



**HAL**  
open science

## Simplified model for vortex-wall interaction behind a bluff-body.

Charles-Henri Bruneau, Delphine Depeyras, Patrick Gillieron, Iraj Mortazavi

► **To cite this version:**

Charles-Henri Bruneau, Delphine Depeyras, Patrick Gillieron, Iraj Mortazavi. Simplified model for vortex-wall interaction behind a bluff-body.. 2008. inria-00346978

**HAL Id: inria-00346978**

**<https://inria.hal.science/inria-00346978>**

Preprint submitted on 13 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modèle simplifié de l'interaction tourbillon-paroi derrière un obstacle

Charles-Henri Bruneau (\*), Delphine Depeyras (\*), Patrick Gilliéron (\*\*) et Iraj Mortazavi (\*)  
(\* ) IMB, Université Bordeaux 1, INRIA Bordeaux-Sud-Ouest Equipe MC2, CNRS UMR 5251  
351 cours de la Libération, F-33405 Talence  
bruneau@math.u-bordeaux1.fr, depeyras@math.u-bordeaux1.fr, mortaz@math.u-bordeaux1.fr  
(\*\*) Technocentre Renault, Direction de La Recherche,  
Groupe Mécanique des fluides et aérodynamique  
patrick.gillieron@renault.com

**Résumé-** La prise en compte de toutes les caractéristiques physiques lors des simulations numériques avec les équations de Navier-Stokes rend difficile la compréhension des mécanismes de génération de traînée due aux tourbillons du sillage derrière un obstacle parallélépipédique. Afin de faciliter cette approche, cette étude propose une modélisation analytique simplifiée prenant uniquement en compte le phénomène de convection. La production de force de traînée étant directement liée à la force de pression à l'arrière de l'obstacle, ce développement analytique repose sur le calcul de la contribution d'un tourbillon du sillage à la force de pression derrière cet obstacle. Différentes modélisations mathématiques de la convection du tourbillon sont choisies et représentent le déplacement du tourbillon dans le sillage. Les résultats pour chacune de ces modélisations sont analysés et comparés entre eux pour le cas particulier du corps d'Ahmed avec culot droit.

## Simplified model for vortex-wall interaction behind a bluff body

**Abstract-** In Navier-Stokes numerical simulations, all the physical effects are acting on the flow. Therefore, the drag generation mechanism due to a wake vortex behind a bluff body is hard to understand. In order to make easier this thinking, the present study propose an analytic modelisation considering only the convection effects. The drag production being directly linked to the pressure strength at the backside of the bluff body, the analytic development is based on the calculation of vortex involvement to pressure strength at the back of the bluff body. Mathematical models of vortex convection are chosen and represent the vortex movement in the wake. Each model result is analysed and compared to others in the special case of a square-back Ahmed body.

**Abridged English version-** In Navier-Stokes numerical simulations, a lot of flow effects govern the vortex trajectories. In order to better understand the wake dynamics, it is interesting to develop simplified models with some parameters only (see [6]). In some flows around bluff bodies, the convection is prevailing in the wake (see [5]). Accordingly, the present simplified model is based on convective effects and resolves the pressure force behind the obstacle due to a wake vortex. The obstacle and the studied vortex are defined as shown in Figure 1. The fluid is considered inviscid so the vortex circulation is constant. The vortex modelisation is based on the circular vortex theory by Milne-Thomson (see [3]) so the velocity induced by the vortex  $P$  at point  $M$  is defined by (2.1). The wall is represented thanks to the image vortex theory by Lamb (see [2]) thus the total velocity induced by the vortex  $P$  and its image is obtained in (2.4) with  $\Gamma$  the vortex circulation and  $(x_1, z_1)$  the vortex coordinates. This velocity is then inserted in the pressure definition and it results the equation (2.6) and after integration on the body heigth, it gives (2.8). With this equation, for a vortex position, it is possible to compute the contribution to pressure force at the wall due to the vortex. It can also be interesting to give a time-fonction law for  $x_1$  and/or  $z_1$ . In the present study, the vortex trajectory is assumed horizontal so  $z_1$  is a constant. In that case, the mean-time pressure force at the wall during a period  $T$  is given by (2.9). After integration and simplification, it becomes (2.13). This simplified model is then applied to the particular case of a simplified car model such as the square-back Ahmed body (see [1]). The goal is to observe the correlations between the wake vortex behavior and the pressure force it induces at the back of the Ahmed body. For  $x_1(t)$ , the five studied

models are represented with their velocity in Figure 3. These functions are chosen based on their mathematical properties : the cases (1 – 3) have an initial velocity of  $1\text{ms}^{-1}$ . The first case represents a quick move away vortex, the second one a constant velocity vortex, the third one a slow move away vortex. The vortex of case (4) has a large initial velocity which decreases with time and the vortex of case (5) has a zero initial velocity which increases with time. The curves of mean pressure force in function of period  $T$  for the five  $x_1(t)$  models are shown in Figure 5 for  $z_1 = \frac{h}{3}$ . All the curves present a similar behavior with a maximum for the period near zero and a decrease along the time. The cases (1 – 3) are almost superposed and the vortex which induces less pressure force at the back of the Ahmed body is the one which moves away very quickly from the beginning (case (4)). On the contrary, the vortex of case (5) which stays near the wall from the beginning, yields a large pressure force. In fact, the vortex behavior is crucial before the time  $T = 1\text{s}$ . To conclude, as the pressure forces at the backside of a bluff body is directly linked to the drag forces, to reduce them, it is interesting to push the vortex far away of the bottom wall.

## 1 Introduction

Lors des simulations numériques d'écoulement autour d'un obstacle parallélépipédique par les équations de Navier-Stokes, de nombreux phénomènes régissent les trajectoires des tourbillons. Afin de mieux comprendre l'effet de chacun de ces phénomènes, il est intéressant de créer des modèles simplifiés ne prenant en compte qu'un certain nombre de paramètres. En effet, d'après Pastoor et al. (voir [6]), il existe différents niveaux de résolution allant de la Simulation Numérique Directe aux modèles empiriques. L'intérêt est de modéliser le plus simplement possible le ou les phénomènes étudiés. Pour l'écoulement autour d'un obstacle, la convection est prédominante dans le sillage (voir [5]). Par conséquent, pour mettre en évidence les effets des trajectoires tourbillonnaires sur la génération de traînée, cette étude propose un modèle simplifié, basé sur les effets convectifs et détermine la force de pression à l'arrière de l'obstacle induite par un tourbillon du sillage. En effet, la force de traînée est directement liée à la force de pression générée derrière l'obstacle. Dans une première partie, le calcul analytique de la force de pression générée au culot du parallélépipède par un tourbillon du sillage est exposé. Ce tourbillon analytique est considéré comme circulaire (voir [3]). La modélisation de la paroi utilise la théorie des tourbillons images (voir [2]). La trajectoire du tourbillon est supposée horizontale et les effets dissipatifs sont négligés comme dans le cas d'un fluide non visqueux. Dans une deuxième partie, l'application à un modèle simplifié d'automobile type monospace (comme le corps d'Ahmed avec culot droit (voir [1])) permet d'obtenir une relation entre le comportement du tourbillon dans le sillage et la production des forces de la traînée.

## 2 Modèle simplifié

Il s'agit de déterminer quelle est la contribution d'un tourbillon du sillage à la force de pression exercée à l'arrière de l'obstacle.

Dans le plan  $(xOz)$ , l'obstacle parallélépipédique est défini par  $-L \leq x \leq 0$  et  $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$  plaçant l'arrière en  $x = 0$ . Soit  $P$ , le centre du tourbillon circulaire étudié de coordonnées  $(x_1, z_1)$ , situé à une distance  $d$  d'un point quelconque de l'arrière  $M(0, z)$  (voir Figure 1).

La modélisation d'un tourbillon utilisée dans ce travail est basée sur deux théories. La première est la théorie du tourbillon circulaire exposée par Milne-Thomson dans [3]. Elle considère qu'un tourbillon 2D correspond à un disque solide. La vorticité est alors constante au sein de ce disque et nulle en dehors. Pour des raisons de symétrie, la vitesse induite par le tourbillon au point  $M$  est tangente au disque. Enfin, la vitesse au centre du tourbillon est nulle, croît linéairement en fonction du rayon jusqu'à atteindre le rayon visqueux (rayon solide du tourbillon) puis diminue de façon inversement proportionnelle au rayon jusqu'à tendre vers 0 loin du centre tourbillonnaire (voir Figure 2).

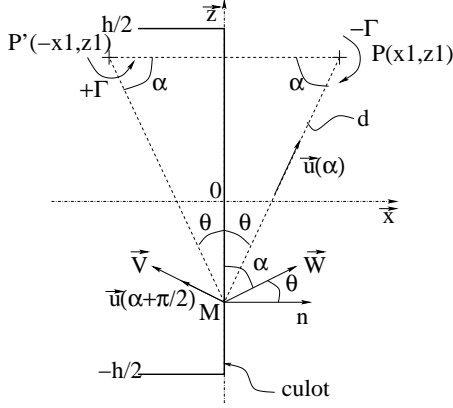


FIG. 1: Coupe 2D de l'obstacle et position du centre tourbillonnaire P étudié

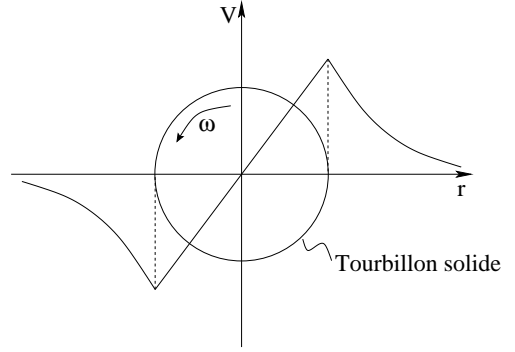


FIG. 2: Vitesse en fonction du rayon pour un tourbillon circulaire solide

L'hypothèse d'un milieu sans dissipation est faite et la circulation  $\Gamma$  est donc considérée comme une constante du problème.

D'après [3], dans le cas où la viscosité du milieu est négligée, la vitesse à la paroi en tout point  $M$ , après calculs trigonométriques, s'exprime par :

$$\vec{V}(d) = \frac{\Gamma}{2\pi d} \vec{u}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\Gamma}{2\pi d} (-\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{z}). \quad (2.1)$$

La deuxième théorie est celle du tourbillon image exposé par Lamb dans [2]. Par la prise en compte du tourbillon image de coordonnées  $(-x_1, z_1)$  et de circulation  $+\Gamma$ , elle permet de vérifier la condition de non-glissement à la paroi en annulant la composante longitudinale de la vitesse. La vitesse au point  $M$  due à ce tourbillon image est :

$$\vec{W}(d) = \frac{\Gamma}{2\pi d} \vec{u}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\Gamma}{2\pi d} (\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{z}). \quad (2.2)$$

Au final, au point  $M$ , la norme de la vitesse résultante  $V_R(d) = \vec{V}(d) + \vec{W}(d)$  s'exprime :

$$V_R(d) = \frac{\Gamma}{\pi d} \cos \alpha. \quad (2.3)$$

En remarquant que  $\cos \alpha = \frac{x_1}{d}$  et  $d = \sqrt{x_1^2 + (z - z_1)^2}$ , il vient :

$$V_R = \frac{\Gamma x_1}{\pi(x_1^2 + (z - z_1)^2)}. \quad (2.4)$$

Quand  $x_1 \rightarrow +\infty$ , la vitesse  $V_R \rightarrow 0$  et, d'après Bernoulli, la pression locale s'identifie alors à la pression  $P_0$  telle que :

$$P_0 = P + \frac{\rho}{2} V_R^2, \quad (2.5)$$

ce qui donne avec (2.4) :

$$P - P_0 = -\frac{\rho}{2} \frac{\Gamma^2 x_1^2}{\pi^2 (x_1^2 + (z - z_1)^2)^2}. \quad (2.6)$$

La force élémentaire de pression  $dF_{Px}$  qui s'exerce alors sur l'élément de longueur  $dz$  autour du point  $M$  est alors donnée par :

$$d\vec{F}_P \cdot \vec{x} = dF_{Px} = -(P - P_0) \vec{n} \cdot \vec{x} d\sigma, \quad (2.7)$$

avec  $\vec{n} \cdot \vec{x} = 1$  et  $d\sigma = ldz$ ,  $l$  étant la largeur de l'obstacle dans la direction  $y$ .

En insérant (2.6) et en intégrant sur la hauteur de l'obstacle, la force de pression qui s'exerce sur l'obstacle par le tourbillon placé au point  $P$  est :

$$F_{Px} = \frac{\rho \Gamma^2}{2 \pi^2} l \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{x_1^2}{(x_1^2 + (z - z_1)^2)^2} dz. \quad (2.8)$$

On peut alors déplacer le tourbillon suivant  $x_1$  selon une loi en fonction du temps. L'hypothèse de trajectoire horizontale détermine la valeur de  $z_1$  au cours du temps qui reste constante. Pour une durée de transport  $T$  correspondant à une période de l'émission périodique des structures tourbillonnaires de circulation  $\Gamma$  constante dans un milieu non visqueux, les lois de transport peuvent être de forme exponentielle, linéaire, polynômiale, etc (voir Figure 3a). Dans ce cas, à l'instant  $t$ , la valeur moyenne de la contribution à la force de pression du tourbillon de circulation  $\Gamma$  au point  $P(x_1(t), z_1)$  pour une période  $T$  (voir Figure 1) est donnée par :

$$\bar{F}_{P_{culot}}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{\rho \Gamma^2}{2 \pi^2} l \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{x_1^2(t)}{[x_1^2(t) + (z - z_1)^2]^2} dz \right] dt. \quad (2.9)$$

Il s'agit de calculer dans un premier temps l'intégrale suivante :

$$A = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{x_1^2(t)}{[x_1^2(t) + (z - z_1)^2]^2} dz = \frac{1}{x_1^2(t)} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z - z_1}{x_1(t)}\right)^2\right]^2} dz. \quad (2.10)$$

Par le changement de variable  $\frac{z - z_1}{x_1(t)} = \tan(\alpha(t))$  avec  $dz = x_1(t)(1 + \tan^2 \alpha(t))d\alpha$ , il vient :

$$A = \frac{1}{x_1(t)} \int_{\arctan\left(\frac{-h/2 - z_1}{x_1(t)}\right)}^{\arctan\left(\frac{h/2 - z_1}{x_1(t)}\right)} \cos^2 \alpha(t) d\alpha = \frac{1}{x_1(t)} \left[ \frac{\alpha(t)}{2} + \frac{\sin 2\alpha(t)}{4} \right]_{\arctan\left(\frac{-h/2 - z_1}{x_1(t)}\right)}^{\arctan\left(\frac{h/2 - z_1}{x_1(t)}\right)}. \quad (2.11)$$

En utilisant la formule implicite de la tangente de l'arc moitié  $\sin p = \frac{2q}{1+q^2}$  avec  $q = \tan\left(\frac{p}{2}\right)$  :

$$A = \frac{1}{x_1(t)} \left[ \frac{\alpha(t)}{2} + \frac{2 \tan \alpha(t)}{4(1 + \tan^2 \alpha(t))} \right]_{\arctan\left(\frac{-h/2 - z_1}{x_1(t)}\right)}^{\arctan\left(\frac{h/2 - z_1}{x_1(t)}\right)}. \quad (2.12)$$

Donc, la relation (2.9) devient :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{P_{culot}}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\rho \Gamma^2}{2 \pi^2} l \left[ \frac{1}{2x_1(t)} \left[ \arctan\left(\frac{h/2 - z_1}{x_1(t)}\right) - \arctan\left(\frac{-h/2 - z_1}{x_1(t)}\right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ \frac{h/2 - z_1}{x_1^2(t) + (h/2 - z_1)^2} + \frac{h/2 + z_1}{x_1^2(t) + (h/2 + z_1)^2} \right] \right] dt. \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 3 Application au corps d'Ahmed avec culot droit

L'objectif est d'observer les corrélations entre le comportement d'un tourbillon dans le sillage et sa contribution à la force de pression au culot du corps d'Ahmed (voir [1]).

Il s'agit maintenant de modéliser différents types d'éloignement pour la fonction  $x_1(t)$ . Ces différents cas sont choisis pour leurs propriétés mathématiques complémentaires afin d'avoir différentes évolutions de vitesse d'éloignement du tourbillon au cours du temps ce qui correspond à un modèle simplifié. Ils couvrent les comportements génériques envisageables pour une trajectoire

tourbillonnaire.

Les cinq cas envisagés dans cette étude sont résumés ci-dessous avec leur vitesse au cours du temps respective :

Cas (1)  $x_1(t) = e^t - 1$  : éloignement rapide avec  $v_1(t) = e^t$ ,

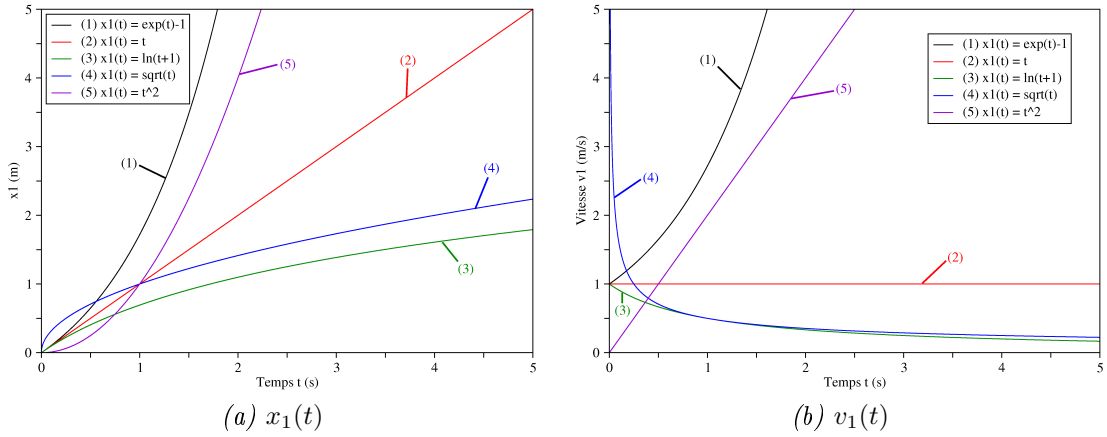
Cas (2)  $x_1(t) = t$  : éloignement uniforme avec  $v_1(t) = 1$ ,

Cas (3)  $x_1(t) = \ln(t + 1)$  : éloignement lent avec  $v_1(t) = \frac{1}{t+1}$ ,

Cas (4)  $x_1(t) = \sqrt{t}$  : éloignement rapide au début puis lent avec  $v_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ ,

Cas (5)  $x_1(t) = t^2$  : éloignement lent au début puis rapide avec  $v_1(t) = 2t$ .

Ces fonctions sont représentées à la Figure 3a afin de comparer leurs évolutions les unes par rapport aux autres.



**FIG. 3: Représentation des cinq modélisations d'éloignement du tourbillon**

Le tourbillon étudié est supposé commencer son déplacement au temps  $t = 0$  à une distance  $\epsilon$  de la paroi du corps d'Ahmed. D'après [4], cette distance  $\epsilon$  est prise égale à  $\sqrt{\frac{\Gamma^2 \rho}{P_0}}$  avec  $P_0$ , la pression atmosphérique au repos, et représente le plus petit rayon de tourbillon en deçà duquel le tourbillon n'existe pas. Elle définit également une zone auprès de la paroi dans laquelle le coeur tourbillonnaire ne peut pénétrer. Chacune des modélisations  $x_1(t) + \epsilon$  est donc introduite dans la formule (2.13) qui est ensuite calculée par intégration numérique.

Pour l'application au corps d'Ahmed avec culot droit (voir [1]), sont utilisées les valeurs de la densité de l'air  $\rho = 1.1859 \text{ kg.m}^{-3}$  pour une température de  $25^\circ\text{C}$ , la largeur du corps d'Ahmed  $l = 0.389 \text{ m}$ , la hauteur du corps d'Ahmed  $h = 0.288 \text{ m}$  et la circulation  $\Gamma$  de l'ordre de  $\frac{V^+}{2} h^+$  puisque dans l'hypothèse d'un fluide incompressible et irrotationnel  $\delta\Gamma^+ \sim \frac{V^{+2}}{2} \delta t^+$  (voir la Figure 4) et d'après la théorie de Kolmogorov, l'échelle de temps est donnée par  $\delta t^+ \sim \frac{h^+}{V^+}$ . Pour une vitesse  $V^+ = 0.448 \text{ m.s}^{-1}$  (correspondant au nombre de Reynolds  $Re = 30000$ ) et une demi-hauteur de corps  $h^+ = \frac{h}{2}$ , on a  $\Gamma = 0.032 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ .

Les courbes de  $\bar{F}_P$  (2.13) obtenues pour chacun des cas sont représentées à la Figure 5 pour une durée  $T$  comprise entre 0 et 5 secondes. Le tourbillon provenant du pavillon du corps d'Ahmed est supposé suivre la ligne horizontale d'équation  $z_1 = \frac{h}{3}$ .

La Figure 5 expose les courbes représentant  $\bar{F}_P$ , la force de pression moyenne générée au culot par les tourbillons (1–5) en fonction de la durée  $T$ . Globalement, l'ensemble des courbes évoluent de la même façon. Lorsque le tourbillon est proche de la paroi ( $x_1 \leq 0.2$ ), la force de pression présente son maximum. Ensuite, lorsque le tourbillon s'éloigne, il génère beaucoup moins de force de pression au culot. Les courbes des tourbillons (1–3) sont du même ordre de grandeur ( $\bar{F}_{Pmax} = 0.034$ ) malgré des évolutions de vitesse des tourbillons très différentes sur des temps

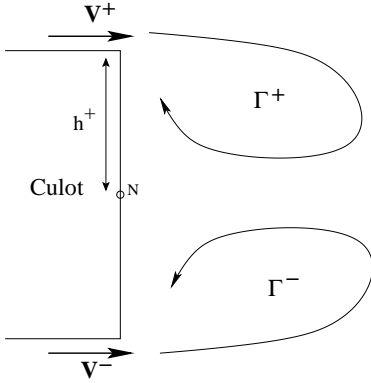


FIG. 4: Schéma des vitesses d'émission et des circulations pour le corps d'Ahmed avec culot droit

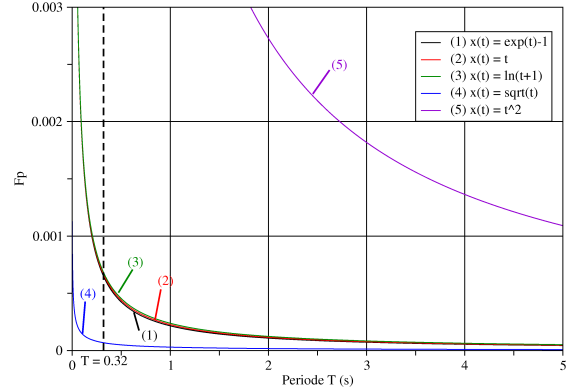


FIG. 5:  $\bar{F}_P$  généré par un tourbillon pour cinq déplacements tourbillonnaires ( $x_1(t) + \epsilon, \frac{h}{3}$ ) dans un milieu sans dissipation

longs. En revanche, la courbe correspondant à la modélisation (4) en  $\sqrt{t}$  présente des valeurs très faibles de force de pression ( $\bar{F}_{P_{max}} = 0.001$ ). Celle correspondant au tourbillon (5) donne des valeurs beaucoup plus fortes que les autres cas ( $\bar{F}_{P_{max}} = 0.34$ ). La différence essentielle entre le groupe des tourbillons (1–3) et les tourbillons (4) et (5) réside dans la vitesse du tourbillon dans les premiers instants de son arrivée dans le sillage (voir Figure 3b). Pour les tourbillons (1–3), cette vitesse est proche de  $1m.s^{-1}$ , pour le tourbillon (4), elle prend de très grandes valeurs et pour le tourbillon (5), elle est presque nulle. Il est alors possible de conclure que les évolutions des tourbillons après  $T = 1s$  importent peu dans la contribution à la force de pression au culot. Par contre, les premiers instants entre  $T = 0s$  et  $T = 1s$  sont essentiels concernant la génération de traînée : les tourbillons qui sont convectés rapidement dans ce laps de temps génèrent moins de traînée (cas (4) en  $\sqrt{t}$ ) que ceux qui restent près du culot dans ce même laps de temps (cas (5) en  $t^2$ ).

## 4 Conclusion

Cette étude analytique propose un modèle simplifié pour le calcul de la force de pression générée à l'arrière d'un obstacle de forme parallélépipédique par un tourbillon du sillage. Les résultats appliqués au corps d'Ahmed avec culot droit montrent l'importance du comportement des tourbillons lors des tous premiers instants dans le sillage. En effet, il a été mis en évidence que si le tourbillon stagne à proximité du culot, il génère beaucoup de force de traînée. Au contraire, un tourbillon qui s'éloigne rapidement du culot donne un résultat satisfaisant et crée peu de force de pression au culot. Ces remarques permettent d'orienter efficacement les recherches concernant le contrôle d'écoulement autour du corps d'Ahmed. En effet, grâce à ce travail, il est possible de cibler plus précisément les actions bénéfiques pour réduire la force de traînée et les appliquer ensuite aux simulations numériques avec résolution des équations de Navier-Stokes.

## Références

- [1] Ahmed, S. R., Ramm, G. et Faltin, G., Some Salient Features of the Time -Averaged Ground Vehicle Wake, *SAE-Paper 840300*, 1984.
- [2] Lamb, H., Hydrodynamics, *Cambridge University Press*, 1916.
- [3] Milne-Thomson, L.M., Theoretical hydrodynamics, *Dover*, 1966.
- [4] Milne-Thomson, L.M., Theoretical aerodynamics, *Dover*, 1968.
- [5] Mortazavi, I. et Giovannini A., The Simulation of Vortex Dynamics downstream of a Plate Separator using a Vortex-Finite Element Method, *Int. J. Fluids. Dyna.* vol. 5, p.41-58, 2001.
- [6] Pastoor, M., King, R., Noack, B.R., Dillmann, A. et Tadmor, G., Model-based coherent-structure control of turbulent shear flows using low-dimensional vortex models, *AIAA*, 2003-4261, 2003.