape From Shading

## Hypothèses:

- Réflectance Lambertienne,
- Éclairage:
  - source ponctuelle unique,
  - disposée à l'infinie ou au centre optique,
  - prise en compte ou non de l'atténuation de la lumière due à la distance,
- Caméra orthographique ou perspective.

# Équation générique explicite pour le problème du Shape From Shading

→ cas particuliers de l'équation aux dérivées partielles:

$$\lambda \cdot F(\mathbf{u}) + \kappa_x \sqrt{|A_x \nabla \mathbf{u} + \mathbf{v}_x|^2 + K_x^2} + \mathbf{w}_x \cdot \nabla \mathbf{u} + c_x = 0$$

where  $\kappa_x, K_x \geq 0$ ,  $A_x \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{v}_x, \mathbf{w}_x \in \mathbb{R}^2$ ,  $c_x \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \geq 0$   
and  $F$  is a strictly increasing function.

[Prados:PhD'04]

# Équation générique explicite pour le problème du Shape From Shading

→ cas particuliers de l'équation aux dérivées partielles:

$$\lambda F(\mathbf{u}) + \kappa_x \sqrt{|A_x \nabla \mathbf{u} + \mathbf{v}_x|^2 + K_x^2} + \mathbf{w}_x \cdot \nabla \mathbf{u} + c_x = 0$$

where  $\kappa_x, K_x \geq 0$ ,  $A_x \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{v}_x, \mathbf{w}_x \in \mathbb{R}^2$ ,  $c_x \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \geq 0$  and  $F$  is a strictly increasing function.

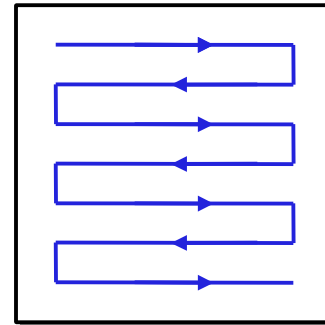
## Caractéristiques particulières:

- Dépendance en  $\mathbf{u}$  (pas seulement en  $\nabla \mathbf{u}$ ).
- Solution pas nécessairement croissante le long des “courbes caractéristiques” ...

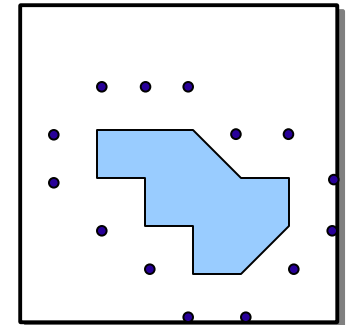
→ “Fast Marching” actuel non applicable.

# Méthode de “Fast Marching” (FMM)

- Résolution numérique d'EDP,
- Méthode à “passage unique”  $\neq$  méthodes itératives:
  - Absence de seuil (critère d'arrêt)
  - Nombre de mises à jour optimal  $\rightarrow$  coût CPU faible
  - Propagation de front.



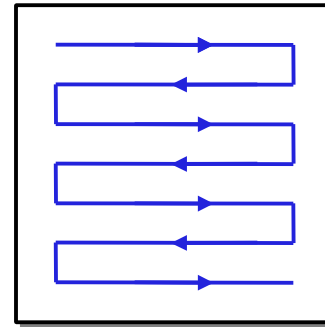
méthode itérative



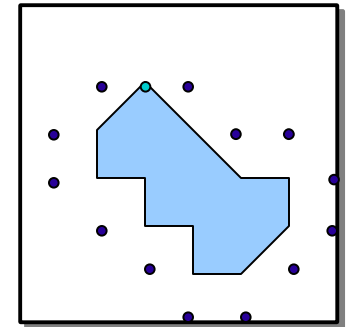
FMM

# Méthode de “Fast Marching” (FMM)

- Résolution numérique d'EDP,
- Méthode à “passage unique”  $\neq$  méthodes itératives:
  - Absence de seuil (critère d'arrêt)
  - Nombre de mises à jour optimal  $\rightarrow$  coût CPU faible
  - Propagation de front.



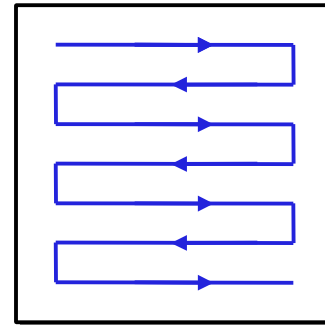
méthode itérative



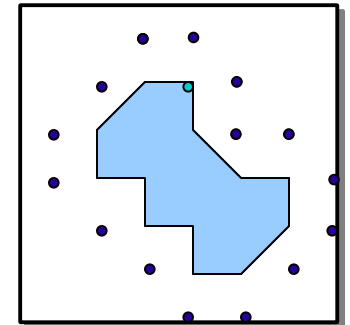
FMM

# Méthode de “Fast Marching” (FMM)

- Résolution numérique d'EDP,
- Méthode à “passage unique”  $\neq$  méthodes itératives:
  - Absence de seuil (critère d'arrêt)
  - Nombre de mises à jour optimal  $\rightarrow$  coût CPU faible
  - Propagation de front.



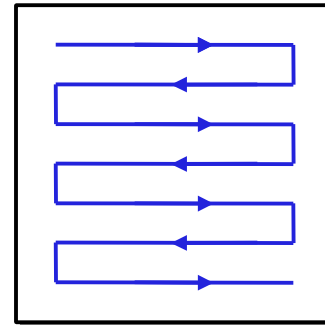
méthode itérative



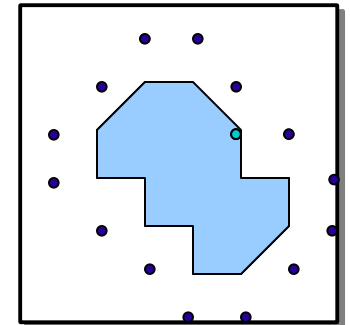
FMM

# Méthode de “Fast Marching” (FMM)

- Résolution numérique d'EDP,
- Méthode à “passage unique”  $\neq$  méthodes itératives:
  - Absence de seuil (critère d'arrêt)
  - Nombre de mises à jour optimal  $\rightarrow$  coût CPU faible
  - Propagation de front.



méthode itérative

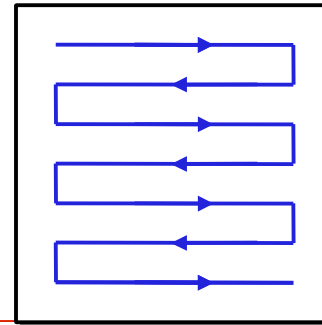


FMM

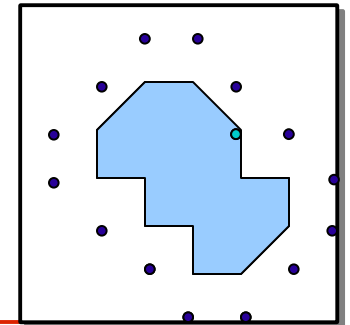


# Méthode de “Fast Marching” (FMM)

- Résolution numérique d'EDP,
- Méthode à “passage unique”  $\neq$  méthodes itératives:
  - Absence de seuil (critère d'arrêt)
  - Nombre de mises à jour optimal  $\rightarrow$  coût CPU faible
  - Propagation de front.



méthode itérative



FMM

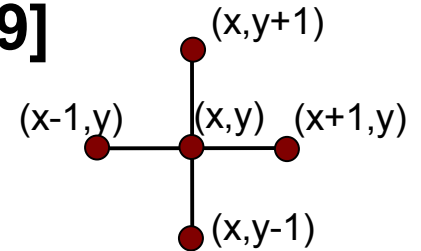
- Applications nombreuses,
  - Planification de trajectoires [Kimmel-Sethian:01]
  - Optique géométrique [Wenwang:03]
  - Traitement d'images et vision par ordinateur [L.Cohen:05]
  - Liste exhaustive [Sethian:99].

# Méthode de “Fast Marching” (FMM)

- **Méthode basique [Sethian:99, Dijkstra:59]**

$$|\nabla u| = g(x), \quad (\text{équation eikonale})$$

Voisinage à 4 pixels (schéma).



- Récente extension: OUM [Sethian-Vladimirsky:03]

$$\sup_a \{-f(x,a) - a \cdot \nabla u - 1\} = 0, \quad (2)$$

Voisinage très large (taille dépendant de l'anisotropie)

- **Notre extension (nouvel algorithme):**

$$\lambda F(u) + H(x, \nabla u) = 0, \quad (3)$$

où  $F$  est strictement croissante et  $H$  est convexe

Voisinage à 4 pixels (schéma).

# Contributions et extensions aux méthodes de “Fast Marching”

1. Un nouveau schéma numérique...
2. Une nouvelle causalité...

# Nouveau schéma numérique

- **Étape préliminaire:**

Transformée Legendre  $\longrightarrow$  équation sous la forme d'un sup.

$$\lambda F(u) + H(x, \nabla u) = 0$$



$$\lambda F(u) + \sup \{ - f(x, a) \cdot \nabla u(x) - l(x, a) \} = 0$$



Fonction coût

# Nouveau schéma numérique

**Approximation**  $\nabla u(x) \approx \left( \frac{t - u(x + s_i e_i)}{-s_i} \right)$

$$t \lll u(x)$$

$$s_i \in \{+1, -1\}$$

**Choix du simplexe, i.e. des  $s_i$**  tel que le schéma soit croissant en  $t$  (représente  $u$ )

$$\lambda F(t) + \sup_{a \in A} \left\{ -f(x, a) \cdot \left( \frac{t - u(x + s_i(x, a) e_i)}{-s_i(x, a)} \right) - l(x, a) \right\} = 0$$

➡  $s_i = s_i(x, a) := \text{sign } f_i(x, a)$  ,

➡ Choix = simplexe qui contient la trajectoire optimale.

# Nouveau schéma numérique

- Schéma “consistent” (cohérent) et monotone,
- Utilisant seulement le voisinage direct  
→ SFS, dimension = 2 → voisinage 4 points,
- Dépendance en  $u$ .

# Nouvelle causalité et réinterprétation

**Point clé :**      **Distinction entre**

- la **causalité** : propagation théorique de l'information  
    ➔ solution calculée = solution de viscosité
- l'**intégration simultanée**  
    ➔ stabilité numérique.

# Nouvelle causalité et réinterprétation

## 1 - Causalité:

- L'information se propage le long de courbes spécifiques: les **trajectoires optimales**:  $y_x^*$
- Solution calculable par une **intégration directe le long de ces courbes**:

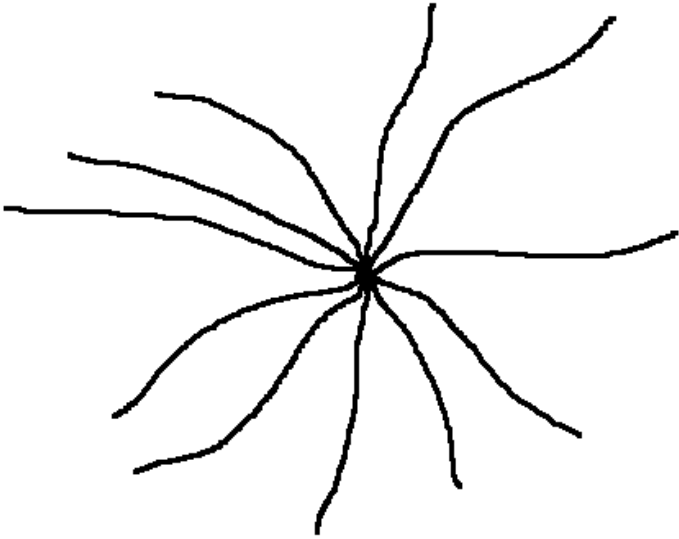
$$u(x) = \int_0^{\tau_x(\alpha_x^*)} l(y_x^*(\tau), \alpha_x^*(\tau)) d\tau + \varphi(y_x^*(\tau_x(\alpha_x^*))).$$

- Intégration courbes après courbes  
→ instabilités numériques  
**Idée:** intégration simultanée ...



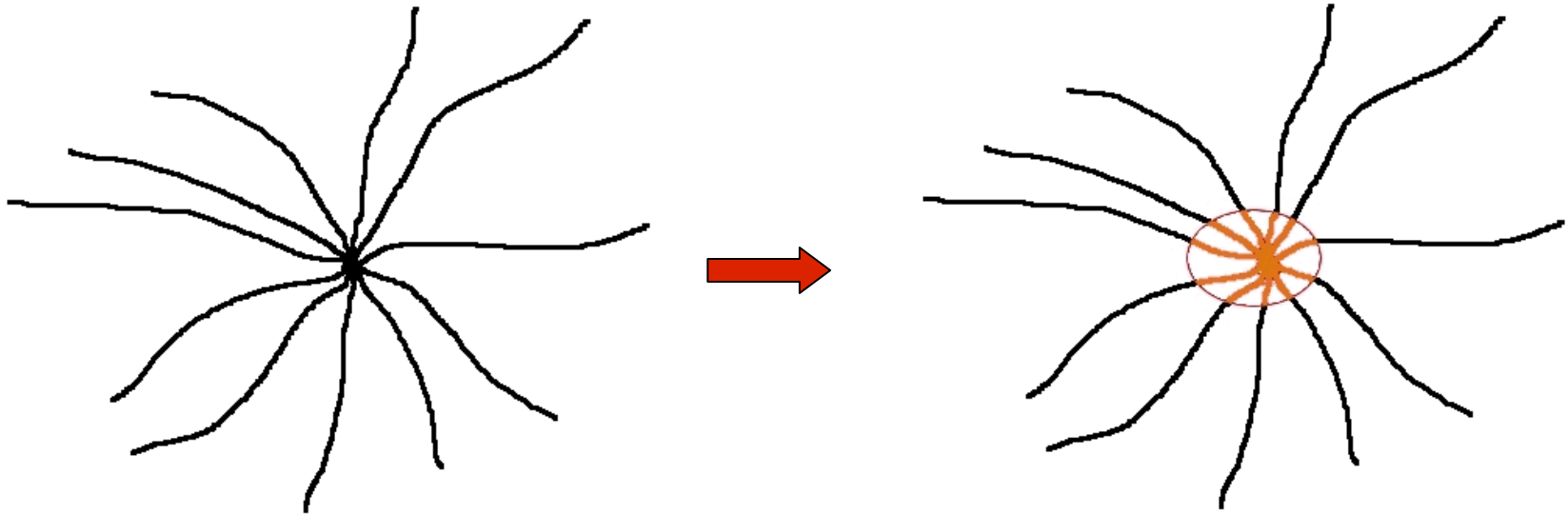
## 2 - Intégration simultanée:

→ garantit la stabilité numérique



## 2 - Intégration simultanée:

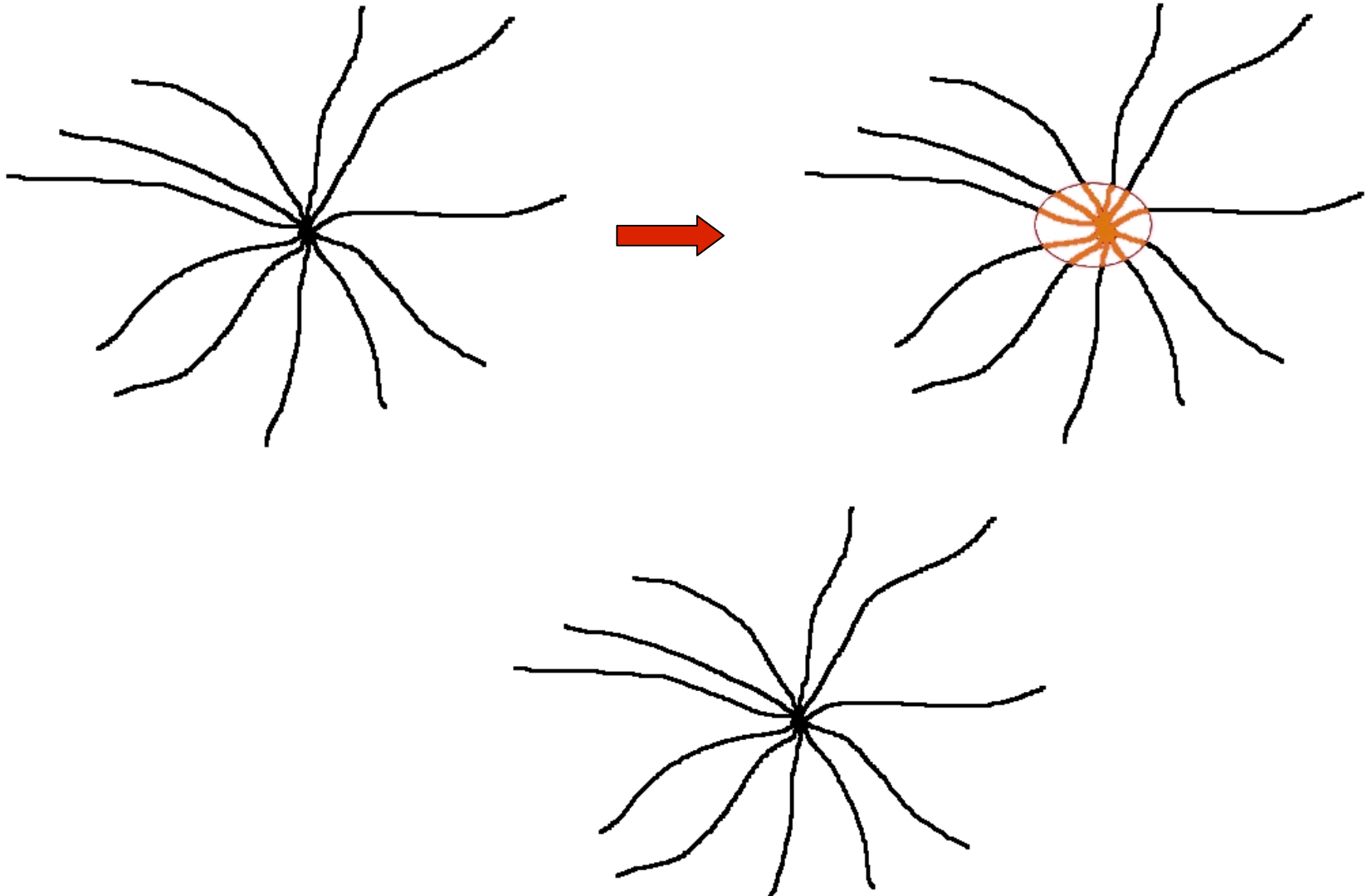
→ garantit la **stabilité numérique**



Propagation de fronts ;

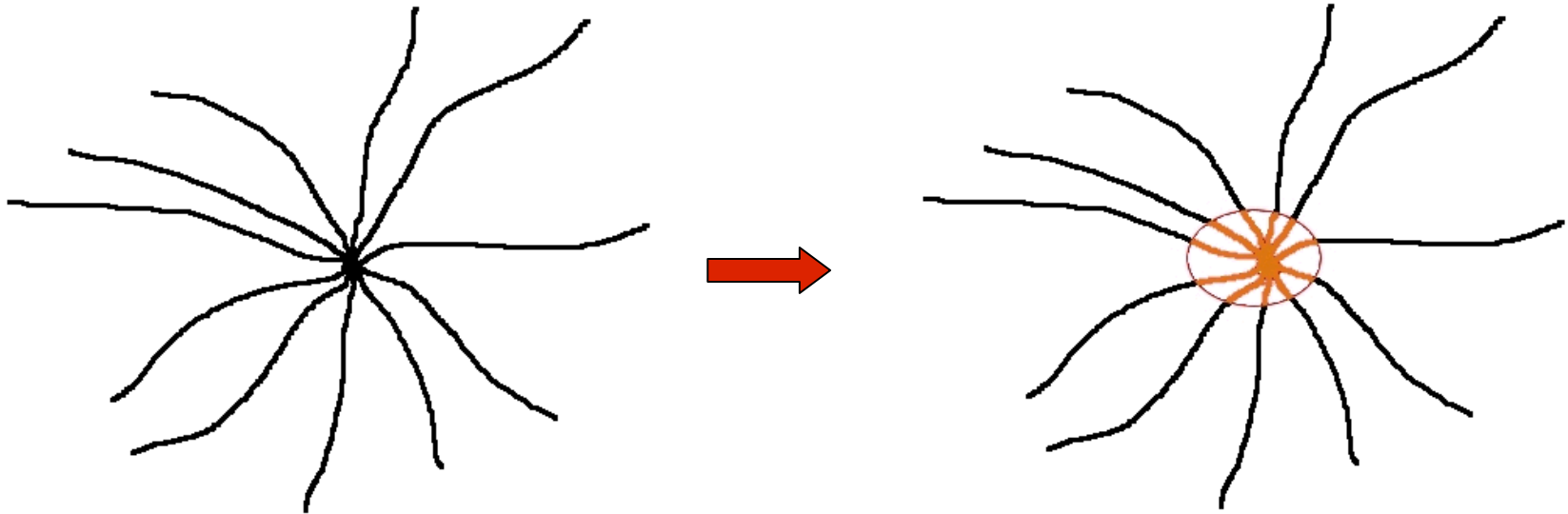
## 2 - Intégration simultanée:

→ garantit la stabilité numérique



## 2 - Intégration simultanée:

→ garantit la stabilité numérique



**Comment choisir le front de propagation ?**  
Plusieurs suivent les trajectoires optimales...

## 2 - Intégration simultanée:

→ garantit la stabilité numérique

- Plusieurs suivent les trajectoires optimales...  
**Comment choisir le front de propagation ?**
  
- **Comment définir le front de propagation ?**

## 2 - Intégration simultanée:

→ garantit la stabilité numérique

- Plusieurs suivent les trajectoires optimales...

**Comment choisir le front de propagation ?**

- **Comment définir le front de propagation ?**

**idée:** introduction d'un coût  $C$  tel que les lignes de niveaux de  $C$  correspondent au front propagé.

→ **Méthodes précédentes de FMM**

$$C = u \quad (u \text{ is the solution})$$

→ **incohérent avec la causalité**

lorsque la solution n'est pas croissante le long des trajectoires optimales !



Level sets of  $u$

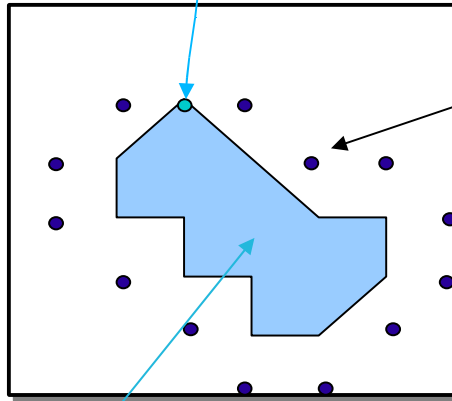
→ **Nous montrons comment définir un coût approprié  $C$  :**

- qui est toujours cohérent avec les trajectoires optimales,
- qui permet de définir et de trouver simplement et efficacement l'ordre de mise à jour...

→ **Coût  $C$  basé sur la notion de sous solutions:  $\psi \dots$**  23

# Méthode de "Fast Marching"

Choix du pixel  
→ causalité



Calcul des valeurs de mise  
à jour → nouveau schéma

Domaine où la  
solution est connue



# Algorithme

A = points acceptés  
F = points éloignés  
C = points considérés

1. Commencer avec tous les points de la grille dans **F** et poser  $U(x) = V_\infty(x)$  ( $V_{infty}$  est définie dans la section 5).
2. Déplacer les points de la grille situés sur le bord  $\partial\Omega$  et sur la cible  $\mathcal{T}$  dans **A**. Pour tous ces points, poser  $U(x) = \varphi(x)$  ( $U(x) = V_\infty(x)$ , dans le cas de contraintes d'état).
3. Déplacer tous les points de la grille  $x \in \mathbf{F}$  adjacents aux points Acceptés dans **C** et pour chacun de ces points, réévaluer  $U(x)$  en utilisant le schéma de mise à jour (14).
4. Trouver le point de la grille  $x_0 \in \mathbf{C} \cup \mathbf{F}$  qui a la plus petite valeur  $U(x) - \psi(x)$ . Déplacer  $x_0$  dans **A**.
5. Déplacer tous les points Eloignés adjacents à  $x_0$  dans **C**.
6. Réévaluer  $U$  en utilisant le schéma (14), pour tous les points Considérés adjacents à  $x_0$ .
7. Si l'ensemble **C** n'est pas vide, retourner à l'étape 4.

# Exemple concret en SFS:

## Équation de Rouy/Tourin

### Modèle associé:

- Réflectance Lambertienne et homogène,
- Source de lumière unique, éloignée et oblique
- orthographic projection.

$$\mathbf{L} = (\mathbf{1}, \gamma);$$

### EDP:

$I(x)$  = image.

$$I(x) \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} + \mathbf{1} \cdot \nabla u - \gamma = 0$$

### fonction coût associée:

$$l(x, a) = I(x) \sqrt{1 + |a|^2} - \gamma ;$$

de signe arbitraire...

➡ Solutions non croissantes le long des trajectoires optimales,

➡ Les méthodes précédentes ne s'appliquent pas !

### Sous solution:

$$\psi(x) = -\frac{1}{\gamma} \mathbf{1} \cdot x.$$

# Focus sur l'amélioration due à la nouvelle causalité



Image originale



groundtruth

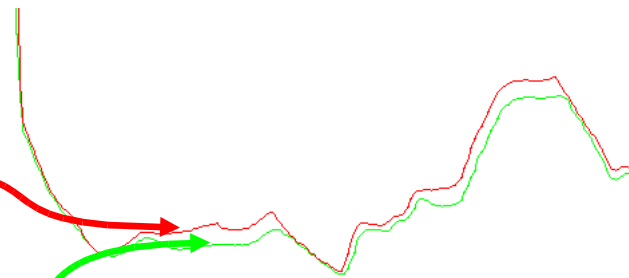
Solution  
calculée

groundtruth

Reconstruction avec la  
causalité **classique**



Vue oblique

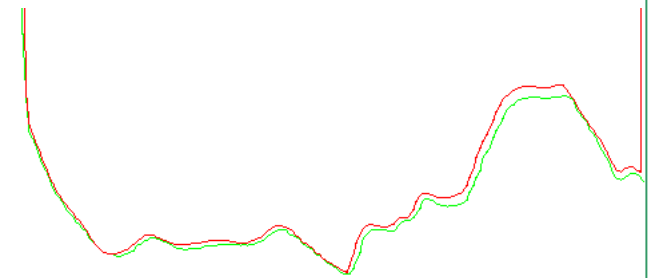


Vue de profile

Reconstruction avec la  
**nouvelle causalité**



Vue oblique



Vue de profile

# SFS avec atténuation de éclairage / distance

## Modélisation associée:

- Réflectance Lambertienne et homogène,
- Unique source de lumière placée au centre optique,
- Projection en perspective .

## EDP résultante:

$I(x)$  = image et  $f$  = focale.

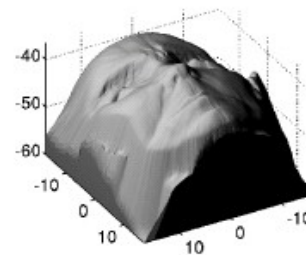
$$-e^{-2\mathbf{u}(x)} + J(x) \sqrt{f^2 |\nabla \mathbf{u}(x)|^2 + (\nabla \mathbf{u}(x) \cdot x)^2 + Q(x)^2} = 0,$$

$$J(x) = \frac{I(x)f^2}{Q(x)} \quad \text{et} \quad Q(x) = \sqrt{f^2/(|x|^2 + f^2)}.$$

➔ Méthodes de “Fast Marching” précédentes ne s'appliquent pas...



image



reconstruction

# Conclusion

1) Extension des méthodes de Fast Marching à une large classe

EDP:

- dépendant de  $u$ ,
- solutions non croissantes le long des trajectoires optimales,

$$\lambda F(u) + H(x, \nabla u) = 0$$

2) Nouveau schéma numérique + nouvelle interprétation

+ nouvelle causalité

3) Application de la méthode au SFS: algorithme générique.

# References

- [Kimmel-Sethian:01] R. Kimmel and J.A. Sethian. Optimal algorithm for shape from shading and path planning. *JMIV*, 14(2):237–244, May 2001.
- [L.Cohen:05] L. Cohen. Minimal paths and fast marching methods for image analysis. In *Mathematical Models in Computer Vision: The Handbook*, Springer, 2005.
- [Sethian:99] J.A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge University Press, 1999.
- [Sethian-Vladimirsky:03] J.A. Sethian and A. Vladimirsky. Ordered upwind methods for Hamilton–Jacobi equations: Theory and algorithms. *SIAM J. on Num. Ana.* 41(1), 2003
- [Prados:04] E. Prados. *Application of the theory of the viscosity solutions to the Shape From Shading problem*. PhD thesis, 2004.