HAL
open science

Minimiser l'erreur de reprojection en reconstruction de surfaces basée images

Pau Gargallo, Emmanuel Prados, Peter Sturm

To cite this version:

Pau Gargallo, Emmanuel Prados, Peter Sturm. Minimiser l'erreur de reprojection en reconstruction de surfaces basée images. RFIA 2008 - Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, Jan 2008, Amiens, France. inria-00299254

HAL Id: inria-00299254

https://inria.hal.science/inria-00299254

Submitted on 17 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Minimiser l'erreur de reprojection en reconstruction de surfaces basée images

Minimizing the Reprojection Error in Surface Reconstruction from Images

Pau Gargallo Emmanuel Prados Peter Sturm

INRIA Rhône-Alpes

655 Avenue de l'Europe, 38330 Montbonnot St Martin, France
Prenom.Nom@inrialpes.fr

Résumé

Dans cet article, nous considérons le problème de la reconstruction de surfaces à partir d'images. Notre contribution principale est le calcul des dérivées exactes de la fonctionnelle exprimant l'erreur de reprojection ou bien, la photoconsistance. Ceci permet, pour la première fois, de la minimiser de manière rigoureuse par une descente de gradient. La difficulté principale a été de correctement prendre en compte les changements de visibilité qui apparaissent lors de l'évolution de la surface estimée. Une étude géométrique et analytique de ces changements est présentée et utilisée pour le calcul des dérivées.

Notre analyse révèle la forte influence du mouvement des générateurs de contours sur l'erreur de reprojection. Par conséquent, la minimisation rigoureuse de l'erreur de reprojection place les générateurs de contours de la surface automatiquement aux bons endroits relativement aux images. Ainsi, des approches prenant en compte des contraintes basées sur des silhouettes ou des contours apparents afin d'assurer ce placement, peuvent maintenant être expliquées et justifiées par un seul critère : l'erreur de reprojection.

Mots Clef

Reconstruction 3D, erreur de reprojection, photoconsistance.

Abstract

This paper addresses the problem of image-based surface reconstruction. Our main contribution is the computation of the exact derivative of the reprojection error functional. This allows, for the first time, its rigorous minimization via gradient descent surface evolution. The main difficulty has been to correctly take into account the visibility changes that occur when the surface moves. A geometric and analytical study of this changes is presented and used for the computation of derivative.

Our analysis shows the strong influence that the movement of the contour generators has on the reprojection error. As a consequence, during the proper minimization of the reprojection error, the contour generators of the surface are automatically moved to their correct location in the images. Therefore, current methods adding additional silhouettes or apparent contour constraints to ensure this alignment can now be understood and justified by a single criterion : the reprojection error.

Keywords

3D reconstruction, reprojection error, photoconsistency.

1 Introduction

Reconstruire une scène à partir d'images est le problème de l'inversion du processus de formation d'images. Beaucoup de scènes peuvent être représentées par une surface et des quantités supplémentaires décrivant, par exemple, des propriétés de reflectance, des conditions d'illumination ou des paramètres des caméras. Un tel modèle permet de décrire précisément comment les images de la surface ont été générées. Cependant, retrouver la surface à partir des images reste un problème non complètement résolu de la vision par ordinateur.

Dans ce contexte, une solution de ce problème serait une surface Γ telle que les images générées soient les plus semblables aux images observées, c'est-à-dire les données. Ceci mène naturellement vers une formulation du problème consistant en la minimisation d'une mesure d'erreur entre les valeurs observées et prédites des pixels. Il est important de souligner que cette minimisation doit être effectuée sur tous les pixels de toutes les images d'entrée. Cette tâche n'est pas triviale, comme il sera montré dans la suite.

Pour beaucoup de modèles de formation d'images, la valeur prédite d'un pixel $\mathbf{u}$ ne dépend que de la position du point 3D $\pi_\Gamma^{-1}(\mathbf{u})$ qui est vu par ce pixel et éventuellement de la normale associée $\mathbf{n}(\pi_\Gamma^{-1}(\mathbf{u}))$. Ce point 3D est la première intersection de la ligne de vue de $\mathbf{u}$ avec la surface Γ ou, si elle n'existe pas, un point du fond B (le fond étant une surface de $\mathbb{R}^3$; $B \subset \mathbb{R}^3$). La mesure d'erreur est alors

de la forme

$$E(\Gamma) = \int_{\mathcal{I}} g\big(\, \pi_\Gamma^{-1}(\mathbf{u}),\, \mathbf{n}(\pi_\Gamma^{-1}(\mathbf{u}))\,\big)\, d\mathbf{u}\ , \qquad (1)$$

où $\mathcal{I}$ est l'ensemble de tous les pixels dans une image, $d\mathbf{u}$ est la mesure de l'aire sur le plan de l'image du capteur et[1] $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ donne la mesure d'erreur pour le pixel $\mathbf{u}$. Nous appelons (1) la *fonctionnelle de l'erreur de reprojection* et le but de cet article est de trouver une méthode pour la minimiser.

La classe des fonctions (1) est suffisamment grande pour couvrir beaucoup de problèmes de reconstruction de surfaces à partir d'images. Dans la section 6, nous illustrons un exemple d'application en vision stéréoscopique multi-images, où g mesure la différence entre la couleur observée d'un pixel et celle prédite par la reconstruction. Un autre exemple serait la reconstruction de surfaces à partir de cartes de profondeur bruitées [26], où g mesurerait la différence entre la profondeur mesurée en $\mathbf{u}$ et la profondeur de $\pi_\Gamma^{-1}(\mathbf{u})$.

Ces dernières années, des avancées significatives en minimisation de fonctionnelles définies sur des surfaces ont été faites. Plusieurs travaux considèrent la minimisation de *fonctionnelles basées sur une pondération de la surface*, c'est-à-dire de la forme

$$A(\Gamma) = \int_{\Gamma} g(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\, d\sigma\ , \qquad (2)$$

où g est intégré sur la surface et $d\sigma$ est la mesure de l'aire de la surface. La dérivée de cette fonctionnelle a été trouvée, permettant ainsi sa minimisation par une évolution du type descente de gradient [5, 7, 22]. Il a également été montré comment trouver le minimum global de certaines de ces fonctionnelles par les approches des *graph-cuts* [2, 13] ou emphmax-flow continu [1].

La différence entre les fonctionnelles (1) et (2), provient du fait que le premier type repose sur une intégrale sur l'image, c'est-à-dire les données, tandis que pour l'autre il s'agit d'une intégrale sur la surface.

Afin de bénéficier des connaissances existantes sur les fonctionnelles du type (2), nous pouvons essayer de réécrire la fonctionnelle (1) comme une intégrale sur la surface, en ne comptant que les points visibles [17, 21, 27]. Ceci donne

$$E(\Gamma) = \int_{\Gamma} g(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\, \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}_z^3}\, \nu_\Gamma(\mathbf{x})\, d\sigma\ , \qquad (3)$$

où ν_Γ est la fonction de visibilité (qui vaut 1 pour un $\mathbf{x}$ qui est visible et 0 sinon, voir la section 4) et où le fait que $d\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}_z^3}\, \nu_\Gamma(\mathbf{x})\, d\sigma$ a été utilisé. Bien sûr, en calculant l'intégrale sur la surface, nous ne comptons pas les pixels qui ne sont pas couverts par la projection de la surface. Néanmoins, ceci peut être compensé rigoureusement en modifiant g tel que (1) et (3) soient égaux à une constante près [27].

[1] $\mathbb{S}$ représente la sphère unitaire, i.e. l'espace des normales.

Nous observons que l'intégrant obtenu par cette transformation dépend et de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ comme dans (2), mais en plus de la surface entière Γ, à cause du terme de visibilité. Ainsi, la fonctionnelle de l'erreur de reprojection n'est pas basée sur une pondération de la surface et les méthodes de minimisation bien connues, mentionnées ci-dessus, ne peuvent pas être utilisées.

La contribution principale de cet article est le calcul de la dérivée de la fonctionnelle de l'erreur de reprojection (section 5), permettant ainsi sa minimisation par une descente de gradient par exemple. Pour ce faire, nous étudions d'abord les changements de visibilité qui sont causés par des mouvements ou évolutions d'une surface (section 4). Nous allons observer tout particulièrement que les générateurs de contours ont une influence forte sur ces changements. Quand un générateur de contours bouge, des parties cachées de la surface ou du fond apparaissent et en même temps de parties qui étaient visibles peuvent devenir occultées. La rétro-projection $\pi_\Gamma^{-1}(\mathbf{u})$ des pixels sur les contours apparents associés aux générateurs de contours ń saute ż d'une partie de la surface sur une autre. Ceci a une effort très fort sur la valeur prédite de ces pixels et par conséquent sur l'erreur de reprojection et sa dérivée.

Une conséquence de ces observations est qu'une évolution de la surface par une descente de gradient de l'erreur de reprojection va automatiquement aligner les contours apparents de la surface reconstruite avec des discontinuités présentes dans les images. Cet alignement automatique constitue donc par ailleurs une généralisation du concept d'enveloppe visuelle, prenant en compte tous les contours apparents et non seulement les silhouettes (contours apparents ń externes ż). Les expériences de la section 6 démontrent cet alignement à l'aide d'une application de la fonctionnelle de l'erreur de reprojection à la stéréovision multi-caméras.

2 Travaux et résultats précédents

La plupart des algorithmes de reconstruction de surfaces correspondant à l'état de l'art [19], à un moment donné, utilisent des fonctionnelles de surface pondérée. Le coût d'un point de la surface est défini par une mesure de photo-cohérence utilisant les images où le point est visible. La visibilité ne pouvant pas être incluse dans la fonctionnelle, elle doit alors être déterminée en amont avant de faire évoluer la surface. Ceci peut être fait une fois pour toute [9, 16, 25] ou itérativement, en alternant le calcul de la visibilité avec l'optimisation de la fonctionnelle [5, 17, 23].

Toute autre méthode ne prenant pas en compte la visibilité dans la fonctionnelle pâtit d'un biais de réduction de surface [1, 28] dont un des effets les plus considérable est que la surface vide ait un coût nul et soit donc un minimum global. Ce biais se traduit aussi par une tandence à faire disparaître les parties fines et amincies de la surface.

Différents palliatifs ont été proposés. Les "forces ballon" [25] gonflent la surface afin d'éviter le rétrécissement, mais introduisent un autre biais qui aboutit à des résultats surgonflés [28]. Les méthodes d'évolution de surfaces [5, 17]

reposent implicitement sur le fait que, pour les surfaces suffisamment texturées, un minimum local assez large existe proche d'une bonne reconstruction. Ainsi l'évolution sera stoppée avant de trop rétrécire. Les approches basées sur les enveloppes visuelles contraignent les surfaces à remplir les silhouettes de l'objet dans les images [9, 6, 20] ; le biais est ainsi réduit, mais seulement sur les parties non-concaves de la surface.
La segmentation stéréoscopique [27] utilise le concept de visibilité orientée [13] pour inclure la visibilité dans une fonctionnelle de surface pondérée. Le rétrécissement est ainsi évité et la surface résultante est automatiquement cohérente avec les silhouettes dans les images, sans que cela ne nécessite aucune contrainte additionnelle. Cependant, la caractérisation des zones visibles à partir de la "visibilité orientée" est uniquement valide pour les objets convexes et l'évolution dérivée dans [27] ne gère pas correctement les occultations de la surface par elle même.
Les contraintes basées sur les enveloppes visuelles ont été généralisées pour prendre en compte non seulement les silhouettes, mais aussi tous les générateurs de contours apparents, en les forçant à être alignés avec les forts gradients des images [4, 11]. De la même façon que la segmentation stéréoscopique arrive à reconstruire les enveloppes visuelles sans introduire et utiliser des contraintes de silhouettes, la minimisation propre de l'erreur de reprojection que nous présentons dans cet article, effectue l'alignement de tous les contours apparents, naturellement, sans aucune contrainte additionnelle.

3 Cadre mathématique et notations

Le cadre mathématique de cet article est celui défini par Solem et Overgaard [22] dans lequel les formes sont implicitement représentées par des fonctions de lignes de niveaux [14, 15]. Par souci de commodité pour le lecteur, nous rappelons ici les notions et notations requises.

3.1 Fonctions de lignes de niveaux et fonctions caractéristiques

Etant donnée une fonction de lignes de niveaux $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, l'ensemble des points $\Omega = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}) \leq 0\}$ est une *forme solide* [12] et son bord $\Gamma = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}) = 0\}$ est une *surface orientée*, voir figure 1. Nous disons que ϕ est une *représentation implicite* de Ω et que Ω est l'*intérieur* de Γ. Le vecteur normal à la surface pointant vers l'extérieur peut être calculé à partir de la représentation implicite par $\mathbf{n} = \nabla\phi/|\nabla\phi|$.
La *fonction caractéristique* de la forme, χ_Ω, vaut 1 à l'intérieur de la forme et 0 en dehors. Elle peut être facilement exprimée en fonction de ϕ et de la fonction d'Heaviside, H, par $\chi_\Omega = 1 - H(\phi)$. Le gradient $\nabla\chi_\Omega$ de la fonction caractéristique peut seulement être défini dans le sens des distributions [10, 18]. Pour tous les champs de vecteurs tests $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\chi_\Omega \cdot \mathbf{w}\, d\mathbf{x} \equiv -\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{w}\, d\mathbf{x} = -\int_\Gamma \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma\ , \quad (4)$$

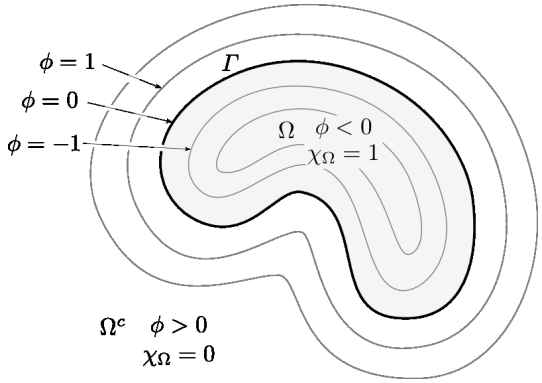

FIG. 1 – Fonction de lignes de niveaux et fonction caractéristique d'une forme.

où le dernier terme résulte du théorème de la divergence de Gauss. En d'autres termes, la distribution $\nabla\chi_\Omega$ calcule le flot de $\mathbf{w}$ qui entre dans la forme. Une expression en terme de ϕ peut être obtenue par le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\nabla\chi_\Omega = -\nabla\phi\, \delta(\phi), \quad (5)$$

où δ est la distribution de Dirac.

3.2 Dérivées de fonctionnelles

Soit M, la *variété des surfaces admissibles* définie par Solem et Overgaard [22]. Dans cet espace, les points sont des surfaces. Les vecteurs tangents à cette variété en un point Γ sont les vitesses normales par lesquelles la surface peut évoluer. L'espace tangent $T_\Gamma M$ est l'ensemble de toutes ces vitesses normales.
La variation $\phi^s = \phi + s\psi$ de ϕ, décrit une courbe $\Gamma(s) = \{\mathbf{x} : \phi^s(\mathbf{x}) = 0\}$ dans M. Sa *vitesse normale* (ou vecteur tangent) à $s = 0$ est,

$$v = \frac{-\psi}{|\nabla\phi|}\ . \quad (6)$$

Aussi n'importe quel vecteur tangent peut être obtenu de cette façon.
Considérons une fonctionnelle de surface $E : M \to \mathbb{R}$. Lorsque la fonction $E(\Gamma(s))$ est dérivable à $s = 0$, nous disons que la *dérivée de Gâteaux* de E à Γ dans la direction v est

$$\partial E(\Gamma, v) \equiv \frac{d}{ds} E(\Gamma(s))\Big|_{s=0}\ . \quad (7)$$

Si cette dérivée peut être écrite comme

$$\partial E(\Gamma, v) = \int_\Gamma w(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, d\sigma\ , \quad (8)$$

avec w dans l'espace tangent, nous disons que w est le gradient de E. Ceci permet de faire évoluer la surface dans la direction, $-w$, qui assure la décroissance de la fonctionnelle. En effet, si $\Gamma(t)$ satisfait $\frac{\partial}{\partial t}\Gamma = -w$, alors nous

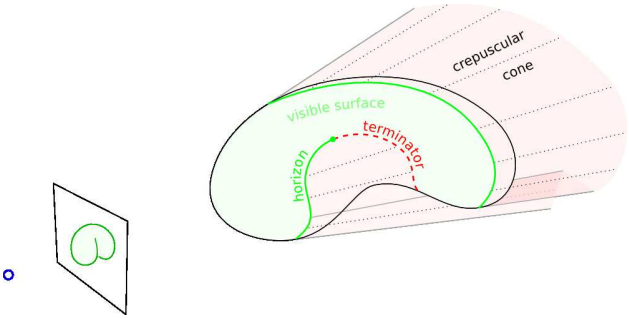

FIG. 2 – Vue d'une forme de *banane*. Les horizons sont représentés par des lignes vertes et les terminateurs par des lignes rouges en pointillé. Les rayons de point de vue, en pointillés noir, sont les rayons crépusculaires qui forment le cône crépusculaire.

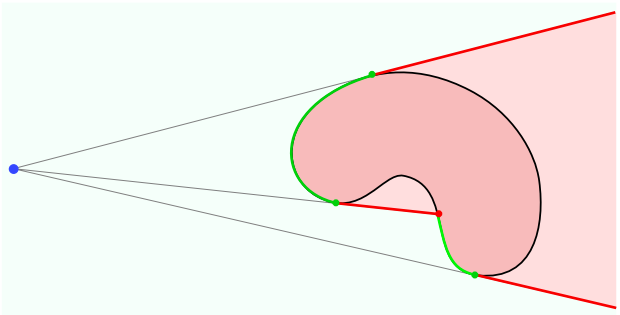

FIG. 3 – Coupe de la forme de banane. Les surfaces et volumes visibles sont en vert ; le cône crépusculaire et le volume occlus sont en rouge.

avons $\frac{\partial}{\partial t}E(\Gamma(t)) = -\int_\Gamma w \cdot w \, d\sigma \leq 0$. Ainsi, une évolution dans la direction $-w$ permet de faire décroitre le coût de la fonctionnelle.

4 Comprendre la Visibilité

Cette section présente une analyse de la visibilité et de son évolution. Cette analyse se base sur l'étude de Tsai et al. [24], qui décrit la dynamique des régions visibles lorsque l'observateur se déplace. Notre but ici est au contraire de calculer la dérivée de la fonction de visibilité par rapport aux variations de la surface.

4.1 Description Géométrique

Etant donné une forme solide et un point d'observation, un point est dit visible si aucun point de la forme ne se trouve entre lui même et le point d'observation. L'ensemble des points visibles sera appelé le *volume visible*, $\mathcal{V}$, et son complémentaire, $\mathcal{V}^c$, le *volume occlus*. Ces volumes sont respectivement colorés en vert et rouge dans la figure 3. La frontière entre ces deux volumes, $\partial\mathcal{V}$, est une surface et sera appelée l'*interface de visibilité*, voir figures 2 et 3.
L'interface de visibilité est composée de deux parties de nature différente : une qui est visible (les courbes vertes dans la figure 3) et l'autre qui est occluse (les rouges). On peut montrer que la partie visible de l'interface et la partie visible de la surface coïcident. Ainsi, nous référerons cette partie comme la *surface visible*. La partie occluse de l'interface est principalement dans l'espace libre. Elle est formée de morceaux de cônes généralisés joignant différentes parties de la surface visible. En analogie avec l'optique atmosphérique, nous appellerons cette partie *cône crépusculaire* (cf. aussi la figure 2).
Le frontière entre la surface visible et le cône crépusculaire est une courbe fermée sur la surface Γ. Là encore, cette courbe contient à la fois des points visibles et des points occlus. La partie visible est l'*horizon* ou *le générateur de contours* (courbes vertes dans la figure 2). C'est une courbe (éventuellement ouverte) de points de la surface qui sont visibles et dont la normale est orthogonale au rayon d'observation. Sa projection dans l'image coïncide avec les *contours apparents*. La partie occluse constitue les *terminateurs* (courbes rouges dans la fig. 2). Elle contient les points sur lesquels les ombres des points de l'horizon se projètent. Les segments joignant les points de l'horizon et leurs terminateurs sont les *rayons crépusculaires* qui forment eux même le cône crépusculaire. Tous les points du cône crépusculaire sont occlus part l'horizon.

4.2 Formulation Mathématique

Soit $\nu_\Gamma : \mathbb{R}^3 \to \{0, 1\}$ (fonction de visibilité) la fonction caractéristique du volume visible, i.e. la fonction binaire valant 1 aux points visibles et 0 ailleurs. Dans cette section nous écrivons cette fonction en terme de la fonction de lignes de niveaux ϕ dans le but de dériver une expression analytique pour ses dérivées spatiales et temporelles dans la prochaine section. Ensuite, ces résultats seront utilisés pour calculer les dérivées de Gâteaux de la fonctionnelle d'erreur de reprojection.
Nous supposons que le point d'observation est l'origine. Soit ϕ une représentation implicite de la surface. La visibilité d'un point $\mathbf{x}$ peut être déterminée à partir des valeurs de ϕ sur le segment connectant l'origine à $\mathbf{x}$. Si une de ces valeurs est négative alors $\mathbf{x}$ est occlus.
Soit $\mathbf{y}_\phi(\mathbf{x})$ le point du segment où ϕ admet son minimum (voir la figure 4), i.e. $\mathbf{y}_\phi(\mathbf{x}) = \alpha_\phi(\mathbf{x})\mathbf{x}$ avec

$$\alpha_\phi(\mathbf{x}) = \arg\min_{\alpha \in [0,1]} \phi(\alpha\mathbf{x}) \; . \tag{9}$$

Si le minimum n'est pas unique, nous prenons le plus proche de l'origine. Nous observons que $\phi(\mathbf{y}_\phi(\mathbf{x}))$ est négatif à l'intérieur du volume occlus et positif à l'intérieur du volume visible (cf. figure 4). On peut montrer que $\phi \circ \mathbf{y}_\phi$ est une fonction continue [24], donc, $\phi(\mathbf{y}_\phi(\mathbf{x})) = 0$ pour tous les points sur l'interface de visibilité indépendamment de leur visibilité.
Ceci implique que pour tous les points $\mathbf{x}$ sur l'interface de visibilité, $\mathbf{y}_\phi(\mathbf{x})$ est un point sur la surface. Si $\mathbf{x}$ est lui-même sur la surface visible alors nécessairement $\mathbf{y}_\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, sinon $\mathbf{x}$ serait occlus. Si $\mathbf{x}$ est sur un rayon crépusculaire,

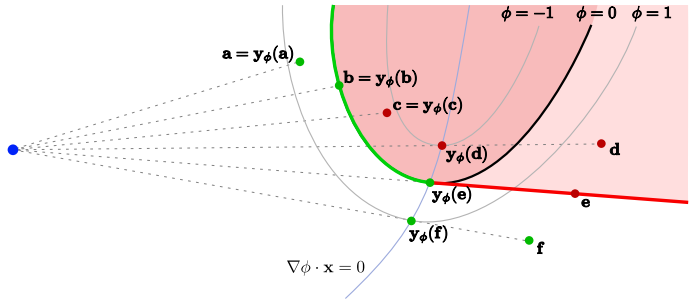

FIG. 4 – Position de $\mathbf{y}_\phi(\mathbf{x})$ selon la position de $\mathbf{x}$. Si $\mathbf{x}$ est dans le volume visible alors $\phi(\mathbf{y}_\phi(\mathbf{x}))$ est positif, sinon $\phi(\mathbf{y}_\phi(\mathbf{x}))$ est négatif.

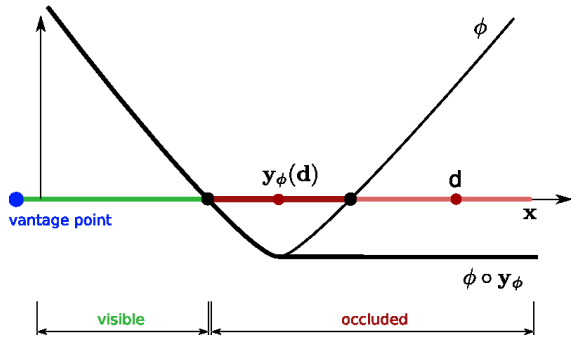

FIG. 5 – Graphe de la restriction de ϕ sur le rayon passant par le point $\mathbf{d}$ figurant sur la figure 4. $\phi \circ \mathbf{y}_\phi$ est une représentation implicite du volume occlus.

alors $\mathbf{y}_\phi(\mathbf{x})$ est son occulteur (i.e. le point placé sur l'horizon où le rayon crépusculaire démarre). Tous les points sur un rayon crépusculaire partagent le même occulteur, $\mathbf{y}_\phi$. Ce fait attribue un rôle important à l'horizon et a des conséquénces que nous exploiterons dans les sections suivantes.
Il découle ainsi que $\phi \circ \mathbf{y}_\phi$ est une représentation implicite de l'intérieur du volume occlus et que

$$\nu_\Gamma(\mathbf{x}) = H(\phi(\mathbf{y}_\phi(\mathbf{x}))) \tag{10}$$

presque partout (partout à l'exception de l'interface de visibilité). Aussi, en tant que distribution, $\nu_\Gamma = H \circ \phi \circ \mathbf{y}_\phi$.

4.3 Dérivée spatiale de la Visibilité

Le gradient de la visibilité, $\nabla\nu_\Gamma$, est une distribution qui calcule l'intégrale du flot traversant l'interface de visibilité $\int \nabla\nu_\Gamma \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = -\int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{w} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ (voir la section 3.1). Il peut être vu comme un champ de vecteur qui est nul partout excepté sur l'interface de visibilité, où il est aligné avec la normale à la surface et est de norme infinie.
Pour dériver une expression analytique du gradient $\nabla\nu_\Gamma$, remarquons tout d'abord que

$$\nabla(\phi \circ \mathbf{y}_\phi) = \nabla\phi(\mathbf{y}_\phi)\alpha_\phi \tag{11}$$

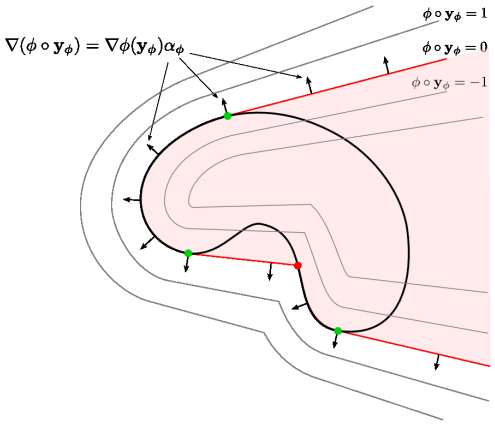

FIG. 6 – Tracés des contours de $\phi \circ \mathbf{y}_\phi$. Le gradient de $\phi \circ \mathbf{y}_\phi$ sur l'interface de visibilité est représenté par des flèches noires. Notons que le gradient sur le cône crépusculaire est proportionnel au gradient du point sur l'horizon où le rayon commence et est orthogonal au rayon d'observation.

presque partout. En particulier (11) est vérifiée pour tous les points sur l'interface de visibilité excepté pour les terminateurs où $\phi \circ \mathbf{y}_\phi$ n'est pas dérivable. Ce fait peut se démontrer en distinguant deux cas. Lorsque $\mathbf{y}_\phi$ est dans l'intérieur du segment joignant le point d'observation et $\mathbf{x}$, nous savons, par les multiplicateurs de Lagrange, que $\nabla\phi(\mathbf{y}_\phi(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{x} = 0$. La conclusion suit alors grâce au théorème de dérivation des fonctions composées. Lorsque $\mathbf{y}_\phi$ est un extremum de ce segment, nous avons de manière générale $\mathbf{y}_\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ et $\alpha_\phi(\mathbf{x}) = 1$ dans un voisinage de $\mathbf{x}$, et l'égalité (11) est trivialement vérifiée.
Maintenant, en observant que $-\phi \circ \mathbf{y}_\phi$ est une représentation implicite de $\mathcal{V}$, il suit de (5) que le gradient recherché est

$$\nabla\nu_\phi(\mathbf{x}) = \delta(\phi(\mathbf{y}_\phi))\, \nabla\phi(\mathbf{y}_\phi)\, \alpha_\phi\,. \tag{12}$$

Pour alléger les notations, nous n'écrivons pas les dépendances en $\mathbf{x}$ de $\mathbf{y}_\phi$ et α_ϕ.

4.4 Dérivée temporelle de la visibilité

Considérons une variation $\phi^s = \phi + s\psi$ de ϕ. Soit $\Gamma(s)$ la surface déformée associée. La fonction visibilité $\nu_{\Gamma(s)}(\mathbf{x})$ est maintenant une fonction spatio-temporelle. Sa dérivée par rapport au temps est une distribution scalaire concentrée sur l'interface de visibilité. Elle mesure la variation de la quantité intégrée sur le domaine visible. Intuitivement, c'est la différence entre la quantité de masse qui entre et la quantité de masse qui sort du volume visible lorsque la surface évolue.
Le théorème de dérivation des fonctions composées donne

$$\frac{d}{ds}\nu_{\Gamma(s)}(\mathbf{x})\Big|_{s=0} = \delta(\phi(\mathbf{y}_\phi))(\psi(\mathbf{y}_\phi) + \nabla\phi(\mathbf{y}_\phi)\cdot\dot{\mathbf{y}}_\phi) \tag{13}$$

où $\dot{\mathbf{y}}_\phi$ est la dérivée temporelle de $\mathbf{y}_{\phi^s}$ at $s = 0$. Si $\mathbf{y}_\phi$ est dans l'intérieur du segment, alors $\dot{\mathbf{y}}_\phi$ et $\mathbf{x}$ sont colinéaires

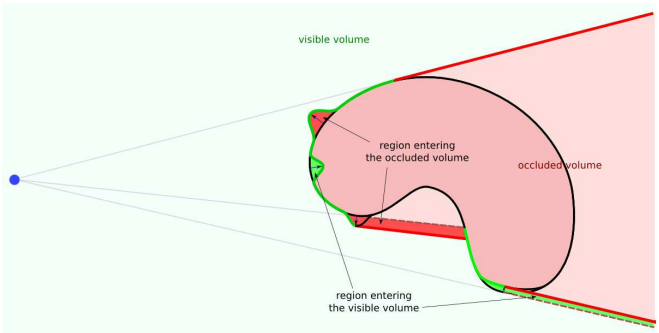

FIG. 7 – Représentation des changements de la visibilté lors d'un mouvement de la surface. Quatre régions de la surface se déplacent : deux dans à l'intérieur de la surface visible et deux autres autour de l'horizon. Les mouvements localisés à l'intérieur de la surface visible produisent des changement de visibilité locaux. Seuls les points que la surface balaye change de visibilité. Les mouvements situés au niveau de l'horizon changent quant à eux la visibilité globalement. Un mouvement de l'horizon produit en effet un mouvement des rayons crépusculaires situés derrière lui. Aussi, tout point traversé par le mouvement du rayon crépusculaire change sa visibilité.

et orthogonaux à $\nabla\phi(\mathbf{y}_\phi)$. Sinon, si $\mathbf{y}_\phi = \mathbf{x}$ alors $\dot{\mathbf{y}}_\phi = 0$. Donc, dans tous les cas, nous avons

$$\frac{d}{ds}\nu_{\Gamma(s)}(\mathbf{x})\Big|_{s=0} = \delta(\phi(\mathbf{y}_\phi))\ \psi(\mathbf{y}_\phi)\ . \tag{14}$$

4.5 Dérivée temporelle d'une quantité intégrée sur le volume visible

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour calculer les dérivées de Gâteaux d'une fonctionnelle F qui est l'intégrale d'une quantité f sur le volume visible,

$$F(\Gamma) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x})\nu_\Gamma(\mathbf{x})d\mathbf{x}\ . \tag{15}$$

Cette dérivée sera utilisée dans la section suivante pour dériver facilement la dérivée de la fonctionnelle d'erreur de reprojection. La principale difficulté est contenue dans cette section.
De l'équation (14), nous voyons que

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(\Gamma(s))\Big|_{s=0} &= \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x})\frac{d}{ds}\nu_{\Gamma(s)}(\mathbf{x})\Big|_{s=0}d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y}_\phi)\delta(\phi(\mathbf{y}_\phi))\ d\mathbf{x}\ ,\end{aligned} \tag{16}$$

qui peut être réécrit comme une intégrale sur l'interface de visibilité

$$\frac{d}{ds}F(\Gamma(s))\Big|_{s=0} = \int_{\partial\mathcal{V}} f(\mathbf{x})\frac{\psi(\mathbf{y}_\phi)}{|\nabla(\phi\circ\mathbf{y}_\phi)|}\ d\sigma\ , \tag{17}$$

en remarquant que $d\sigma = |\nabla(\phi\circ\mathbf{y}_\phi)|\delta(\phi(\mathbf{y}_\phi))d\mathbf{x}$. Idéalement, nous voudrions écrire la dérivée comme une intégrale sur la surface Γ et non pas comme une intégrale sur l'interface de visibilité (voir la section 3.2). Dans ce but, nous séparons l'intégrale en une somme de deux intégrales, une sur chacune des parties de l'interface de visibilité.
(i) Sur la surface visible, nous savons que $\mathbf{y}_\phi = \mathbf{x}$ et, ainsi, l'intégrale est simplement

$$\int_{\Gamma\cap\mathcal{V}} f(\mathbf{x})\frac{\psi(\mathbf{x})}{|\nabla\phi(\mathbf{x})|}d\sigma\ . \tag{18}$$

(ii) Sur le cône crépusculaire, $\mathbf{y}_\phi$ est l'occulteur de $\mathbf{x}$ et est un point de l'horizon de la surface. Tous les points sur un rayon crépusculaire partagent le même occulteur sur l'horizon. L'idée, ici, est d'attribuer toute la masse d'un rayon crépusculaire à l'origine du rayon sur l'horizon. De cette façon, l'intégrale sur le cône crépusculaire sera écrite comme une intégrale sur l'horizon et donc sur la surface Γ. Etant donnée une paramétrisation d'arc de l'horizon, $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \boldsymbol{\gamma}(t)$, le cône crépusculaire peut être paramétré par $\mathbf{x}(r,t) = r\boldsymbol{\gamma}(t)$ avec $t \in I$ et r dans l'intervalle $(1, T_{\boldsymbol{\gamma}(t)})$; où pour tout t, $\mathbf{x}(r,t)$ couvre le rayon crépusculaire de l'horizon $\boldsymbol{\gamma}(t)$ au terminateur associé. En utilisant cette paramétrisation, l'équation (11) et le fait que $\mathbf{y}_\phi(\mathbf{x}(r,t)) = \boldsymbol{\gamma}(t)$, l'intégrale de surface (17) sur le cône crépusculaire est réécrite comme

$$\int_I\int_1^{T_{\boldsymbol{\gamma}(t)}} f(r\boldsymbol{\gamma}(t))\frac{\psi(\boldsymbol{\gamma}(t))}{|\nabla\phi(\boldsymbol{\gamma}(t))|}r^2|\boldsymbol{\gamma}(t)\times\boldsymbol{\gamma}'(t)|\ dr\ dt\ . \tag{19}$$

Les termes dépendant de r peuvent être rassemblés dans $L(\mathbf{x}) = \int_1^{T_\mathbf{x}} f(r\mathbf{x})r^2dr$, qui cumule la masse de f le long des rayons crépusculaires. Par ailleurs, notons $\boldsymbol{\eta}(t)$ le vecteur normal à l'horizon, tangent à la surface et pointant dans la direction opposée de celle de l'observateur. L'intégrale est alors[2]

$$\int_I L(\boldsymbol{\gamma}(t))\frac{\psi(\boldsymbol{\gamma}(t))}{|\nabla\phi(\boldsymbol{\gamma}(t))|}\ \ (\boldsymbol{\gamma}(t)\cdot\boldsymbol{\eta}(t))\ dt\ . \tag{20}$$

C'est le flot du champ de vecteurs $L\frac{\psi}{|\nabla\phi|}\mathbf{x}$ traversant l'horizon de la surface visible vers le cône crépusculaire. Convertissons maintenant cette intégrale comme une intégrale sur la surface Γ.
Considérons l'ensemble des points de la surface dont la normale est orientée vers la caméra, $\mathcal{O} = \{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}) \le 0 : \mathbf{x} \in \Gamma\}$. Le bord de cet ensemble comme sous-ensemble de la surface, $\partial\mathcal{O}$, est une courbe sur la surface. L'horizon correspond exactement à la partie visible de cette courbe. En exploitant (4) sur la variété Riemanienne Γ (à la place de $\mathbb{R}^3$), nous avons

$$\int_\Gamma \nabla_\Gamma\chi_\mathcal{O}\cdot\mathbf{w}\ d\sigma = -\int_{\partial\mathcal{O}}\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{\eta}\ d\tau\ , \tag{21}$$

[2] $\boldsymbol{\gamma}'$ et $\boldsymbol{\eta}$ forment une base orthonormale du plan tangeant à $\boldsymbol{\gamma}$. Dans cette base, $\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}')\boldsymbol{\gamma}' + (\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}$ et ainsi $|\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}'| = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\eta}$.

où ∇_Γ est le gradient intrinsèque dans Γ et $\chi_\mathcal{O} = 1 - H(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{O}$. En considérant le champ de vecteurs $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \nu_\Gamma(\mathbf{x}) L(\mathbf{x}) \frac{\psi(\mathbf{x})}{|\nabla\phi(\mathbf{x})|}\mathbf{x}$, qui est nul pour tous les points de $\partial\mathcal{O}$ excepté à l'horizon, nous pouvons réécrire l'équation (20) comme

$$\int_\Gamma \nu_\Gamma(\mathbf{x}) L(\mathbf{x}) \frac{\psi(\mathbf{x})}{|\nabla\phi(\mathbf{x})|} \; (\mathbf{x}\cdot\nabla_\Gamma[H(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})])\, d\sigma\,. \quad (22)$$

Comme $\nabla[H(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})]$ est sur le plan tangent de Γ, il correspond à $\nabla_\Gamma[H(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})]$. Ainsi par (5) nous pouvons réécrire $\mathbf{x}\cdot\nabla_\Gamma[H(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})]$ comme $\mathbf{x}^t D\mathbf{n}\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})$. Enfin, joignant les deux intégrales (18) et (22), la dérivée de Gâteaux de F est

$$\partial F(\Gamma, v) = \int_\Gamma -\big[f + L\,\mathbf{x}^t D\mathbf{n}\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\big]\,\nu_\Gamma\; v\; d\sigma. \quad (23)$$

Remarque : Comme espéré dans la section 3.2, nous avons réécrit la dérivée de Gâteaux de F sous la forme $\int_\Gamma w\, v\, d\sigma$. Cependant, exceptionnellement ici, w n'est pas une fonction, mais une distribution. Les distributions sont des opérateurs linénaires continus, donc la fonctionnelle est Fréchet différentiable et sa différentielle est w. Cependant, le gradient défini dans l'espace tangent comme dans [22] et [3] n'existe pas pour cette fonctionnelle car w n'est pas une déformation admissible de Γ. En d'autres termes, pour effectuer une évolution par descente de gradient, w doit être approché par une déformation admissible. En pratique, ceci se traduit simplement par approcher la distribution delta par une fonction régulière.

5 Différentielle de la fonctionnelle de l'erreur de reprojection

À partir des résultats obtenus dans les sections précédentes, dans cette section nous allons calculer la différentielle de la fonctionnelle de l'erreur de reprojection (3),

$$E(\Gamma) = \int_{\Gamma\cap\mathcal{V}} g(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\, \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}_z^3}\, d\sigma\,. \quad (24)$$

Comme, pour tous les points $\mathbf{x}$ de la surface visible, la normale $\mathbf{n}_{\partial\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ à l'interface de visibilité $\partial\mathcal{V}$ coïncide avec la normale $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ à la surface Γ, et comme $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_{\partial\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = 0$ sur le cône crépusculaire, il suit que

$$E(\Gamma) = \int_{\partial\mathcal{V}} g(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\, \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3}\cdot\mathbf{n}_{\partial\mathcal{V}}(\mathbf{x})\, d\sigma\,. \quad (25)$$

5.1 Cas où g ne dépend pas de la normale

Considérons le cas où g ne depend pas de la normale, $g(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})) = g(\mathbf{x})$. La fonctionnelle (25) correspond au flot de vecteurs $g(\mathbf{x})\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3}$ traversant l'interface de visibilité $\partial\mathcal{V}$. Par le théorème de la divergence de Gauss, ce flot est l'opposé de la quantité de divergence du champ de vecteurs à l'intérieur du volume visible. Ainsi, comme $\nabla\cdot\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3} = 0$,

$$E(\Gamma) = -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla g(\mathbf{x})\cdot\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3}\right)\nu_\Gamma(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,. \quad (26)$$

Maintenant, en utilisant le résultat (23) développé dans la section précédente avec $f(\mathbf{x}) = -\nabla g(\mathbf{x})\cdot\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3}$, nous obtenons immédiatement la dérivée de Gâteaux de cette fonctionnelle. Nous observons que, dans ce cas, L a une forme simple car l'intégrale récapitule, les variations de g le long des rayons crépusculaires :

$$L(\mathbf{x}) = \int_1^{T_\mathbf{x}} \nabla g(r\mathbf{x})\cdot\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3} dr = \big[g(T(\mathbf{x})) - g(\mathbf{x})\big]\frac{1}{\mathbf{x}_z^3}\,, \quad (27)$$

où $T(\mathbf{x})$ est le terminateur de $\mathbf{x}$. Enfin, notant $g\circ T$ par g', la différentielle de la fonctionnelle de l'erreur de reprojection est

$$\nabla g\cdot\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3}\nu_\Gamma + (g - g')\frac{\mathbf{x}^t D\mathbf{n}\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3}\delta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\nu_\Gamma. \quad (28)$$

5.2 Avec les normales

Nous décrivons ici la dérivation de la différentielle dans le cas général où g peut dépendre de la normale à la surface. En raison de la limitation de l'espace, nous esquisserons seulement le calcul et présenterons le résultat final.
Tout d'abord, en utilisant (4) avec l'interface de visibilité $\partial\mathcal{V}$ (à la place de Γ), nous reformulons (25) comme une intégrale sur $\mathbb{R}^3$. Ensuite, dérivant le résultat par rapport à s, la loi sur la dérivation de produits donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}E(\Gamma(s))\Big|_{s=0} &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d}{ds}g(\mathbf{x}, \mathbf{n}^s)\Big|_{s=0}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3}\cdot\nabla\nu_\Gamma\, d\mathbf{x}\\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} g(\mathbf{x}, \mathbf{n})\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3}\cdot\nabla\frac{d}{ds}\nu_{\Gamma(s)}\Big|_{s=0} d\mathbf{x}\,.\end{aligned}$$

Pour la première intégrale, nous avons $\frac{d}{ds}[g(\mathbf{x}, \mathbf{n})] = g_n\cdot\frac{\nabla\psi}{|\nabla\phi|}$. Pour se débarrasser du terme $\nabla\psi$ et faire apparaître ψ à la place, nous devons intégrer par parties sur $\nabla\psi$, comme dans [22], section 5. La seconde intégrale, encore par une intégration par parties, devient $-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\cdot[g(\mathbf{x}, \mathbf{n})\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3}]\frac{d}{ds}\nu_{\Gamma(s)}\big|_{s=0} d\mathbf{x}$ et donc, comme $\mathbf{n}$ ne dépend pas de s, nous pouvons appliquer le résultat de (28) démontré dans le cas le plus simple, lorsque g ne dépend pas de la normale.
La différentielle obtenue est

$$\nabla\cdot\Big(g_\mathbf{n}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{x}_z^3} + g\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3}\Big)\nu_\Gamma + (g - g')\frac{\mathbf{x}^t D\mathbf{n}\,\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3}\delta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\nu_\Gamma\,. \quad (29)$$

5.3 Comparaison avec le gradient des fonctionnelles de surfaces pondérées

Si nous notons $\overline{g}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{n})\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{x}_z^3}$, alors $[\overline{g}_\mathbf{n} + \overline{g}\;\mathbf{n}]$ correspond à $[g_\mathbf{n}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{x}_z^3} + g\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3}]$. Donc la différentielle (29) est égale au gradient de la fonctionnelle de surface pondérée $\int_\Gamma \overline{g}(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\, d\sigma$ donnée dans [8, 22], plus un nouveau terme $(g - g')\frac{\mathbf{x}^t D\mathbf{n}\,\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3}\delta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\nu_\Gamma$ qui est dû aux changements de visibilité causés par le mouvement de l'horizon.

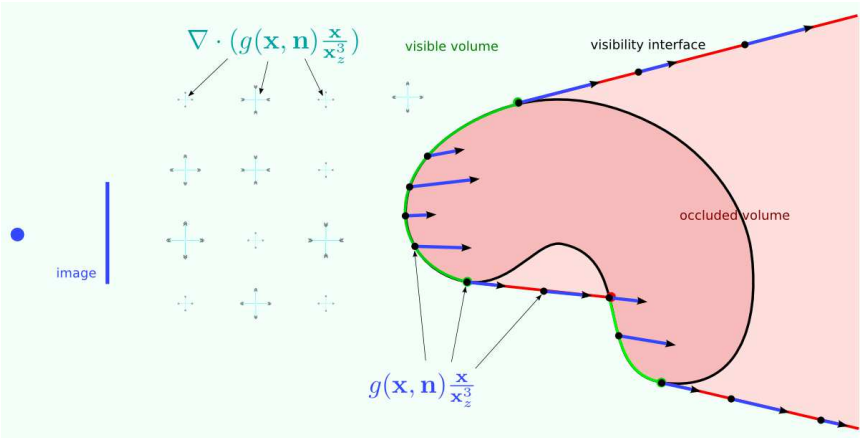

FIG. 8 – Le champ de vecteurs $g(x,n)x/x_z^3$ est parallèle aux rayons crépusculaires, donc son flot à travers le cône crépusculaire est nul. L'erreur de reprojection peut alors être écrite comme l'intégrale de la divergence négative du champ de vecteurs à l'intérieur du volume visible.

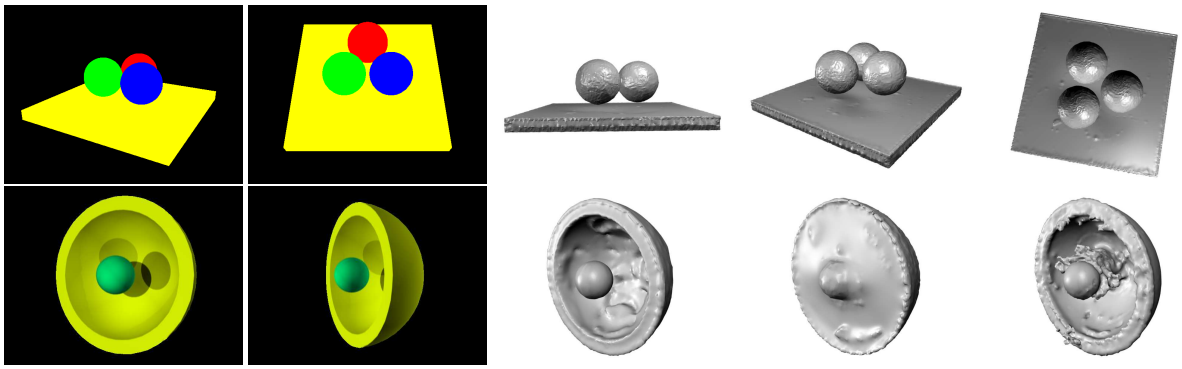

FIG. 9 – **Haut :** deux images d'entrée du jeux de données des *boules* et trois visualisations de la reconstruction obtenue avec le terme d'horizon. **Bas :** deux images d'entrée du jeux de données du *bol* et la reconstruction obtenue avec le terme entier, le terme d'horizon et le terme intérieur.

6 Application à la stéréovision multivue

Dans cette section nous présentons un exemple d'application de la fonctionnelle de l'erreur de reprojection à la stéréovision multivue. Pour garder l'exemple simple, nous supposons que la scène est Lambertienne et que l'illumination est statique. Notons cependant qu'un modèle de réflectance plus élaboré mène toujours à un même type de fonctionnelle de l'erreur de reprojection.

Le modèle de formation d'image est le même que celui de la segmentation stéréoscopique [27]. Dans ce modèle, les images sont expliquées par une surface Γ, la radiance des points de cette surface et par le fond. Soit $C : \mathbb{R}^3 \cup B \to \mathbb{R}^3$ la fonction radiance qui associe une couleur aux points de l'espace 3D et à ceux du fond. Idéalement, la couleur $I(\mathbf{u})$ observée à un pixel $\mathbf{u}$ de l'image I devrait être égale à la couleur $C(\pi_\Gamma^{-1}(\mathbf{u}))$ du point correspondant de la surface, donné par la projection inverse. Ainsi, l'erreur de reprojection de la surface dans une image est

$$E(\Gamma, C) = \int_{\mathcal{I}} \left(I(\mathbf{u}) - C(\pi_\Gamma^{-1}(\mathbf{u}))\right)^2 d\mathbf{u}\,. \tag{30}$$

L'erreur de reprojection pour un ensemble d'images est la somme des erreurs de reprojections individuelles. Un terme additionnel de régularisation de la surface $\int_\Gamma d\sigma$ est par ailleurs aussi nécéssaire pour assurer que les surfaces reconstruites soient lisses.

L'optimisation de C et Γ est alors effectuée en alternance. Pour une surface fixée, la radiance optimale d'un point peut être explicitée comme une somme pondérée des couleurs observées à ses projections (visibles) sur l'image. Pour une radiance fixée, à partir de (29), la différentielle de l'erreur d'une seule image par rapport à la surface est

$$(I-C)^t \nabla C \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3} \nu_\Gamma + \left((I-C)^2 - (I-C')^2\right) \frac{\mathbf{x}^t D\mathbf{n}\mathbf{x}}{\mathbf{x}_z^3} \delta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}) \nu_\Gamma \tag{31}$$

où C' est la radiance au terminateur de $\mathbf{x}$, qui peut être un point de la surface ou du fond.

Intuitivement, cela signifie que pendant l'évolution, les points visibles seront déplacés selon le premier terme de (31) de façon à ce que C corresponde à I dans la zone de l'image où se projette l'intérieur de l'objet. De manière complémentaire, le second terme déplacera les horizons de la surface, et les horizons seulement à cause du

facteur $\delta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\nu_\Gamma$. Ce terme compare le coût d'un point dans l'horizon avec celui de son terminateur et déplace l'horizon en fonction, de façon à ce que son terminateur devienne visible ou occlus selon le résultat de la comparaison. Par conséquent, les contours apparents de la surface sur l'image se placeront sur leur position exacte, comme nous le montrerons dans la partie expérimentale.

6.1 Résultats expérimentaux

Nous avons implémenté l'évolution de surface (31) en utilisant la méthode des lignes de niveaux en multirésolution. La visibilité est calculée en synthétisant les images de la surface en utilisant la carte graphique et en comparant la profondeur des points avec le "Z-buffer". Les horizons sont obtenus en approchant la distibution Delta avec une Gaussienne. La radiance aux terminateurs est calculée en re-synthétisant la surface sans les horizons.

Nous présentons ici, des expériences effectuées sur deux scènes synthétiques spécialement conçues et sur deux jeux d'images réelles.

Le but de ces expériences est de montrer l'impact de notre bonne gestion de la visibilité et non pas d'évaluer l'énergie (30) présentée ci-dessus.

Le premier jeux de données appelé "*boules*" (figure 9) est constitué de 20 images de trois boules flottant sur un plan. Il n'y a pas de texture n'y d'ombrage dans aucune partie de la scène. La seule information présente dans l'image sont donc les contours apparents. De plus, à cause des auto-occultations entre les boules et le plan, les silhouettes ne sont pas suffisantes pour distinguer que les boules sont trois objets séparés.

Le flot minimisant l'erreur de reprojection (31) a été exécuté trois fois. D'abord, en utilisant le flot dans son intégralité, ensuite, en utilisant seulement le second terme (le terme d'horizon), et enfin, en utilisant seulement le premier terme (le terme intérieur). Les deux premières exécutions réussirent avec succès à séparer les trois balles et obtinrent une reconstruction correcte. La troisième ne sépara pas les boules durant le processus d'évolution et, à cause du manque de texture, se rétracta et disparut. Ce comportement resta le même lorsque l'on initialisa la surface avec la surface à l'origine des données (le "ground truth").

Nous avons répété ces expériences sur la scène du bol (fig. 9). La scène contient une balle verte à l'intérieur d'un bol jaune, le tout étant Lambertien. L'exécution avec le flot dans son intégralité reconstruisit correctement la concavité du bol ainsi que la forme des boules. L'exécution utilisant seulement le terme d'horizon ne réussit pas du tout à creuser la concavité. L'exécution avec le terme intérieur réussit à creuser la concavité mais pas complètement, laissant des connexions entre la balle et le bol. Ceci montre comment le terme intérieur et le terme d'horizon agissent ensemble, le premier creuse la concavité quand le second force les contours apparents de la boule sur les images.

Enfin, nous avons testé l'évolution sur les bases de données spécifiques de stéréovision multivue du dino et du temple [19]. La figure 10 montre l'évolution obtenue pour le temple. L'évolution prend 30 minutes ; la surface ne variant quasiment pas les 20 dernières minutes. La résolution finale de la grille est $150 \times 200 \times 100$. La figure 11 montre la reconstruction finale obtenue à partir de la base de données *Dino* visualisée à partir de plusieurs points de vue. Les résultats sont sous évaluation et apparaîteront à `http://vision.middlebury.edu/mview/`. Une soumission préliminaire donne une précision de 1,05 mm et un remplissage de 81,9% pour la base de données du temple.

7 Conclusion

Dans cet article nous calculons la dérivée de la fonctionnelle de l'erreur de reprojection. La partie difficile a été de prendre en compte correctement les changements de la visibilité qui se produisent lorsque la surface se déplace, ce qui est un des problèmes les plus importants en reconstruction de surface à partir d'images. La récompense est que, maintenant, il est possible de minimiser l'erreur de reprojection par une évolution de surface.

Cette minimisation a pour avantage que la surface reconstruite est celle qui reproduit le mieux les images observées. En particulier, comme démontré dans nos expériences, l'évolution déplace les générateurs de contours de la surface de façon à ce que les contours apparents soient localisés correctement dans les images. Ceci est une conséquence directe de la minimisation correcte de l'erreur de reprojection elle même. En conséquence, les méthodes utilisant des contraintes additionnelles de silhouettes et contours apparents peuvent maintenant être comprises et justifiées par un unique critère : l'erreur de reprojection.

Références

[1] B. Appleton, H. Talbot. Globally minimal surfaces by continuous maximal flows. *PAMI*, 28(1) :106-118, 2006. 2

[2] Y. Boykov, V. Kolmogorov. Computing geodesics and minimal surfaces via graph cuts. *ICCV*, 2003. 2

[3] G. Charpiat, R. Keriven, J. P. Pons, O. Faugeras. Designing spatially coherent minimizing flows for variational problems based on active contours. *ICCV*, 2 :1403–1408, 2005. 7

[4] D. Crispell, D. Lanman, P.G. Sibley, Y. Zhao, G. Taubin. Beyond Silhouettes : Surface Reconstruction using Multi-Flash Photography. *3DPVT*, 2006. 3

[5] O. Faugeras, R. Keriven. Complete dense stereovision using level set methods. *ECCV*, I :379–393, 1998. 2

[6] Y. Furukawa, J. Ponce. Carved visual hulls for image-based modeling. *ECCV*, 2006. 3

[7] B. Goldlücke, I. Ihrke, C. Linz, M. Magnor. Weighted minimal hypersurface reconstruction. *PAMI*, to appear. 2

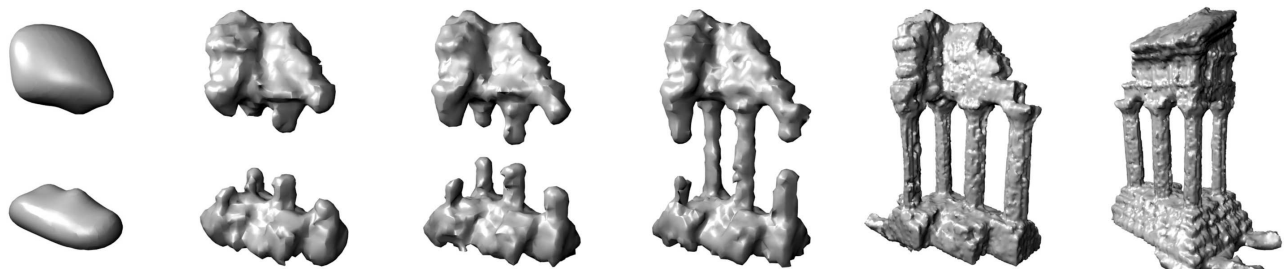

FIG. 10 – Evolution de la surface pour la base de données du *temple* et la reconstruction finale.

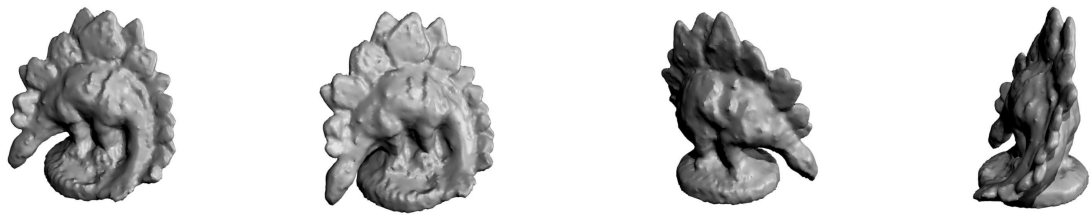

FIG. 11 – Reconstruction finale obtenue à partir de la base de données *Dino* visualisée à partir de plusieurs points de vue.

[8] B. Goldlücke, M. Magnor. Weighted minimal hypersurfaces and their applications in computer vision. *ECCV*, 2004. 7

[9] C. Hernández Est., F. Schmitt. Silhouette and stereo fusion for 3D object modeling. *CVIU*, 96(3) :367–392, 2004. 2, 3

[10] L. Hormander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, 2e : Distribution Theory and Fourier Analysis*. Springer, 2005. 3

[11] R. Keriven. A variational framework for shape from contours. Tech. Report, CERMICS, ENPC, 2002-221b. 3

[12] J. Koenderink. *Solid shape*. MIT Press, 1990. 3

[13] V. Lempitsky, Y. Boykov, D. Ivanov. Oriented visibility for multiview reconstruction. *ECCV*, III :226–238, 2006. 2, 3

[14] S. Osher, J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. of Comput. Physics*, 79 :12–49, 1988. 3

[15] S.J. Osher, R.P. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, 2002. 3

[16] S. Paris, F.X. Sillion, L. Quan. A surface reconstruction method using global graph cut optimization. *IJCV*, 66(2) :141–161, 2006. 2

[17] J.P. Pons, R. Keriven, O. Faugeras. Modelling dynamic scenes by registering multi-view image sequences. *CVPR*, 2 :822–827, 2005. 2

[18] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991. 3

[19] S.M. Seitz, B. Curless, J. Diebel, D. Scharstein, R. Szeliski. A comparison and evaluation of multi-view stereo reconstruction algorithms. *CVPR*, 1 :519–528, 2006. 2, 9

[20] S.N. Sinha, M. Pollefeys. Multi-view reconstruction using photo-consistency and exact silhouette constraints : a maximum-flow formulation. *ICCV*, 1 :349–356, 2005. 3

[21] S. Soatto, A.J. Yezzi, H. Jin. Tales of shape and radiance in multi-view stereo. *ICCV*, 974–981, 2003. 2

[22] J.E. Solem, N. Overgaard. A geometric formulation of gradient descent for variational problems with moving surfaces. *Scale-Space*, 419–430, 2005. 2, 3, 7

[23] C. Strecha, R. Fransens, L. Van Gool. Wide-baseline stereo from multiple views : a probabilistic account. *CVPR* 2004. 2

[24] Y.H.R. Tsai, L.T. Cheng, S. Osher, P. Burchard, G. Sapiro. Visibility and its dynamics in a PDE based implicit framework. *J. of Comput. Physics*, 199(1) :260–290, 2004. 4

[25] G. Vogiatzis, P. Torr, R. Cipolla. Multi-view stereo via volumetric graph-cuts. *CVPR*, 2 :391–398, 2005. 2

[26] R.T. Whitaker. A Level-Set Approach to 3D Reconstruction from Range Data. *IJCV*, 29(3) :203–231, 1998. 2

[27] A. Yezzi, S. Soatto. Stereoscopic segmentation. *IJCV*, 53(1) :31–43, 2003. 2, 3, 8

[28] T. Yu, N. Ahuja, W.-C. Chen. SDG cut : 3D reconstruction of non-lambertian objects using graph cuts on surface distance grid. *CVPR*, 2 :2269–2276, 2006. 2