



HAL
open science

Des conditions d'interface efficaces pour le couplage de modèles océaniques

Elise Nourtier-Mazauric

► **To cite this version:**

Elise Nourtier-Mazauric. Des conditions d'interface efficaces pour le couplage de modèles océaniques. [Rapport de recherche] RR-6512, 2008, pp.113. inria-00275016v2

HAL Id: inria-00275016

<https://inria.hal.science/inria-00275016v2>

Submitted on 23 Apr 2008 (v2), last revised 30 Apr 2008 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Des conditions d'interface efficaces
pour le couplage de modèles océaniques*

Elise Nourtier-Mazauric

N° 6512

2008/03/26

Thème NUM

 *Rapport
de recherche*



Des conditions d'interface efficaces pour le couplage de modèles océaniques

Elise Nourtier-Mazauric

Thème NUM — Systèmes numériques
Équipe-Projet Moise

Rapport de recherche n° 6512 — 2008/03/26 — 109 pages

Résumé : La modélisation océanique s'est développée ces dernières années notamment grâce à la mise en place de modèles régionaux à haute résolution et leur couplage avec des modèles grande échelle de faible résolution [BD06]. Nous nous intéressons ici à la réalisation et à l'optimisation d'un tel couplage au moyen d'algorithmes de Schwarz globaux en temps.

Ces algorithmes (optimized Schwarz waveform relaxation algorithms) ont été développés en particulier dans le cadre de la modélisation océanique, à savoir des équations de type advection-diffusion pour les traceurs (température, salinité) et du système bidimensionnel de Saint-Venant linéarisé autour d'une advection nulle [Mar03, Mar05].

Dans le cadre du projet ANR COMMA, nous souhaitons étendre ces travaux dans un vrai modèle océanique, et nous en présentons ici diverses étapes : nous avons d'abord défini les conditions absorbantes pour les équations de Saint-Venant avec advection, dans la suite directe des travaux de [HS89] et [Mar03]. Ensuite nous avons étudié une équation des traceurs modifiée, où le laplacien est remplacé par un bilaplacien.

Mots-clés : Conditions aux interfaces, Frontières ouvertes, Conditions absorbantes, Couplage, Algorithme de Schwarz, Modélisation océanique

Efficient interface conditions for the coupling of ocean models

Abstract: Model coupling is an important present problem in ocean or atmosphere modelling, where regional modelling systems are designed by coupling high resolution local models to lower resolution large scale models.

In this study, we investigate the use of global-in-time Schwarz algorithms for such a coupling. The efficiency of these iterative methods is closely related to the transmission conditions between the subdomains interfaces. The absorbing boundary conditions and their approximations proved to be an extremely powerful tool to deduce good transmission conditions for domain decomposition methods and coupling. The limitation of the iteration count can be achieved by developing Schwarz optimized methods : they are based on the use of absorbing boundary conditions, with optimized transmission conditions, and on the minimization of the convergence rate of the algorithm over all frequencies propagated by the numerical scheme.

Several systems of equations encountered in ocean models are addressed in this study :

- The 2-D shallow-water model, either under hyperbolic and incompletely parabolic form (i.e. systems without or with viscosity)
- The scalar 2-D and 3-D advection-diffusion equations, which describe the evolution of tracers like temperature or salinity. Two different parameterizations of diffusion, laplacian and bi-laplacian, are considered.

Efficient interface conditions for those systems are derived, and implemented in numerical experiments, in idealized or realistic testcases.

Key-words: Interface conditions, Open boundaries, Absorbing conditions, Coupling, Schwarz algorithm, Ocean modelling

Table des matières

I	Introduction	5
II	Dynamique 2-D : équations de Saint-Venant	11
1	Équations hyperboliques (sans viscosité)	13
1.1	Introduction	13
1.2	Problème initial	13
1.3	Frontière Est	14
1.3.1	Diagonalisation ou méthode des caractéristiques	14
1.3.2	Transformée de Fourier, triangularisation, transformée de Fourier inverse et conditions absorbantes	19
1.3.3	Construction de la matrice de passage $V(\xi, \omega)$	20
1.3.4	Approximation des conditions absorbantes	24
1.4	Frontière Ouest	26
1.5	Frontière Nord	28
1.6	Frontière Sud	28
2	Équations incomplètement paraboliques (avec viscosité)	31
2.1	Introduction	31
2.2	Notations	33
2.3	Problème de Cauchy	33
2.3.1	Modes normaux du problème de Cauchy	34
2.3.2	Conditions de transmission	36
2.4	Dérivation des conditions aux frontières artificielles	37
2.4.1	Conditions aux frontières transparentes	37
2.4.2	Conditions aux frontières approchées en ν (non locales)	38
2.4.3	Rappel des conditions aux frontières absorbantes pour le problème hyperbolique	38
2.4.4	Conditions approchées en η	39
2.4.5	Cas particulier : le système de Saint-Venant linéarisé	40
2.5	Cas particulier du système sans termes de Coriolis F	41
2.5.1	Rappel des conditions aux frontières absorbantes pour le problème hyperbolique	41
2.5.2	Conditions locales pour le problème complet	41
2.5.3	Conditions aux limites d'ordres plus élevés (en ν)	41
2.5.4	Cas particulier : le système de Saint-Venant linéarisé, sans force de Coriolis	42
III	Conservation des traceurs : équations d'advection-diffusion	45
3	Équations d'advection-diffusion harmonique	47
3.1	Introduction	47
3.2	Espace \mathbb{R}^2	47

3.2.1	Algorithme appliqué aux transformées de Fourier des erreurs	47
3.2.2	Conditions optimales aux interfaces	49
3.2.3	Conditions approchées	49
3.2.4	Optimisation du taux de convergence pour les conditions approchées	50
3.3	Espace \mathbb{R}^3	51
4	Équations d'advection-diffusion biharmonique	53
4.1	Introduction	53
4.2	Formulation variationnelle, existence et unicité de la solution	54
4.2.1	Cas d'un seul domaine (sans couplage)	58
4.2.2	Cas d'une décomposition en deux sous-domaines à coupler	59
4.2.3	Cas général d'une décomposition en plusieurs sous-domaines	61
4.3	Conditions absorbantes exactes et approchées dans le cas sans advection	64
4.3.1	Cas simplifié stationnaire avec réaction	65
4.3.2	Cas simplifié transitoire	67
4.4	Méthodes numériques en 1-D	70
4.4.1	Semi-discrétisation en espace par éléments finis	70
4.4.2	Discrétisation totale en espace et en temps	72
4.5	Simulations pour le problème de diffusion biharmonique	73
4.5.1	Retour sur la théorie dans le cas des conditions de transmission de Dirichlet-Neumann	74
4.5.2	Résultats de simulations dans le cas stationnaire avec terme réactif	78
4.5.3	Résultats de simulations dans le cas transitoire	81
IV	Annexes	85
A	Équations de Saint-Venant incomplètement paraboliques	87
A.1	Transformée de Fourier-Laplace des équations de Saint Venant	88
A.2	Algorithme de Schwarz classique de type relaxation d'ondes	89
A.3	Conditions aux limites absorbantes (ou optimales)	91
A.3.1	Recherche de conditions absorbantes "classiques"	91
A.3.2	Recherche de conditions absorbantes "naturelles"	92
A.4	Conditions aux limites optimisées	93
B	Équations d'advection-diffusion harmonique 3-D	95
B.1	Démonstrations de convergence dans \mathbb{R}^3	95
B.1.1	Conditions d'interface d'ordre 0	95
B.1.2	Conditions d'interface d'ordre 1	97
C	Équations d'advection-diffusion biharmonique	99
C.1	Système discret dans le cas simplifié 1-D sans advection	99
C.1.1	Matrice de masse	99
C.1.2	Matrice de rigidité	99
C.1.3	Vecteur charge	100
C.1.4	Matrice jacobienne	100
C.2	Équation d'advection-diffusion bi-harmonique 2D : approche par développement en série de la viscosité ν	
C.2.1	Transformée de Fourier-Laplace	100
C.2.2	Racines de l'équation quartique	101
C.2.3	Approximation en ν	102
C.2.4	Conditions de transmission	103
C.2.5	Conditions optimales dans un cas particulier	104

Première partie

Introduction

La circulation océanique est particulièrement hétérogène, à la fois en temps et en espace : les modèles doivent pouvoir gérer des phénomènes aussi variés que les tourbillons méso-échelles, les fronts, et la circulation générale. Un modèle de circulation générale (OGCM) seul ne peut pas décrire complètement une physique aussi variée. Un moyen d'améliorer la modélisation est de coupler les OGCMs avec des modèles océaniques régionaux (ROMs) à haute résolution. L'utilisation de ROMs s'est accrue ces dernières années, en particulier du fait du développement de l'océanographie opérationnelle et de l'océanographie côtière.

(1) Que le modèle soit utilisé seul sur un domaine Ω ou (2) qu'il soit couplé avec un autre modèle couvrant un domaine géographique différent (et contigu du premier), il faut pouvoir limiter la propagation des erreurs aux bords du domaine Ω (Figure 1). Dans le premier cas, ces bords sont des frontières ouvertes. On peut alors considérer qu'on couple virtuellement le modèle avec un modèle extérieur qui nous fournit des données aux bords. Dans le second cas, le bord est une interface entre les deux modèles, qui sont couplés effectivement. Notre objectif est d'optimiser le couplage de ces modèles en posant les "bonnes" conditions aux limites, appelées respectivement (1) conditions aux frontières ouvertes ou (2) conditions de transmission aux interfaces.

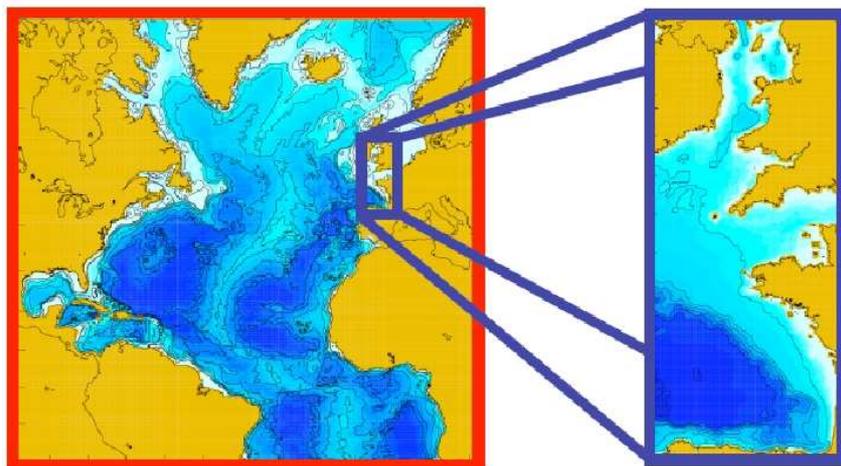


FIG. 1: Exemple de couplage d'un modèle de circulation générale (Atlantique Nord) avec un modèle océanique régional (Golfe de Gascogne)

Bien que l'emboîtement double (two-way nesting) soit la méthode de couplage la plus utilisée dans la communauté océanographique, cette méthode ne permet pas d'aborder le problème exact mais seulement une approximation. En outre, elle n'assure pas une régularité suffisante à travers l'interface entre les deux modèles [BD06]. L'approche exacte qui consiste en un couplage complet est beaucoup plus difficile et beaucoup plus chère que l'emboîtement double, car elle requiert de trouver et d'implémenter un algorithme qui assure que les solutions dans chaque domaine satisfont les conditions de régularité à travers l'interface. L'algorithme de Schwarz sans recouvrement global en temps convient tout particulièrement pour un tel couplage, et peut mener à une amélioration des résultats physiques [CFB⁺07].

Soit Ω le domaine océanique. Soit l'intervalle de temps $[0, T] \subseteq \mathbb{R}^+$. Le modèle océanique est décrit dans Ω par le système d'équations

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

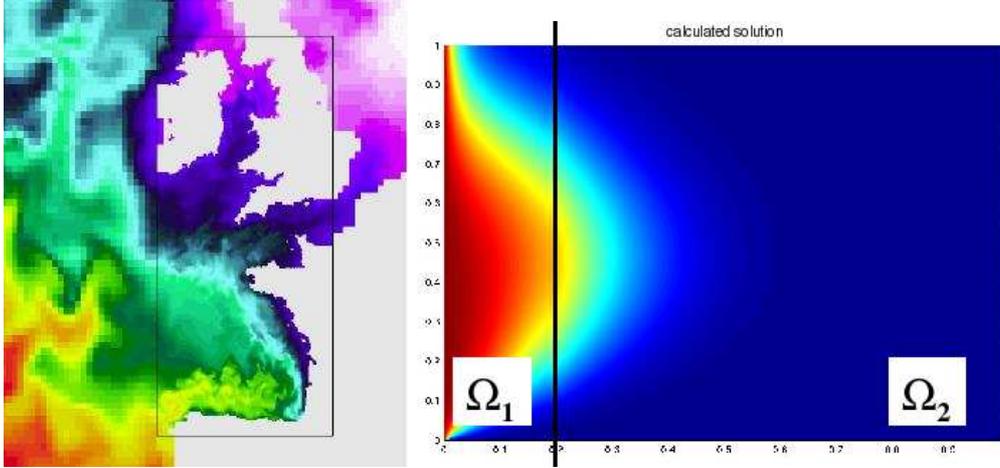


FIG. 2: Couplage au moyen d'un algorithme de Schwarz global en temps (a) d'un modèle de circulation générale avec un modèle régional (Éric Blayo, communication personnelle), (b) de modèles d'advection-diffusion harmonique [Mar05]

Décomposons le domaine en deux sous-domaines¹ Ω^- et Ω^+ (Figures 1 and 2). Dans le cas d'un recouvrement, on définit deux interfaces, par exemple Γ_0 le bord de Ω^+ et Γ_L celui de Ω^- . Dans le cas où les deux sous-domaines sont bien distincts (sans recouvrement), l'interface, notée Γ , est unique (*i.e.* $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$ et $\Gamma_L = \Gamma_0 = \Gamma$).

L'algorithme de relaxation de Schwarz consiste à résoudre de manière itérative le système dans chaque sous-domaine en assurant la cohérence par des conditions aux interfaces. On considérera toujours dans ce travail un algorithme de Schwarz additif² :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_-^{n+1} = f & \text{dans } \Omega^- \times [0, T], \\ u_-^{n+1}|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \mathcal{B}^- u_-^{n+1} = \mathcal{B}^- u_+^n & \text{sur } \Gamma_L \times [0, T], \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}u_+^{n+1} = f & \text{dans } \Omega^+ \times [0, T], \\ u_+^{n+1}|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \mathcal{B}^+ u_+^{n+1} = \mathcal{B}^+ u_-^n & \text{sur } \Gamma_0 \times [0, T], \end{cases} \quad (2)$$

où l'exposant n est le numéro de l'itération. Les opérateurs aux interfaces \mathcal{B}^\pm sont choisis de sorte que chaque sous-problème dans chaque sous-domaine est bien posé et que l'algorithme correspondant converge rapidement, même sans recouvrement.

Mettons en évidence que l'efficacité de la méthode de couplage dépend du choix des conditions d'interface entre les sous-domaines. On introduit les erreurs \mathbf{e}_\pm^n à l'itération n dans les sous-domaines Ω^\pm :

$$\mathbf{e}_-^n = u|_{\Omega^-} - u_-^n \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_+^n = u|_{\Omega^+} - u_+^n, \quad (3)$$

où u est la solution du problème (1). Ces erreurs satisfont l'algorithme (2) avec $f = 0$ et $u_0 = 0$. Si les opérateurs aux interfaces sont choisis de sorte que $\mathcal{B}^- u_+^1 = \mathcal{B}^+ u_-^1 = 0$, les sous-systèmes associés aux erreurs deviennent homogènes, les erreurs \mathbf{e}_i^n définies dans chaque sous-domaine convergent alors vers zéro en seulement deux itérations : ce sont les *conditions aux limites absorbantes*.

Une partie du problème a déjà été traitée en choisissant des conditions absorbantes [NRS95], ce qui conduit à une convergence en un nombre d'itérations égal au nombre de sous-domaines. L'inconvénient de ces conditions est leur complexité d'utilisation. Une alternative aux conditions absorbantes a été exposée par Martin [Mar05] : elle consiste à

¹Selon les chapitres, on pourra aussi noter les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 .

²car il permet naturellement une implémentation informatique parallèle

minimiser le taux de convergence de l'algorithme, ce qui conduit à des conditions aux interfaces plus simples.

Ce travail a pour but d'améliorer le couplage océanique en déterminant des conditions aux interfaces efficaces pour les équations océanographiques classiques. Ces équations, appelées "équations primitives", sont constituées de plusieurs équations :

- La dynamique océanique est modélisée par des équations de conservation de la quantité de mouvement et de conservation de la masse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \cdot \nabla u - f v + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mathcal{F}_u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \cdot \nabla v + f u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} &= \mathcal{F}_v, \\ \text{(approx. hydrostatique)} \quad \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g, \\ \text{(approx. de Boussinesq)} \quad \nabla \cdot U &= 0. \end{aligned}$$

Sous certaines approximations (bathymétrie localement assez plane, linéarisation autour de la vitesse barotrope), on peut décomposer les variables

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y, t) M_n(z), \\ v(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, y, t) M_n(z), \\ p(x, y, z, t) = \rho_0 g \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x, y, t) M_n(z), \end{cases}$$

où M_n sont les modes verticaux (vecteurs propres de Brünt-Vaïssala), et représenter alors les équations de la dynamique 3-D comme une superposition de *modèles de Saint-Venant* (shallow-water) 2-D.

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_n}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_n}{\partial y} - f v_n + g \frac{\partial h_n}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v_n}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_n}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_n}{\partial y} + f u_n + g \frac{\partial h_n}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h_n}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h_n}{\partial x} + v_0 \frac{\partial h_n}{\partial y} + \frac{c_n^2}{g} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

- La conservation des traceurs, tels que la température et la salinité, est modélisée par des *équations d'advection-diffusion* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + U \cdot \nabla T &= \mathcal{F}_T, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + U \cdot \nabla S &= \mathcal{F}_S, \end{aligned}$$

où \mathcal{F} est un opérateur de diffusion, qui est introduit pour prendre en compte les phénomènes turbulents méso-échelles. En effet, le pas d'espace du maillage n'est généralement pas suffisamment petit par rapport à l'échelle des tourbillons. Il faut alors pouvoir dissiper l'énergie qui se propage de l'échelle sous-maille vers l'échelle de la maille. La prise en compte de la physique à l'échelle sous-maille doit permettre d'assurer la stabilité du modèle sans interférer avec l'activité méso-échelle déjà résolue.

Deux paramétrisations différentes de la diffusion peuvent être considérées [MDIL98] : la *diffusion harmonique* ($\mathcal{F}_T = \Delta T$) et la *diffusion biharmonique* ($\mathcal{F}_T = \Delta(\Delta T)$). La

première, où l'opérateur est un laplacien, est la plus fréquemment rencontrée dans les modèles. Ceci dit, il est généralement préférable d'utiliser la deuxième, plus sélective quant aux longueurs d'ondes dissipées.

- Enfin, une équation d'état

$$\rho = \rho(T, S, p),$$

des conditions initiales et des conditions aux limites viennent fermer le système.

Deuxième partie

Dynamique 2-D : équations de Saint-Venant

La dynamique océanique peut être décrite en 2-D par les équations de Saint-Venant linéarisées : $\partial_t W + A_1 \partial_x W + A_2 \partial_y W - \nu P \Delta W + BW$, et $W|_{t=0} = W_0$, où $W = (u, v, \phi)^t$, avec (u, v) la vitesse horizontale, ϕ la hauteur de surface libre et ν la viscosité. A_1 et A_2 sont des matrices, P est une matrice diagonale de projection sur le plan horizontal, et B est une matrice antisymétrique qui exprime la rotation due à la force de Coriolis dans le plan horizontal.

Après une transformation de Fourier-Laplace, la solution du système est supposée pouvoir s'écrire sous la forme $\widehat{W} = \Phi e^{-\xi x}$, avec Φ un vecteur et ξ une racine à déterminer. Dans le cas général, on est alors amené à résoudre une équation d'ordre 5 en ξ . Dans le cas simplifié sans advection, elle se réduit à une équation bicarrée du 4ème ordre, dont les racines peuvent être déterminées facilement. La formulation variationnelle donne la forme des conditions de transmission. En combinant ces deux approches, on obtient les conditions absorbantes idéales non locales. Dans le cas sans advection, c'est suffisant pour imposer des conditions sur les variables horizontales [Mar03] : $B = (\widetilde{B}, 0)^t$, $\widetilde{B}_i = -\nu \partial_x + c(\phi, 0)^t - \Lambda_i$, avec Λ_i un opérateur pseudo-différentiel. Une approximation $\Lambda_{i(j)}$ des matrices Λ_i , $i = 1, 2$, à l'ordre 0 ou 1 peut conduire à des conditions locales. Martin [Mar03] a démontré que ces problèmes sont bien posés, et que les algorithmes convergent vers la solution globale pour des matrices $\Lambda_{i(j)}$ diagonales. Dans le cas sans advection, l'équation du 5ème ordre ne peut pas être résolue explicitement et il faut faire des approximations [Hal91].

Chapitre 1

Équations hyperboliques (sans viscosité)

1.1 Introduction

Engquist et Majda [EM77] ont développé une théorie des conditions aux limites absorbantes parfaites et approchées dans le cas des systèmes hyperboliques symétriques d'ordre 1. Ils ont notamment illustré leur théorie en calculant explicitement les conditions absorbantes pour les équations shallow water linéarisées sur une frontière Est.

Le but de ce mémo est d'explicitier leur théorie pour les systèmes hyperboliques symétriques d'ordre 1, à partir de l'étude des équations shallow water linéarisées hyperboliques, et d'étendre leurs résultats à toutes les frontières du domaine. Nous avons obtenu quelques différences dans la justification de la démarche de [EM77] et dans les résultats, que nous avons mis en évidence en [bleu](#).

1.2 Problème initial

On se place dans un repère normé dont l'axe Ox est orienté vers l'Ouest et l'axe Oy est orienté vers le Nord.

Soit u et v les composantes de la vitesse du fluide, h l'élévation de la surface de l'eau, h_0 la profondeur de l'eau, g la gravité réduite, f le paramètre de Coriolis. Les équations shallow water linéarisées s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u}{\partial y} - f v + g \frac{\partial h}{\partial x} + D_x = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v}{\partial y} + f u + g \frac{\partial h}{\partial y} + D_y = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h}{\partial x} + v_0 \frac{\partial h}{\partial y} + h_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \end{cases}$$

où les termes dissipatifs D_x, D_y correspondent à la partie non hyperbolique. Les termes de forçage n'ont pas été pris en compte.

Soit c la célérité $c = \sqrt{gh_0}$. Après un changement de variable $\phi = c \frac{h}{h_0} = \sqrt{\frac{g}{h_0}} h$, les équations shallow water linéarisées hyperboliques prennent la forme

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} + A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U}{\partial y} + BU = 0} \quad (1.1)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & c \\ 0 & u_0 & 0 \\ c & 0 & u_0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & c \\ 0 & c & v_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -f & 0 \\ f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces équations présupposent que le relief du fond marin est très faible, c'est-à-dire que la hauteur d'eau entre le fond et la surface moyenne (correspondant à une eau parfaitement calme) est à peu près constante.

1.3 Frontière Est

Dans cette section, on étudiera les conditions aux limites absorbantes à la frontière $\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$ du problème restreint au domaine $\Omega_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0\}$.

1.3.1 Diagonalisation ou méthode des caractéristiques

Une première étape consiste à diagonaliser la matrice $A = A_1 n_x + A_2 n_y$, où $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ est le vecteur sortant normal à la frontière considérée. Ici, $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $A_E = A_1$.

Notons τ le vecteur tangent à la frontière considérée. Soit P_E la matrice de passage qui permet de transformer la matrice A_E en une matrice diagonale $A_x = P_E^{-1} A_E P_E$. En posant

$$\boxed{W = P_E^{-1} U},$$

on peut réécrire le système (1.1) sous la forme

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t} + P_E^{-1} A_E P_E \frac{\partial}{\partial n} W + P_E^{-1} A_E^\perp P_E \frac{\partial}{\partial \tau} W + P_E^{-1} B P_E W = 0} \quad (1.2)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial W}{\partial t} + P_E^{-1} A_1 P_E \frac{\partial}{\partial x} W + P_E^{-1} A_2 P_E \frac{\partial}{\partial y} W + P_E^{-1} B P_E W = 0 \quad (1.3)$$

ou encore

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t} + A_x \frac{\partial}{\partial x} W + A_y \frac{\partial}{\partial y} W + B' W = 0}. \quad (1.4)$$

La diagonalisation de $A_E \in \mathcal{M}_n$ est obtenue en cherchant ses n valeurs propres λ_i puis ses n vecteurs propres à gauche L_i . Ici, les valeurs propres de A_1 sont

$$u_0, \quad u_0 - c, \quad u_0 + c,$$

et les vecteurs propres L_i à gauche de A_E associés aux valeurs propres λ_i sont tels que $L_i^T A_1 = \lambda_i L_i^T$.

Ce changement de variable $W = P_E^{-1} U$ utilisé pour diagonaliser le système (1.1) revient à utiliser la **méthode des caractéristiques**. En effet, les variables caractéristiques dans la

direction \vec{n} sont les composantes w_k du nouveau vecteur $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_3 \end{pmatrix}$, telles que $w_i = L_i^T U$

Attention : L'ordre dans lequel sont rangées les valeurs propres est choisi de sorte que les valeurs propres de même signe soient contiguës et que les k premières valeurs propres correspondent aux variables caractéristiques entrantes, $k \leq n$.

Ici, comme $c > |u_0| \leq 0$,

- la valeur propre $(u_0 - c)$ est toujours négative, donc la variable caractéristique associée va vers l'Ouest ;
- la valeur propre $(u_0 + c)$ est toujours positive, donc la variable caractéristique associée va vers l'Est.

Par conséquent, à la frontière Est du domaine Ω_E ,

- si $u_0 < 0$, $(u_0 - c)$ et u_0 sont négatives, donc les variables caractéristiques associées vont vers l'Ouest, c'est-à-dire vers l'intérieur du domaine Ω_E , tandis que $(u_0 + c)$ est positive, donc la variable caractéristique associée va vers l'Est, c'est-à-dire vers l'extérieur du domaine : $k = 2$;
- si $u_0 > 0$, $(u_0 - c)$ est négative, donc la variable caractéristique associée entre dans le domaine Ω_E , tandis que u_0 et $(u_0 + c)$ sont positives, donc les variables caractéristiques associées sortent du domaine : $k = 1$.

Les valeurs propres sont donc classées comme ceci :

$$\lambda_1 = u_0 - c, \quad \lambda_2 = u_0, \quad \lambda_3 = u_0 + c,$$

et les vecteurs propres associés sont

$$L_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_3 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*.$$

Chaque ligne de la matrice P_E^{-1} correspond à la transposée du vecteur propre à gauche associé à λ_i , i.e. L_i^T . On choisit les coefficients α, β, γ de sorte que la matrice P_E^{-1} soit unitaire. On obtient ici :

$$P_E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad P_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Les variables caractéristiques sont donc

$$\boxed{\begin{cases} w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u - \sqrt{\frac{g}{h_0}}h\right) \\ w_2 = v \\ w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u + \sqrt{\frac{g}{h_0}}h\right) \end{cases}}$$

Récapitulatif : Ici,

- si $u_0 > 0$, la seule variable caractéristique entrante dans le domaine Ω_E est donc w_1 ;
- si $u_0 < 0$, les variables caractéristiques entrantes sont w_1 et w_2 .

La matrice diagonale contient alors les valeurs propres de A_1 :

$$A_x = P_E^{-1} A_1 P_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 - c & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 + c \end{pmatrix} \quad \text{ici.}$$

Les matrices A_y et B' sont ici

$$A_y = P_E^{-1} A_2 P_E = \begin{pmatrix} v_0 & -\frac{c}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{c}{\sqrt{2}} & v_0 & \frac{c}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{2}} & v_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = P_E^{-1} B P_E = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{f}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{f}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{f}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{f}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_x étant inversible, on peut multiplier à gauche le système (1.4) par

$$A_x^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_0-c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u_0+c} \end{pmatrix} \text{ ici.}$$

On obtient alors le système

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial n} = A^{\text{time}} \frac{\partial}{\partial t} W + A^\tau \frac{\partial}{\partial \tau} W + B'' W}, \quad (1.5)$$

équivalent ici au système

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial x} = A^{\text{time}} \frac{\partial}{\partial t} W + A^\tau \frac{\partial}{\partial y} W + B'' W}, \quad (1.6)$$

où $A^{\text{time}} = -A_x^{-1}$, $A^\tau = -A_x^{-1} A_y$ et $B'' = -A_x^{-1} B'$.

Ici,

$$A^{\text{time}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-u_0+c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-u_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-u_0-c} \end{pmatrix}, \quad A^\tau = \begin{pmatrix} \frac{v_0}{-u_0+c} & -\frac{c}{(-u_0+c)\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{c}{u_0\sqrt{2}} & -\frac{v_0}{u_0} & -\frac{c}{u_0\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{c}{(u_0+c)\sqrt{2}} & \frac{v_0}{-u_0-c} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B'' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{f}{(-u_0+c)\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{f}{u_0\sqrt{2}} & 0 & -\frac{f}{u_0\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{f}{(u_0+c)\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3.2 Transformée de Fourier, triangularisation, transformée de Fourier inverse et conditions absorbantes exactes

Les *conditions aux limites absorbantes* qu'on impose au système doivent permettre de modéliser le problème considéré comme si les frontières ouvertes n'existaient pas, en considérant que les quantités entrant dans le domaine sont égales de part et d'autre de la frontière (de manière à ne pas introduire artificiellement une information erronée dans le domaine considéré). Lorsqu'on ne dispose d'aucune information à l'extérieur du domaine, les quantités entrantes à la frontière peuvent être prises égales à 0.

Pour déterminer les conditions absorbantes exactes, on cherche à se ramener à un système de la forme

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{n}} = -\Lambda \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \vec{\tau}} \right) W \quad (1.7)$$

sur la frontière Γ_E , pour les quantités entrantes. Les vecteurs \vec{n} et $\vec{\tau}$ correspondent respectivement à la normale et à la tangente à la frontière Γ . Ici, $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_E} = \frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial \vec{\tau}} = \frac{\partial}{\partial y}$.

Définissons la transformée de Fourier en temps et en espace

$$\text{TF}(w(x, y, t)) = \hat{w}(x, \omega, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, t) e^{-i(\omega y + \xi t)} dt dy$$

et la transformée de Fourier inverse

$$\text{TF}^{-1}(\hat{w}(x, \omega, \xi)) = w(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int \int \hat{w}(x, \omega, \xi) e^{i(\omega y + \xi t)} d\omega d\xi.$$

Comme $\text{TF}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) = i\xi\widehat{w}$ et $\text{TF}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = i\omega\widehat{w}$, et comme les matrices A^{time} , A^τ et B'' sont constantes (car les vitesses ont été "gelées"), la transformée de Fourier du système (1.6) donne

$$\boxed{\frac{\partial \widehat{W}}{\partial x} = (A^{\text{time}} i\xi + A^\tau i\omega + B'')\widehat{W}}, \quad (1.8)$$

Rappelons que A^{time} est une matrice diagonale, qu'on peut décomposer par "blocs entrants ou sortants" :

$$A^{\text{time}} = \left(\begin{array}{c|c} A^{\text{in}} & 0_{k,n-k} \\ \hline 0_{n-k,k} & A^{\text{out}} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad (1.9)$$

avec

$$A^{\text{in}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_k} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}^-) \quad \text{et} \quad A^{\text{out}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_{k+1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R}^+)$$

où n est le nombre de variables caractéristiques w_i , et k le nombre de variables caractéristiques entrantes. Ici, $n = 3$ et $k = 1$ ou 2 selon le signe de u_0 .

En posant

$$M(\xi, \omega) = i(A^{\text{time}} \xi + A^\tau \omega), \quad (1.10)$$

le système s'écrit encore

$$\boxed{\frac{\partial \widehat{W}}{\partial x} = (M(\xi, \omega) + B'')\widehat{W}}. \quad (1.11)$$

Définissons $\Lambda \equiv M + B''$ comme un *opérateur pseudo-différentiel* :

$$\begin{aligned} \Lambda \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right) W &= \text{TF}^{-1} \left(\Lambda(i\xi, i\omega) \widehat{W} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \int e^{i(\omega y + \xi t)} \Lambda(i\xi, i\omega) \widehat{W}(\xi, \omega) d\xi d\omega \end{aligned}$$

La transformée de Fourier inverse du système (1.11) donne alors le système (1.7), qui correspond aux conditions aux limites absorbantes exactes qui s'appliquent aux k variables caractéristiques entrantes :

$$\left[\frac{\partial W}{\partial x} - \Lambda \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right) W \right] \Big|_{i|x=0} = 0 \quad \forall i \in [1, k].$$

Dans le cas des équations shallow water linéarisées hyperboliques, l'opérateur pseudo-différentiel $\Lambda \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ est local en temps et en espace, et le système précédent est identique au système initial (1.6).

Ceci dit, ce système ne permet pas de décorrélérer les k caractéristiques entrantes des $(n-k)$ caractéristiques sortantes, du fait que les matrices A^τ et B'' sont pleines, contrairement à la matrice A^{time} diagonale. Pour obtenir une séparation des variables entrantes/sortantes, il faudrait que les matrices A^τ et B'' soient triangulaires inférieures par blocs entrants/sortants.

On va chercher à transformer le système de sorte que les variations à travers la frontière ($\partial/\partial x$) des nouvelles variables associées aux variables caractéristiques entrantes (les k premières) ne dépendent pas de celles associées aux variables caractéristiques sortantes (les $(n-k)$ dernières), quelles que soient les fréquences en t et en y .

Pour cela, on effectue un changement de variables

$$\boxed{\mathcal{W} = V \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right) W} \quad (1.12)$$

à l'aide d'une matrice V qui représente un opérateur pseudo-différentiel, *i.e.*

$$\mathcal{W} = \text{TF}^{-1} \left(V(i\xi, i\omega) \widehat{W} \right),$$

ou encore

$$\widehat{\mathcal{W}} = V(i\xi, i\omega) \widehat{W}.$$

Supposons que la matrice V soit inversible et indépendante de la variable x . Cette hypothèse est admissible dans la mesure où les vitesses ont été "gelées" au voisinage de la frontière, de sorte que les variations de V à travers la frontière sont constantes. Le système (1.11) se réécrit alors

$$\frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}}{\partial x} = V(M + B'')V^{-1}\widehat{\mathcal{W}}. \quad (1.13)$$

D'après Taylor [Tay75], il est possible de construire une telle matrice V , qui soit inversible lorsque $|\omega|/|\xi| + |\omega| < c_0$ pour un c_0 particulier et telle que le système (1.13) soit triangulaire par blocs.

La condition $|\omega|/|\xi| + |\omega| < c_0$ revient à supposer que les ondes considérées entrent avec un angle proche de l'incidence normale. En effet,

- si ω est borné, les fréquences en y sont bornées, les variations tangentielles à la frontière sont limitées ;
- si ω/ξ est borné, $\frac{\Delta t}{\Delta y}$ est borné, donc $\exists \alpha \in \mathbb{R} / \Delta t < \alpha \Delta y$

Par conséquent, l'opérateur V est tel que le système (1.6) puisse se réexprimer sous la forme

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right) & 0_{k, n-k} \\ \Lambda_{21} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right) & \Lambda_{22} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{pmatrix} \mathcal{W}}, \quad (1.14)$$

où la taille des blocs est déterminée par le nombre de caractéristiques entrantes (k) et sortantes ($n - k$) : $\Lambda_{11} \in \mathcal{M}_k$, $\Lambda_{21} \in \mathcal{M}_{n-k, k}$ et $\Lambda_{22} \in \mathcal{M}_{n-k}$ sont des matrices d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1. $\Lambda_{11}(1, 0)$ correspond à la matrice A^{in} des k valeurs propres entrantes, **au B'' près** :

$$\boxed{\Lambda_{11}(1, 0) = A^{\text{in}} + VB''V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_k} \end{pmatrix} + VB''V^{-1}}. \quad (1.15)$$

D'après Oligier et Sundström [OS78], il semblerait que les conditions aux limites entrantes à appliquer pour ce type d'équations ne dépendent que des éléments propres de la matrice $A = A_1 n_x + A_2 n_y$ ($= -A_1$ ici), ce qui amène à s'affranchir de la matrice B'' . **Par conséquent, $\Lambda_{11}(1, 0)$ (sans le terme $VB''V^{-1}$) identifie les caractéristiques entrantes à la frontière.**

Les **conditions aux limites absorbantes parfaites** sont alors données par

$$\mathcal{W}_i = (\mathcal{W}^{\text{ext}})_i \quad \forall i \in [1, k] \quad \text{en } x = 0, \quad (1.16)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{(VW)_i = (VW^{\text{ext}})_i \quad \forall i \in [1, k] \quad \text{en } x = 0}. \quad (1.17)$$

En supposant que la solution exacte est nulle à l'extérieur, les conditions aux limites absorbantes parfaites deviennent

$$\boxed{\mathcal{W}_i|_{x=0} = (VW)_i|_{x=0} = 0 \quad \forall i \in [1, k]}. \quad (1.18)$$

Reste donc à déterminer la matrice V .

1.3.3 Construction de la matrice de passage $V(\xi, \omega)$

La matrice de passage V , qui représente un opérateur pseudo-différentiel, est construite de la façon suivante [Nir73, Tay75] :

$$V(\xi, \omega) \simeq V_0(\xi, \omega) + \xi^{-1}V_{-1}(\xi, \omega) + \xi^{-2}V_{-2}(\xi, \omega) + \dots, \quad (1.19)$$

où les matrices $(V_{-j})_{j \leq 0}$ représentent des opérateurs pseudo-différentiels (de degré 0). D'après [EM77], ces matrices vérifient la relation

$$V_{-j}(\xi, \omega) = V_{-j}\left(1, \frac{\omega}{\xi}\right).$$

Ceci étant, nous ne savons pas si cette relation est vérifiée par hypothèse ou si elle découle d'une propriété qui nous a échappé.

La propriété d'**hyperbolicité stricte** du système implique que $M(1, 0)$ est une matrice diagonale avec n valeurs distinctes. En effet, $M(1, 0) = A^{\text{time}}$. Ici,

$$M(1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{-u_0+c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-u_0} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{u_0+c} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, lorsque $|\omega|/|\xi| + |\omega|$ est majoré par une certaine valeur, $M(\xi, \omega)$ possède également n valeurs propres distinctes. Attention : Cela n'est vrai que dans le voisinage de l'incidence normale ($\omega = 0$).

On choisit alors $V_0(\xi, \omega)$ de sorte que $V_0 M V_0^{-1}$ soit triangulaire inférieure par bloc

$$V_0 M V_0^{-1} = \begin{pmatrix} \widetilde{M}_{11} & 0 \\ \widetilde{M}_{21} & \widetilde{M}_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

Considérons en première approximation $V \simeq V_0$. Effectuons le changement de variable $\boxed{\mathcal{W}_0 = V_0 W}$, comme dans l'équation (1.12). \mathcal{W}_0 satisfait le système (1.14), **au B'' près**. La raison pour laquelle Engquist et Majda [EM77] "évacuent" le terme B'' ne nous semble pas claire. Cette matrice est pourtant prise en compte — judicieusement — dans le calcul suivant de \mathcal{W}_1 .

On cherche ensuite à déterminer un nouveau vecteur \mathcal{W}_1 qui satisfait le système (1.14) au moins jusqu'à l'ordre (-1) en ξ . D'après (1.19), ce vecteur peut s'écrire $\mathcal{W}_1 = (V_0 + \xi^{-1}V_{-1})W$. Le problème revient donc à chercher le terme V_{-1} de l'équation (1.19).

En posant $\xi^{-1}V_{-1} = KV_0$, le nouveau vecteur s'écrit $\boxed{\mathcal{W}_1 = (I + K)\mathcal{W}_0}$. Le but est donc de déterminer la matrice K telle que \mathcal{W}_1 satisfait le système (1.14) jusqu'à l'ordre $O(\xi^{-1})$, donc telle que la partie en haut à droite de la matrice $\left([(I + K)V_0] (M + B'') [(I + K)V_0]^{-1} \right)_{ij}$

soit identiquement nulle à l'ordre $O(\xi^{-1})$. Après calculs, on montre que K doit avoir la forme

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

où $\tilde{K} \in \mathcal{M}_{k,n-k}$ existe à condition que

$$\tilde{M}_{11} = A^{\text{in}} \quad \text{et} \quad \tilde{M}_{22} = A^{\text{out}}, \quad (1.22)$$

et doit alors vérifier

$$\tilde{K}A^{\text{out}} - A^{\text{in}}\tilde{K} + \tilde{B}_{12} = 0 \quad (1.23)$$

avec $\tilde{B} = B - \partial_x V_0$. Comme on a supposé que V ne dépend pas de x , $\tilde{B} = B$.

Une fois que la matrice K est déterminée, on peut calculer

$$\boxed{V_{-1} = \xi K V_0}, \quad (1.24)$$

c'est-à-dire \mathcal{W}_1 .

1.3.4 Approximation des conditions absorbantes

Pour que la transformée de Fourier inverse (implicite dans les opérateurs pseudo-différentiels) soit locale, et non globale, en temps et en espace, il faut approcher la matrice V par une forme polynomiale en ξ et ω .

Les approximations locales sont construites en approchant la matrice $V(\xi, \omega)$ à l'incidence normale ($\omega = 0$). On approxime donc chaque $V_{-j}(\xi, \omega)$, $\forall j \leq 0$, de l'équation (1.19) par un développement de Taylor :

$$V_{-j}(\xi, \omega) = V_{-j}\left(1, \frac{\omega}{\xi}\right) = V_{-j}(1, 0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left(\frac{\omega}{\xi}\right)^k \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} V_{-j}(1, 0) + O\left(\left|\frac{\omega}{\xi}\right|^{m+1}\right)$$

a) Première approximation

Les conditions absorbantes (1.18) deviennent, à l'ordre $O(|\omega/\xi| + |1/\xi|)$,

$$\boxed{(V_0(1, 0)W)_i|_{x=0} = 0 \quad \forall i \in [1, k]}. \quad (1.25)$$

Dans notre application au système shallow-water 2D linéarisé hyperbolique, on prend

$$V_0(1, 0) = I.$$

Les conditions approchées s'écrivent alors

$$W_i|_{x=0} = 0 \quad \forall i \in [1, k].$$

Cas d'un flux entrant : $u_0 < 0$

Les variables caractéristiques entrantes sont w_1 et w_2 . Les conditions approchées sont donc

$$\boxed{w_1|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad w_2|_{x=0} = 0.}$$

Cas d'un flux sortant : $u_0 > 0$

La seule variable caractéristique entrante est w_1 . On obtient alors comme condition approchée

$$\boxed{w_1|_{x=0} = 0.}$$

b) Deuxième approximation

A l'ordre $O(|\omega/\xi|^2 + |1/\xi|^2)$, les conditions absorbantes approchées s'écrivent

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} V_0(1,0) + \frac{\partial}{\partial \omega} V_0(1,0) \frac{\partial}{\partial y} + V_{-1}(1,0) \right) W \right) \Big|_{i,x=0} = 0 \quad \forall i \in [1, k], \quad (1.26)$$

car

$$\left(\left(V_0(1,0) + \frac{\omega}{\xi} \frac{\partial}{\partial \omega} V_0(1,0) + \frac{1}{\xi} V_{-1}(1,0) \right) W \right) \Big|_{i,x=0} = 0 \quad \forall i \in [1, k]. \quad (1.27)$$

La seconde approximation conduit toujours à un problème bien posé.

Pour expliciter la seconde approximation, il reste encore à déterminer $\frac{\partial V_0(1,0)}{\partial \omega}$. Pour cela, on suppose qu'il existe une matrice $R \in \mathcal{M}_n$ telle que V_0 peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{V_0(\xi, \omega) = I + \frac{\omega}{\xi} R} \quad (1.28)$$

à l'ordre $O(|\omega/\xi|^2)$, de sorte que

$$\frac{\partial V_0(1,0)}{\partial \omega} = R.$$

La seconde approximation des conditions absorbantes s'écrit alors

$$\boxed{\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} V_0(1,0) + R \frac{\partial}{\partial y} + V_{-1}(1,0) \right) W \right) \Big|_{i,x=0} = 0 \quad \forall i \in [1, k],} \quad (1.29)$$

La matrice $R \in \mathcal{M}_n$ est déterminée par la propriété (1.20) en identifiant la partie en haut à droite de la matrice $V_0 M(1, \frac{\omega}{\xi}) V_0^{-1}$ à la matrice nulle à l'ordre $O(|\omega/\xi|^2)$. Après calculs, on montre que, en choisissant R de la forme

$$R = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

$X \in \mathcal{M}_{k, n-k}$ doit vérifier

$$XA^{\text{out}} - A^{\text{in}}X + A^{\tau}_{12} = 0 \quad (\text{en } O(|\omega/\xi|)). \quad (1.31)$$

Dans le cas où

- les variables caractéristiques entrantes sont plus nombreuses que les variables sortantes, *i.e.* $k \leq n - k$,
- la matrice X est de rang $n - k$,

on peut construire une approximation pour V_0 de la forme (1.28) en $O(|\omega/\xi|^3)$, de sorte que les conditions approchées sont vérifiées à l'ordre $O(|\omega/\xi|^3 + |1/\xi|^2)$.

La matrice R telle que $V_0 M(1, \frac{\omega}{\xi}) V_0^{-1}$ soit triangulaire inférieure en $O(|\omega/\xi|^3)$ doit alors être de la forme

$$R = \begin{pmatrix} Y & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

où $X \in \mathcal{M}_{k, n-k}$ doit vérifier l'équation (1.31) et $Y \in \mathcal{M}_k$ doit vérifier

$$-A^{\tau}_{11} X + Y(-A^{\text{in}} X + A^{\tau}_{12}) + A^{\text{in}} Y X + X A^{\tau}_{22} = 0 \quad (\text{en } O(|\omega/\xi|^2)).$$

En posant

$$Z = Y X \in \mathcal{M}_{k, n-k}, \quad (1.33)$$

cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} X A^{\text{out}} - A^{\text{in}} X + A^{\tau}_{12} = 0 & (\text{en } O(|\omega/\xi|)), \\ -Z A^{\text{out}} + A^{\text{in}} Z - A^{\tau}_{11} X + X A^{\tau}_{22} = 0 & (\text{en } O(|\omega/\xi|^2)). \end{cases} \quad (1.34)$$

On détermine alors Y en résolvant le système (1.33), mais comme la matrice X est creuse, on ne peut pas toujours déterminer toutes les colonnes de Y . On choisit alors de construire la matrice Y en identifiant les termes des colonnes indéterminées à 0.

Le calcul de Y permet alors de trouver R d'après (1.32).

Après avoir déterminé V_{-1} d'après l'équation (1.24), on peut exprimer les conditions absorbantes à l'ordre $O(|\omega/\xi|^3 + |1/\xi|^2)$ d'après (1.29).

Passons à notre application au système shallow-water 2D linéarisé hyperbolique.

Cas d'un flux entrant : $u_0 < 0$

Les variables caractéristiques entrantes sont w_1 et w_2 . Les matrices A^{in} et A^{out} sont alors définies par

$$A^{\text{in}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-u_0+c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-u_0} \end{pmatrix} < 0 \quad \text{et} \quad A^{\text{out}} = -\frac{1}{u_0+c} > 0.$$

On cherche alors la matrice R telle que V_0 soit sous la forme (1.28) en résolvant l'équation (1.31). On obtient

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u_0+c}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ici, le nombre de variables entrantes (2) est supérieur au nombre de variables sortantes (1) et X est de rang 1, donc on peut chercher à obtenir une approximation à l'ordre $(|\omega/\xi|^3 + |1/\xi|^2)$ en déterminant R suivant (1.32). Il faut donc calculer Z en résolvant le système (1.34). On obtient

$$Z = \begin{pmatrix} -\frac{(u_0+c)^2}{4} \\ \frac{v_0(u_0+c)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

ce qui donne, d'après (1.33),

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4}(u_0+c) \\ 0 & v_0 \end{pmatrix}$$

donc l'expression (1.32) s'écrit ici

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4}(u_0 + c) & 0 \\ 0 & v_0 & \frac{u_0 + c}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par construction, $V_0(1, 0) = I$. Il ne reste donc plus qu'à déterminer $V_{-1}(1, 0)$. D'après (1.24), $V_{-1}(1, 0) = KV_0(1, 0) = K$, où K , défini par (1.21), est obtenu en résolvant le système (1.23). On obtient

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(u_0 + c)f}{c\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(u_0 + c)f}{c\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, la deuxième approximation des conditions absorbantes à l'ordre $O(|\omega/\xi|^3 + |1/\xi|^2)$ s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\sqrt{2}(u_0 + c)}{4} \frac{\partial w_2}{\partial y} \Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + v_0 \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{(u_0 + c)}{\sqrt{2}} \frac{\partial w_3}{\partial y} + \frac{(u_0 + c)f}{c\sqrt{2}} w_3 \Big|_{x=0} = 0 \end{array} \right. \quad (1.35)$$

Cas d'un flux sortant : $u_0 > 0$

La seule variable caractéristique entrante est w_1 . Les matrices A^{in} et A^{out} sont alors définies par

$$A^{\text{in}} = \frac{1}{-u_0 + c} < 0 \quad \text{et} \quad A^{\text{out}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-u_0} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{u_0 + c} \end{pmatrix} > 0.$$

Après calculs, on obtient

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-u_0}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de variables entrantes (1) est inférieur au nombre de variables sortantes (2), X est de rang 1, donc on va chercher une approximation à l'ordre $(|\omega/\xi|^2 + |1/\xi|^2)$ en déterminant R suivant (1.30)

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-u_0}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et K suivant (1.21) et (1.23)

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \frac{-u_0 f}{c\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-u_0 f}{c\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $V_0(1, 0) = I$ et $V_{-1}(1, 0) = K$, on peut alors écrire les conditions absorbantes approchées à l'ordre $O(|\omega/\xi|^2 + |1/\xi|^2)$:

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{u_0}{\sqrt{2}} \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{u_0 f}{c\sqrt{2}} w_2 \right|_{x=0} = 0. \quad (1.36)$$

1.4 Frontière Ouest

Dans cette section, on étudiera les conditions aux limites absorbantes à la frontière $\Gamma_W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$ du problème restreint au domaine $\Omega_W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0\}$.

Une première étape consiste à diagonaliser la matrice $A = A_1 n_x + A_2 n_y$, où $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ est le vecteur sortant normal à la frontière considérée. Ici, $\vec{n}_W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $A_W = -A_1$.

Rappelons qu'ici, les valeurs propres de A_1 sont

$$u_0, \quad u_0 - c, \quad u_0 + c.$$

Les valeurs propres de A_W sont alors

$$-u_0, \quad -u_0 + c, \quad -u_0 - c,$$

et les vecteurs propres L_i à gauche de A_W associés aux valeurs propres λ_i sont les mêmes que ceux de A_1 : $L_i^T A_W = \lambda_i L_i^T$.

La méthode des caractéristiques consiste à appliquer le changement de variable $W = P_W^{-1}U$:

$$\frac{\partial W}{\partial t} - P_W^{-1} A_W P_W \frac{\partial W}{\partial x} + P_W^{-1} A_2 P_W \frac{\partial W}{\partial y} + P_W^{-1} B P_W W = 0 \quad (1.37)$$

Ici, à la frontière Ouest du domaine Ω_W ,

- la valeur propre de A_W ($-u_0 - c$) est toujours négative, donc la variable caractéristique associée va vers l'Est, c'est-à-dire vers l'intérieur du domaine ;
- la valeur propre de A_W ($-u_0 + c$) est toujours positive, donc la variable caractéristique associée va vers l'Ouest, c'est-à-dire vers l'extérieur du domaine.

Par conséquent,

- si $u_0 < 0$, ($-u_0$) et ($-u_0 + c$) sont positives, donc les variables caractéristiques associées vont vers l'Ouest, c'est-à-dire vers l'extérieur du domaine Ω_W , tandis que ($-u_0 - c$) est négative, donc la variable caractéristique associée va vers l'Est, c'est-à-dire vers l'intérieur du domaine : $k = 1$;
- si $u_0 > 0$, seule ($-u_0 + c$) est positive, donc la variable caractéristique associée sort du domaine Ω_W , tandis que ($-u_0$) et ($-u_0 - c$) sont négatives, donc les variables caractéristiques associées entrent dans le domaine : $k = 2$.

Les valeurs propres de A_W sont donc classées comme ceci :

$$\lambda_1 = -u_0 - c, \quad \lambda_2 = -u_0, \quad \lambda_3 = -u_0 + c,$$

et les vecteurs propres associés sont

$$L_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_3 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*.$$

On choisit les coefficients α, β, γ de sorte que la matrice P_W^{-1} , dont les lignes sont les vecteurs propres transposés L_i^T , soit unitaire : $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = 1, \gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire

$$P_W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad P_W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Les variables caractéristiques $w_i = L_i^T U$ sont donc

$$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u + \sqrt{\frac{g}{h_0}} h \right) \\ w_2 = v \\ w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-u + \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-u + \sqrt{\frac{g}{h_0}} h \right) \end{cases}$$

Récapitulatif : Ici,

- si $u_0 < 0$, la seule variable caractéristique entrante dans le domaine Ω_W est donc w_1 ;
- si $u_0 > 0$, les variables caractéristiques entrantes sont w_1 et w_2 .

Le système (1.37) se réécrit comme le système Est (1.4), avec

$$A_x = -P_W^{-1} A_W P_W = P_W^{-1} A_1 P_W = \begin{pmatrix} u_0 + c & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 - c \end{pmatrix},$$

$$A_y = P_W^{-1} A_2 P_W = \begin{pmatrix} v_0 & \frac{c}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{c}{\sqrt{2}} & v_0 & \frac{c}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{2}} & v_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = P_W^{-1} B P_W = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{f}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{f}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{f}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{f}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut alors multiplier à gauche le système (1.37) par $(-A_x^{-1})$ pour obtenir le système (1.6), avec ici

$$A^{\text{time}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{u_0+c} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{u_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-u_0+c} \end{pmatrix}, \quad A^\tau = \begin{pmatrix} \frac{-v_0}{u_0+c} & -\frac{c}{(u_0+c)\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{c}{u_0\sqrt{2}} & -\frac{v_0}{u_0} & -\frac{c}{u_0\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{c}{(-u_0+c)\sqrt{2}} & \frac{v_0}{-u_0+c} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B'' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{f}{(u_0+c)\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{f}{u_0\sqrt{2}} & 0 & \frac{f}{u_0\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{f}{(-u_0+c)\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant les mêmes calculs qu'à la frontière Est, on obtient les mêmes conditions absorbantes en première approximation. En deuxième approximation, les conditions absorbantes deviennent

- **cas d'un flux entrant** : $u_0 > 0$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\sqrt{2}(-u_0+c)}{4} \frac{\partial w_2}{\partial y} \right|_{x=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial w_2}{\partial t} + v_0 \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{(-u_0+c)}{\sqrt{2}} \frac{\partial w_3}{\partial y} + \frac{(u_0-c)f}{c\sqrt{2}} w_3 \right|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (1.38)$$

- **cas d'un flux sortant** : $u_0 < 0$

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{u_0}{\sqrt{2}} \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{u_0 f}{c\sqrt{2}} w_2 \right|_{x=0} = 0 \quad (1.39)$$

1.5 Frontière Nord

Dans cette section, on étudiera les conditions aux limites absorbantes à la frontière $\Gamma_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$ du problème restreint au domaine $\Omega_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 0\}$.

Une première étape consiste à diagonaliser la matrice $A_N = A_1 n_x + A_2 n_y$ via le changement de variables

$$W = P_N^{-1}U,$$

avec P_N une matrice de passage. Le vecteur sortant normal à la frontière considérée est ici $\vec{n}_N = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $A_N = A_2$.

Les valeurs propres de A_2 sont

$$v_0, \quad v_0 - c, \quad v_0 + c.$$

Ici, à la frontière Nord du domaine Ω_N ,

- la valeur propre de A_N ($v_0 - c$) est toujours négative, donc la variable caractéristique associée va vers le Sud, c'est-à-dire vers l'intérieur du domaine;
- la valeur propre ($v_0 + c$) est toujours positive, donc la variable caractéristique associée va vers le Nord, c'est-à-dire vers l'extérieur du domaine.

Par conséquent,

- si $v_0 < 0$, v_0 et ($v_0 - c$) sont négatives, donc les variables caractéristiques associées vont vers l'intérieur du domaine Ω_N , tandis que ($v_0 + c$) est positive, donc la variable caractéristique associée va vers l'extérieur du domaine : $k = 2$;
- si $v_0 > 0$, seule ($v_0 - c$) est négative, donc la variable caractéristique associée entre dans le domaine Ω_N , tandis que v_0 et ($v_0 + c$) sont positives, donc les variables caractéristiques associées sortent du domaine : $k = 1$.

De manière à ordonner les variables caractéristiques entrantes puis sortantes (*cf.* frontière Est), les valeurs propres de A_2 sont classées comme ceci :

$$\lambda_1 = v_0 - c, \quad \lambda_2 = v_0, \quad \lambda_3 = v_0 + c.$$

Les vecteurs propres à gauche de A_2 associés à ces valeurs propres sont

$$L_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_3 = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*.$$

Chaque ligne de la matrice P_N^{-1} correspond à la transposée du vecteur propre à gauche associé à λ_i , *i.e.* L_i^T . On choisit les coefficients α, β, γ de sorte que la matrice P_N^{-1} soit unitaire. On obtient ici :

$$P_N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad P_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Les variables caractéristiques sont donc

$$\boxed{\begin{cases} w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-v + \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-v + \sqrt{\frac{g}{h_0}}h\right) \\ w_2 = u \\ w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v + \sqrt{\frac{g}{h_0}}h\right) \end{cases}}$$

Récapitulatif : Ici,

- si $v_0 > 0$, la seule variable caractéristique entrante dans le domaine Ω_N est w_1 ;
- si $v_0 < 0$, les variables caractéristiques entrantes sont w_1 et w_2 .

La matrice diagonale contient alors les valeurs propres de A_2 :

$$A_y = P_N^{-1} A_2 P_N = \begin{pmatrix} v_0 - c & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 + c \end{pmatrix} \text{ ici.}$$

Les matrices A_x et B' sont ici

$$A_x = P_N^{-1} A_1 P_N = \begin{pmatrix} u_0 & \frac{c}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{c}{\sqrt{2}} & u_0 & \frac{c}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{2}} & u_0 \end{pmatrix} \text{ et } B' = P_N^{-1} B P_N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{f}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{f}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{f}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{f}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_y étant inversible, on peut multiplier à gauche le système (1.4) par

$$A_y^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_0 - c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{v_0 + c} \end{pmatrix} \text{ ici.}$$

Le système (1.5) devient alors

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial y} = A^{\text{time}} \frac{\partial}{\partial t} W + A^\tau \frac{\partial}{\partial x} W + B'' W}, \quad (1.40)$$

où $A^{\text{time}} = -A_y^{-1}$, $A^\tau = -A_y^{-1} A_x$ et $B'' = -A_y^{-1} B'$.

Ici,

$$A^{\text{time}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-v_0 + c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-v_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-v_0 - c} \end{pmatrix}, \quad A^\tau = \begin{pmatrix} \frac{u_0}{-v_0 + c} & \frac{c}{(-v_0 + c)\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{c}{v_0\sqrt{2}} & \frac{u_0}{v_0} & -\frac{c}{v_0\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{c}{(v_0 + c)\sqrt{2}} & -\frac{u_0}{v_0 + c} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B'' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{f}{(-v_0 + c)\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{f}{v_0\sqrt{2}} & 0 & \frac{f}{v_0\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{f}{(v_0 + c)\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

En suivant la même démarche qu'à la frontière Est, on obtient les mêmes conditions absorbantes en première approximation. En deuxième approximation, les conditions absorbantes deviennent

- **cas d'un flux entrant** : $v_0 < 0$

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\sqrt{2}(v_0 + c)}{4} \frac{\partial w_2}{\partial x} \Big|_{y=0} = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{(v_0 + c)}{\sqrt{2}} \frac{\partial w_3}{\partial x} - \frac{(v_0 + c)f}{c\sqrt{2}} w_3 \Big|_{y=0} = 0 \end{cases}} \quad (1.41)$$

- **cas d'un flux sortant** : $v_0 > 0$

$$\boxed{\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{v_0 f}{c\sqrt{2}} w_2 \Big|_{y=0} = 0} \quad (1.42)$$

1.6 Frontière Sud

Dans cette section, on étudiera les conditions aux limites absorbantes à la frontière $\Gamma_S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$ du problème restreint au domaine $\Omega_S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 0\}$.

Une première étape consiste à diagonaliser la matrice $A = A_1 n_x + A_2 n_y$, où le vecteur sortant normal à la frontière considérée est ici $\vec{n}_S = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $A_S = -A_2$.

Les valeurs propres de A_S sont

$$-v_0, \quad -v_0 + c, \quad -v_0 - c.$$

Ici, à la frontière Sud du domaine Ω_S ,

- la valeur propre de A_S ($-v_0 - c$) est toujours négative, donc la variable caractéristique associée va vers le Nord, c'est-à-dire vers l'intérieur du domaine ;
- la valeur propre de A_S ($-v_0 + c$) est toujours positive, donc la variable caractéristique associée va vers le Sud, c'est-à-dire vers l'extérieur du domaine.

Par conséquent,

- si $v_0 < 0$, ($-v_0$) et ($-v_0 + c$) sont positives, donc les variables caractéristiques associées vont vers l'extérieur du domaine Ω_S , tandis que ($-v_0 - c$) est négative, donc la variable caractéristique associée va vers l'intérieur du domaine : $k = 1$;
- si $v_0 > 0$, seule ($-v_0 + c$) est positive, donc la variable caractéristique associée sort du domaine Ω_S , tandis que ($-v_0$) et ($-v_0 - c$) sont négatives, donc les variables caractéristiques associées entrent dans le domaine : $k = 2$.

Les valeurs propres de A_S sont donc classées comme ceci :

$$\lambda_1 = -v_0 - c, \quad \lambda_2 = -v_0, \quad \lambda_3 = -v_0 + c,$$

et les vecteurs propres associés sont

$$L_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_3 = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*.$$

Pour que la matrice P_S^{-1} soit unitaire, on choisit $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = 1$, $\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire

$$P_S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad P_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Les variables caractéristiques $w_i = L_i^T U$ sont donc

$$\boxed{\begin{cases} w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v + \sqrt{\frac{g}{h_0}}h\right) \\ w_2 = u \\ w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v - \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v - \sqrt{\frac{g}{h_0}}h\right) \end{cases}}$$

Récapitulatif : Ici,

- si $v_0 < 0$, la seule variable caractéristique entrante dans le domaine Ω_S est donc w_1 ;
- si $v_0 > 0$, les variables caractéristiques entrantes sont w_1 et w_2 .

Soit le changement de variables $W = P_S^{-1}U$. Le système shallow-water initial se réécrit

$$\frac{\partial W}{\partial t} + P_S^{-1}A_1P_S \frac{\partial W}{\partial x} - P_S^{-1}A_SP_S \frac{\partial W}{\partial y} + P_S^{-1}B'P_S W = 0, \quad (1.43)$$

ou encore

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A_x \frac{\partial}{\partial x} W + A_y \frac{\partial}{\partial y} W + B' W = 0 \quad (1.44)$$

avec

$$A_y = -P_S^{-1} A_S P_S = P_S^{-1} A_2 P_S = \begin{pmatrix} v_0 + c & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 - c \end{pmatrix},$$

$$A_x = P_S^{-1} A_1 P_S = \begin{pmatrix} u_0 & \frac{c}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{c}{\sqrt{2}} & u_0 & -\frac{c}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{c}{\sqrt{2}} & v_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = P_S^{-1} B P_S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{f}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{f}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{f}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{f}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_y étant inversible, on peut multiplier à gauche le système (1.4) par $(-A_y)^{-1}$ pour obtenir le système (1.40), avec ici

$$A^{\text{time}} = -A_y^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{v_0+c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-v_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-v_0+c} \end{pmatrix},$$

$$A^\tau = -A_y^{-1} A_x = \begin{pmatrix} -\frac{v_0}{v_0+c} & -\frac{c}{(v_0+c)\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{c}{v_0\sqrt{2}} & -\frac{u_0}{v_0} & \frac{c}{v_0\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{c}{(-v_0+c)\sqrt{2}} & \frac{u_0}{-v_0+c} \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$B'' = -A_y^{-1} B' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{f}{(v_0+c)\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{f}{v_0\sqrt{2}} & 0 & \frac{f}{v_0\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{f}{(-v_0+c)\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

En suivant la même démarche qu'aux autres frontières, on obtient les mêmes conditions absorbantes en première approximation. En deuxième approximation, les conditions absorbantes deviennent

– **cas d'un flux entrant** : $v_0 > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\sqrt{2}(-v_0+c)}{4} \frac{\partial w_2}{\partial x} \Big|_{y=0} = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{(-v_0+c)}{\sqrt{2}} \frac{\partial w_3}{\partial x} + \frac{(v_0-c)f}{c\sqrt{2}} w_3 \Big|_{y=0} = 0 \end{array} \right. \quad (1.45)$$

– **cas d'un flux sortant** : $v_0 < 0$

$$\left[\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{v_0 f}{c\sqrt{2}} w_2 \Big|_{y=0} = 0 \right. \quad (1.46)$$

Chapitre 2

Équations incomplètement paraboliques (avec viscosité)

2.1 Introduction

On considère les équations de Saint-Venant dissipatives linéarisées, constituées d'équations de réaction-advection-diffusion 2D pour décrire la dynamique horizontale et de l'équation de continuité (incompressibilité) pour la dynamique verticale, dans l'espace entier $\Omega = \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u}{\partial y} - f v + c \frac{\partial \phi}{\partial x} - \nu \Delta u = \mathcal{F}_1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v}{\partial y} + f u + c \frac{\partial \phi}{\partial y} - \nu \Delta v = \mathcal{F}_2, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \phi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

avec f la force de Coriolis. La variable ϕ est définie comme suit : $\phi = c h / h_0 = \sqrt{g/h_0} h$, avec h la hauteur de la surface libre de l'eau, et h_0 la profondeur de l'eau.

Notre objectif est de décrire pour ces équations des conditions aux frontières ouvertes à la fois optimales et utilisables numériquement.

Halpern [Hal91] a déterminé des conditions artificielles pour des systèmes plus généraux qui peuvent décrire le système d'équations de Saint-Venant sans termes de Coriolis. Elle a considéré des systèmes hyperboliques avec des perturbations incomplètement paraboliques. Afin que les conditions aux limites soient compatibles avec celles obtenues en considérant un problème purement hyperbolique (sans dissipation, *i.e.* $\nu = 0$), les conditions aux limites transparentes ont été développées en ν à l'ordre 1 et 2, et approchées en supposant que ν est très petit. En suivant la démarche d'Engquist et Majda [EM77], le problème a alors été simplifié en supposant que l'angle d'incidence des ondes qui traversent la frontière artificielle est quasiment nul ($\partial_y \simeq 0$).

Une approche légèrement différente a été choisie par Martin [Mar03], qui a étudié dans sa thèse le problème de Saint-Venant avec termes de Coriolis mais sans advection ($U_0 = 0$), en développant les conditions en ν , la viscosité, puis en la négligeant, ainsi que la force de Coriolis (plutôt que la viscosité et l'angle d'incidence comme Halpern [Hal91]). Cette approche peut être adaptée au problème de Saint-Venant complet (*cf.* annexe A).

On va reprendre ici l'approche de Halpern [Hal91] pour pouvoir traiter le système de Saint-Venant (2.1). Les différences avec les travaux de [Hal91], qui découlent de la prise en compte d'un nouveau terme du à la force de Coriolis, seront mises en évidence en [bleu](#), que ce soit dans l'explication de la démarche ou dans les résultats.

Soit $w = (u, v, \phi)^t$. Ce système peut se réécrire

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Q w - F w = \mathcal{F},$$

avec Q un opérateur différentiel défini par

$$Q = A^{(1)} \partial_x + A^{(2)} \partial_y + \nu P \Delta,$$

où

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -u_0 & 0 & -c \\ 0 & -u_0 & 0 \\ -c & 0 & -u_0 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} -v_0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_0 & -c \\ 0 & -c & -v_0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, de repère de coordonnées $x = (x_1 \dots x_N)^t$. Soit w une variable de dimension n , *i.e.* $w = (w_1 \dots w_n)^t$. Le problème de Saint-Venant s'inscrit dans le cadre plus général des problèmes

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - Q w - F w = \mathcal{F} & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ w(\cdot, \cdot, 0) = w_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

où Q est un opérateur différentiel hyperbolique incomplètement parabolique, de la forme

$$Q = \sum_{j=1}^N A^{(j)} \frac{\partial}{\partial x_j} + \nu \sum_{j,k=1}^N P^{(jk)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}, \quad (2.3)$$

F est un opérateur non différentiel tel que $F\Phi \cdot \Phi = 0 \forall \Phi$, et les matrices F , $P^{(jk)}$ et $A^{(j)} \in \mathcal{M}_n$ sont supposées s'écrire

$$F = \begin{pmatrix} \bar{F} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{(jk)} = \begin{pmatrix} \bar{P}^{(jk)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{(j)} = \begin{pmatrix} \bar{B}^{(j)} & \bar{C}^{(j)} \\ \bar{D}^{(j)} & \bar{A}^{(j)} \end{pmatrix},$$

avec \bar{F} et $\bar{P}^{(jk)}$ des matrices inversibles de rang r , $\bar{P}^{(jk)} = \bar{P}^{(kj)}$, et $\bar{A}^{(1)}$ une matrice diagonale, inversible, de rang $(n - r)$. De plus, l'opérateur $(\partial_t - \sum_{j=1}^N A^{(j)} \partial_j)$ est supposé hyperbolique, l'opérateur partiel $(\partial_t - \sum_{j,k=1}^N \bar{P}^{(jk)} \partial_{jk})$ Petrovski parabolique, et l'opérateur réduit $(\partial_t - \sum_{j=1}^N \bar{A}^{(j)} \partial_j)$ strictement hyperbolique.

Suivant la démarche de Halpern [Hal05], on va retracer ici les étapes nécessaires pour déterminer les conditions sur la frontière artificielle $\Gamma = \{x_1 = 0\}$ dans $\Omega^- = \{x_1 < 0\} = \mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}^{N-1}$.

Remarque : Le système de Saint-Venant est formulé dans (2.1) en fonction des variables (u, v, ϕ) , de sorte que les matrices $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$ soient symétriques. Il peut être formulé différemment en choisissant une autre variable que ϕ . Le choix de cette variable diffère d'ailleurs dans chacun des textes déjà cités :

- Dans l'article de Halpern [Hal91, p.1278], le problème est posé en fonction de φ plutôt que ϕ , où $\varphi = g h$.

- Dans son mémo, Halpern [Hal05]¹ utilise h , la hauteur de la surface libre de l'eau.
- Dans sa thèse, Martin [Mar03, p.156] fait un changement de variable $h \rightarrow "h^{(VM)}"$ tel que $h = h_0(1 + h^{(VM)})$, de sorte que les coefficients de l'équation d'incompressibilité soient unitaires.

2.2 Notations

On considère le problème (2.2). Les notations utilisées dans ce mémo, et leur valeur dans le cas du système de Saint-Venant (2.1), sont les suivantes

m	$1+p$	nombre de valeurs propres négatives de $A^{(1)}$ (donc $(n-m)$ v.p. positives)
N	2	dimension du vecteur x
n	3	dimension du vecteur w et des matrices carrées $A^{(j)}$ et $P^{(jk)}$
p	0 (si $u_0 < 0$) ou 1 (si $u_0 > 0$)	nombre de valeurs propres négatives de $\bar{A}^{(1)}$ (donc $(n-r-p)$ v.p. positives)
q	$1+p$	nombre de valeurs propres de partie réelle négative de $(A^{(1)}\xi + F - sI)$
r	2	rang des matrices $\bar{P}^{(jk)}$ (et $P^{(jk)}$)

2.3 Problème de Cauchy

Le problème (2.2) avec $\mathcal{F} \equiv 0$ s'écrit

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (Q+F)w. \quad (2.4)$$

On suppose que l'opérateur $(Q+F)$ possède un "symétriseur" S , ce qui implique notamment que le symbole de la transformée de Fourier de $Q+F$ en x est diagonalisable *via* une transformation analytique. S est une matrice symétrique définie positive.

Rappelons que la transformée de Fourier en $y = (x_2, \dots, x_N)$ et de Laplace en t d'une fonction w est

$$\hat{w}(x_1, \eta, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} w(x_1, y, t) e^{-(i\eta \cdot y + st)} dt dy,$$

où $s \in \mathbb{C}$. Le symbole de la transformée de Fourier-Laplace de Q en (y, t) est alors

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, i\eta\right) = A^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_1} + i \sum_{j \neq 1} A^{(j)} \eta_j + \nu P^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + i 2\nu \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{j \neq 1} P^{(1j)} \eta_j - \nu \sum_{j, k \neq 1} P^{(jk)} \eta_j \eta_k.$$

La transformée de Fourier-Laplace en (y, t) du système (2.4) donne le système différentiel

$$s \hat{w} = (Q(\partial/\partial x_1, i\eta) + F) \hat{w}.$$

¹Notons d'ailleurs des coquilles dans la formulation du problème sans termes de Coriolis :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -u_0 & 0 & -g \\ 0 & -u_0 & 0 \\ -h_0 & 0 & -u_0 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} -v_0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_0 & -g \\ 0 & -h_0 & -v_0 \end{pmatrix},$$

et dans les résultats : $\Theta_1 = (u_0, 0, -h_0)^T$,

cas inflow : $\zeta_1 = s/\lambda_1$, $h = \sum_{i,j=1}^2 (\tilde{N}^{-1})_{ij} \Phi_3^i w_j$, $\tilde{N} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\tilde{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

cas outflow : $\zeta_1 = s/\lambda_1$, $\zeta_2 = s/\lambda_2$, $\tilde{N} = \begin{pmatrix} g & 0 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & -h_0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{N}^{-1} =$

$$\frac{1}{c(-c-u_0)} \begin{pmatrix} -h_0 & 0 & -u_0 \\ 0 & c(-c-u_0) & 0 \\ -c & 0 & g \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne } D \partial_1 u_1 = -\frac{u_0-c}{c} (-c u_1 + gh).$$

2.3.1 Modes normaux du problème de Cauchy

On résout le système précédent en cherchant les racines ξ de l'équation caractéristique associée. On obtient les modes normaux [Hal91]

$$\widehat{w} = e^{\xi x_1 + i\eta \cdot y + st} \Phi, \quad \text{avec} \quad \operatorname{Re}(s) \geq 0.$$

Les inconnues (ξ, Φ) vérifient le système

$$(Q(\xi, i\eta) + F - sI) \Phi = 0. \quad (2.5)$$

Les racines ξ sont appelées abusivement "valeurs propres généralisées".

Nota : Dans Ω^- , les modes normaux ne sont définis que pour des valeurs propres ξ de partie réelle négative (pour que l'exponentielle reste finie en $-\infty$).

Le système (2.5) s'écrit encore

$$\left(A^{(1)} \xi + \nu P^{(11)} \xi^2 + i \sum_{j \neq 1} A^{(j)} \eta_j + i 2\nu \xi \sum_{j \neq 1} P^{(1j)} i \eta_j - \nu \sum_{j, k \neq 1} P^{(jk)} \eta_j \eta_k + F - sI \right) \Phi = 0. \quad (2.6)$$

Comme les termes du bloc diagonal de dimension r en haut à gauche de la matrice $Q(\xi, i\eta)$ sont en ξ^2 et que ceux du bloc diagonal de dimension $n - r$ en bas à droite de $Q(\xi, i\eta)$ sont en ξ , le déterminant de Q contient des termes $(\xi^2)^r \cdot \xi^{n-r}$, il est donc d'ordre $(n+r)$ en ξ .

Lemme 2.3.1. *Si $\operatorname{Re}(s) > 0$, les $(n+r)$ valeurs propres généralisées se décomposent en $(r+p)$ valeurs dont la partie réelle est négative, et $(n-p)$ dont la partie réelle est positive.*

Démonstration (similaire à celle du lemme 1.2. de Halpern [Hal91].

1. On peut prouver qu'il n'y a pas de valeur propre purement imaginaire, puisque F n'est pas positive. En effet, $F\Phi \cdot \Phi = 0$.
2. Soit N_{\pm} le nombre de valeurs propres de partie réelle positive/négative respectivement. Ces nombres ne dépendent pas de (η, s) ni des matrices $(A^{(j)}, P^{(jk)})$, pour peu que les hypothèses de départ soient vérifiées (par exemple, on ne peut pas avoir $\bar{A}^{(1)} = 0$). La justification pour (η, s) vient d'un raisonnement par l'absurde (raisonnement identique pour $(A^{(j)}, P^{(jk)})$) : si c'était faux, l'une au moins des racines serait de partie réelle négative pour un certain couple (η_1, s_1) et positive pour un autre couple (η_2, s_2) . En supposant que la partie réelle de la racine en question soit une fonction continue de (η, s) , elle doit nécessairement s'annuler pour un couple (η_3, s_3) , ce qui est en contradiction avec le premier résultat.
3. L'équation (2.5) ne peut être vérifiée pour $\Phi \neq 0$ que si

$$\det(Q(\xi, i\eta) + F - sI_n) = 0.$$

On a vu que cette équation était d'ordre $n+r$ en ξ , donc $N_- + N_+ = n+r$. Du point 2, on déduit qu'on peut choisir $\eta = 0$ et $\bar{B}^{(1)} = \bar{C}^{(1)} = \bar{D}^{(1)} = 0$ pour étudier les nombres N_{\pm} . Dans ce cas, comme les matrices résultantes sont diagonales par blocs, on a

$$\begin{aligned} \det(Q(\xi, i\eta) + F - sI) &= \det(A^{(1)} \xi - \nu \xi^2 P^{(11)} + F - sI) \\ &= \det[\nu \bar{P}^{(11)} \xi^2 + \bar{F} - sI_r] \det[\bar{A}^{(1)} \xi - sI_{n-r}]. \end{aligned}$$

Cette expression est nulle si et seulement si chaque déterminant est nul : $\det[\nu \bar{P}^{(11)} \xi^2 - sI_r + \bar{F}] = 0$ et $\det[\bar{A}^{(1)} \xi - sI_{n-r}] = 0$. Comme $\bar{P}^{(11)}$ est de dimension r et que la première équation est en ξ^2 , cette équation permet de déterminer $2r$ racines positives,

dont r sont de partie réelle positive et r sont de partie réelle négative. Soit $\bar{\lambda}_j$ les $(n-r)$ valeurs propres de $A^{(1)}$ (dont p sont négatives par hypothèse). La deuxième équation donne pour racines $s/\bar{\lambda}_j$. Comme $\mathcal{R}e(s) > 0$, cette équation donne p racines de partie réelle négative et $(n-r) - p$ de partie réelle positive. On obtient donc

$$N_- = r + p \quad \text{et} \quad N_+ = r + [(n-r) - p] = n - p.$$

□

Remarque. La démonstration de ce lemme repose sur le fait que

- S est une matrice symétrique définie positive,
- l'opérateur $\sum_{j,k} P^{(jk)} \psi_j \psi_k$ est non négatif, avec $\psi = (\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n)$ et $\xi = i\zeta$.

Ces propriétés n'ont pas pu être justifiées.

Théorème 2.3.1. *Si $\mathcal{R}e(s) > 0$, lorsque ν tend vers 0, r valeurs propres généralisées tendent vers l'infini en $1/\nu$, i.e. $\xi = \theta/\nu + O(1)$, et n valeurs ont une limite finie, i.e. $\xi = \alpha + O(\nu)$.*

Démonstration. On va faire un développement en ν dans l'équation (2.5) et garder les termes d'ordre le plus faible. On suppose que vecteurs Φ peuvent s'écrire sous la forme $\Phi = \Psi + O(\nu)$.

- Posons $\xi = \alpha + O(\nu)$. L'équation (2.6) s'écrit

$(A^{(1)}\alpha + i \sum_{j \neq 1} A^{(j)}\eta_j + F - sI) \Psi + O(\nu) = 0$. Ce système admet une solution si $\det(A^{(1)}\alpha + i \sum_{j \neq 1} A^{(j)}\eta_j + F - sI) = 0$. Cette équation d'ordre n en α doit avoir n solutions. **On va noter q le nombre des valeurs propres α de partie réelle négative**²³⁴.

- Posons $\xi = \theta/\nu + O(1)$. L'équation (2.6) s'écrit $\theta/\nu (A^{(1)} + P^{(11)}\theta) \Psi + O(1) = 0$. Ce système admet une solution si $\det(A^{(1)} + P^{(11)}\theta) = 0$. Cette équation d'ordre r en θ doit avoir r racines. Comme on a $r+p$ valeurs propres de partie réelle négative (lemme précédent) et qu'on en a déterminé q précédemment, $r+p-q$ des termes θ sont de partie réelle négative. □

Conclusion : Les $(r+p)$ solutions (ξ_i, Φ^i) de l'équation (2.5) correspondant aux modes qui se propagent (du domaine Ω^+ vers la frontière Γ), i.e. tels que $\mathcal{R}e(\xi_i) < 0$, avec $\mathcal{R}e(s) > 0$, sont de la forme

$$\begin{cases} \xi_i(s, \eta, \nu) = \zeta_i(s, \eta) + O(\nu), & 1 \leq i \leq q, \\ \xi_i(s, \eta, \nu) = \frac{1}{\nu} \zeta_i(s, \eta) + O(1), & q+1 \leq i \leq r+p, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\Phi^i(s, \eta, \nu) = \Psi^i(s, \eta) + O(\nu), \quad 1 \leq i \leq r+p, \quad (2.8)$$

où les (ζ_i, Ψ^i) sont définis comme suit :

(a) $1 \leq i \leq q$

$$\begin{cases} \zeta_i(s, \eta) = \alpha_i(s, \eta), \\ \Psi^i(s, \eta) = \Pi^i(s, \eta), \end{cases} \quad (2.9)$$

²Nota : Le nombre de valeurs propres α associées à $(A^{(1)}\alpha + i \sum_{j \neq 1} A^{(j)}\eta_j + F - sI)$ de partie réelle négative est différent du nombre de valeurs propres négatives associées à sa partie réelle, i.e. à $(A^{(1)}\mathcal{R}e(\alpha) + F - \mathcal{R}e(s)I)$.

³Nota : si $F = 0$, on retrouve, comme Halpern [Hal91], m valeurs propres de partie réelle négative (m étant le nombre de valeurs propres négatives de $A^{(1)}$).

⁴Nota : Quand on fera l'approximation en η , q sera le nombre de valeurs propres de partie réelle négative associées à $(A^{(1)}\bar{\alpha} + F - sI)$.

tels que

$$(A^{(1)}\alpha_i + \sum_{j \neq 1} i\eta_j A^{(j)} + F - sI) \Pi^i = 0, \quad (2.10)$$

(b) $q + 1 \leq i \leq r + p$

$$\begin{cases} \zeta_i(s, \eta) = \theta_{i-q}, \\ \Psi^i(s, \eta) = \Theta^{i-q}, \end{cases} \quad (2.11)$$

tels que

$$(P^{(11)}\theta_{i-q} + A^{(1)}) \Theta^{i-q} = 0. \quad (2.12)$$

2.3.2 Conditions de transmission

Comme S , le ‘‘symétriseur’’ de $(Q+F)$, est symétrique défini positif, il définit un produit scalaire :

$$s(w, v) = \int_{\Omega} (Sw, v) dx.$$

La formulation variationnelle du problème (2.2) dans un domaine Ω de frontière régulière $\partial\Omega$ peut alors s’écrire

$$s\left(\frac{\partial w}{\partial t}, v\right) + \nu p(v, w) + a(v, w) - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (S\mathcal{E}w, v) \partial\gamma = \int_{\Omega} \mathcal{F} v, \quad \forall v,$$

où les formes bilinéaires a et p , définies par

$$\begin{aligned} a(v, w) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \left[\left(SA^{(j)} \frac{\partial v}{\partial x_j}, w \right) - \left(SA^{(j)} \frac{\partial w}{\partial x_j}, v \right) \right] dx, \\ p(v, w) &= \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^N \left(SP^{(jk)} \frac{\partial w}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k} \right), \end{aligned}$$

sont respectivement antisymétrique et symétrique non-négative, et où \mathcal{E} est la contrainte normale à la frontière⁵

$$(S\mathcal{E}w, v) = \sum_{k=1}^N \left(\nu \sum_{j=1}^N SP^{(jk)} \frac{\partial w}{\partial x_j} + SA^{(k)} w, v \right) n_k - \sum_{k=1}^N \left(\nu \sum_{j=1}^N SP^{(jk)} w, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) n_k.$$

Soit v à support compact dans Ω . La décomposition du domaine $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+$ permet d’écrire

$$\int_{\partial\Omega^+} (S\mathcal{E}w, v) \partial\gamma + \int_{\partial\Omega^-} (S\mathcal{E}w, v) \partial\gamma = 0$$

et donc de déterminer les *conditions de transmission* à la frontière $\Gamma = \partial\Omega^- \cap \partial\Omega^+$:

$$(\mathcal{E}w)^- = (\mathcal{E}w)^+ \quad \text{sur } \Gamma.$$

Dans le cas particulier où $\Gamma = \{x_1 = 0\}$, ces conditions de transmission deviennent

$$\begin{cases} \nu \sum_{j=1}^N P^{(j1)} \frac{\partial w^-}{\partial x_j} + A^{(1)} w^- &= \nu \sum_{j=1}^N P^{(j1)} \frac{\partial w^+}{\partial x_j} + A^{(1)} w^+ \\ &\text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

⁵Cette définition n’est pas équivalente à celle de Hildreth et al. [1991] mais est cohérente avec le résultat d’Eric Blayo [Bla06, p.9].

ou encore⁶

$$\begin{cases} \nu \sum_{j=1}^N \bar{P}^{(j1)} \frac{\partial w^{I-}}{\partial x_j} = \nu \sum_{j=1}^N \bar{P}^{(j1)} \frac{\partial w^{I+}}{\partial x_j} \\ w^- = w^+ \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2.13)$$

où on a posé

$$w^I = (w_1, \dots, w_r)^t,$$

notation qui revient à décomposer les variables pour ne considérer que les (r premiers) termes qui correspondent aux matrices \bar{P} .

2.4 Dérivation des conditions aux frontières artificielles

On va utiliser les conditions de transmission pour dériver des conditions de frontières transparentes.

Si \mathcal{F} et w^0 sont à support compact dans Ω^- , le problème de Cauchy, constitué du système (2.2) et d'une condition initiale $w(0) = w^0$, est équivalent au problème de transmission

$$\begin{cases} \frac{\partial w^-}{\partial t} - (Q+F)w^- = \mathcal{F}(x, t) \\ w^-(0) = w^0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega^-, \quad \begin{cases} \frac{\partial w^+}{\partial t} - (Q+F)w^+ = 0 \\ w^+(0) = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega^+,$$

avec les conditions de transmission (2.13).

2.4.1 Conditions aux frontières transparentes

Introduisons dans Ω^+ le problème complet avec condition initiale et conditions aux limites

$$\begin{cases} \frac{\partial w^+}{\partial t} - (Q+F)w^+ = 0 \\ w^+(t=0) = 0 \\ (w_1^+ \dots w_{r+p}^+)^t = g \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{dans } \Omega^+, \\ \\ \text{sur } \Gamma. \end{matrix} \quad (2.14)$$

Théorème 2.4.1 (LH 2.1.). *Le problème (2.14) est "fortement bien posé". La solution en variables de Fourier-Laplace (η, s) est donnée par*

$$\hat{w}^+(x_1, \eta, s) = \sum_{i=1}^{r+p} \mu_i e^{\xi_i x_1} \Phi^i,$$

où les (ξ_i, Φ^i) sont définis par l'équation (2.5) et les coefficients μ_i sont déterminés grâce aux conditions aux limites.

Remarque : L'hypothèse selon laquelle Q est diagonalisable assure que la matrice $M \in \mathcal{M}_{r+p}$, définie par

$$M_{ji} = \Phi_j^i, \quad 1 \leq i, j \leq r+p,$$

est inversible, si bien que les conditions limites déterminent les coefficients μ_i :

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{r+p} M_{ij}^{-1} \hat{g}_j.$$

Comme les conditions de transmission sont $w^- = w^+$, ici $\hat{g} = \hat{w}^-$.

⁶On retrouve bien les conditions de transmission de Halpern [Hal91].

Théorème 2.4.2 (LH 2.2). *Les conditions aux frontières transparentes sur Γ pour le demi-espace Ω^- sont constituées de $(n - p)$ équations de deux types :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \sum_{j=1}^N \bar{P}^{(1j)} \frac{\partial \widehat{w}^I}{\partial x_j} = \nu \bar{P}^{(11)} \sum_{j=1}^{r+p} \sum_{i=1}^{r+p} \xi_i M_{ij}^{-1} \Phi^{iI} \widehat{w}_j + \nu \sum_{l \neq 1} i \eta_l \bar{P}^{(l1)} \widehat{w}^I \quad (\text{dimension } r), \\ \widehat{w}_k = \sum_{i=1}^{r+p} \sum_{j=1}^{r+p} M_{ij}^{-1} \widehat{w}_j \Phi_k^i, \quad k = r + p + 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Nota : Dans ce théorème, les variables notées \widehat{w} sont en fait restreintes à Ω^- , *i.e.* $\widehat{w} = \widehat{w}^-$.

2.4.2 Conditions aux frontières approchées en ν (non locales)

On cherche des conditions aux limites qui soient consistantes avec le problème hyperbolique (*i.e.* $\nu = 0$). On va donc approcher les conditions transparentes (2.15) par rapport à ν .

On étudie la limite des termes de droite dans le système (2.15) lorsque ν tend vers 0. D'après (2.8), $\lim_{\nu \rightarrow 0} \Phi = \Psi$, ou encore $\lim_{\nu \rightarrow 0} M = N$, en définissant la matrice $N \in \mathcal{M}_{r+p}$ comme

$$N_{ij} = \Psi_i^j, \quad 1 \leq i, j \leq r + p.$$

D'après (2.7), $\lim_{\nu \rightarrow 0} (\nu \xi_i) = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq q, \\ \zeta_i, & q + 1 \leq i \leq r + p. \end{cases}$ Lorsque ν tend vers 0, les conditions transparentes (2.15) deviennent alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \sum_{j=1}^N \bar{P}^{(1j)} \frac{\partial \widehat{w}^I}{\partial x_j} = \bar{P}^{(11)} \sum_{i=q+1}^{r+p} \zeta_i \sum_{j=1}^{r+p} N_{ij}^{-1} \Psi^{iI} \widehat{w}_j \quad (\text{dimension } r), \\ \widehat{w}_k = \sum_{i=1}^{r+p} \sum_{j=1}^{r+p} N_{ij}^{-1} \widehat{w}_j \Psi_k^i, \quad k = r + p + 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

2.4.3 Rappel des conditions aux frontières absorbantes pour le problème hyperbolique

Soit le système hyperbolique

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{j=1}^N A^{(j)} \frac{\partial w}{\partial x_j} + F w + \mathcal{F}. \quad (2.17)$$

Les solutions de ce système dans l'espace entier, avec $\mathcal{F} \equiv 0$, sont obtenues par une transformée de Fourier-Laplace en (y, t) :

$$\widehat{w} = \sum_{i=1}^n \mu_i e^{\alpha_i x_1} \Pi^i,$$

où (α_i, Π^i) sont les valeurs propres et les vecteurs propres définis en (2.10).

Ici, dans le cas sans dissipation, la direction de propagation des modes à la frontière Γ est donnée par le signe des valeurs propres λ_i de $A^{(1)}$, **indépendamment de la matrice F** [OS78, EM77]. Ces modes se propagent vers l'extérieur du domaine Ω^- (*i.e.* dans la direction $x_1 > 0$) lorsque $\lambda_i \leq 0$.

Les conditions pour que la frontière $\Gamma = \{x_1 = 0\}$ du demi-espace Ω^- soit transparente expriment le fait qu'aucune onde ne se propage de la frontière vers l'intérieur du domaine, et donc

$$\mu_i = 0, \quad m+1 \leq i \leq n,$$

ou encore

$$(T^{-1}\hat{w})_i = 0, \quad m+1 \leq i \leq n, \quad (2.18)$$

où la matrice T est définie comme $T_{ij} = \Pi_i^j$.

Nota : Ces conditions ne sont pas locales en temps et en espace.

De la même manière qu'Engquist et Majda [EM77], on peut approcher ces conditions pour les rendre locales en supposant que les ondes arrivent perpendiculairement à la frontière, ce qui revient à supposer que l'angle d'incidence est nul : $\eta = 0$.

L'équation (2.10) est alors approchée par l'équation

$$(A^{(1)} \tilde{\alpha}_i + F - sI) \tilde{\Pi}^i = 0. \quad (2.19)$$

Au premier ordre en η , les conditions aux limites absorbantes pour le système hyperbolique (2.17) dans Ω^- sont finalement

$$(\tilde{T}^{-1}\hat{w})_i = 0, \quad m+1 \leq i \leq n, \quad (2.20)$$

où $\tilde{T}_{ij} = \tilde{\Pi}_i^j$, $1 \leq i, j \leq n$, *i.e.* les caractéristiques entrantes du système doivent être nulles à la frontière.

2.4.4 Conditions approchées en η

Les conditions non locales (2.16) obtenues lorsque $\nu \rightarrow 0$ pour le système hyperbolique avec perturbation incomplètement parabolique peuvent être approchées de la même manière que celles obtenues précédemment pour le système hyperbolique, en supposant que $\eta = 0$.

Soit $\tilde{\Psi}^j$ les $(r+p)$ vecteurs définis par

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}^j = \tilde{\Pi}^j, & 1 \leq j \leq q \\ \tilde{\Psi}^j = \Theta^{j-q}, & q+1 \leq j \leq r+p \end{cases} \quad (2.21)$$

et \tilde{N} la matrice telle que $\tilde{N}_{ij} = \tilde{\Psi}_i^j$, $1 \leq i, j \leq r+p$. En substituant ζ et Ψ par leurs expressions (2.9) et (2.11), les conditions absorbantes approchées en ν et η s'écrivent

$$\begin{cases} \nu \sum_{j=1}^N \bar{P}^{(1j)} \frac{\partial w^I}{\partial x_j} = \bar{P}^{(11)} \sum_{i=q+1}^{r+p} \theta_{i-q} \sum_{j=1}^{r+p} \tilde{N}_{ij}^{-1} \Theta^{i-q} w_j & (\text{dimension } r), \\ w_k = \sum_{i=1}^{r+p} \sum_{j=1}^{r+p} \tilde{N}_{ij}^{-1} w_j \tilde{\Psi}_k^i, & k = r+p+1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.22)$$

Remarques :

- **Ces conditions aux limites ne sont pas nécessairement locales** (*cf.* application au problème de Saint-Venant, section 2.4.5), car *a priori* $\tilde{\Pi}^j$ fait intervenir le nombre complexe s . **Il paraît alors nécessaire de faire une nouvelle approximation** (à déterminer) (*cf.* approche de Véronique Martin en annexe A).
- Étapes des différentes approximations des conditions transparentes :

$$(2.15) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} (2.16) \xrightarrow{\nu=0} (2.18) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} (2.20)$$

$$(2.16) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} (2.22)$$

- La solution du système général (2.2) avec les conditions aux limites transparentes (non locales) (2.15) ou (2.16) doit converger vers celle du système hyperbolique (2.17) avec les conditions transparentes (non locales) (2.18).
- La solution du système général (2.2) avec les conditions aux limites absorbantes (2.22) doit converger vers celle du système hyperbolique (2.17) avec les conditions locales (2.20).

2.4.5 Cas particulier : le système de Saint-Venant linéarisé

Pour déterminer les conditions aux limites transparentes (2.22) du système de Saint-Venant (2.1), il faut déterminer les vecteurs propres $\tilde{\Pi}^i$ tels que

$$(A^{(1)}\tilde{\alpha}_i + F - sI)\tilde{\Pi}^i = 0,$$

où les valeurs propres $\tilde{\alpha}_i$ sont déterminées en résolvant $\det(A^{(1)}\tilde{\alpha}_i + F - sI) = 0$, les éléments propres $(\theta_{i-q}, \Theta^{i-q})$ sont tels que

$$(P^{(11)}\theta_{i-q} + A^{(1)})\Theta^{i-q} = 0,$$

et les matrices $A^{(1)}$, F et $P^{(11)}$ sont définies page 32.

Nota : $\bar{A}^{(1)} = -u_0$ donc p dépend du signe de u_0 et $\bar{P}^{(11)} = I_2 = (\delta_{ij})_{i,j=1,2}$ donc $r = 2$.

On obtient

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_1 = \frac{u_0 s - \sqrt{-f^2 u_0^2 + s^2 c^2 + f^2 c^2}}{c^2 - u_0^2}, \\ \tilde{\alpha}_2 = -\frac{s}{u_0}, \\ \tilde{\alpha}_3 = \frac{u_0 s + \sqrt{-f^2 u_0^2 + s^2 c^2 + f^2 c^2}}{c^2 - u_0^2}, \end{cases}$$

de vecteurs propres⁷

$$\tilde{\Pi}^i = \begin{pmatrix} -u_0 \tilde{\alpha}_i - s \\ f \\ c \alpha \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{u_0^2 - c^2}{u_0}, & \Theta^1 &= (u_0, 0, -c^2)^t, \\ \theta_2 &= u_0, & \Theta^2 &= (0, 1, 0)^t. \end{aligned}$$

Comme $c > |u_0|$ en océanographie (cas subsonique), on a⁸

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\tilde{\alpha}_1) &< 0, & \theta_1 \text{ et } \operatorname{Re}(\tilde{\alpha}_2) &\text{ sont de signe opposé à } u_0 \\ \operatorname{Re}(\tilde{\alpha}_3) &> 0, & \theta_2 &\text{ est du signe de } u_0. \end{aligned}$$

Distinguons alors le cas d'un flux sortant et celui d'un flux entrant.

i) Flux entrant : $u_0 < 0$

Ici, $p = 0$: on a $n - p = \mathbf{3 \text{ conditions aux limites}}$.

Les $r + p = 2$ valeurs propres de partie réelle négative sont $\tilde{\alpha}_1$ et θ_2 .

ii) Flux sortant : $u_0 > 0$

Ici, $p = 1$: on a $n - p = \mathbf{2 \text{ conditions aux limites}}$.

Les $r + p = 3$ valeurs propres de partie réelle négative sont $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ et θ_1 .

⁷ *Nota* : $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_3$ vérifient $(-u_0 \alpha - s)^2 + f^2 - c^2 \alpha^2 = 0$.

⁸ car $c^2 - u_0^2 \geq 0$ et $\sqrt{-f^2 u_0^2 + s^2 c^2 + f^2 c^2} = \sqrt{u_0^2 s^2 + (c^2 - u_0^2)(s^2 + f^2)}$, donc la partie réelle de cette racine carrée est supérieure à celle de $u_0 s$.

2.5 Cas particulier du système sans termes de Coriolis F

Si on ne considère pas de termes Fw dans la formulation (2.2-2.3) du problème, on se ramène au cas traité par Halpern [Hal91].

2.5.1 Rappel des conditions aux frontières absorbantes pour le problème hyperbolique

Dans le cas d'un problème sans terme F , l'équation (2.19) est équivalente à

$$(A^{(1)} - \frac{s}{\tilde{\alpha}_i} I) \tilde{\Pi}^i = 0.$$

Soit Λ^i les vecteurs propres de $A^{(1)}$, i.e. $(A^{(1)} - \lambda_i I) \Lambda^i = 0$, $1 \leq i \leq n$. On a donc $\tilde{\alpha}_i = \frac{s}{\lambda_i}$ et $\tilde{\Pi}^i = \Lambda^i$. Les modes se propagent vers l'extérieur de Ω^- lorsque $\mathcal{R}e(s\alpha) \leq 0$. Les conditions aux limites absorbantes (2.20) pour le système hyperbolique sont alors vérifiées pour $\tilde{T}_{ij} = \Lambda_i^j$, $1 \leq i, j \leq n$.

2.5.2 Conditions locales pour le problème complet

Les conditions non locales (2.16) obtenues lorsque $\nu \rightarrow 0$ pour le système hyperbolique avec perturbation incomplètement parabolique peuvent être approchées de la même manière que celles obtenues précédemment pour le système hyperbolique, en supposant que $\eta = 0$.

On a vu à la section précédente que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \zeta_i = \frac{s}{\lambda_i} \quad \text{et} \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \Psi^i = \Lambda^i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

On retrouve alors les conditions (2.22) avec $\tilde{\Psi}^j$ les vecteurs définis par

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}^j = \Lambda^j, & 1 \leq j \leq m, \\ \tilde{\Psi}^j = \Theta^{j-m}, & m+1 \leq j \leq r+p. \end{cases}$$

2.5.3 Conditions aux limites d'ordres plus élevés (en ν)

Cette étude peut être étendue en développant les valeurs propres généralisées à l'ordre supérieur :

$$\begin{cases} \xi_i(s, \eta, \nu) = \zeta_i(s, \eta) + \nu \chi_i(s, \eta) + O(\nu^2), & 1 \leq i \leq m, \\ \xi_i(s, \eta, \nu) = \frac{1}{\nu} \zeta_i(s, \eta) + \chi_i(s, \eta) + O(\nu), & m+1 \leq i \leq r+p, \end{cases}$$

tout comme les vecteurs propres :

$$\Phi^i(s, \eta, \nu) = \Psi^i(s, \eta) + \nu \Xi^i(s, \eta) + O(\nu^2), \quad 1 \leq j \leq r+p$$

On fixe $\eta = 0$. En substituant dans le système (2.5), qui se simplifie en

$$(\xi A^{(1)} + \nu \xi^2 P^{(11)} - sI) \Phi = 0,$$

les éléments propres (ξ_i, Φ^i) par leur expression ci-dessus, et en identifiant les termes d'ordre le moins élevé, ainsi que ceux à l'ordre au-dessus, on obtient une expression plus précise des valeurs propres généralisées et de leur vecteur propre :

$$\begin{cases} \xi_i(s, \nu) = \zeta_i(s) + \nu \chi_i s^2 + O(\nu^2), & 1 \leq i \leq m, \\ \xi_i(s, \nu) = \frac{1}{\nu} \zeta_i + \chi_i s + O(\nu), & m+1 \leq i \leq r+p, \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\Phi^i(s, \nu) = \Psi^i + \nu \Xi^i s + O(\nu^2), \quad 1 \leq j \leq r + p \quad (2.24)$$

où les inconnues $(\zeta_i, \chi_i, \Psi^i, \Xi^i)$ sont définies comme suit⁹ :

(a) $1 \leq i \leq m$

$$\begin{cases} \zeta_i(s) = \frac{s}{\lambda_i}, \\ \Psi^i = \Lambda^i, \end{cases}$$

et les (χ_i, Ξ^i) sont tels que¹⁰

$$\left(\chi_i A^{(1)} + \frac{1}{\lambda_i^2} P^{(11)} \right) \Lambda^i + \left(\frac{1}{\lambda_i} A^{(1)} - I \right) \Xi^i = 0,$$

(b) $m + 1 \leq i \leq r + p$

$$\begin{cases} \zeta_i = \theta_{i-m}, \\ \Psi^i = \Theta^{i-m}, \end{cases}$$

et les (χ_i, Ξ^i) sont tels que¹¹

$$\left(\theta_{i-m} A^{(1)} + \theta_{i-m}^2 P^{(11)} \right) \Xi^i + \left(\chi_i A^{(1)} - I \right) \Theta^{i-m} = 0.$$

On obtient alors l'équivalent des conditions approchées (2.22) au premier ordre en ν , dans lesquelles apparaissent des termes $\frac{\partial}{\partial t}$.

2.5.4 Cas particulier : le système de Saint-Venant linéarisé, sans force de Coriolis

On va déterminer les conditions transparentes locales pour le système de Saint-Venant sans termes de Coriolis *linéarisé autour de l'état* (u_0, v_0)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A^{(1)} \frac{\partial w}{\partial x} + A^{(2)} \frac{\partial w}{\partial y} + \nu \left(P^{(11)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P^{(22)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

réexprimé en fonction des variables $w = (u, v, \varphi)$ ¹² de sorte que

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -u_0 & 0 & -1 \\ 0 & -u_0 & 0 \\ -c^2 & 0 & -u_0 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -c^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{(11)} = P^{(22)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après les sections précédentes, les conditions aux frontières transparentes sont données par le système (2.22), qui fait intervenir les éléments propres (λ_i, Λ^i) de la matrice $A^{(1)}$ et les éléments propres (θ_i, Θ^i) . Ces derniers ont été déterminés à la section 2.4.5. On obtient pour les premiers

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -u_0 - c, & \Lambda^1 &= (1, 0, c)^t, \\ \lambda_2 &= -u_0, & \Lambda^2 &= (0, 1, 0)^t, \\ \lambda_3 &= -u_0 + c, & \Lambda^3 &= (1, 0, -c)^t. \end{aligned}$$

En océanographie, $c > |u_0|$.

⁹On rappelle que (λ_i, Λ^i) sont les éléments propres de la matrice $A^{(1)}$.

¹⁰Cette équation n'a pas été explicitée par Halpern [Hal91].

¹¹cf. note 10

¹² $\varphi = gh$

i) Flux entrant : $u_0 < 0$ ($p = 0$)

Le nombre de conditions aux limites est de $n - p = 3$. Les deux valeurs propres négatives sont $\lambda_1 = -u_0 - c$ et $\theta_2 = u_0$.

Les conditions aux frontières transparentes (2.22) s'écrivent

$$\begin{cases} \nu \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \nu \frac{\partial v}{\partial x} = u_0 v, \\ \varphi = cu. \end{cases}$$

ii) Flux sortant : $u_0 > 0$ ($p = 1$)

Le nombre de conditions aux limites est de $n - p = 2$. Les trois valeurs propres négatives sont $\lambda_1 = -u_0 - c$, $\lambda_2 = -u_0$ et $\theta_1 = \frac{u_0^2 - c^2}{u_0}$.

Les conditions aux frontières transparentes (2.22) s'écrivent

$$\begin{cases} \nu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0 - c}{c}(cu - \varphi), \\ \nu \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Troisième partie

Conservation des traceurs : équations d'advection-diffusion

Dans le cadre de la dynamique océanique, le modèle complet fait intervenir des équations de natures diverses. On s'intéresse ici aux équations représentatives de la dynamique des traceurs que sont la température et la salinité.

L'évolution des traceurs est décrite par des équations scalaires d'advection-diffusion. Deux différentes paramétrisations de la diffusion, en laplacien et bi-laplacien, sont habituellement considérées pour représenter la turbulence méso-échelle en fonction des paramètres de grande échelle.

Chapitre 3

Équations d'advection-diffusion harmonique

3.1 Introduction

Soit $\Omega = \mathbb{R}^m$ le domaine considéré ($m = 2$ en 2D, 3 en 3D), $\Omega^- = (-\infty, L) \times \mathbb{R}^{m-1}$ et $\Omega^+ = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$ les sous-domaines. Les interfaces sont $\Gamma_L = \{x = L\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ et $\Gamma_0 = \{x = 0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$.

On considère l'équation d'advection-diffusion harmonique. L'opérateur du système (1) est alors défini ainsi :

$$\mathcal{L} = \partial_t + \vec{c} \cdot \nabla - \nu \Delta,$$

où \vec{c} est un champ de vitesse constant et $\nu > 0$ est la viscosité.

On résout dans chaque sous-domaine Ω^\pm le système (2) vérifié par l'erreur e_\pm^n (avec $f = 0$ et $w_0 = 0$).

Le problème a été traité complètement par Martin [Mar03, Mar05] dans le cas 2-D. On va présenter ses travaux, puis les étendre au cas 3D.

3.2 Espace \mathbb{R}^2

Dans $\Omega = \mathbb{R}^2$ ($m = 2$), l'opérateur d'advection-diffusion harmonique s'écrit

$$\mathcal{L} = \partial_t + a \partial_x + b \partial_y - \nu (\partial_{xx} + \partial_{yy}).$$

3.2.1 Algorithme appliqué aux transformées de Fourier des erreurs

Rappelons que la transformée de Fourier par rapport aux variables y et t d'une fonction w dans $L^2(\Omega^\pm \times \mathbb{R})$ est définie comme

$$\hat{w}(x, k, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(x, y, t) e^{-i(ky + \omega t)} dy dt.$$

On va étudier les transformées de Fourier des systèmes vérifiés par les erreurs (3). Pour cela, on étend leur domaine de définition $\Omega^\pm \times \mathbb{R}^+$ quand $t < 0$, *i.e.* au domaine $\Omega^\pm \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\pm^n = 0 & \text{sur } \Omega^\pm \times \mathbb{R}^{*-}, \\ \mathbf{e}_\pm^n = e_\pm^n & \text{sur } \Omega^\pm \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Après transformation de Fourier, l'algorithme de Schwarz vérifié par les erreurs s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathcal{L}}\widehat{\mathbf{e}}_-^{n+1} = 0 \text{ dans } (-\infty, L) \times \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}, \\ \widehat{\mathbf{e}}_-^{n+1}|_{t=0} = 0 \text{ dans } (-\infty, L) \times \mathbb{R}^{m-1}, \\ \widehat{\mathcal{B}}^-\widehat{\mathbf{e}}_-^{n+1} = \widehat{\mathcal{B}}^-\widehat{\mathbf{e}}_+^n \text{ sur } \Gamma_L \times \mathbb{R}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathcal{L}}\widehat{\mathbf{e}}_+^{n+1} = 0 \text{ dans } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}, \\ \widehat{\mathbf{e}}_+^{n+1}|_{t=0} = 0 \text{ dans } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^{m-1}, \\ \widehat{\mathcal{B}}^+\widehat{\mathbf{e}}_+^{n+1} = \widehat{\mathcal{B}}^+\widehat{\mathbf{e}}_-^n \text{ sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où $\widehat{\mathcal{L}} = -\nu \partial_{xx} + a \partial_x + [i(\omega + bk) + \nu k^2]$. A chaque équation différentielle ordinaire de chaque sous-domaine correspond l'équation caractéristique

$$-\nu \sigma^2 + a \sigma + [i(\omega + bk) + \nu k^2] = 0.$$

Notons

$$R = a^2 + 4\nu^2 k^2 \quad \text{et} \quad I = 4\nu(\omega + bk).$$

Le discriminant du polynôme caractéristique est

$$\delta = R + iI \quad (3.2)$$

et ses racines sont

$$\boxed{\sigma^- = \frac{1}{2\nu}(a - \sqrt{\delta}) \quad \text{et} \quad \sigma^+ = \frac{1}{2\nu}(a + \sqrt{\delta})}, \quad (3.3)$$

où

$$\sqrt{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{R + \sqrt{R^2 + I^2}} + i \operatorname{sgn}(I) \sqrt{-R + \sqrt{R^2 + I^2}} \right] \quad (3.4)$$

et le signe de I est $\operatorname{sgn}(I) = \frac{I}{|I|}$.

On peut remarquer que $\operatorname{Re}(\sigma^-) < 0$ et $\operatorname{Re}(\sigma^+) > 0$, ce qui permet de déterminer les termes qui restent finis dans chaque sous-domaine. Les erreurs solutions de (3.1) sont alors définies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{e}}_-^n(x, k, \omega) = \alpha^n(k, \omega) e^{\sigma^+ x} \quad \forall (x, k, \omega) \in (-\infty, L) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ \widehat{\mathbf{e}}_+^n(x, k, \omega) = \beta^n(k, \omega) e^{\sigma^- x} \quad \forall (x, k, \omega) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

où les fonctions α^n et β^n sont calculées à partir des conditions aux limites sur Γ_0 et Γ_L .

Par exemple, si les conditions aux interfaces sont des conditions de Dirichlet, *i.e.* $\mathcal{B}^\pm = \operatorname{Id}$, alors $\widehat{\mathbf{e}}_-^{n+1} = \widehat{\mathbf{e}}_+^n$ sur $\Gamma_L \times \mathbb{R}$ et $\widehat{\mathbf{e}}_+^{n+1} = \widehat{\mathbf{e}}_-^n$ sur $\Gamma_0 \times \mathbb{R}$. On en déduit que $\widehat{\mathbf{e}}_\pm^{n+1} = e^{(\sigma^- - \sigma^+)L} \widehat{\mathbf{e}}_\pm^{n-1}$. Le taux de convergence de l'algorithme (2), défini par

$$\rho = \frac{|\widehat{\mathbf{e}}_\pm^{n+1}|}{|\widehat{\mathbf{e}}_\pm^{n-1}|}, \quad (3.6)$$

dépend donc de la largeur du recouvrement L pour des conditions aux interfaces de Dirichlet : $\rho_{\text{Dir}} = |e^{(\sigma^- - \sigma^+)L}| = e^{\operatorname{Re}(\sigma^- - \sigma^+)L}$. Plus le recouvrement est grand, plus l'algorithme converge vite. Et si $L = 0$, l'algorithme ne converge pas.

3.2.2 Conditions optimales aux interfaces

On cherche des conditions aux interfaces telles que l'algorithme de Schwarz converge vite même sans recouvrement. On considère désormais $L = 0$ et on note Γ l'unique interface en $\{x = 0\}$.

D'après le résultat (3.5), les transformées de Fourier des erreurs vérifient

$$\frac{\partial \widehat{e}_-^n}{\partial x} - \sigma^+ \widehat{e}_-^n = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \widehat{e}_+^n}{\partial x} - \sigma^- \widehat{e}_+^n = 0. \quad (3.7)$$

Notons \mathcal{S}^\pm la transformée de Fourier inverse de l'opérateur σ^\pm . En choisissant comme opérateurs des conditions sur l'interface Γ

$$\boxed{\mathcal{B}^\pm = \frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{S}^\pm}, \quad (3.8)$$

le problème (3.1) vérifié par l'erreur dans chaque sous-domaine se ramène, dès que $n = 2$, à un problème homogène avec une condition initiale et une condition à l'interface nulles, dont la solution est nulle : $\widehat{e}_\pm^n = 0 \quad \forall n \geq 2$, si bien que $u_-^n = w|_{\Omega^-}$ et $u_+^n = w|_{\Omega^+} \quad \forall n \geq 2$: **la convergence de l'algorithme de Schwarz vers la solution générale du système (1) est atteinte en deux itérations.**

3.2.3 Conditions approchées

Les opérateurs \mathcal{S}^\pm obtenus ne sont pas définis localement en temps et en espace du fait de la complexité de l'expression (3.4) de $\sqrt{\delta(k, \omega)}$. On va donc chercher des opérateurs approchés, d'ordre 0 et 1, faciles à mettre en œuvre numériquement.

En suivant l'approche de Véronique Martin [Mar05], on propose comme approximation à l'ordre 0 $(\sqrt{\delta})_0 = p$ et à l'ordre 1 $(\sqrt{\delta})_1 = p + i 2\nu(\omega + bk)q$, de sorte que¹

$$\sigma_0^\pm = \frac{1}{2\nu}(a \pm p) \quad \text{et} \quad \sigma_1^\pm = \frac{1}{2\nu}(a \pm p) \pm i(\omega + bk)q,$$

et les opérateurs différentiels correspondants, d'ordre 0 et 1, sont

$$\boxed{\mathcal{S}_0^\pm = \frac{1}{2\nu}(a \pm p) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_1^\pm = \frac{1}{2\nu}(a \pm p) \pm q \frac{\partial}{\partial t} \pm bq \frac{\partial}{\partial y}}. \quad (3.9)$$

Martin [Mar05] a montré que les problèmes associés sont bien posés et que les algorithmes avec ces conditions aux interfaces convergent vers la solution générale du problème (1), à condition que $p > 0$ à l'ordre 0 et que $q > 0$ et $p - a^2 q/2 > 0$ à l'ordre 1.

On note les opérateurs différentiels des conditions approchées à l'ordre 0 et 1 sur l'interface Γ

$$\mathcal{B}_0^\pm = \frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{S}_0^\pm \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_1^\pm = \frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{S}_1^\pm, \quad (3.10)$$

où les opérateurs \mathcal{S}_0^\pm et \mathcal{S}_1^\pm sont définis en (3.9).

Remarques :

- Ces formulations conservent la propriété $\sigma^+ + \sigma^- = a/\nu$ aux symboles de Fourier des opérateurs approchés σ_0^\pm et σ_1^\pm .
- Une approximation de Taylor de $\sqrt{\delta}$ aux basses fréquences, *i.e.* lorsque $\omega \simeq 0$ et $k \simeq 0$, donne $p = |a|$ à l'ordre 0 et $(p = |a|, q = 1/|a|)$ à l'ordre 1.

¹ Autre approximation à étudier à l'ordre 1 : $\sigma_1^\pm = \frac{1}{2\nu}(a \pm p) \pm [i(\omega + bk) + \nu k^2]q$,

associée à l'opérateur différentiel $\mathcal{S}_1^\pm = \frac{1}{2\nu}(a \pm p) \pm q \frac{\partial}{\partial t} \pm bq \frac{\partial}{\partial y} \mp q\nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

3.2.4 Optimisation du taux de convergence pour les conditions approchées

Les fréquences considérées en océanographie ne sont pas forcément petites. On ne peut donc pas faire d'hypothèses *a priori* sur la valeur de (k, ω) . Il faut donc que le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz (avec la condition approchée (3.10) à l'ordre 0 ou 1) soit minimisé en fonction de p ou (p, q) quel que soit (k, ω) . Autrement dit, pour déterminer les valeurs optimales de p et (p, q) , on est amené à résoudre les problèmes d'optimisation

$$\min_{p>0} \max_{(k,\omega) \in D} \rho_0$$

à l'ordre 0 et

$$\min_{\substack{q>0, \\ p - \frac{a^2}{2}q > 0}} \max_{(k,\omega) \in D} \rho_1$$

à l'ordre 1, avec ρ_0 et ρ_1 les taux de convergence de l'algorithme de Schwarz avec les conditions approchées à l'ordre 0 et 1 respectivement.

Le domaine spectral D dans lequel varient les fréquences (k, ω) est restreint, en pratique, du fait que la résolution numérique fait intervenir une discrétisation sur des pas d'espace et de temps non nuls et non négligeables. Notons L_y la taille du domaine (dans la direction y) et Δy celle de la maille (*i.e.* le pas d'espace dans la direction y) : $|k| \in \left[\frac{\pi}{L_y}, \frac{\pi}{\Delta y} \right]$. Notons T la durée totale de la simulation et Δt le pas de temps : $|\omega| \in \left[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\Delta t} \right]$. Autrement dit, le domaine spectral est [Fle91]

$$D = \left(\left[-\frac{\pi}{\Delta y}, -\frac{\pi}{L_y} \right] \cup \left[\frac{\pi}{L_y}, \frac{\pi}{\Delta y} \right] \right) \times \left(\left[-\frac{\pi}{\Delta t}, -\frac{\pi}{T} \right] \cup \left[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\Delta t} \right] \right).$$

On va maintenant expliciter l'expression des taux de convergence ρ_j , $\forall j = \{0, 1\}$, des algorithmes avec les conditions approchées à l'ordre j . Comme les solutions de l'algorithme sont données par les équations (3.5), le taux de convergence, défini par l'équation (3.6), vaut $\rho_j = |\alpha^{n+1}|/|\alpha^{n-1}|$. En introduisant les expressions (3.5) dans les conditions $\widehat{\mathcal{B}}_j^- \widehat{\mathbf{e}}_+^{n+1} = \widehat{\mathcal{B}}_j^- \widehat{\mathbf{e}}_+^n$ et $\widehat{\mathcal{B}}_j^+ \widehat{\mathbf{e}}_+^{n+1} = \widehat{\mathcal{B}}_j^+ \widehat{\mathbf{e}}_+^n$ sur l'interface $\Gamma = \{x = 0\}$, on obtient $\alpha^{n+1}(\sigma^+ - \sigma_j^-) = \beta^n(\sigma^- - \sigma_j^-)$ et $\beta^{n+1}(\sigma^- - \sigma_j^+) = \alpha^n(\sigma^+ - \sigma_j^+)$. On en déduit que

$$\rho_j = \left| \frac{(\sigma^- - \sigma_j^-)(\sigma^+ - \sigma_j^+)}{(\sigma^+ - \sigma_j^-)(\sigma^- - \sigma_j^+)} \right|, \quad \forall j = \{0, 1\}.$$

Comme $(\sigma^- + \sigma^+) = (\sigma_j^- + \sigma_j^+)$, $\forall j = \{0, 1\}$, on obtient

$$\rho_j = \left| \frac{\sigma^+ - \sigma_j^+}{\sigma^- - \sigma_j^+} \right|^2, \quad \forall j = \{0, 1\}.$$

Autrement dit, le taux de convergence est

$$\rho_0 = \left| \frac{\sqrt{\delta} - p}{\sqrt{\delta} + p} \right|^2 \quad \text{à l'ordre 0} \quad \text{et} \quad \rho_1 = \left| \frac{\sqrt{\delta} - p - i 2 \nu q (\omega + b k)}{\sqrt{\delta} + p + i 2 \nu q (\omega + b k)} \right|^2 \quad \text{à l'ordre 1}.$$

3.3 Espace \mathbb{R}^3

Dans $\Omega = \mathbb{R}^3$ ($m = 3$), l'opérateur d'advection-diffusion harmonique s'écrit

$$\mathcal{L} = \partial_t + a \partial_x + b_y \partial_y + b_z \partial_z - \nu_h (\partial_{xx} + \partial_{yy}) - \nu_z \partial_{zz}. \quad (3.11)$$

Rappelons que la transformée de Fourier par rapport aux variables y, z et t d'une fonction w dans $L^2(\Omega^\pm \times \mathbb{R})$ est définie comme

$$\widehat{w}(x, k, l, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(x, y, z, t) e^{-i(ky+lz+\omega t)} dy dz dt.$$

La transformée de Fourier de l'algorithme vérifié par les erreurs donne l'algorithme (3.1) avec $\widehat{\mathcal{L}} = -\nu_h \partial_{xx} + a \partial_x + [i(\omega + b_y k + b_z l) + \nu_h k^2 + \nu_z l^2]$.

Le discriminant du polynôme caractéristique est toujours donné par l'équation (3.2) à condition de prendre pour notations

$$R = a^2 + 4\nu_h^2 k^2 + 4\nu_h \nu_z l^2 \quad \text{et} \quad I = 4\nu_h (\omega + b_y k + b_z l).$$

et ses racines sont

$$\sigma^- = \frac{1}{2\nu_h} (a - \sqrt{\delta}) \quad \text{et} \quad \sigma^+ = \frac{1}{2\nu_h} (a + \sqrt{\delta}), \quad (3.12)$$

où $\sqrt{\delta}$ est défini en (3.4).

Comme on a encore $\mathcal{R}e(\sigma^-) < 0$ et $\mathcal{R}e(\sigma^+) > 0$, les erreurs solutions de (3.1) qui restent finies sont

$$\begin{cases} \widehat{\mathfrak{e}}_-^n(x, k, l, \omega) = \alpha^n(k, l, \omega) e^{\sigma^+ x} & \forall (x, k, l, \omega) \in (-\infty, 0) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \\ \widehat{\mathfrak{e}}_+^n(x, k, l, \omega) = \beta^n(k, l, \omega) e^{\sigma^- x} & \forall (x, k, l, \omega) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Elles vérifient toujours les propriétés (3.7), si bien que les opérateurs \mathcal{B}^\pm des conditions à l'interface Γ donnés par (3.8) permettent une convergence optimale de l'algorithme de Schwarz.

Afin d'approcher ces opérateurs par des opérateurs différentiels locaux en temps et en espace, on propose les approximations suivantes : à l'ordre 0 $(\sqrt{\delta})_0 = p$ et à l'ordre 1 $(\sqrt{\delta})_1 = p + i 2\nu_h (\omega + b_y k + b_z l) q$, de sorte que²

$$\sigma_0^\pm = \frac{1}{2\nu_h} (a \pm p) \quad \text{et} \quad \sigma_1^\pm = \frac{1}{2\nu_h} (a \pm p) \pm i (\omega + b_y k + b_z l) q,$$

et les opérateurs différentiels correspondants, d'ordre 0 et 1, sont

$$\mathcal{S}_0^\pm = \frac{1}{2\nu_h} (a \pm p) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_1^\pm = \frac{1}{2\nu_h} (a \pm p) \pm q \frac{\partial}{\partial t} \pm b_y q \frac{\partial}{\partial y} \pm b_z q \frac{\partial}{\partial z}.$$

On peut montrer (annexe B.1) que les problèmes associés sont bien posés et que les algorithmes avec ces conditions aux interfaces convergent vers la solution générale du problème (1), **à condition que $p > 0$ à l'ordre 0 et que $q > 0$ et $p - a^2 q/2 > 0$ à l'ordre 1.**

²Autre approximation à étudier à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \sigma_1^\pm &= \frac{1}{2\nu} (a \pm p) \pm [i(\omega + b_y k + b_z l) + \nu_h k^2 + \nu_z l^2] q, \text{ associée à l'opérateur différentiel} \\ \mathcal{S}_1^\pm &= \frac{1}{2\nu} (a \pm p) \pm q \frac{\partial}{\partial t} \pm b_y q \frac{\partial}{\partial y} \pm b_z q \frac{\partial}{\partial z} \mp q \nu_h \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mp q \nu_z \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Les problèmes d'optimisation qu'il faut résoudre pour déterminer p et (p, q) demeurent inchangés par rapport à la dimension 2 :

$$\min_{p>0} \max_{(k,l,\omega) \in D} \rho_0$$

à l'ordre 0 et

$$\min_{\substack{q>0, \\ p - \frac{a^2}{2}q > 0}} \max_{(k,l,\omega) \in D} \rho_1$$

à l'ordre 1, avec ρ_0 et ρ_1 les taux de convergence de l'algorithme de Schwarz avec les conditions approchées à l'ordre 0 et 1 respectivement :

$$\rho_0 = \left| \frac{\sqrt{\delta} - p}{\sqrt{\delta} + p} \right|^2, \quad \rho_1 = \left| \frac{\sqrt{\delta} - p - i 2 \nu_h q (\omega + b_y k + b_z l)}{\sqrt{\delta} + p + i 2 \nu_h q (\omega + b_y k + b_z l)} \right|^2.$$

Notons L_z la taille du domaine dans la direction z et Δz le pas d'espace dans la direction z : $|l| \in \left[\frac{\pi}{L_z}, \frac{\pi}{\Delta z} \right]$. Le domaine spectral D dans lequel varient les fréquences (k, l, ω) est

$$D = \left(\left[-\frac{\pi}{\Delta y}, -\frac{\pi}{L_y} \right] \cup \left[\frac{\pi}{L_y}, \frac{\pi}{\Delta y} \right] \right) \times \left(\left[-\frac{\pi}{\Delta z}, -\frac{\pi}{L_z} \right] \cup \left[\frac{\pi}{L_z}, \frac{\pi}{\Delta z} \right] \right) \times \left(\left[-\frac{\pi}{\Delta t}, -\frac{\pi}{T} \right] \cup \left[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\Delta t} \right] \right).$$

Remarque : Pourquoi faut-il traiter le cas 3D (et non se limiter au cas 2D) en océanographie ?

La réponse à cette question est apportée en étudiant l'importance relative des termes verticaux par rapport aux termes horizontaux dans le calcul des racines σ de l'EDO qui résulte de la transformée de Fourier de l'équation d'advection-diffusion harmonique. Ces racines dépendent du discriminant (3.2) de l'EDO en question. Ce discriminant δ dépend des coefficients de Fourier (k, l, ω) , des coefficients de viscosité (ν_h, ν_z) et de la vitesse linéarisée (a, b_y, b_z) .

1. Les coefficients de Fourier (k, l, ω) varient dans le domaine spectral D .
En océanographie, les grandeurs caractéristiques du problème sont les suivantes : $L_y \simeq 10^6$, $L_z \simeq 5 \cdot 10^3 - 10^4$, $dy \simeq 10^4$ et $dz \simeq 10 - 10^2$. On en déduit le domaine spectral D . Par conséquent, on a $\mathbf{k} \simeq \mathbf{10}^{-2} \mathbf{1}$.
2. Les grandeurs caractéristiques des coefficients de viscosité (ν_h, ν_z) sont les suivantes : $\nu_h \simeq 10^2 - 7 \cdot 10^2 \text{ m}^2/\text{s}$, $\nu_z \simeq 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. Par conséquent, on a $\nu_h \simeq \mathbf{10}^6 \nu_z$.
3. L'ordre de grandeur relatif des vitesses est le suivant : $\mathbf{b}_z \simeq \mathbf{10}^{-2} \mathbf{b}_y$.

On en déduit l'importance relative des termes verticaux par rapport aux termes horizontaux dans le calcul du discriminant, constitué d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

- ★ Dans la partie réelle $R = a^2 + 4 \nu_h (\nu_h k^2 + \nu_z l^2)$, on a $\nu_z l^2 \simeq 10^{-2} \nu_h k^2$, donc le terme vertical est négligeable.
- ★ Dans la partie imaginaire $I = 4 \nu_h (\omega + b_y k + b_z l)$, on a $b_z l \simeq b_y k$, donc **le terme vertical n'est pas négligeable**.

Chapitre 4

Équations d'advection-diffusion biharmonique

4.1 Introduction

L'équation d'advection-diffusion biharmonique est parfois utilisée pour caractériser l'évolution des traceurs (température, salinité) en océanographie, comme par exemple dans le logiciel OPA/NEMO [MDIL98].

Considérons le couplage de deux modèles qui couvrent deux domaines contigus (avec ou sans recouvrement), notés Ω_1 et Ω_2 , de frontières respectives $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$. On cherche quelles conditions de transmission appliquer aux interfaces $(\Gamma_i)_{i=1,2}$ entre les deux domaines pour que l'algorithme converge rapidement. Autrement dit, on cherche à déterminer les conditions $(\mathcal{B}_i)_{i=1,2}$ qui interviennent dans l'algorithme itératif de Schwarz suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}u_1^{k+1} = f & \text{dans } \Omega_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u_1^{k+1}|_{t=0} = u^0 & \text{dans } \Omega_1, \\ \mathcal{B}_1 u_1^{k+1} = g_1^k & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ g_2^{k+1} = \mathcal{B}_2 u_1^{k+1} & \text{sur } \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}u_2^{k+1} = f & \text{dans } \Omega_2 \times \mathbb{R}^+, \\ u_2^{k+1}|_{t=0} = u^0 & \text{dans } \Omega_2, \\ \mathcal{B}_2 u_2^{k+1} = g_2^k & \text{sur } \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+, \\ g_1^{k+1} = \mathcal{B}_1 u_2^{k+1} & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

qu'on peut présenter de façon plus succincte sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}u_1^{k+1} = f & \text{dans } \Omega_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u_1^{k+1}|_{t=0} = u^0 & \text{dans } \Omega_1, \\ \mathcal{B}_1 u_1^{k+1} = \mathcal{B}_1 u_2^k & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}u_2^{k+1} = f & \text{dans } \Omega_2 \times \mathbb{R}^+, \\ u_2^{k+1}|_{t=0} = u^0 & \text{dans } \Omega_2, \\ \mathcal{B}_2 u_2^{k+1} = \mathcal{B}_2 u_1^k & \text{sur } \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

L'opérateur \mathcal{L} d'advection-diffusion biharmonique est défini par

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{c} \cdot \vec{\nabla} + \nu \Delta^2, \quad (4.3)$$

où $\vec{c} \in \mathbb{R}^d$ est un champ de vitesse constant, avec d la dimension de l'espace auquel appartiennent Ω_1 et Ω_2 (1, 2 ou 3), et ν une constante positive.

4.2 Formulation variationnelle, existence et unicité de la solution

Supposons que u soit une solution du problème

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} = u^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec des conditions aux limites (à préciser) pour tout $t > 0$, et les fonctions $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$ et $u^0 \in L^2(\Omega)$ sont données.

On cherche la formulation variationnelle du problème d'advection-diffusion biharmonique en l'absence de conditions aux limites prédéterminées. On multiplie l'équation par $v \in H^2(\Omega)$ et on intègre sur le domaine $\Omega \times (0, T)$, puis on utilise les formules de Green. On cherche alors

$$u \in L^2(0, T; V) \text{ solution de } \begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = b(v) & \forall v \in V, \\ u(0) = u^0, \end{cases} \quad (4.4)$$

avec

$$\begin{aligned} V &= \{v \in H^2(\Omega); \text{ C.L. sur } \partial\Omega \text{ à définir}\}, \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} [(\vec{c} \cdot \vec{\nabla} u) v + \nu \Delta u \Delta v] dx + a_{\partial\Omega}(u, v), \\ b(v) &= \int_{\Omega} f(t) v dx + b_{\partial\Omega}(v), \\ a_{\partial\Omega}(u, v) - b_{\partial\Omega}(v) &= \nu \int_{\partial\Omega} (\partial_{\vec{n}} \Delta u v - \Delta u \partial_{\vec{n}} v) ds, \end{aligned}$$

où \vec{n} est le vecteur normal unitaire sur $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur. La dérivée directionnelle $\partial_{\vec{n}}$ est définie par $\partial_{\vec{n}} v = \vec{\nabla} v \cdot \vec{n}$.

La répartition du terme de bord dans $a(\cdot, \cdot)$ ou $b(\cdot)$ dépend des conditions aux limites. Illustrons cela avec deux exemples, dans lesquels le terme bilinéaire de bord, $a_{\partial\Omega}$, est nul, de sorte que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [(\vec{c} \cdot \vec{\nabla} u) v + \nu \Delta u \Delta v] dx. \quad (4.5)$$

- Exemple 1 :

$$\begin{aligned} V &= H_0^2(\Omega), \\ b(v) &= \int_{\Omega} f(t) v dx. \end{aligned}$$

- Exemple 2 :

$$\begin{aligned} V &= H^2(\Omega), \\ b(v) &= \int_{\Omega} f(t) v dx - \nu \int_{\partial\Omega} (h_3 v - h_2 \partial_{\vec{n}} v) ds \end{aligned}$$

et il faudra vérifier en faisant l'interprétation du problème variationnel que la solution faible $u(t)$ vérifie les conditions $\partial_{\vec{n}} \Delta u|_{\partial\Omega} = h_3 \in L^2(\partial\Omega)$ et $\Delta u|_{\partial\Omega} = h_2 \in L^2(\partial\Omega)$.

Afin d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution, il faut vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, à savoir

- l'espace V est un espace de Hilbert,
- la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive,
- la forme linéaire $b(\cdot)$ est continue.

Pour déterminer les conditions de coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$, on la décompose en une forme symétrique

$$s(u, v) = \int_{\Omega} \nu \Delta u \Delta v \, dx + \tilde{s}_{\partial\Omega}(u, v) \quad (4.6a)$$

et une forme anti-symétrique

$$\mathfrak{k}(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[(\vec{c} \cdot \vec{\nabla} u) v - (\vec{c} \cdot \vec{\nabla} v) u \right] \, dx + \tilde{\mathfrak{k}}_{\partial\Omega}(u, v), \quad (4.6b)$$

de sorte que

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = s(u, v) + \mathfrak{k}(u, v). \quad (4.6c)$$

En notant

$$\tilde{a}_{\partial\Omega}(u, v) = \tilde{s}_{\partial\Omega}(u, v) + \tilde{\mathfrak{k}}_{\partial\Omega}(u, v), \quad (4.6d)$$

on a alors

$$b(v) = \int_{\Omega} f(t) v \, dx + \tilde{b}_{\partial\Omega}(v), \quad (4.7)$$

$$\tilde{a}_{\partial\Omega}(u, v) - \tilde{b}_{\partial\Omega}(v) = \int_{\partial\Omega} \left[\left(\nu \partial_{\vec{n}} \Delta u + \frac{1}{2} \vec{c} \cdot \vec{n} u \right) v - \nu \Delta u \partial_{\vec{n}} v \right] \, ds. \quad (4.8)$$

On peut remarquer que

$$\mathfrak{k}(u, u) - \tilde{\mathfrak{k}}_{\partial\Omega}(u, u) = 0$$

et que

$$s(u, u) - \tilde{s}_{\partial\Omega}(u, u) = \nu |u|_{2, \Omega},$$

où $|\cdot|_{2, \Omega}$ est la semi-norme dans $H^2(\Omega)$. Comme la constante ν est positive, on en déduit que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot) - \tilde{a}_{\partial\Omega}(\cdot, \cdot)$ est "coercive" par rapport à la semi-norme $H^2(\Omega)$.

On peut alors montrer la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ par rapport à la norme $H^2(\Omega)$, sous certaines conditions sur les coefficients de $\tilde{a}_{\partial\Omega}(\cdot, \cdot)$, de deux manières différentes :

- Méthode I. Soit on admet que l'inégalité de Friedrichs exprimant l'équivalence entre la norme et la semi-norme H^1 peut être étendue à H^2 , de sorte que $a(\cdot, \cdot) - \tilde{a}_{\partial\Omega}(\cdot, \cdot)$ est coercive par rapport à la norme $H^2(\Omega)$. Il ne reste plus qu'à préciser les conditions sous lesquelles $\tilde{a}_{\partial\Omega}(u, u)$ est positive, *i.e.* sous lesquelles

$$\tilde{a}_{\partial\Omega}(u, u) \geq 0. \quad (4.9)$$

- Méthode II. Soit on détermine les conditions sous lesquelles $\tilde{a}_{\partial\Omega}(\cdot, \cdot)$ est "coercive" par rapport à la norme $H^1(\partial\Omega)$, *i.e.* sous lesquelles

$$\tilde{a}_{\partial\Omega}(u, u) \geq C \|u\|_{H^1(\partial\Omega)}. \quad (4.10)$$

La coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ découle alors de la propriété $|\cdot|_{2, \Omega} + \|\cdot\|_{H^1(\partial\Omega)} \geq \|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$. Celle-ci peut se démontrer par l'absurde¹ : Supposons qu'il existe une

¹démonstration similaire à celle du théorème existant dans $H^1(\Omega)$

suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^2(\Omega)$, de norme unitaire, telle que $|u_n|_{2,\Omega} + \|u_n\|_{H^1(\partial\Omega)} \leq \frac{1}{n}$. Donc $u_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\partial\Omega)$, $\vec{\nabla} u_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et $\Delta u_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$. Supposons que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H^2(\Omega)$. Alors on a $\Delta u = 0$, $\vec{\nabla} u|_{\partial\Omega} = 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$. On en déduit que $\|u\|_{H^2(\Omega)} = 0$. Or on a supposé initialement que $\|u_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$. Et on a $\|u_n\|_{H^2(\Omega)} \rightarrow \|u\|_{H^2(\Omega)}$. D'où la contradiction.

Pour préciser les conditions sous lesquelles la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ peut être coercive, on étudie les termes de bord $\tilde{a}_{\partial\Omega}(\cdot, \cdot)$.

Examinons les cas où les conditions aux limites sur u et l'espace V sont définis de sorte que le terme bilinéaire de bord, $\tilde{a}_{\partial\Omega}$, est nul, si bien que la forme bilinéaire est définie par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[(\vec{c} \cdot \vec{\nabla} u) v - (\vec{c} \cdot \vec{\nabla} v) u \right] + \nu \Delta u \Delta v \right\} dx \quad (4.11)$$

et est coercive. Cela correspond aux conditions aux limites suivantes :

$$v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall v \in V \quad (4.12a)$$

ou

$$\left(\nu \partial_{\vec{n}} \Delta u + \frac{1}{2} \vec{c} \cdot \vec{n} u \right) |_{\partial\Omega} = h_3 \in L^2(\partial\Omega) \quad (4.12b)$$

et

$$\partial_{\vec{n}} v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall v \in V \quad (4.13a)$$

ou bien

$$\Delta u|_{\partial\Omega} = h_2 \in L^2(\partial\Omega). \quad (4.13b)$$

Ces conditions aux limites² donnent alternativement les quatre formulations suivantes :

1. Cas (4.12a)–(4.13a) (conditions de Dirichlet–Neumann nulles) :

$$V = H_0^2(\Omega), \quad (4.14)$$

$$b(v) = \int_{\Omega} f(t) v dx, \quad (4.15)$$

2. Cas (4.12a)–(4.13b) :

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ b(v) &= \int_{\Omega} f(t) v dx + \nu \int_{\partial\Omega} h_2 \partial_{\vec{n}} v ds \end{aligned}$$

et il faudra vérifier en faisant l'interprétation du problème variationnel que la solution faible $u(t)$ vérifie la condition (4.13b),

3. Cas (4.12b)–(4.13a) :

$$\begin{aligned} V &= \{v \in H^2(\Omega); \partial_{\vec{n}} v|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ b(v) &= \int_{\Omega} f(t) v dx - \int_{\partial\Omega} h_3 v ds \end{aligned}$$

et il faudra vérifier que la solution faible vérifie la condition (4.12b),

²qui pourraient aussi être "mixées" en décomposant le bord $\partial\Omega$

4. Cas (4.12b)–(4.13b) :

$$\begin{aligned} V &= H^2(\Omega), \\ b(v) &= \int_{\Omega} f(t) v \, dx - \int_{\partial\Omega} (h_3 v - \nu h_2 \partial_{\bar{n}} v) \, ds \end{aligned}$$

et il faudra vérifier en faisant l'interprétation du problème variationnel que la solution faible $u(t)$ vérifie les conditions (4.12b) et (4.13b).

Revenons au cas général où $\tilde{a}_{\partial\Omega}(\cdot, \cdot) \neq 0$ et $V = H^2(\Omega)$. Considérons les termes de bord (4.8) de la formulation variationnelle page 55. On constate qu'une façon peu contraignante de borner³ le terme de bord de la forme bilinéaire selon l'inégalité (4.9) ou (4.10) est d'exprimer les termes en $\partial_{\bar{n}}\Delta u$ et en Δu comme des combinaisons linéaires de u et $\partial_{\bar{n}}u$ sur $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} \partial_{\bar{n}}\Delta u &= \alpha_1 \partial_{\bar{n}}u + \alpha_2 u + g_3 \\ \Delta u &= \beta_1 \partial_{\bar{n}}u + \beta_2 u + g_2 \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (4.16)$$

Ces conditions aux limites impliquent que

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\partial\Omega}(u, v) - \tilde{b}_{\partial\Omega}(v) &= \int_{\partial\Omega} \left[\left(\nu \alpha_2 + \frac{1}{2} \vec{c} \cdot \vec{n} \right) u v + \nu (\alpha_1 \partial_{\bar{n}}u v - \beta_2 u \partial_{\bar{n}}v) - \nu \beta_1 \partial_{\bar{n}}u \partial_{\bar{n}}v \right. \\ &\quad \left. + \nu (g_3 v - g_2 \partial_{\bar{n}}v) \right] ds, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\tilde{a}_{\partial\Omega}(u, v) = \int_{\partial\Omega} \left[\left(\nu \alpha_2 + \frac{1}{2} \vec{c} \cdot \vec{n} \right) u v + \nu (\alpha_1 \partial_{\bar{n}}u v - \beta_2 u \partial_{\bar{n}}v) - \nu \beta_1 \partial_{\bar{n}}u \partial_{\bar{n}}v \right] ds$$

et

$$\tilde{b}_{\partial\Omega}(v) = \int_{\partial\Omega} \nu (g_2 \partial_{\bar{n}}v - g_3 v) \, ds.$$

On réexprime le terme de bord de la forme bilinéaire sous la forme

$$\tilde{a}_{\partial\Omega}(u, u) = \int_{\partial\Omega} \tilde{a}_1 u^2 + \tilde{a}_2 u \partial_{\bar{n}}u + \tilde{a}_3 (\partial_{\bar{n}}u)^2 \, ds,$$

en notant

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \nu \alpha_2 + \frac{1}{2} \vec{c} \cdot \vec{n}, \\ \tilde{a}_2 &= \nu (\alpha_1 - \beta_2), \\ \tilde{a}_3 &= -\nu \beta_1. \end{aligned}$$

Ces coefficients doivent appartenir à un domaine particulier pour que la forme bilinéaire puisse être coercive. Ce domaine dépend de la méthode envisagée page 55 pour démontrer la coercivité.

– Méthode I. Il faut déterminer pour quels coefficients $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ l'équation (4.9) est vérifiée. Il apparaît que $\tilde{a}_{\partial\Omega}(\cdot, \cdot)$ est positive à condition que

$$\tilde{a}_1 \geq 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{a}_3 \geq 0$$

³sous certaines conditions supplémentaires qui seront précisées plus loin (inégalités (4.17) ou (4.18))

et que

$$\tilde{a}_2^2 - 4\tilde{a}_1\tilde{a}_3 \leq 0.$$

Les coefficients α_1 , α_2 , β_1 et β_2 doivent alors vérifier l'ensemble des conditions suivantes :

$$\beta_1 \leq 0, \quad (4.17a)$$

$$\alpha_2 \geq -\frac{1}{2\nu} \vec{c} \cdot \vec{n}, \quad (4.17b)$$

$$|\alpha_1 - \beta_2| \leq \sqrt{-4\beta_1 \left(\alpha_2 + \frac{1}{2\nu} \vec{c} \cdot \vec{n} \right)}. \quad (4.17c)$$

– Méthode II. Il faut déterminer pour quels coefficients \tilde{a}_1 , \tilde{a}_2 , \tilde{a}_3 l'équation (4.10) est vérifiée.

$$\text{On a } \left| \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right| \leq \left(\int_{\partial\Omega} |u|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|^2 ds \right)^{1/2}.$$

En outre, on a $AB \leq \frac{1}{2\epsilon} A^2 + \frac{\epsilon}{2} B^2$, $\forall \epsilon > 0$, $A, B \geq 0$.

$$\text{Donc } -\frac{1}{2\epsilon} \int_{\partial\Omega} |u|^2 ds - \frac{\epsilon}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|^2 ds \leq \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \leq \frac{1}{2\epsilon} \int_{\partial\Omega} |u|^2 ds + \frac{\epsilon}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|^2 ds.$$

Par conséquent,

$$a_{\partial\Omega}(u, u) \geq \int_{\partial\Omega} \left(\tilde{a}_1 - \frac{\tilde{a}_2}{2\epsilon} \right) |u|^2 ds + \int_{\partial\Omega} \left(\tilde{a}_3 - \frac{\tilde{a}_2 \epsilon}{2} \right) \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|^2 ds.$$

Il faut donc vérifier qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel qu'on puisse avoir

$$\tilde{a}_1 - \frac{\tilde{a}_2}{2\epsilon} \geq 0$$

et

$$\tilde{a}_3 - \frac{\tilde{a}_2 \epsilon}{2} \geq 0.$$

Cette condition s'écrit encore en fonction des coefficients α_1 , α_2 , β_1 et β_2 :

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \frac{\nu(\alpha_1 - \beta_2)}{2(\nu\alpha_2 + \frac{1}{2}\vec{c} \cdot \vec{n})} \leq \epsilon \leq \frac{-2\beta_1}{\alpha_1 - \beta_2}. \quad (4.18)$$

On remarque que la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ dépend du signe de $\vec{c} \cdot \vec{n}$. Par conséquent il faudra décomposer le bord du domaine en une partie $\partial\Omega_{in}$ où $\vec{c} \cdot \vec{n} < 0$, et une partie $\partial\Omega_{out}$ où $\vec{c} \cdot \vec{n} > 0$. On fixera alors des conditions différentes sur les bords $\partial\Omega_{in}$ et $\partial\Omega_{out}$.

4.2.1 Cas d'un seul domaine (sans couplage)

Considérons le **cas des conditions aux limites de Dirichlet–Neumann nulles** (4.12a)–(4.13a), pour un espace V , une forme bilinéaire et une forme linéaire définis respectivement par (4.14), (4.11)⁴ et (4.15). Le problème aux limites sur le domaine Ω est donc le suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} = u^0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ \partial_{\vec{n}}u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \end{array} \right. \quad (4.19)$$

⁴équivalent à (4.5) dans ce cas

où l'opérateur \mathcal{L} est défini par (4.3), et éventuellement $u \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ si $T = \infty$. On suppose que $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$ et $\vec{c} \in L^2(0, T; (L^\infty(\Omega))^d)$.

Comme on est dans le cas où le terme de bord $\tilde{a}_{\partial\Omega}$ est nul, la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est attestée. L'existence et l'unicité de la solution s'ensuivent.

4.2.2 Cas d'une décomposition en deux sous-domaines à coupler

On décompose le domaine Ω considéré section 4.2.1 en **deux sous-domaines** Ω_1 et Ω_2 **sans recouvrement** et on note $\Gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$ la frontière commune à Ω_1 et Ω_2 . On note $(u_i)_{i=1,2}$ les restrictions de la solution u de (4.19) aux domaines respectifs $(\Omega_i)_{i=1,2}$, et $(\vec{n}_i)_{i=1,2}$ les normales sur Γ dirigées vers l'extérieur de $(\Omega_i)_{i=1,2}$. Le problème (4.19) peut alors être reformulé ainsi : trouver $(u_i)_{i=1,2}$ tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_i &= f && \text{dans } \Omega_i \times (0, T), \\ u_i|_{t=0} &= u_i^0 && \text{dans } \Omega_i, \\ u_i &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i \times (0, T), \\ \frac{\partial u_i}{\partial \vec{n}_i} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i \times (0, T), \\ \mathcal{S}_i u_1 &= \mathcal{S}_i u_2 && \text{sur } \Gamma \cap \bar{\Omega}_i \times (0, T), \\ \mathcal{T}_i u_1 &= \mathcal{T}_i u_2 && \text{sur } \Gamma \cap \bar{\Omega}_i \times (0, T), \end{aligned} \tag{4.20a}$$

où \mathcal{S}_i et \mathcal{T}_i sont des champs d'opérateurs différentiels, associés aux conditions de transmission pour u_1 et u_2 sur Γ . Ces conditions d'interface sont déterminées de façon que

1. la solution u appartienne à l'espace des fonctions définies dans tout l'ouvert Ω , ce qui requiert une certaine régularité de $u|_{\Omega_1} \in \Omega_1$ et $u|_{\Omega_2} \in \Omega_2$ et de plus une adéquation convenable sur l'interface Γ ,
2. chacune des restrictions $u|_{\Omega_i}$ soit une solution distributionnelle de l'équation initiale dans Ω_i . Un autre champ de conditions d'interface résulte du fait que u satisfait l'équation au sens des distributions dans tout Ω , en particulier à travers l'interface Γ (et pas seulement de part et d'autre dans chaque sous-domaine).

Ici,

1. $u \in V \subset H^2(\Omega)$.
– En 1-D, $H^2(\Omega) \subset C^1(\Omega)$, donc $u \in C^1(\Omega)$, de sorte qu'on doit avoir

$$\begin{cases} u_1 = u_2 \\ \partial_{\vec{n}_i} u_1 = \partial_{\vec{n}_i} u_2 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma.$$

- En 2-D et 3-D, $H^2(\Omega) \subset C^0(\Omega)$, donc $u \in C^0(\Omega)$, de sorte qu'on doit avoir

$$u_1 = u_2 \quad \text{sur } \Gamma.$$

2. Au sens des distributions, (4.4) s'écrit

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t} \varphi + (\vec{c} \cdot \vec{\nabla} u(t)) \varphi + \nu \Delta u(t) \Delta \varphi - f(t) \varphi \right) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t} + (\vec{c} \cdot \vec{\nabla} u(t)) + \nu \Delta^2 u(t) - f(t) \right) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

donc $\nu \Delta^2 u(t) = (f(t) - (\vec{c} \cdot \vec{\nabla} u(t)) - \partial_t u(t))$.

Or $f(t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, et comme $u(t) \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ et

$\vec{c} \in L^2(0, T; (L^\infty(\Omega))^d)$, donc $\vec{c} \cdot \vec{\nabla} u(t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $\partial_t u(t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Par conséquent, $\Delta^2 u(t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, de sorte que $\mathbf{u}(t) \in L^2(0, T; \mathbf{H}^4(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$.

Or $H^4(\Omega) \subset C^2(\Omega)$ dans \mathbb{R}^d , $d \leq 3$ (et même $H^4(\Omega) \subset C^3(\Omega)$ en 1-D), de sorte qu'on doit avoir

$$\begin{cases} u_1 = u_2, \\ \partial_{\vec{n}_i} u_1 = \partial_{\vec{n}_i} u_2, \\ \Delta u_1 = \Delta u_2, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma.$$

L'opérateur \mathcal{S}_i est donc défini par $\mathcal{S}_i = \left(Id, \frac{\partial}{\partial \vec{n}_i}, \Delta \right)^t$.

Posons

$$\begin{aligned} V_i &= \{v_i \in H^2(\Omega_i); v_i|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} = \partial_{\vec{n}_i} v_i|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} = 0\}, \\ V_i^0 &= H_0^2(\Omega_i) = V_i \cap \{v_i; v_i|_\Gamma = \partial_{\vec{n}_i} v_i|_\Gamma = 0\}, \end{aligned}$$

définissons l'espace des traces sur Γ des fonctions de V

$$\Lambda = \{\eta \in H^{3/2}(\Gamma); \eta = v|_\Gamma \text{ et } \partial_{\vec{n}_i} \eta = \partial_{\vec{n}_i} v|_\Gamma \text{ pour un certain } v \in V\},$$

ou encore, du fait que $\Gamma \cap \partial\Omega = \emptyset$,

$$\Lambda = H^{3/2}(\Gamma),$$

et enfin posons, de manière similaire aux équations (4.6), (4.7) et (4.8),

$$\begin{aligned} a_i(u_i, v_i) &= \int_{\Omega_i} \left\{ \frac{1}{2} [(\vec{c} \cdot \vec{\nabla} u_i) v_i - (\vec{c} \cdot \vec{\nabla} v_i) u_i] + \nu \Delta u_i \Delta v_i \right\} dx + \tilde{a}_{\Gamma_i}(u_i, v_i), \\ b_i(v_i) &= \int_{\Omega_i} f(t) v_i dx + \tilde{b}_{\Gamma_i}(v_i), \\ \tilde{a}_{\Gamma_i}(u_i, v_i) - \tilde{b}_{\Gamma_i}(v_i) &= \int_{\Gamma} \left[\left(\nu \partial_{\vec{n}_i} \Delta u_i + \frac{1}{2} \vec{c} \cdot \vec{n}_i u_i \right) v_i - \nu \Delta u_i \partial_{\vec{n}_i} v_i \right] ds. \end{aligned}$$

Soit \mathcal{R}_i un opérateur d'extension de Λ sur V_i quelconque, *i.e.* un opérateur continu de Λ sur V_i tel que $\mathcal{R}_i \eta|_\Gamma = \eta$. Autrement dit, $\mathcal{R}_i \eta$ représente une extension quelconque de η sur Ω_i . Alors la formulation variationnelle (4.4) peut être reformulée sous la forme : trouver $u_i \in V_i$ tels que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u_i, v_i) + a_i(u_i, v_i) &= b_i(v_i) & \forall v_i \in V_i^0, \\ \mathcal{S}_i u_1 &= \mathcal{S}_i u_2 & \text{sur } \Gamma \cap \bar{\Omega}_i, \\ \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial t}(u_i, \mathcal{R}_i \eta) + a_i(u_i, \mathcal{R}_i \eta) &= \sum_i b_i(\mathcal{R}_i \eta) & \forall \eta \in \Lambda. \end{aligned}$$

La dernière équation est la formulation faible des conditions de transmission (4.20b) sur Γ . Cela revient à annuler la somme sur chaque sous-domaine des termes sur l'interface Γ :

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} \left[\left(\nu \partial_{\vec{n}_i} \Delta u_i + \frac{1}{2} \vec{c} \cdot \vec{n}_i u_i \right) v_i - \nu \Delta u_i \partial_{\vec{n}_i} v_i \right] ds = 0,$$

c'est-à-dire $\mathcal{T}_i = (\nu \partial_{\vec{n}_i} \Delta + \frac{1}{2} \vec{c} \cdot \vec{n}_i, \Delta)^t$. Finalement

$$(\mathcal{S}_i, \mathcal{T}_i) = \left(Id, \frac{\partial}{\partial \vec{n}_i}, \Delta, \nu \frac{\partial \Delta}{\partial \vec{n}_i} + \frac{1}{2} \vec{c} \cdot \vec{n}_i \right)^t.$$

On peut aussi remplacer ces conditions de transmission par des combinaisons linéaires de \mathcal{S}_i et \mathcal{T}_i . Posons

$$\tilde{\mathcal{S}}_i = \begin{pmatrix} \partial_{\vec{n}_i} \\ Id \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{\mathcal{T}}_i = \begin{pmatrix} \partial_{\vec{n}_i} \Delta \\ \Delta \end{pmatrix}.$$

Soit A_i une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}^*)$. On peut montrer que si $(\tilde{\mathcal{T}}_i - A_i \tilde{\mathcal{S}}_i)(u_1 - u_2) = 0$, alors $\tilde{\mathcal{S}}_i(u_1 - u_2) = 0$. Il suffit donc d'utiliser l'unique opérateur

$$\tilde{\mathcal{T}}_i - A_i \tilde{\mathcal{S}}_i,$$

plutôt que les deux opérateurs $\tilde{\mathcal{S}}_i$ et $\tilde{\mathcal{T}}_i$ (ou encore \mathcal{S}_i et \mathcal{T}_i), pour fixer les conditions de transmission. Les deux types (4.20a) et (4.20b) de conditions sont donc remplacés par un seul type de conditions sur Γ . Les opérateurs des conditions à l'interface dans les algorithmes (4.1) et (4.2) de Schwarz sont simplement définis par

$$\mathcal{B}_i = \tilde{\mathcal{T}}_i - A_i \tilde{\mathcal{S}}_i,$$

de sorte que les conditions de transmission de l'algorithme (4.2) s'écrivent

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \partial_{\vec{n}_1} \Delta u_1^{k+1} \\ \Delta u_1^{k+1} \end{pmatrix} - A_1 \begin{pmatrix} \partial_{\vec{n}_1} u_1^{k+1} \\ u_1^{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_{\vec{n}_1} \Delta u_2^k \\ \Delta u_2^k \end{pmatrix} - A_1 \begin{pmatrix} \partial_{\vec{n}_1} u_2^k \\ u_2^k \end{pmatrix} \quad \text{sur } \Gamma \cap \bar{\Omega}_1, \\ \begin{pmatrix} \partial_{\vec{n}_2} \Delta u_2^{k+1} \\ \Delta u_2^{k+1} \end{pmatrix} - A_2 \begin{pmatrix} \partial_{\vec{n}_2} u_2^{k+1} \\ u_2^{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_{\vec{n}_2} \Delta u_1^k \\ \Delta u_1^k \end{pmatrix} - A_2 \begin{pmatrix} \partial_{\vec{n}_2} u_1^k \\ u_1^k \end{pmatrix} \quad \text{sur } \Gamma \cap \bar{\Omega}_2. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi les conditions (4.16), en notant, $\forall i \in \{1, 2\}$,

$$A_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1,i} & \alpha_{2,i} \\ \beta_{1,i} & \beta_{2,i} \end{pmatrix}$$

et

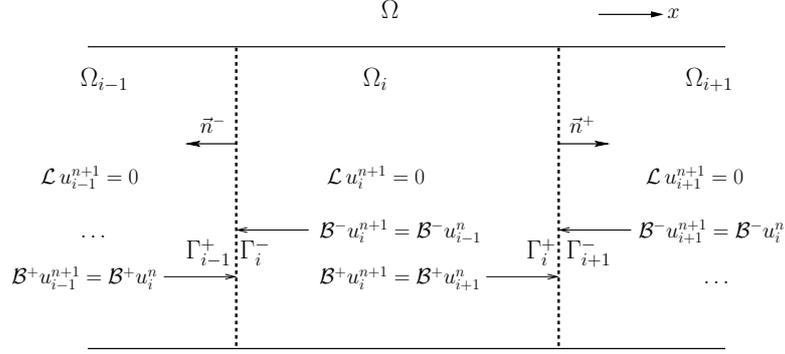
$$\begin{pmatrix} g_{3,i}^{k+1} \\ g_{2,i}^{k+1} \end{pmatrix} = (\tilde{\mathcal{T}}_i - A_i \tilde{\mathcal{S}}_i) u_{3-i}^k.$$

Les coefficients $\alpha_{1,i}$, $\alpha_{2,i}$, $\beta_{1,i}$ et $\beta_{2,i}$ devront alors vérifier les conditions (4.17) ou (4.18) pour que la forme bilinéaire soit coercive, de sorte que la solution existe et soit unique.

4.2.3 Cas général d'une décomposition en plusieurs sous-domaines

On décompose ici le domaine Ω considéré section 4.2.1 en **plusieurs "bandes verticales" sans recouvrement**. On note $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq N_d}$ ces sous-domaines, $\Gamma_i^- = \Omega_{i-1}^- \cap \bar{\Omega}_i$ leur frontière gauche, et $\Gamma_i^+ = \bar{\Omega}_i \cap \Omega_{i+1}^-$ leur frontière droite. On a ainsi $(N_d - 1)$ interfaces $\Gamma_i^\pm = \Gamma_{i+1}^\mp$ entre les sous-domaines, et deux bords externes Γ_1^- et $\Gamma_{N_d}^+ \subset \partial\Omega$. On note encore (\vec{n}^\pm) les normales sur Γ_i^\pm dirigées vers l'extérieur de Ω_i , de sorte que $\partial_{\vec{n}^-} = -\partial_x$ et $\partial_{\vec{n}^+} = \partial_x$.

En notant $(u_i)_{1 \leq i \leq N_d}$ les restrictions de la solution u du problème (4.19) aux domaines respectifs $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq N_d}$, le problème aux limites peut être reformulé ainsi :



trouver la solution u_1 sur le sous-domaine Ω_1 correspondant à l'extrémité Ouest de Ω , telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_1 &= f && \text{dans } \Omega_1 \times (0, T), \\ u_1|_{t=0} &= u_1^0 && \text{dans } \Omega_1, \\ \tilde{\mathcal{S}}^- u_1 &= 0 && \text{sur } \Gamma_1^- \times (0, T), \\ (\tilde{\mathcal{T}}^+ - A^+ \tilde{\mathcal{S}}^+) u_1 &= (\tilde{\mathcal{T}}^+ - A^+ \tilde{\mathcal{S}}^+) u_2 && \text{sur } \Gamma_1^+ \times (0, T), \end{aligned} \quad (4.22a)$$

trouver les solutions $(u_i)_{2 \leq i \leq N_d-1}$ sur les sous-domaines internes $(\Omega_i)_{2 \leq i \leq N_d-1}$, telles que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_i &= f && \text{dans } \Omega_i \times (0, T), \\ u_i|_{t=0} &= u_i^0 && \text{dans } \Omega_i, \\ (\tilde{\mathcal{T}}^- - A^- \tilde{\mathcal{S}}^-) u_i &= (\tilde{\mathcal{T}}^- - A^- \tilde{\mathcal{S}}^-) u_{i-1} && \text{sur } \Gamma_i^- \times (0, T), \\ (\tilde{\mathcal{T}}^+ - A^+ \tilde{\mathcal{S}}^+) u_i &= (\tilde{\mathcal{T}}^+ - A^+ \tilde{\mathcal{S}}^+) u_{i+1} && \text{sur } \Gamma_i^+ \times (0, T), \end{aligned} \quad (4.22b)$$

et trouver la solution u_{N_d} sur le sous-domaine Ω_{N_d} correspondant à l'extrémité Est de Ω , telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_{N_d} &= f && \text{dans } \Omega_{N_d} \times (0, T), \\ u_{N_d}|_{t=0} &= u_{N_d}^0 && \text{dans } \Omega_{N_d}, \\ (\tilde{\mathcal{T}}^- - A^- \tilde{\mathcal{S}}^-) u_{N_d} &= (\tilde{\mathcal{T}}^- - A^- \tilde{\mathcal{S}}^-) u_{N_d-1} && \text{sur } \Gamma_{N_d}^- \times (0, T), \\ \tilde{\mathcal{S}}^+ u_{N_d} &= 0 && \text{sur } \Gamma_{N_d}^+ \times (0, T), \end{aligned} \quad (4.22c)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{S}}^\pm = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}^\pm} \\ Id \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{T}}^\pm = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}^\pm} \Delta \\ \Delta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^\pm = \begin{pmatrix} \alpha_1^\pm & \alpha_2^\pm \\ \beta_1^\pm & \beta_2^\pm \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \quad (4.23)$$

L'existence et l'unicité de la solution $(u_i)_{1 \leq i \leq N_d}$ sur chaque sous-domaine ne sera assurée que si les coefficients de la matrice A^\pm vérifient les conditions (4.17) ou (4.18) de coercivité de la forme bilinéaire.

L'algorithme de Schwarz est alors défini à chaque itération $k+1$ sur chaque sous-domaine interne $(\Omega_i)_{2 \leq i \leq N_d-1}$ par

$$\mathcal{L}u_i^{k+1} = f \quad \text{dans } \Omega_i \times (0, T), \quad (4.24a)$$

$$u_i^{k+1}|_{t=0} = u_i^0 \quad \text{dans } \Omega_i, \quad (4.24b)$$

$$\mathcal{B}_i^- u_i^{k+1} = \mathcal{B}_i^- u_{i-1}^k \quad \text{sur } \Gamma_i^- \times (0, T), \quad (4.24c)$$

$$\mathcal{B}_i^+ u_i^{k+1} = \mathcal{B}_i^+ u_{i+1}^k \quad \text{sur } \Gamma_i^+ \times (0, T), \quad (4.24d)$$

où l'opérateur d'advection-diffusion biharmonique \mathcal{L} est défini par l'équation (4.3) et l'opérateur des conditions de transmission est $\mathcal{B}_i^\pm = \tilde{\mathcal{T}}^\pm - A^\pm \tilde{\mathcal{S}}^\pm$. Autrement dit, les conditions de transmission sont

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{T}}^- - A^- \tilde{\mathcal{S}}^-)u_i^{k+1} &= (\tilde{\mathcal{T}}^- - A^- \tilde{\mathcal{S}}^-)u_{i-1}^k \quad \text{sur } \Gamma_i^- \times (0, T), \\ (\tilde{\mathcal{T}}^+ - A^+ \tilde{\mathcal{S}}^+)u_i^{k+1} &= (\tilde{\mathcal{T}}^+ - A^+ \tilde{\mathcal{S}}^+)u_{i+1}^k \quad \text{sur } \Gamma_i^+ \times (0, T), \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}}^- \Delta u_i^{k+1} \\ \Delta u_i^{k+1} \end{pmatrix} - A^- \begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}}^- u_i^{k+1} \\ u_i^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}}^- \Delta u_{i-1}^k \\ \Delta u_{i-1}^k \end{pmatrix} - A^- \begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}}^- u_{i-1}^k \\ u_{i-1}^k \end{pmatrix} \quad \text{sur } \Gamma_i^- \times (0, T), \quad (4.25a)$$

$$\begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}}^+ \Delta u_i^{k+1} \\ \Delta u_i^{k+1} \end{pmatrix} - A^+ \begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}}^+ u_i^{k+1} \\ u_i^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}}^+ \Delta u_{i+1}^k \\ \Delta u_{i+1}^k \end{pmatrix} - A^+ \begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}}^+ u_{i+1}^k \\ u_{i+1}^k \end{pmatrix} \quad \text{sur } \Gamma_i^+ \times (0, T). \quad (4.25b)$$

À l'itération $(k+1)$ de l'algorithme de Schwarz, la formulation variationnelle du problème d'advection-diffusion biharmonique dans chaque sous-domaine $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq N_d} \subset \Omega$ s'écrit alors

$$\text{trouver } u_i^{k+1} \in L^2(0, T; V_i) \text{ solution de } \begin{cases} \frac{d}{dt}(u_i^{k+1}(t), v_i) + a_i(u_i^{k+1}(t), v_i) = b_i^{k+1}(v_i) & \forall v_i \in V_i, \\ u_i^{k+1}(0) = u_i^0, \end{cases} \quad (4.26)$$

où l'espace fonctionnel, la forme bilinéaire et la forme linéaire sont définies par les relations (cf. page 57)

$$\begin{aligned} V_i &= \{v_i \in H^2(\Omega_i); v_i|_{\partial\Omega \cap \Gamma_i^\pm} = \partial_{\bar{n}^\pm} v_i|_{\partial\Omega \cap \Gamma_i^\pm} = 0\}, \\ a_i(u_i^{k+1}, v_i) &= \int_{\Omega_i} \nu \Delta u_i^{k+1} \Delta v_i \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} [(\vec{c} \cdot \vec{\nabla} u_i^{k+1}) v_i - (\vec{c} \cdot \vec{\nabla} v_i) u_i^{k+1}] \, dx \\ &\quad + \sum_{\pm} \left\{ \int_{\Gamma_i^\pm} \left[\left(\nu \alpha_2^\pm + \frac{1}{2} \vec{c} \cdot \bar{n}^\pm \right) u_i^{k+1} v_i + \nu (\alpha_1^\pm \partial_{\bar{n}^\pm} u_i^{k+1} v_i - \beta_2^\pm u_i^{k+1} \partial_{\bar{n}^\pm} v_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \nu \beta_1^\pm \partial_{\bar{n}^\pm} u_i^{k+1} \partial_{\bar{n}^\pm} v_i \right] \, ds \right\}, \\ b_i^{k+1}(v_i) &= \int_{\Omega_i} f(t) v_i \, dx + \sum_{\pm} \left\{ \int_{\Gamma_i^\pm} \nu (g_{2,i}^{\pm k} \partial_{\bar{n}^\pm} v_i - g_{3,i}^{\pm k} v_i) \, ds \right\}. \end{aligned}$$

Les termes $g_i^\pm = (g_{3,i}^\pm, g_{2,i}^\pm)^t$ correspondent aux conditions de transmission appliquées à la valeur de la solution de l'autre côté de l'interface à l'itération précédente, c'est-à-dire

$$g_i^{\pm k} = \mathcal{B}_i^\pm u_{i\pm 1}^k = (\tilde{\mathcal{T}}^\pm - A^\pm \tilde{\mathcal{S}}^\pm) u_{i\pm 1}^k,$$

ou encore

$$\begin{aligned} g_{3,i}^{\pm k} &= \partial_{\bar{n}^{\pm}} \Delta u_{i\pm 1}^k - \alpha_1^{\pm} \partial_{\bar{n}^{\pm}} u_{i\pm 1}^k - \alpha_2^{\pm} u_{i\pm 1}^k, \\ g_{2,i}^{\pm k} &= \Delta u_{i\pm 1}^k - \beta_1^{\pm} \partial_{\bar{n}^{\pm}} u_{i\pm 1}^k - \beta_2^{\pm} u_{i\pm 1}^k. \end{aligned}$$

Ces relations nous permettent de redéfinir les termes $g_i^{\pm k}$ par récurrence. En effet, en appliquant aux relations

$$\begin{aligned} g_{3,i}^{\pm k} &= -(\partial_{\bar{n}^{\mp}} \Delta - \alpha_1^{\mp} \partial_{\bar{n}^{\mp}} - \alpha_2^{\mp}) u_{i\pm 1}^k - (\alpha_1^{\mp} - \alpha_1^{\pm}) \partial_{\bar{n}^{\mp}} u_{i\pm 1}^k - (\alpha_2^{\mp} + \alpha_2^{\pm}) u_{i\pm 1}^k, \\ g_{2,i}^{\pm k} &= (\Delta - \beta_1^{\mp} \partial_{\bar{n}^{\mp}} - \beta_2^{\mp}) u_{i\pm 1}^k + (\beta_1^{\mp} + \beta_1^{\pm}) \partial_{\bar{n}^{\mp}} u_{i\pm 1}^k + (\beta_2^{\mp} - \beta_2^{\pm}) u_{i\pm 1}^k \end{aligned}$$

les conditions de transmission de part et d'autre des interfaces, on obtient :

$$\begin{aligned} g_{3,i}^{\pm k} &= -(\partial_{\bar{n}^{\mp}} \Delta - \alpha_1^{\mp} \partial_{\bar{n}^{\mp}} - \alpha_2^{\mp}) u_i^{k-1} - (\alpha_1^{\mp} - \alpha_1^{\pm}) \partial_{\bar{n}^{\mp}} u_{i\pm 1}^k - (\alpha_2^{\mp} + \alpha_2^{\pm}) u_{i\pm 1}^k, \\ g_{2,i}^{\pm k} &= (\Delta - \beta_1^{\mp} \partial_{\bar{n}^{\mp}} - \beta_2^{\mp}) u_i^{k-1} + (\beta_1^{\mp} + \beta_1^{\pm}) \partial_{\bar{n}^{\mp}} u_{i\pm 1}^k + (\beta_2^{\mp} - \beta_2^{\pm}) u_{i\pm 1}^k. \end{aligned}$$

Les relations de récurrence s'écrivent donc

$$\begin{aligned} g_{3,i}^{\pm k} &= -g_{3,i\pm 1}^{\mp k-1} - (\alpha_1^{\mp} - \alpha_1^{\pm}) \partial_{\bar{n}^{\mp}} u_{i\pm 1}^k - (\alpha_2^{\mp} + \alpha_2^{\pm}) u_{i\pm 1}^k, \\ g_{2,i}^{\pm k} &= g_{2,i\pm 1}^{\mp k-1} + (\beta_1^{\mp} + \beta_1^{\pm}) \partial_{\bar{n}^{\mp}} u_{i\pm 1}^k + (\beta_2^{\mp} - \beta_2^{\pm}) u_{i\pm 1}^k. \end{aligned}$$

Si les matrices sont égales sur toutes les interfaces, *i.e.* si $A^- = A^+$ (comme dans les cas sans advection, *cf.* 67 et 68), ces relations deviennent

$$\begin{aligned} g_{3,i}^{\pm k} &= -g_{3,i\pm 1}^{\mp k-1} - 2\alpha_2 u_{i\pm 1}^k, \\ g_{2,i}^{\pm k} &= g_{2,i\pm 1}^{\mp k-1} + 2\beta_1 \partial_{\bar{n}^{\mp}} u_{i\pm 1}^k. \end{aligned}$$

4.3 Conditions absorbantes exactes et approchées dans le cas sans advection

La forme des conditions aux interfaces à été déterminée dans la section 4.2. On va maintenant chercher quelles valeurs doivent prendre les coefficients des matrices (A^{\pm}), introduits dans l'équation (4.23), pour que l'algorithme de Schwarz (4.24) converge le plus rapidement possible. Notons $w_i^k = u_i^k - u$ les erreurs à l'itération k par rapport à la solution exacte. La convergence optimale de l'algorithme est atteinte en N_d itérations si

$$\mathcal{B}_i^{\pm} w_{i\pm 1}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_i^{\pm} \quad \forall i \in [2, N_d - 1].$$

En effet, l'algorithme associé aux erreurs w_i^{k+1} ,

$$\mathcal{L}w_i^{k+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \times (0, T), \quad (4.27a)$$

$$w_i^{k+1}|_{t=0} = 0 \quad \text{dans } \Omega_i, \quad (4.27b)$$

$$\mathcal{B}_i^- w_i^{k+1} = \mathcal{B}_i^- w_{i-1}^k \text{ sur } \Gamma_i^- \times (0, T), \quad (4.27c)$$

$$\mathcal{B}_i^+ w_i^{k+1} = \mathcal{B}_i^+ w_{i+1}^k \text{ sur } \Gamma_i^+ \times (0, T), \quad (4.27d)$$

devient alors un problème homogène.

Considérons par exemple l'unique interface $\Gamma_i^+ = \Gamma_{i+1}^-$ entre les sous-domaines Ω_i et Ω_{i+1} . Il faut déterminer pour quels coefficients des matrices A^+ et A^- les relations

$$(\tilde{\mathcal{T}}^+ - A^+ \tilde{\mathcal{S}}^+) w_{i+1}^1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i^+, \quad (4.28)$$

$$(\tilde{\mathcal{T}}^- - A^- \tilde{\mathcal{S}}^-) w_i^1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{i+1}^-, \quad (4.29)$$

sont vérifiées.

On va désormais considérer le problème dans le **cas simplifié**

– en **1-D**,

– **sans advection** ($c = 0$),

de sorte que l'opérateur de réaction-diffusion biharmonique est défini par

$$\mathcal{L} = \partial_t + \nu \partial_{4x}.$$

Si on ajoute un terme de **réaction** à cet opérateur, *i.e.*

$$\mathcal{L} = \partial_t + r Id + \nu \partial_{4x},$$

avec $r \in \mathbb{R}$, les conditions de coercivité de la forme bilinéaire demeurent inchangées à condition que $r \geq 0$. Le problème de réaction-diffusion simplifié vérifié par l'erreur,

$$\partial_t w + r w + \nu \partial_{4x} w = 0,$$

est alors défini à un changement de variable $x = x_0 + u$ près. Le problème autour de n'importe quelle interface peut donc se ramener à celui autour d'une interface $\Gamma = \{x_0\}$. Pour plus de simplicité, on choisira $x_0 = 0$.

4.3.1 Cas simplifié stationnaire avec réaction

Dans le cas stationnaire, le problème de réaction-diffusion vérifié par l'erreur w est

$$r w + \nu \partial_{4x} w = 0.$$

On va chercher la solution sous la forme $w = \kappa e^{\lambda x}$. L'équation caractéristique associée est $r + \nu \lambda^4 = 0$, d'où l'on déduit $\lambda^4 = -\frac{r}{\nu}$. Comme r et $\nu \in \mathbb{R}^+$, les quatre racines sont

$$\lambda = \left(\frac{r}{\nu}\right)^{1/4} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}\right)} \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

On note λ_1, λ_2 les deux racines de partie réelle positive et λ_3, λ_4 celles de partie réelle négative, telles que

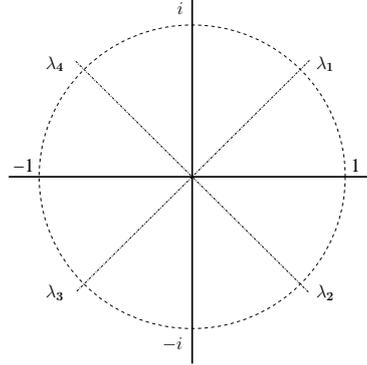
$$\lambda_3 = -\lambda_1, \quad (4.30)$$

$$\lambda_4 = -\lambda_2, \quad (4.31)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \lambda_1, \quad (4.32)$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 = \left(\frac{r}{\nu}\right)^{1/4} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \lambda_2 = \left(\frac{r}{\nu}\right)^{1/4} e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad \lambda_3 = \left(\frac{r}{\nu}\right)^{1/4} e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \quad \lambda_4 = \left(\frac{r}{\nu}\right)^{1/4} e^{i\frac{3\pi}{4}}. \quad (4.33)$$



La solution dans chaque sous-domaine est

$$w = \kappa_1 e^{\lambda_1 x} + \kappa_2 e^{\lambda_2 x} + \kappa_3 e^{\lambda_3 x} + \kappa_4 e^{\lambda_4 x}.$$

Ceci dit, pour que ce résultat soit valable quel que soit la taille du sous-domaine (par exemple \mathbb{R}^- ou \mathbb{R}^+), la solution ne doit pas «exploser» loin de l'interface (quand $x \rightarrow \pm\infty$). Il faut donc conserver uniquement les termes croissant (respectivement décroissant) dans le sous-domaine situé à gauche (resp. à droite) de l'interface.

Considérons l'interface $\Gamma_{i+} = \Gamma_{i+1}^- = \{0\}$. Les solutions de part et d'autre sont

$$\begin{aligned} w_i &= \kappa_1 e^{\lambda_1 x} + \kappa_2 e^{\lambda_2 x} \quad \text{dans } \Omega_i, \\ w_{i+1} &= \kappa_3 e^{\lambda_3 x} + \kappa_4 e^{\lambda_4 x} \quad \text{dans } \Omega_{i+1}. \end{aligned}$$

On en déduit qu'en $x = 0$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}^+ w_{i+1} &= \begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}^+} w_{i+1} \\ w_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_3 \\ \kappa_4 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{T}}^+ w_{i+1} &= \begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}^+} \partial_{2x} w_{i+1} \\ \partial_{2x} w_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \\ \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_3 \\ \kappa_4 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{S}}^- w_i &= \begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}^-} w_i \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{T}}^- w_i &= \begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}^-} \partial_{2x} w_i \\ \partial_{2x} w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1^3 & -\lambda_2^3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les relations (4.28) et (4.29) sont alors vérifiées si

$$\begin{aligned} A^+ &= \begin{pmatrix} \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \\ \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_3^2 + \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_4^2 & -\lambda_3 \lambda_4 (\lambda_3 + \lambda_4) \\ \lambda_3 + \lambda_4 & -\lambda_3 \lambda_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A^- &= \begin{pmatrix} -\lambda_1^3 & -\lambda_2^3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 & \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) \\ -(\lambda_1 + \lambda_2) & -\lambda_1 \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'après les relations (4.30)–(4.32) entre les racines, ces équations s'écrivent encore en fonction d'une seule racine :

$$A^+ = A^- = \begin{pmatrix} -i\lambda_1^2 & -(1+i)\lambda_1^3 \\ -(1-i)\lambda_1 & i\lambda_1^2 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Enfin, en utilisant la valeur (4.33) de la racine λ_1 , on détermine l'expression exacte de la matrice qui fait des conditions de transmission (4.25) les **conditions absorbantes idéales** :

$$A = A^+ = A^- = \begin{pmatrix} \left(\frac{r}{\nu}\right)^{1/2} & \sqrt{2} \left(\frac{r}{\nu}\right)^{3/4} \\ -\sqrt{2} \left(\frac{r}{\nu}\right)^{1/4} & -\left(\frac{r}{\nu}\right)^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Cette matrice permet la coercivité de la forme bilinéaire. En effet ses coefficients vérifient les conditions (4.17). Ils vérifient également les conditions (4.18) pour tout $\epsilon \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{r}{\nu}\right)^{-1/4}, \sqrt{2} \left(\frac{r}{\nu}\right)^{-1/4}\right]$. Il y a donc bien existence et unicité de la solution.

Comme les conditions absorbantes rendent le problème associé aux erreurs homogène, la convergence est atteinte «immédiatement», à savoir en N_d itérations lorsqu'on couple N_d sous-domaines. Le taux de convergence est alors nul.

4.3.2 Cas simplifié transitoire

Dans le cas simplifié transitoire (sans terme de réaction), le problème vérifié par l'erreur w s'écrit

$$\partial_t w + \nu \partial_{4x} w = 0.$$

Soit $\omega \in \mathbb{R}$. La transformée de Fourier en temps donne

$$i\omega \hat{w} + \nu \partial_{4x} \hat{w} = 0,$$

dont l'équation caractéristique est $i\omega + \nu \lambda^4 = 0$, de sorte que $\lambda^4 = -i\frac{\omega}{\nu}$.

Supposons que $\omega < 0$. On a alors

$$\lambda^4 = \frac{|\omega|}{\nu} e^{i(\frac{\pi}{2} + 2l\pi)} \quad \forall l \in \mathbb{N},$$

donc

$$\lambda = \left(\frac{|\omega|}{\nu}\right)^{1/4} e^{i(\frac{\pi}{8} + l\frac{\pi}{2})} \quad \forall l \in \mathbb{N},$$

Supposons que $\omega > 0$. On a alors

$$\lambda^4 = \frac{|\omega|}{\nu} e^{i(-\frac{\pi}{2} + 2l\pi)} \quad \forall l \in \mathbb{N},$$

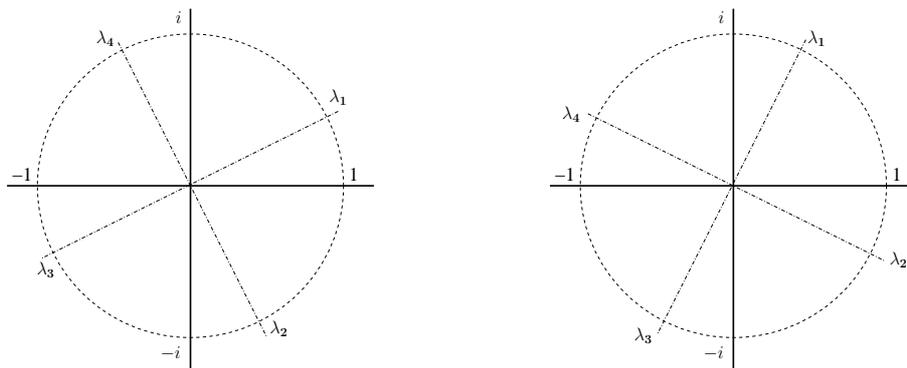
donc

$$\lambda = \left(\frac{|\omega|}{\nu}\right)^{1/4} e^{i(-\frac{\pi}{8} + l\frac{\pi}{2})} \quad \forall l \in \mathbb{N},$$

i.e. on a 4 racines complexes dont deux, notées λ_1, λ_2 , sont de partie réelle positive et deux, notées λ_3, λ_4 , sont de partie réelle négative :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left|\frac{\omega}{\nu}\right|^{1/4} e^{i\frac{\pi}{8}}, & \lambda_2 &= \left|\frac{\omega}{\nu}\right|^{1/4} e^{-i\frac{3\pi}{8}}, \\ \lambda_3 &= \left|\frac{\omega}{\nu}\right|^{1/4} e^{-i\frac{7\pi}{8}}, & \lambda_4 &= \left|\frac{\omega}{\nu}\right|^{1/4} e^{i\frac{5\pi}{8}}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left|\frac{\omega}{\nu}\right|^{1/4} e^{i\frac{3\pi}{8}}, & \lambda_2 &= \left|\frac{\omega}{\nu}\right|^{1/4} e^{-i\frac{\pi}{8}}, \\ \lambda_3 &= \left|\frac{\omega}{\nu}\right|^{1/4} e^{-i\frac{5\pi}{8}}, & \lambda_4 &= \left|\frac{\omega}{\nu}\right|^{1/4} e^{i\frac{7\pi}{8}}. \end{aligned} \quad (4.37)$$



Comme ces racines vérifient encore les propriétés (4.30)–(4.32), les transformées de Fourier des matrices A^+ et A^- , notées \widehat{A}^+ et \widehat{A}^- , s'écrivent toujours sous la forme (4.34). En remplaçant la racine λ_1 par sa valeur (4.36) ou (4.37), on obtient des matrices de la forme

$$\widehat{A}^+ = \widehat{A}^- = \begin{pmatrix} \left| \frac{\omega}{\nu} \right|^{1/2} a & \left| \frac{\omega}{\nu} \right|^{3/4} b \\ \left| \frac{\omega}{\nu} \right|^{1/4} c & \left| \frac{\omega}{\nu} \right|^{1/2} d \end{pmatrix},$$

avec a, b, c, d des coefficients complexes indépendants de ω et ν (et différents selon que $\omega < 0$ et $\omega > 0$). Les **conditions absorbantes idéales** s'obtiennent par une transformée de Fourier inverse. Comme la transformée de Fourier inverse de \widehat{A}^\pm est un opérateur non local en temps, on est amené à chercher des **conditions approchées** (locales). On peut alors envisager diverses approximations de la transformée de Fourier inverse des matrices $\widehat{A}^+ = \widehat{A}^-$ définies par (4.34).

Par exemple, en faisant l'approximation $\text{TF}^{-1}((1-i)\lambda_1) \approx \mu_1$, où μ_1 est un réel à définir, on peut donner une approximation des matrices $A^+ = A^-$ en fonction du seul paramètre μ_1 :

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1^2}{2} & \frac{\mu_1^3}{2} \\ -\mu_1 & -\frac{\mu_1^2}{2} \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que les conditions alternatives de coercivité (4.17) et (4.18) sont vérifiées pour tout $\mu_1 \in \mathbb{R}^+$. Dans un souci d'homogénéisation, on peut encore effectuer le changement de variable $\mu = \nu^{1/4} \mu_1$, de sorte que la matrice approchée s'écrit

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{\mu^2}{2} \left(\frac{1}{\nu} \right)^{1/2} & \frac{\mu^3}{2} \left(\frac{1}{\nu} \right)^{3/4} \\ -\mu \left(\frac{1}{\nu} \right)^{1/4} & -\frac{\mu^2}{2} \left(\frac{1}{\nu} \right)^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Comme ces conditions sont approchées, elles ne permettent pas que l'algorithme de Schwarz associé, défini par (4.24) avec $\mathcal{B}_i^\pm = \widetilde{\mathcal{T}}^\pm - \widetilde{A} \mathcal{S}^\pm$, converge en seulement N_d itérations. Afin d'optimiser le couplage, on va chercher quels coefficients de \widetilde{A} minimisent le taux de convergence de cet algorithme.

Déterminons ce taux de convergence. Les conditions sur l'interface $\Gamma_i^+ = \Gamma_{i+1}^- = \{0\}$ appliquées aux erreurs, définies par les relations (4.27d) dans Ω_i et (4.27c) dans Ω_{i+1} , s'écrivent,

à l'itération $k + 1$,

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_1^+ \begin{pmatrix} \kappa_1^{k+1} \\ \kappa_2^{k+1} \end{pmatrix} &= \widetilde{B}_3^+ \begin{pmatrix} \kappa_3^k \\ \kappa_4^k \end{pmatrix} \quad \text{sur } \Gamma_i^+, \\ \widetilde{B}_3^- \begin{pmatrix} \kappa_3^{k+1} \\ \kappa_4^{k+1} \end{pmatrix} &= \widetilde{B}_1^- \begin{pmatrix} \kappa_1^k \\ \kappa_2^k \end{pmatrix} \quad \text{sur } \Gamma_{i+1}^-, \end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{B}_j^- = \begin{pmatrix} -\lambda_j^3 & -\lambda_{j+1}^3 \\ \lambda_j^2 & \lambda_{j+1}^2 \end{pmatrix} - \widetilde{A} \begin{pmatrix} -\lambda_j & -\lambda_{j+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall j \in \{1, 3\}$$

et

$$\widetilde{B}_j^+ = \begin{pmatrix} \lambda_j^3 & \lambda_{j+1}^3 \\ \lambda_j^2 & \lambda_{j+1}^2 \end{pmatrix} - \widetilde{A} \begin{pmatrix} \lambda_j & \lambda_{j+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall j \in \{1, 3\}.$$

Par conséquent,

$$\begin{pmatrix} \kappa_1^{k+1} \\ \kappa_2^{k+1} \end{pmatrix} = \widetilde{M} \begin{pmatrix} \kappa_1^{k-1} \\ \kappa_2^{k-1} \end{pmatrix},$$

avec

$$\widetilde{M} = \widetilde{B}_1^{+1} \widetilde{B}_3^+ \widetilde{B}_3^{-1} \widetilde{B}_1^-,$$

à condition que les matrices \widetilde{B}_1^+ et \widetilde{B}_3^- soient inversibles, *i.e.* à condition que leur déterminant soit non nul.

Comme les racines sont liées entre elles par les propriétés (4.30)–(4.32), ces relations se simplifient :

$$\widetilde{M} = \left(\widetilde{B}_g^{-1} \widetilde{B}_d \right)^2, \quad (4.39)$$

avec

$$\widetilde{B}_d = \widetilde{B}_1^- = \widetilde{B}_3^+ = \begin{pmatrix} -\lambda_1^3 & -i\lambda_1^3 \\ \lambda_1^2 & -\lambda_1^2 \end{pmatrix} - \widetilde{A} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & i\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{B}_g = \widetilde{B}_1^+ = \widetilde{B}_3^- = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & i\lambda_1^3 \\ \lambda_1^2 & -\lambda_1^2 \end{pmatrix} - \widetilde{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 & -i\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'expression (4.38) de la matrice \widetilde{A} , on constate que la matrice \widetilde{M} , si elle est bien définie, ne dépend pas du terme ν . Comme la matrice \widetilde{M} permet de relier les coefficients $(\kappa_1^{k+1}, \kappa_2^{k+1})$ de la solution à l'itération $(k + 1)$ à ceux de l'itération $(k - 1)$, le **taux de convergence** est défini comme la norme de \widetilde{M} . On peut utiliser par exemple la norme l^2 :

$$\tilde{\rho} = \|\widetilde{M}\|_2 = \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^2, \\ \|v\|_4=1}} \|\widetilde{M}v\|_2 = (\rho(\widetilde{M}^* \widetilde{M}))^{1/2} = \max_i \{\tilde{l}_i\},$$

en notant \tilde{l}_i les valeurs singulières de \widetilde{M} , *i.e.* les racines carrées positives des valeurs propres de $\widetilde{M}^* \widetilde{M} = {}^t \widetilde{M} \widetilde{M}$. Les coefficients de la matrice \widetilde{A} qui donnent les conditions absorbantes approchées optimales sont donc ceux donnés par la résolution du problème d'optimisation

$$\min_{\widetilde{A}_{jk}} \max_{\omega \in D} \tilde{\rho}, \quad (4.40)$$

où D est tel que $|\omega| \in \left[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{dt} \right]$, avec dt le pas de temps et T la durée de la simulation.

4.4 Méthodes numériques en 1-D

4.4.1 Semi-discrétisation en espace par éléments finis

Considérons un des sous-domaines $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq N_d}$, qu'on discrétise en espace en N_x^i nœuds (x_j^i) par un pas d'espace constant ($h = x_{j+1}^i - x_j^i$). On construit une approximation variationnelle interne du problème (4.26) en introduisant un sous-espace discret V_h de $V_i \subset H^2(\Omega_i)$:

à l'itération $k + 1$ de l'algorithme de Schwarz, trouver $u_h^{k+1}(t) : (0, T) \mapsto V_h$ solution de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle u_h^{k+1}(t), v_h \rangle_{L^2(\Omega_i)} + a_i(u_h^{k+1}(t), v_h) = b_i^{k+1}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad 0 < t < T, \\ u_h^{k+1}(0) = u_h^0, \end{cases} \quad (4.41)$$

où $u_h^0 \in V_h$ est une approximation de la donnée initiale u_i^0 .

Comme $H^2(\Omega_i) \subset C^1(\Omega_i)$ en 1-D, on va chercher des fonctions continûment dérivables aux points $(x_j^i)_{j \in [1, N_x^i]}$ du maillage. On a 4 degrés de liberté ($v(x_j^i)$, $v(x_{j+1}^i)$, $\partial_x v(x_j^i)$ et $\partial_x v(x_{j+1}^i)$), ce qui conduit à utiliser des **éléments finis de Hermite \mathbb{P}_3** . L'espace discret est alors

$$V_h = \{v_h \in C^1(\bar{\Omega}_i) : v_h|_{[x_j^i, x_{j+1}^i]} \in \mathbb{P}_3 \quad \forall j \in [1, N_x^i - 1]\}.$$

Les fonctions de base sont obtenues en cherchant les polynômes $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N_x^i}$ et $(\psi_j)_{1 \leq j \leq N_x^i}$, nuls en dehors de $[x_1^i, x_{N_x^i}^i]$ et de $[x_{j-1}^i, x_{j+1}^i]$, tels que

$$\begin{aligned} \phi_j(x_l^i) &= \delta_{jl}, & \partial_x \phi_j(x_l^i) &= 0, \\ \psi_j(x_l^i) &= 0, & \partial_x \psi_j(x_l^i) &= \delta_{jl}. \end{aligned}$$

Ces fonctions de base sont définies par où $\Psi^l(x) = x(1+x)^2$, $\Psi^r(x) = x(1-x)^2$.

$$\begin{aligned} \phi_j(x) &= \Phi\left(\frac{x-x_j^i}{h}\right), \\ \psi_j(x) &= h \Psi\left(\frac{x-x_j^i}{h}\right), \end{aligned}$$

avec

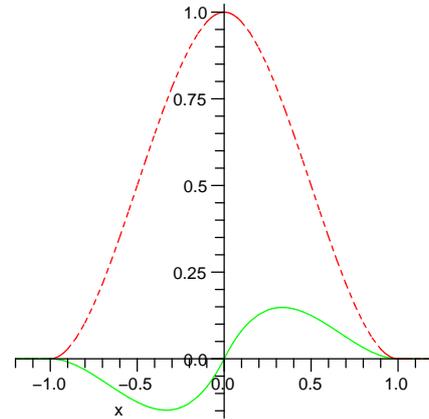
$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi^l(x) & \forall x \in [-1, 0], \\ \Phi^r(x) & \forall x \in [0, 1], \\ 0 & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \Phi^l(x) &= (1+x)^2(1-2x), \\ \Phi^r(x) &= (1-x)^2(1+2x), \end{aligned}$$

et

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi^l(x) & \forall x \in [-1, 0], \\ \Psi^r(x) & \forall x \in [0, 1], \\ 0 & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$



Fonctions Φ (tirets) et Ψ (ligne continue) pour les éléments finis de Hermite \mathbb{P}_3

Toute fonction v_h de V_h est alors définie de manière unique par la relation

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{N_x^i} v_h(x_j^i) \phi_j(x) + \sum_{j=1}^{N_x^i} \partial_x v_h(x_j^i) \psi_j(x).$$

Notons $U_j = u_h(x_j^i)$ et $\partial_x U_j = \partial_x u_h(x_j^i)$. On cherche $u_h(t)$ sous la forme

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^{N_x^i} U_j(t) \phi_j + \sum_{j=1}^{N_x^i} \partial_x U_j(t) \psi_j.$$

Seules les coordonnées U_j et $\partial_x U_j$ sont des fonctions du temps. De manière similaire, on pose $U_j^0 = u_h^0(x_j^i)$ et $\partial_x U_j^0 = \partial_x u_h^0(x_j^i)$, de sorte que

$$u_h^0 = \sum_{j=1}^{N_x^i} U_j^0 \phi_j + \sum_{j=1}^{N_x^i} \partial_x U_j^0 \psi_j.$$

En utilisant ces relations, on transforme le problème (4.41) : $\forall l \in [1, N_x^i]$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{N_x^i} \langle \phi_j, \phi_l \rangle_{L^2(\Omega_i)} \frac{dU_j^{k+1}(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{N_x^i} \langle \psi_j, \phi_l \rangle_{L^2(\Omega_i)} \frac{d(\partial_x U_j^{k+1})(t)}{dt} \\ \quad + \sum_{j=1}^{N_x^i} a_i(\phi_j, \phi_l) U_j^{k+1}(t) + \sum_{j=1}^{N_x^i} a_i(\psi_j, \phi_l) \partial_x U_j^{k+1}(t) = b_i^{k+1}(\phi_l), \\ \sum_{j=1}^{N_x^i} \langle \phi_j, \psi_l \rangle_{L^2(\Omega_i)} \frac{dU_j^{k+1}(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{N_x^i} \langle \psi_j, \psi_l \rangle_{L^2(\Omega_i)} \frac{d(\partial_x U_j^{k+1})(t)}{dt} \\ \quad + \sum_{j=1}^{N_x^i} a_i(\phi_j, \psi_l) U_j^{k+1}(t) + \sum_{j=1}^{N_x^i} a_i(\psi_j, \psi_l) \partial_x U_j^{k+1}(t) = b_i^{k+1}(\psi_l), \\ U_{l,h}^{k+1}(0) = U_{l,h}^0, \\ \partial_x U_{l,h}^{k+1}(0) = \partial_x U_{l,h}^0. \end{array} \right.$$

En introduisant la matrice de masse \mathcal{M}_h , matrice carrée de dimension $2N_x^i$, définie par bloc en fonction des sous-matrices

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{M}_h^{\phi\phi} \right)_{lj} &= \langle \phi_j, \phi_l \rangle_{L^2(\Omega_i)} = \langle \phi_l, \phi_j \rangle_{L^2(\Omega_i)}, \\ \left(\mathcal{M}_h^{\phi\psi} \right)_{lj} &= \langle \psi_j, \phi_l \rangle_{L^2(\Omega_i)} = \langle \phi_l, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega_i)}, \quad 1 \leq l, j \leq N_x^i, \\ \left(\mathcal{M}_h^{\psi\psi} \right)_{lj} &= \langle \psi_j, \psi_l \rangle_{L^2(\Omega_i)} = \langle \psi_l, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega_i)} \end{aligned}$$

et la matrice de rigidité \mathcal{K}_h définie par bloc en fonction de

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{K}_h^{\phi\phi} \right)_{lj} &= a_i(\phi_j, \phi_l), \\ \left(\mathcal{K}_h^{\phi\psi} \right)_{lj} &= a_i(\psi_j, \phi_l), \\ \left(\mathcal{K}_h^{\psi\phi} \right)_{lj} &= a_i(\phi_j, \psi_l), \quad 1 \leq l, j \leq N_x^i, \\ \left(\mathcal{K}_h^{\psi\psi} \right)_{lj} &= a_i(\psi_j, \psi_l) \end{aligned}$$

selon⁵

$$\mathcal{M}_h = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{M}_h^{\phi\phi} & \mathcal{M}_h^{\phi\psi} \\ \hline (\mathcal{M}_h^{\phi\psi})' & \mathcal{M}_h^{\psi\psi} \end{array} \right), \quad \mathcal{K}_h = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{K}_h^{\phi\phi} & \mathcal{K}_h^{\phi\psi} \\ \hline \mathcal{K}_h^{\psi\phi} & \mathcal{K}_h^{\psi\psi} \end{array} \right),$$

en notant

$$b_h^{k+1}(t) = \left(\begin{array}{c} \vdots \\ b_i^{k+1}(\phi_l) \\ \vdots \\ b_i^{k+1}(\psi_l) \\ \vdots \end{array} \right) \quad \text{et} \quad U_h^{k+1}(t) = \left(\begin{array}{c} \vdots \\ U_j^{k+1}(t) \\ \vdots \\ \partial_x U_j^{k+1}(t) \\ \vdots \end{array} \right), \quad 1 \leq l, j \leq N_x^i,$$

on peut écrire l'approximation variationnelle sous la forme matricielle d'un système linéaire d'équations différentielles ordinaires à coefficients constants :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_h \frac{dU_h^{k+1}}{dt}(t) + \mathcal{K}_h U_h^{k+1}(t) = b_h^{k+1}(t), & 0 < t < T, \\ U_h^{k+1}(0) = U_h^0. \end{cases} \quad (4.42)$$

Les coefficients des matrices et vecteurs de ce système sont donnés en annexe.

Remarque. La décomposition des fonctions selon N_x^i fonctions de base est valable dans les sous-domaines internes $(\Omega_i)_{2 \leq i \leq N_d-1}$ de Ω . Par contre, dans les sous-domaines Ω_1 et Ω_{N_d} aux extrémités Ouest et Est respectivement, les espaces discrets respectifs sont

$$\begin{aligned} V_h^{0,1} &= \{v_h \in C^1(\bar{\Omega}_i) : v_h|_{[x_j^i, x_{j+1}^i]} \in \mathbb{P}_3 \quad \forall j \in [2, N_x^i]\}, \\ V_h^{0,N_d} &= \{v_h \in C^1(\bar{\Omega}_i) : v_h|_{[x_j^i, x_{j+1}^i]} \in \mathbb{P}_3 \quad \forall j \in [1, N_x^i - 1]\}. \end{aligned}$$

Les sommes de 1 à N_x^i deviennent des sommes de 2 à N_x^i dans Ω_1 , et de 1 à $(N_x^i - 1)$ dans Ω_{N_d} . De même, les sous-matrices de dimension N_x^i se réduisent à des sous-matrices de dimension $(N_x^i - 1)$.

Remarque. Soit $E_h = U - U_h$ l'erreur commise en résolvant le problème discret. La matrice de masse permet de calculer la norme L^2 de l'erreur :

$$\|E_h\|_{L^2}^2 = E_h^t \mathcal{M}_h E_h.$$

4.4.2 Discrétisation totale en espace et en temps

Discrétisons l'intervalle de temps $[0, T]$ en N_t pas de temps dt . Plusieurs schémas en temps ont été envisagés. Compte tenu de la forte contrainte imposée par la condition de stabilité d'un schéma d'Euler explicite,

$$\frac{\nu dt}{b^4} < C, \quad C \text{ constante d'ordre 1,}$$

⁵La notation M' désigne la matrice symétrique de M .

ce schéma a été écarté au profit d'un schéma implicite. L'ordre 1 d'un schéma d'Euler implicite impliquerait la prépondérance écrasante des erreurs en temps sur celles en espace, compte tenu de la qualité du schéma de Hermite en espace (d'ordre 4). On a finalement utilisé un schéma de Gear, c'est-à-dire un schéma implicite d'ordre 2 en temps :

$$\mathcal{M}_h \frac{3U_h(t^{n+1}) - 4U_h(t^n) + U_h(t^{n-1})}{2dt} + \mathcal{K}_h U_h(t^{n+1}) = b_h(t^{n+1}).$$

4.5 Simulations pour le problème de diffusion biharmonique

Des simulations ont été réalisées pour le problème de diffusion biharmonique sans advection dans le cas 1-D ...

1. stationnaire avec terme réactif (*cf.* section 4.3.1)

- (a) avec les conditions absorbantes idéales aux interfaces :

$$\mathcal{B}^\pm = \tilde{\mathcal{T}}^\pm - A \tilde{\mathcal{S}}^\pm,$$

où la matrice A est définie par (4.35),

- (b) avec des conditions de transmission non idéales :

$$\mathcal{B}^\pm = \tilde{\mathcal{T}}^\pm - A \tilde{\mathcal{S}}^\pm,$$

où la matrice A est quelconque,

2. transitoire (*cf.* section 4.3.2)

- (a) avec des conditions de transmission de Dirichlet-Neumann (avec recouvrement) :

$$\mathcal{B}^\pm = \tilde{\mathcal{S}}^\pm,$$

- (b) avec des conditions absorbantes approchées non optimisées :

$$\mathcal{B}^\pm = \tilde{\mathcal{T}}^\pm - \tilde{A} \tilde{\mathcal{S}}^\pm,$$

où la matrice \tilde{A} est définie par (4.38) et le coefficient μ de \tilde{A} est un réel quelconque permettant la convergence de l'algorithme,

- (c) avec des conditions absorbantes approchées optimisées :

$$\mathcal{B}^\pm = \tilde{\mathcal{T}}^\pm - \tilde{A} \tilde{\mathcal{S}}^\pm,$$

où la matrice \tilde{A} est définie par (4.38) et le coefficient μ de \tilde{A} est le réel obtenu en résolvant le problème d'optimisation (4.40).

Seuls les résultats obtenus en décomposant le domaine global $[0, 1]$ en deux sous-domaines de part et d'autre d'une interface unique seront présentés ici.

Remarque. Les simulations sont réalisées en initialisant les conditions de transmission avec des valeurs quelconques (random), de sorte qu'il faut une première itération de Schwarz pour obtenir des valeurs qui respectent l'équation de diffusion biharmonique. On peut donc considérer que les simulations présentées à l'itération 1 sont les conditions initiales, et que celles de l'itération 2 sont en réalité les résultats obtenus après 1 seule itération de Schwarz (et ainsi de suite).

4.5.1 Retour sur la théorie dans le cas des conditions de transmission de Dirichlet-Neumann

Formulation variationnelle

Dans le cas 2a où les conditions de transmission sont de type Dirichlet-Neumann, on est amené à résoudre sur chaque sous-domaine le problème suivant (à la place du problème (4.22)) :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_i = f & \text{dans } \Omega_i \times [0, T[, \\ u_i|_{t=0} = u_i^0 & \text{dans } \Omega_i, \\ \tilde{\mathcal{S}}^\pm u_i = \tilde{g}_i^\pm & \text{sur } \partial\Omega_i^\pm \times (0, T), \end{cases} \quad (4.43)$$

avec \mathcal{L} l'opérateur de diffusion biharmonique et $\tilde{\mathcal{S}}^\pm$ l'opérateur de Dirichlet-Neumann :

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \nu \Delta^2 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{S}}^\pm = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{n}^\pm} \\ Id \end{pmatrix}.$$

Les conditions de transmission entre chaque sous-domaine impliquent les relations $\tilde{g}_i^\pm = \tilde{\mathcal{S}}^\pm u_{i\pm 1}|_{\partial\Omega_i^\pm}$. Par conséquent, sur les interfaces,

$$\tilde{g}_i^\pm \neq 0,$$

sauf aux bords du domaine global Ω , où $\tilde{g}_1^- = 0$ et $\tilde{g}_{N_a}^+ = 0$.

La formulation variationnelle associée est

$$\text{trouver } u_i \in L^2(0, T; V_i) \text{ solution de } \begin{cases} \frac{d}{dt}(u_i(t), v_i) + a_i(u_i(t), v_i) = b_i(v_i) & \forall v_i \in V_i, \\ u_i(0) = u_i^0, \end{cases}$$

où l'espace fonctionnel, la forme bilinéaire et la forme linéaire sont définies par les relations

$$\begin{aligned} V_i &= \{v_i \in H^2(\Omega_i); v_i|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i^\pm} = \partial_{\bar{n}^\pm} v_i|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i^\pm} = 0\}, \\ a_i(u_i, v_i) &= \int_{\Omega_i} \nu \Delta u_i \Delta v_i dx + \sum_{\pm} \left[\int_{\partial\Omega_i^\pm} \nu (\partial_{\bar{n}^\pm} \Delta u_i v_i - \Delta u_i \partial_{\bar{n}^\pm} v_i) ds \right], \\ b_i(v_i) &= \int_{\Omega_i} f(t) v_i dx. \end{aligned}$$

Les conditions de transmission ne permettent pas de déterminer les intégrales traces qui interviennent dans la forme bilinéaire.

On transforme alors le problème grâce à une fonction de relèvement $u_i \in L^2(0, T; V_i)$, telle que $u_i|_{t=0} = u_i^0$ dans Ω_i , et construite de sorte que

$$\tilde{\mathcal{S}}^\pm u_i = \tilde{g}_i^\pm \quad \text{sur } \partial\Omega_i^\pm \times (0, T).$$

Le changement de variables

$$u_i = u_i + w_i$$

permet de ramener le problème (4.43) au problème aux limites suivant sur chaque sous-domaine :

$$\begin{cases} \mathcal{L}w_i = f - \mathcal{L}u_i & \text{dans } \Omega_i \times (0, T), \\ w_i|_{t=0} = u_i^0 - u_i^0 & \text{dans } \Omega_i, \\ \tilde{\mathcal{S}}^\pm w_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega_i^\pm \times (0, T). \end{cases}$$

La formulation variationnelle associée est

$$\text{trouver } w_i \in L^2(0, T; \bar{V}_i) \text{ solution de } \begin{cases} \frac{d}{dt}(w_i(t), v_i) + \bar{a}_i(w_i(t), v_i) = \bar{b}_i(v_i) & \forall v_i \in \bar{V}_i, \\ w_i(0) = u_i^0 - u_i^0, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned}\bar{V}_i &= H_0^2(\Omega_i), \\ \bar{a}_i(u_i, v_i) &= \int_{\Omega_i} \nu \Delta u_i \Delta v_i dx, \\ \bar{b}_i(v_i) &= \int_{\Omega_i} f(t) v_i dx - \left[\frac{d}{dt}(u_i(t), v_i) + \bar{a}_i(u_i(t), v_i) \right].\end{aligned}$$

Pour que l'algorithme de Schwarz converge, il est indispensable que les sous-domaines se recouvrent d'au moins une maille. On remplace donc les sous-domaines Ω_i par des sous-domaines "étendus", notés $\bar{\Omega}_i$.

Discrétisation numérique

On utilise les mêmes schémas de discrétisation en espace et en temps que dans le cas des conditions absorbantes approchées (section 4.4), et notamment des éléments finis de Hermite \mathbb{P}_3 . On définit le sous-domaine $\bar{\Omega}_i = [\bar{x}_1^i, \bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i]$ comme le sous-domaine sans recouvrement $\Omega_i = [x_1^i, x_{N_x^i}^i]$ étendu dans toutes les directions de N_m mailles, c'est-à-dire $[\bar{x}_1^i, \bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i] = [x_1^i - N_m h, x_{N_x^i}^i + N_m h]$.

En introduisant l'espace discret

$$\bar{V}_h = \{v_h \in C^1(\bar{\Omega}_i) : v_h|_{[\bar{x}_j^i, \bar{x}_{j+1}^i]} \in \mathbb{P}_3 \forall j \in [1, \bar{N}_x^i - 1], v_h|_{\bar{x}_1^i} = v_h|_{\bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i} = 0, \partial_x v_h|_{\bar{x}_1^i} = \partial_x v_h|_{\bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i} = 0\},$$

on cherche la solution w_h du problème semi-discret en espace

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(w_h(t), v_h)_{L^2(\Omega_i)} + \bar{a}_i(w_h(t), v_h) = \bar{b}_i(v_h) & \forall v_h \in \bar{V}_h, 0 < t < T, \\ w_h(0) = w_h^0, \end{cases} \quad (4.44)$$

où $w_h^0 \in \bar{V}_h$ est une approximation de la donnée initiale $(u_i^0 - u_i^0)$.

On décompose les fonctions de \bar{V}_h selon les fonctions de base de Hermite $\phi_j(x)$ et $\psi_j(x)$. Notons $W_j = w_h(\bar{x}_j^i)$ et $\partial_x W_j = \partial_x w_h(\bar{x}_j^i)$. On cherche $w_h(t)$ sous la forme

$$w_h(t) = \sum_{j=2}^{\bar{N}_x^i - 1} W_j(t) \phi_j + \sum_{j=2}^{\bar{N}_x^i - 1} \partial_x W_j(t) \psi_j.$$

Par contre, la fonction de relèvement n'est pas nulle aux interfaces, elle se décompose donc sous la forme

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^{\bar{N}_x^i} U_j(t) \phi_j + \sum_{j=1}^{\bar{N}_x^i} \partial_x U_j(t) \psi_j.$$

En utilisant ces relations, on transforme le problème (4.44) : $\forall l \in [2, \bar{N}_x^i - 1]$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=2}^{\bar{N}_x^i-1} \langle \phi_j, \phi_l \rangle_{L^2(\Omega_i)} \frac{dW_j(t)}{dt} + \sum_{j=2}^{\bar{N}_x^i-1} \langle \psi_j, \phi_l \rangle_{L^2(\Omega_i)} \frac{d(\partial_x W_j)(t)}{dt} \\ \quad + \sum_{j=2}^{\bar{N}_x^i-1} \bar{a}_i(\phi_j, \phi_l) W_j(t) + \sum_{j=2}^{\bar{N}_x^i-1} \bar{a}_i(\psi_j, \phi_l) \partial_x W_j(t) = \bar{b}_i(\phi_l), \\ \sum_{j=2}^{\bar{N}_x^i-1} \langle \phi_j, \psi_l \rangle_{L^2(\Omega_i)} \frac{dW_j(t)}{dt} + \sum_{j=2}^{\bar{N}_x^i-1} \langle \psi_j, \psi_l \rangle_{L^2(\Omega_i)} \frac{d(\partial_x W_j)(t)}{dt} \\ \quad + \sum_{j=2}^{\bar{N}_x^i-1} \bar{a}_i(\phi_j, \psi_l) W_j(t) + \sum_{j=2}^{\bar{N}_x^i-1} \bar{a}_i(\psi_j, \psi_l) \partial_x W_j(t) = \bar{b}_i(\psi_l), \\ W_{l,h}(0) = W_{l,h}^0, \\ \partial_x W_{l,h}(0) = \partial_x W_{l,h}^0, \end{array} \right.$$

où

$$\bar{a}_i(\phi, \psi) = \nu \langle \Delta \phi, \Delta \psi \rangle_{L^2(\bar{\Omega}_i)},$$

$$\bar{b}_i(\psi) = \langle f(t), \psi \rangle_{L^2(\bar{\Omega}_i)} - \bar{R}_i(\mathbf{u}_h(t), \psi),$$

$$\text{avec } \bar{R}_i(\mathbf{u}_h(t), \psi) = \sum_{j=1}^{\bar{N}_x^i} \langle \phi_j, \psi \rangle_{L^2(\Omega_i)} \frac{dU_j(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\bar{N}_x^i} \langle \psi_j, \psi \rangle_{L^2(\Omega_i)} \frac{d(\partial_x U_j)(t)}{dt} \\ + \sum_{j=1}^{\bar{N}_x^i} \bar{a}_i(\phi_j, \psi) U_j(t) + \sum_{j=1}^{\bar{N}_x^i} \bar{a}_i(\psi_j, \psi) \partial_x U_j(t).$$

Notons

$$\bar{b}_h(t) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \bar{b}_i(\phi_l) \\ \vdots \\ \bar{b}_i(\psi_l) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad 2 \leq l \leq \bar{N}_x^i - 1,$$

le vecteur de dimension $2(\bar{N}_x^i - 2)$ associé au second membre discret, ainsi que $\bar{F}_h(t) = (\langle f, \phi_2 \rangle_{L^2(\bar{\Omega}_i)}, \dots, \langle f, \phi_{\bar{N}_x^i-1} \rangle_{L^2(\bar{\Omega}_i)}, | \langle f, \psi_2 \rangle_{L^2(\bar{\Omega}_i)}, \dots, \langle f, \psi_{\bar{N}_x^i-1} \rangle_{L^2(\bar{\Omega}_i)})^t$ et $\bar{R}_h(\mathbf{u}_h(t)) = (\bar{R}_i(\mathbf{u}_h(t), \phi_2), \dots, \bar{R}_i(\mathbf{u}_h(t), \phi_{\bar{N}_x^i-1}), | \bar{R}_i(\mathbf{u}_h(t), \psi_2), \dots, \bar{R}_i(\mathbf{u}_h(t), \psi_{\bar{N}_x^i-1}))^t$ les deux vecteurs qui le composent, de sorte que

$$\bar{b}_h(t) = \bar{F}_h(t) + \bar{R}_h(\mathbf{u}_h(t)).$$

En notant

$$\mathbf{U}_h(t) = \begin{pmatrix} \vdots \\ U_j(t) \\ \vdots \\ \partial_x U_j(t) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq \bar{N}_x^i,$$

le vecteur de dimension $2\bar{N}_x^i$ associé à la fonction de relèvement discrète (différente à chaque itération de Schwarz), on peut redéfinir le second membre sous forme matricielle en remarquant que

$$\bar{R}_h(u_h(t)) = \bar{\mathcal{M}}_h \frac{dU_h}{dt}(t) + \bar{\mathcal{K}}_h U_h(t),$$

où les matrices de masse $\bar{\mathcal{M}}_h$ et de rigidité $\bar{\mathcal{K}}_h$ sont des matrices rectangulaires de dimension $2(\bar{N}_x^i - 2) \times 2\bar{N}_x^i$ respectivement identiques aux matrices de masse \mathcal{M}_h et de rigidité \mathcal{K}_h (définies page 71) privées de la première et de la dernière ligne de chacune des sous-matrices blocs.

En notant

$$W_h(t) = \begin{pmatrix} \vdots \\ W_j(t) \\ \vdots \\ \partial_x W_j(t) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad 2 \leq j \leq \bar{N}_x^i - 1,$$

le vecteur de dimension $2(\bar{N}_x^i - 2)$ associé à l'inconnue, l'approximation variationnelle s'écrit sous la forme matricielle d'un système linéaire d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \check{\mathcal{M}}_h \frac{dW_h}{dt}(t) + \check{\mathcal{K}}_h W_h(t) = \bar{b}_h(t), & 0 < t < T, \\ W_h(0) = W_h^0, \end{cases} \quad (4.45)$$

où les matrices de masse $\check{\mathcal{M}}_h$ et de rigidité $\check{\mathcal{K}}_h$ sont des matrices carrées de dimension $2(\bar{N}_x^i - 2)$ respectivement identiques aux matrices de masse \mathcal{M}_h et de rigidité \mathcal{K}_h privées des 4 lignes et des 4 colonnes correspondant aux termes d'interface (*i.e.* sans les premières et dernières lignes et colonnes des sous-matrices blocs).

Construction de la fonction de relèvement

À chaque itération ($k+1$) de l'algorithme de Schwarz, la fonction de relèvement dans le sous-domaine $\Omega_i = [\bar{x}_1^i, \bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i]$ doit vérifier

$$\begin{cases} u_i^{k+1} = u_{i\pm 1}^k & \text{sur } \partial\Omega_i^\pm \times (0, T). \\ \partial_n u_i^{k+1} = \partial_n u_{i\pm 1}^k \end{cases}$$

Les fonctions de Hermite (*cf.* page 70) permettent de construire aisément une fonction qui vérifie ces relations :

$$\begin{aligned} u_i^{k+1}(x, t) &= u_{i-1}^k(\bar{x}_1^i, t) \Phi^r\left(\frac{x - \bar{x}_1^i}{\bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i - \bar{x}_1^i}\right) + u_{i+1}^k(\bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i, t) \Phi^l\left(\frac{x - \bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i}{\bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i - \bar{x}_1^i}\right) \\ &+ (\bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i - \bar{x}_1^i) \partial_x u_{i-1}^k(\bar{x}_1^i, t) \Psi^r\left(\frac{x - \bar{x}_1^i}{\bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i - \bar{x}_1^i}\right) + (\bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i - \bar{x}_1^i) \partial_x u_{i+1}^k(\bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i, t) \Psi^l\left(\frac{x - \bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i}{\bar{x}_{\bar{N}_x^i}^i - \bar{x}_1^i}\right). \end{aligned}$$

4.5.2 Résultats de simulations dans le cas stationnaire avec terme réactif

Les simulations 1-D présentées ici correspondent au problème de réaction-diffusion bi-harmonique

$$r u + \nu u^{(4)} = f \quad \text{dans } \Omega,$$

avec $r = 1$, dans le cas d'une décomposition du domaine $\Omega = [0, 1]$ en deux sous-domaines (sans recouvrement) de part et d'autre de l'interface $\{x_\Gamma = \frac{2}{5}\}$. Le domaine Ω est discrétisé en 20 mailles uniformes, avec un pas d'espace $h = 0,05$.

On a construit deux solutions analytiques u_1 et u_2 de sorte que $u_1, u_2 \in H_0^2(\Omega)$, la première basée sur un polynôme de degré 4, le seconde sur la fonction trigonométrique cosinus (figure 4.1) :

$$\begin{aligned} u_1(x) = c_1 x^2 (x-1)^2 & \text{ est solution si } f(x) = c_1 [r x^2 (x-1)^2 + \nu 24], \\ u_2(x) = c_2 (\cos(2\pi x) - 1) & \text{ est solution si } f(x) = c_2 [r (\cos(2\pi x) - 1) + \nu 16\pi^4 \cos(2\pi x)], \end{aligned}$$

où on a choisi arbitrairement comme constantes $c_1 = 143,2$ et $c_2 = 6,54$.

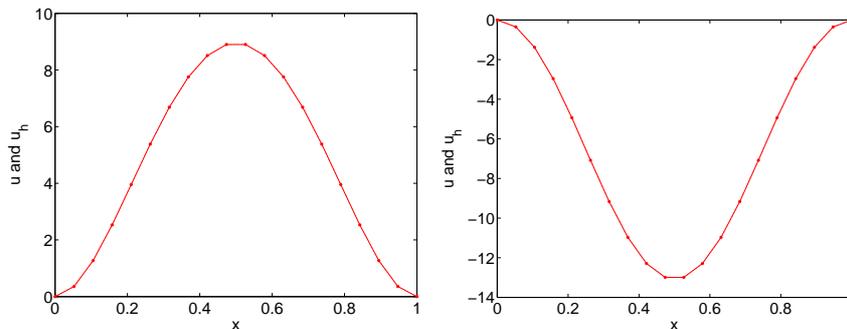


FIG. 4.1: Dans le cas stationnaire, solutions discrètes de référence dans $\Omega = [0, 1]$: (1) à gauche u_{h1} , (2) à droite u_{h2}

Dans le cas d'un seul domaine, diverses simulations (non présentées ici) en fonction de plusieurs pas d'espace ont permis de vérifier que l'ordre de convergence du schéma est en h^4 :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^4 |u|_{4,\Omega}.$$

Cette condition est utilisée dans le cas de la décomposition du domaine pour contrôler la convergence et mettre fin à la boucle itérative de l'algorithme de Schwarz (avec $C = 1$). En pratique, la convergence "apparente" est atteinte plus tôt. Dans le cas u_1 par exemple, on peut constater sur la figure 4.3 que la convergence de l'algorithme — avec des conditions absorbantes idéales — vers la solution globale semble atteinte après seulement 3 itérations (comme le stipule la théorie⁶), avant l'itération 5 à laquelle cette inégalité est vérifiée (*cf.* tableau 4.1).

Les conditions de transmission entre les deux sous-domaines sont de la forme $\mathcal{B}^\pm = \tilde{\mathcal{T}}^\pm - A \tilde{\mathcal{S}}^\pm$. Dans le cas de conditions absorbantes idéales, la matrice A est définie par la relation (4.35). Le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz est alors nul (figure 4.2).

⁶La théorie stipule que l'algorithme de Schwarz doit converger en $N_d = 2$ itérations. Comme on l'a indiqué en introduction, dans ces simulations, la première itération de Schwarz sert à construire un itéré initial qui vérifie le problème. La solution à l'itération 3 correspond donc en pratique à une solution obtenue après seulement 2 itérations.

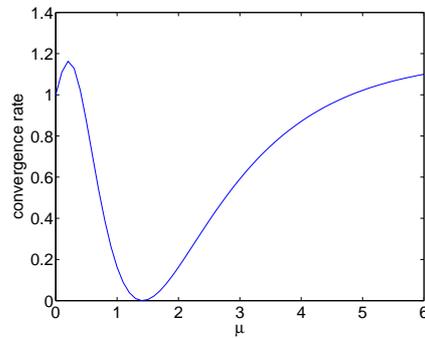


FIG. 4.2: Dans le cas stationnaire, taux de convergence de l'algorithme de Schwarz avec des conditions de transmission de la forme $\mathcal{B}^\pm = \tilde{\mathcal{T}}^\pm - A\tilde{\mathcal{S}}^\pm$, où la matrice A est définie par la relation (4.38). Les conditions absorbantes idéales sont réalisées si $\mu = \sqrt{2} r^{1/4}$.

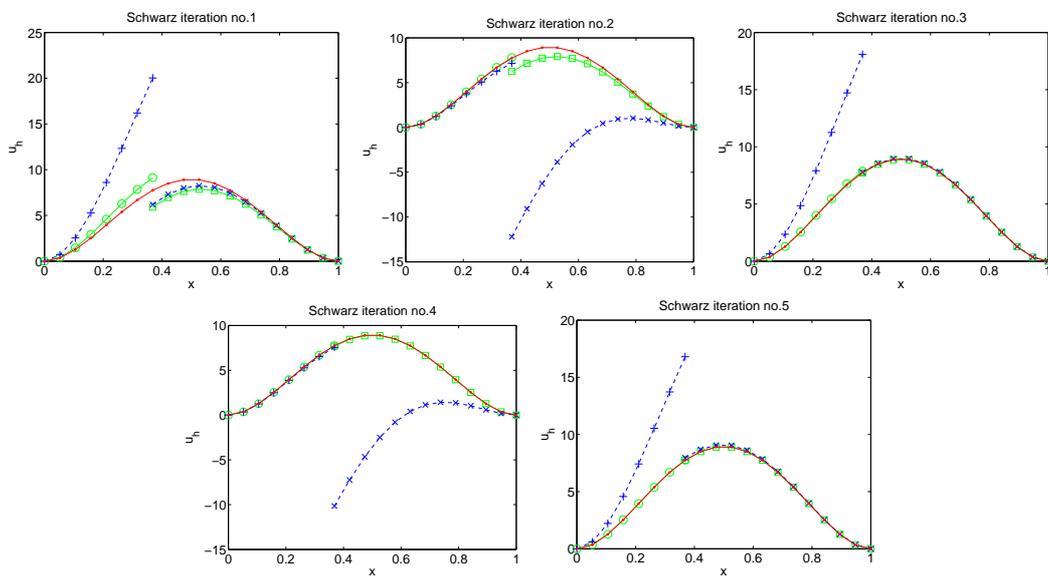


FIG. 4.3: Dans le cas stationnaire avec $\nu = 0,01$, solution de référence u_{h1} dans le domaine global (ligne continue, \cdot), et dans les deux sous-domaines, inconnues u_{h1} aux 5 premières itérations de l'algorithme de Schwarz, avec des conditions de transmission absorbantes idéales (ligne continue, \circ et \square) ou non idéales (tirets, $+$ et \times).

	$\nu = 0, 01$		$\nu = 0, 1$	
	(a)	(b)	(a)	(b)
Cas u_1	87	5	57	13
Cas u_2	91	5	65	15

TAB. 4.1: Dans le cas stationnaire, nombre d'itérations nécessaires à l'algorithme de Schwarz pour converger (a) avec des conditions de transmission quelconques, (b) avec des conditions absorbantes idéales

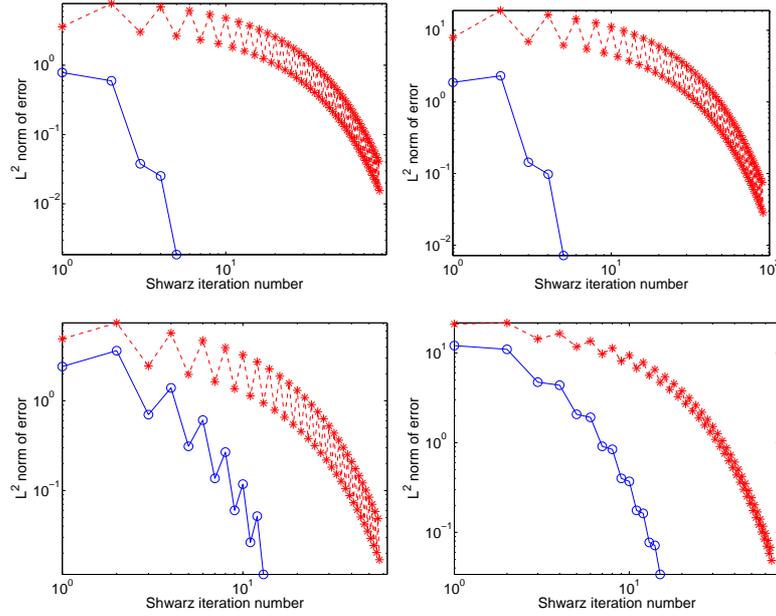


FIG. 4.4: Dans le cas stationnaire, norme $L^2(\Omega)$ de l'erreur commise avec des conditions de transmission absorbantes idéales (ligne continue, \circ) ou non idéales (tirets, \star), en fonction du numéro de l'itération de l'algorithme de Schwarz (échelles logarithmiques) : (a) en haut si $\nu = 0, 01$, (b) en bas si $\nu = 0, 1$; (1) à gauche dans le cas u_1 , (2) à droite dans le cas u_2

Dans le cas non idéal, la matrice A est définie arbitrairement par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix},$$

de sorte que les conditions d'existence et d'unicité (4.17) ou (4.18) sont vérifiées et que l'algorithme de Schwarz converge au taux $\rho = 0,954091$ dans le cas $\nu = 0, 01$ et $\rho = 0,394903$ dans le cas $\nu = 0, 1$.

Les résultats sont illustrés dans le tableau 4.1 et la figure 4.3. La figure 4.4 indique l'évolution de la norme $L^2(\Omega)$ de l'erreur commise à chaque itération, en fonction des deux types de conditions de transmission considérés.

4.5.3 Résultats de simulations dans le cas transitoire

Le problème considéré ici est le problème de diffusion biharmonique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu u^{(4)} = f \quad \text{dans } \Omega \times [0, T],$$

dans le cas d'une décomposition du domaine $\Omega = [0, 1]$ en deux sous-domaines de part et d'autre de l'interface $\{x_\Gamma = \frac{2}{5}\}$, sur l'intervalle de temps $[0, T] = [0, 1]$. La discrétisation du domaine Ω est réalisée avec un pas d'espace uniforme $h = 0,05$, celle de l'intervalle de temps avec un pas de temps $dt = 0,05$.

Les deux solutions analytiques u_1 et u_2 construites (figure 4.5) sont telles que $u_1 = u'_1 = 0$ et $u_2 = u'_2 = 0$ sur $\partial\Omega = \{x = 0, x = 1\}$:

$$u_1(x, t) = c_1 \cos(\omega_t t) x^2 (x - 1)^2$$

est solution si $f(x, t) = c_1 [-\omega_t \sin(\omega_t t) x^2 (x - 1)^2 + \nu 24 \cos(\omega_t t)]$, et

$$u_2(x, t) = c_2 (\cos(2\pi x) - 1) \sin(\omega_t t)$$

est solution si $f(x, t) = c_2 [\omega_t \cos(\omega_t t) (\cos(2\pi x) - 1) + \nu 16 \pi^4 \cos(2\pi x) \sin(\omega_t t)]$, où on a choisi arbitrairement comme constantes $c_1 = 154,3$, $c_2 = 6,54$ et $\omega_t = \frac{4}{3}\pi$.

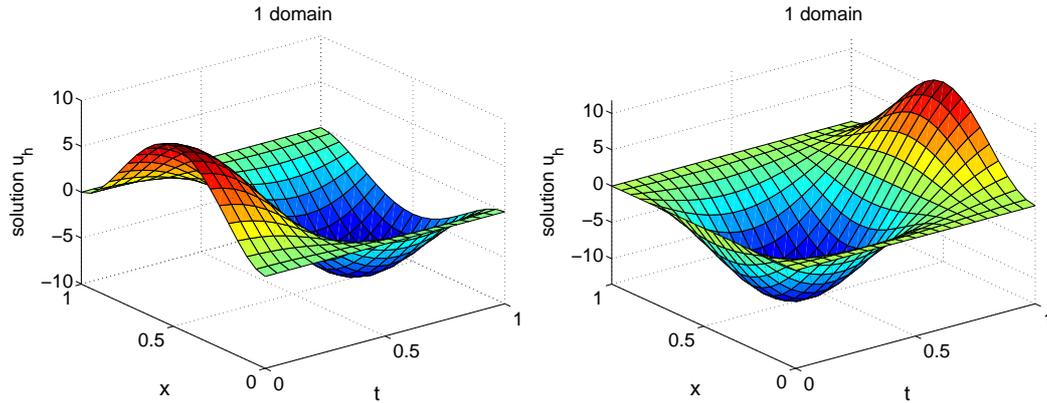


FIG. 4.5: Dans le cas transitoire, solutions discrètes de référence dans $\Omega = [0, 1]$: (1) à gauche u_{h1} , (2) à droite u_{h2}

Les simulations sont réalisées alternativement avec des conditions de transmission de Dirichlet-Neumann avec recouvrement, ou avec des conditions absorbantes approchées, quelconques ou optimisées, sans recouvrement.

On met fin à la boucle itérative de Schwarz lorsque la solution n'évolue plus dans aucun des sous-domaines Ω_i , plus précisément lorsque $\frac{1}{N_x^i N_t} \sum_j \sum_n |u_h^{k+1}(x_j, t_n) - u_h^k(x_j, t_n)| <$

$\epsilon (\max_{x,t} u - \min_{x,t} u)$, avec $\epsilon = 10^{-4}$. On constate en pratique que la convergence "apparente" est atteinte plus tôt. Dans le cas u_1 par exemple, on peut constater sur la figure 4.7 que la convergence de l'algorithme — avec des conditions absorbantes idéales — vers la solution globale semble atteinte après seulement 5 itérations, avant l'itération 9 à laquelle cette inégalité est vérifiée (cf. tableau 4.2).

Pour des conditions de transmission de Dirichlet-Neumann, le recouvrement est de deux mailles. Plus précisément les sous-domaines $\tilde{\Omega}_i$ correspondent aux sous-domaines Ω_i étendus

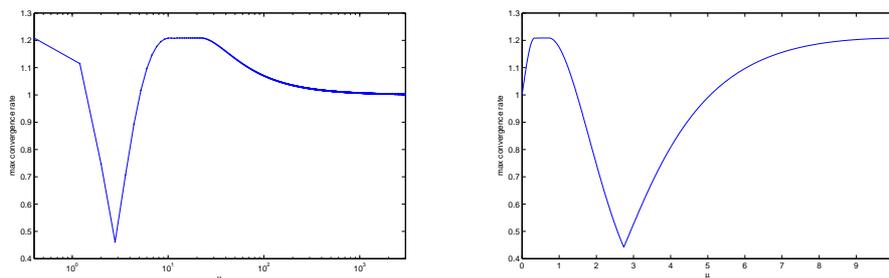


FIG. 4.6: Dans le cas transitoire, maximum sur toutes les fréquences temporelles du taux de convergence de l'algorithme de Schwarz avec des conditions de transmission de la forme $\mathcal{B}^\pm = \tilde{\mathcal{T}}^\pm - \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{S}}^\pm$, où la matrice $\tilde{\mathcal{A}}$ est définie par la relation (4.38) : (1) à gauche quand $0,5 \leq \mu \leq 3000$ (échelle logarithmique), (2) à droite zoom quand $0 \leq \mu \leq 10$ (échelle linéaire)

	$\nu = 0,01$			$\nu = 0,1$		
	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)
Cas u_1	574	29	9	768	11	8
Cas u_2	548	29	9	742	11	9

TAB. 4.2: Dans le cas transitoire, nombre d'itérations nécessaires à l'algorithme de Schwarz pour converger (a) avec des conditions de transmission de Dirichlet-Neumann (avec recouvrement des sous-domaines), (b) avec des conditions absorbantes approchées quelconques (sans recouvrement), (c) avec des conditions absorbantes approchées optimisées (sans recouvrement)

d'une maille dans toutes les directions (*i.e.* à l'Est et à l'Ouest) : $\Omega_1 = [0, x_\Gamma + h]$, $\Omega_2 = [x_\Gamma - h, 1]$.

Dans le cas de conditions absorbantes approchées, les conditions de transmission sont de la forme $\mathcal{B}^\pm = \tilde{\mathcal{T}}^\pm - \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{S}}^\pm$, où la matrice $\tilde{\mathcal{A}}$ est définie par la relation (4.38).

Dans le cas optimisé, le coefficient μ de la matrice $\tilde{\mathcal{A}}$ est obtenu en minimisant le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz maximisé sur toutes les fréquences temporelles : $\min_\mu \max_\omega \tilde{\rho} = 0,442037$ pour $\mu = 2,73799$.

Dans le cas non optimal, il est défini arbitrairement de sorte que l'algorithme de Schwarz converge. La figure 4.6 illustre la variation du maximum (sur toutes les fréquences temporelles) du taux de convergence de l'algorithme de Schwarz avec des conditions absorbantes approchées, en fonction du paramètre μ . On choisit ici $\mu = 5$, de sorte que $\max_\omega \tilde{\rho} = 0,9906211$.

Les résultats des simulations sont présentés dans le tableau 4.2 et les figures 4.7 et 4.8. On constate que l'erreur commise à l'itération 9 avec les conditions optimales est beaucoup plus petite (d'un facteur 10) que celles commises avec les autres types de conditions (aux itérations 23 et 477 resp).

Les figures 4.9 et 4.10 montrent les normes des erreurs commises à chaque itération de Schwarz. On a choisi de montrer la norme $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ (resp. $L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$) de l'erreur, c'est-à-dire le maximum sur tous les pas de temps de la norme $L^2(\Omega)$ (resp. $H^2(\Omega)$) en espace. On remarque que les conditions de transmission transparentes approchées permettent une convergence très nettement améliorée (en qualité et en rapidité) par rapport aux conditions de Dirichlet-Neumann.

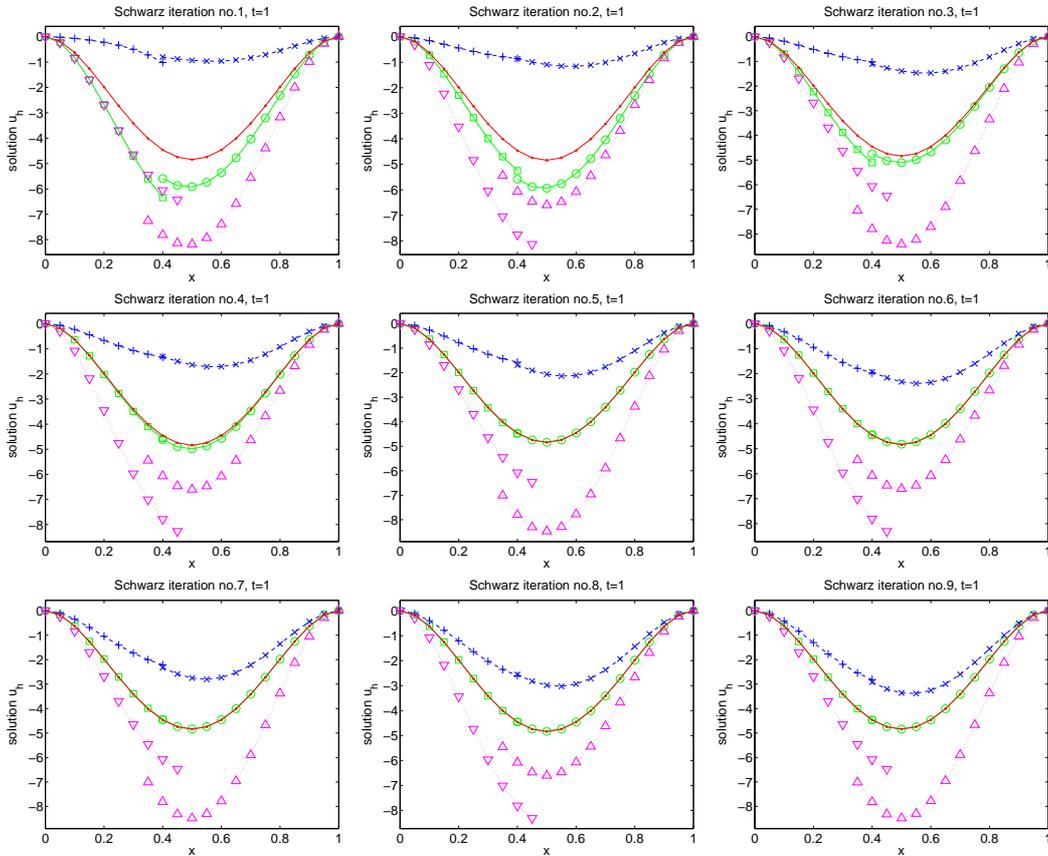


FIG. 4.7: Dans le cas transitoire, au temps final $t = 1$, avec $\nu = 0,01$, solution de référence u_{h1} dans le domaine global (ligne continue, \cdot), et dans les deux sous-domaines, inconnues u_{h1} aux 9 premières itérations de l'algorithme de Schwarz, (a) avec des conditions absorbantes approchées optimisées (sans recouvrement) (ligne continue, \circ et \square), (b) avec des conditions absorbantes approchées quelconques (sans recouvrement) (tirets, \times et $+$), (c) avec des conditions de transmission de Dirichlet-Neumann (avec recouvrement des sous-domaines) (pointillés, ∇ et \triangle)

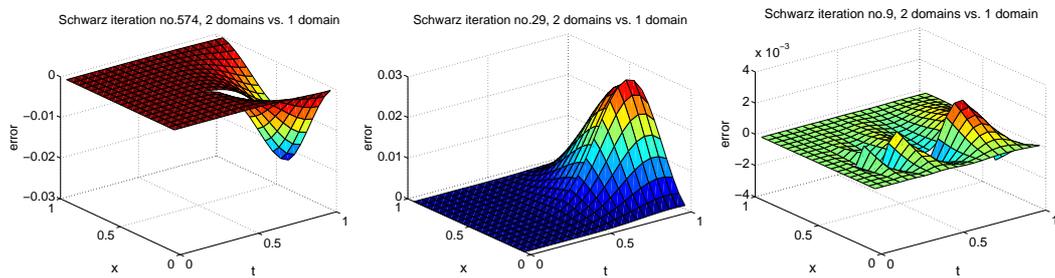


FIG. 4.8: Dans le cas transitoire avec $\nu = 0,01$, erreur entre la solution de référence u_{h1} dans le domaine global et les solutions obtenues dans les deux sous-domaines après convergence de l'algorithme de Schwarz, (a) à gauche avec des conditions de transmission de Dirichlet-Neumann (avec recouvrement des sous-domaines) à l'itération 574, (b) au centre avec des conditions absorbantes approchées quelconques (sans recouvrement) à l'itération 29, (c) à droite avec des conditions absorbantes approchées optimisées (sans recouvrement) à l'itération 9

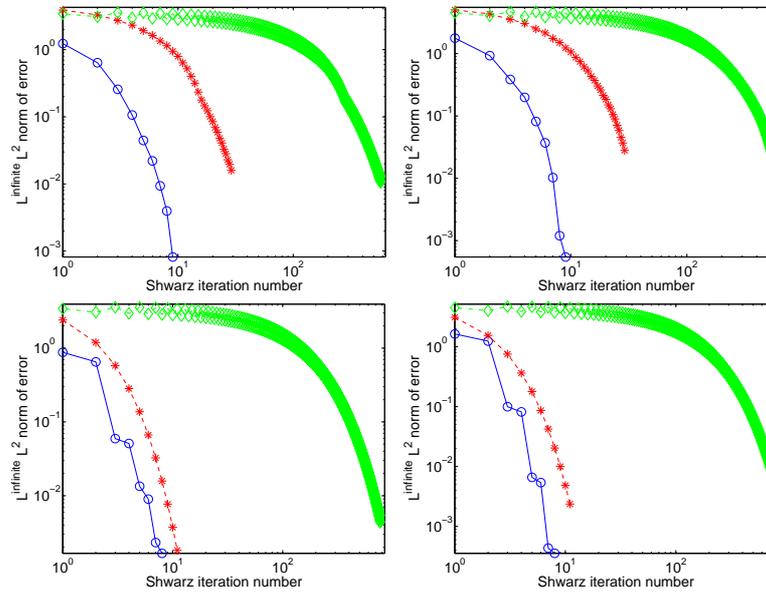


FIG. 4.9: Dans le cas transitoire, norme $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ de l'erreur commise avec des conditions de transmission absorbantes approchées, optimisées (ligne continue, \circ) ou non (tirets, \star), ou avec des conditions de Dirichlet-Neumann (tirets-pointillés, \diamond), en fonction du numéro de l'itération de l'algorithme de Schwarz (échelles logarithmiques) : (a) en haut si $\nu = 0, 01$, (b) en bas si $\nu = 0, 1$; (1) à gauche dans le cas u_1 , (2) à droite dans le cas u_2

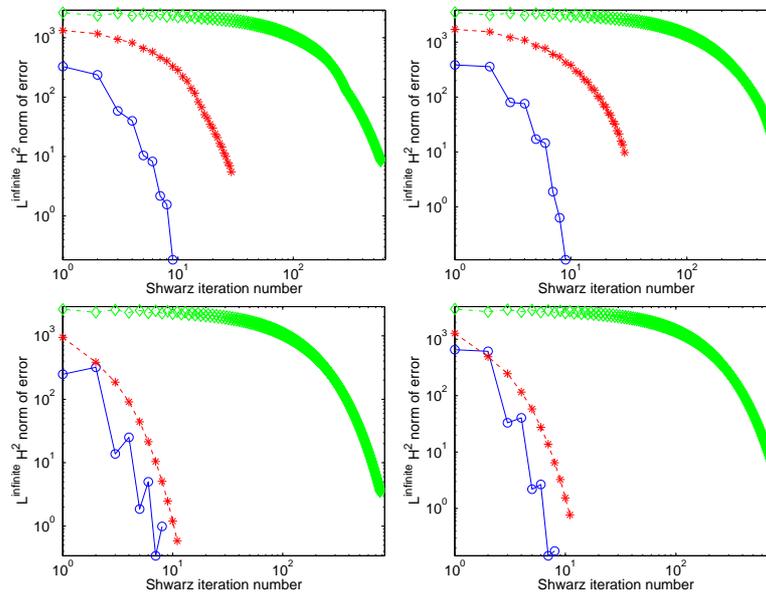


FIG. 4.10: Dans le cas transitoire, norme $L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$ de l'erreur commise avec des conditions de transmission absorbantes approchées, optimisées (ligne continue, \circ) ou non (tirets, \star), ou avec des conditions de Dirichlet-Neumann (tirets-pointillés, \diamond), en fonction du numéro de l'itération de l'algorithme de Schwarz (échelles logarithmiques) : (a) en haut si $\nu = 0, 01$, (b) en bas si $\nu = 0, 1$; (1) à gauche dans le cas u_1 , (2) à droite dans le cas u_2

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Équations de Saint-Venant incomplètement paraboliques

Nota : Les termes en **bleu** mettent en évidence les différences avec la démarche et les résultats de [Mar03, p.156], dues à la reformulation du problème du fait du changement de variable verticale $\phi = ch/h_0 = c(1 + h''_{\text{Martin 2003}})$ et de la prise en compte de l'advection.

On considère les équations de Saint-Venant linéarisées avec dissipation, constituées d'équations de réaction-advection-diffusion 2D pour décrire la dynamique horizontale et de l'équation de continuité (incompressibilité) pour la dynamique verticale, dans l'espace entier $\Omega = \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + (U_0 \cdot \nabla) U + B U + c \nabla \phi - \nu \Delta U = \mathcal{F}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (U_0 \cdot \nabla) \phi + c \nabla \cdot U = 0, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}$.

Remarques :

- La variable ϕ est définie comme suit : $\phi = ch/h_0 = \sqrt{g/h_0} h$, avec h la hauteur de la surface libre de l'eau, et h_0 la profondeur de l'eau.
- La formulation du système précédent est équivalente à celle utilisée par Halpern [Hal05] dans son mémo, où le problème est formulé en fonction de h , la hauteur de la surface libre de l'eau.

Soit $W = (u, v, \phi)^t$. Notons \mathcal{L} l'opérateur de Saint-Venant, tel que le système précédent avec condition initiale puisse se réécrire

$$\begin{cases} \mathcal{L} W & = \mathcal{F} & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ W(\bullet, \bullet, 0) & = W_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

i.e.

$$\mathcal{L} = \partial_t + A_1 \partial_x + A_2 \partial_y + \tilde{B} - \nu P \Delta,$$

$$\text{avec } A_1 = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & c \\ 0 & u_0 & 0 \\ c & 0 & u_0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & c \\ 0 & c & v_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & -f & 0 \\ f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous supposons que les résultats de Martin [Mar03, chapitre 13] pour le système sans advection sont généralisables au cas présenté ici et que le problème avec une condition initiale est bien posé.

A.1 Transformée de Fourier-Laplace des équations de Saint Venant

On décompose le domaine $\Omega = \mathbb{R}^2$ en deux demi-plans $\Omega^- =]-\infty, L[\times \mathbb{R}$ et $\Omega^+ =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et on étudie le système après une transformation de Fourier selon la variable y et de Laplace selon la variable t .

Etant donnée le choix de la décomposition du domaine Ω , la normale à chaque interface est selon l'axe x . Cette étude nous permettra d'écrire les conditions aux frontières Est et Ouest. Il faudra adapter les calculs pour obtenir les conditions absorbantes aux frontières Nord et Sud.

Notons $\Gamma_L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = L\}$ la frontière ouverte à l'Est du domaine Ω^- et $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$ celle à l'Ouest du domaine Ω^+ .

Rappelons que, soit ϕ une fonction de $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ telle que $\exists \alpha > 0, K > 0 : \|\phi(x, y, t)\| \leq K e^{\alpha t} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, la transformée de Fourier en y et de Laplace en t de la fonction ϕ est

$$\widehat{\phi}(x, \eta, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \phi(x, y, t) e^{-(i\eta y + st)} dt dy,$$

avec $s = \sigma + i\omega$, $\sigma > \alpha > 0$, la variable de Laplace associée à la variable temporelle t et η la variable de Fourier associée à la variable d'espace tangentielle y .

Après intégrations par parties, la transformée de Fourier-Laplace du système (A.1) sans terme source donne le système suivant¹

$$\begin{cases} (s + \nu\eta^2 + i\eta v_0) \widehat{u} + u_0 \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} - f \widehat{v} + c \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial x^2} = 0, \\ (s + \nu\eta^2 + i\eta v_0) \widehat{v} + u_0 \frac{\partial \widehat{v}}{\partial x} + f \widehat{u} + i\eta c \widehat{\phi} - \nu \frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial x^2} = 0, \\ (s + i\eta v_0) \widehat{\phi} + u_0 \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial x} + i\eta c \widehat{v} + c \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

En cherchant la solution $\widehat{W} = (\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{\phi})^t$ du système précédent avec une condition initiale nulle sous la forme

$$\widehat{W} = \Phi e^{-\xi x},$$

avec $\Phi \in \mathbb{R}^3$ un vecteur indépendant de la variable x , on est ramené à résoudre le système indépendant de x suivant

$$M(\xi, \eta, s) \Phi(\xi, \eta, s) = 0, \quad (\text{A.4})$$

avec

$$M(\xi, \eta, s) = \begin{pmatrix} s + \nu\eta^2 + i\eta v_0 - u_0 \xi - \nu \xi^2 & -f & -c \xi \\ f & s + \nu\eta^2 + i\eta v_0 - u_0 \xi - \nu \xi^2 & i\eta c \\ -c \xi & i\eta c & s + i\eta v_0 - u_0 \xi \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Ce système admet une solution non nulle si et seulement si le déterminant de M est nul, c'est-à-dire ssi ξ est solution d'une équation du cinquième degré, qu'on ne sait pas résoudre

¹Contrairement au cas sans advection, on ne peut plus exprimer directement la variable $\widehat{\phi}$ en fonction de \widehat{u} , \widehat{v} , η et s dans le cas avec advection.

telle quelle. On est alors amené à faire une approximation. Cette approximation dépend notamment de la situation du problème physique considéré, qui permet de choisir le paramètre (viscosité, force de Coriolis, nombre de Rossby, ...) en série duquel cette équation sera développée.

Pour aller plus loin, on va admettre que cette équation admet cinq racines $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ et ξ_5 .

Comme le déterminant de $M(\xi_j, \eta, s)$ est nul $\forall j \in [1, 5]$, les trois équations correspondant au système (A.4) sont liées. En résolvant ce système privé de la deuxième équation, on obtient une des expressions possibles du vecteur Φ_j associé à la racine ξ_j :

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \\ C_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(s+i\eta v_0 - u_0 \xi_j) + i\eta c^2 \xi_j \\ c^2 \xi_j^2 - (s+i\eta v_0 - u_0 \xi_j)(s + \nu \eta^2 + i\eta v_0 - u_0 \xi_j - \nu \xi_j^2) \\ i\eta c(s + \nu \eta^2 + i\eta v_0 - u_0 \xi_j - \nu \xi_j^2) - f c \xi_j \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

La solution du système de Fourier-Laplace peut alors s'écrire

$$\widehat{W} = \sum_{j=1}^5 \alpha_j \Phi_j e^{-\xi_j x},$$

ou encore, sous forme matricielle,

$$\widehat{W}(x, \eta, s) = \widetilde{M}(\eta, s) D(x) \boldsymbol{\alpha}, \quad (\text{A.7})$$

$$\text{où } \widetilde{M} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{pmatrix}, \quad D(x) = \begin{pmatrix} e^{-\xi_1 x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\xi_2 x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\xi_3 x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\xi_4 x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\xi_5 x} \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)^t.$$

On obtient finalement la solution dans chaque sous-domaine en éliminant les termes exponentiellement croissants, *i.e.* ceux qui font intervenir les variables ξ_j dont la partie réelle est négative dans $\text{TFL}(\Omega^-)$ et positive dans $\text{TFL}(\Omega^+)$, où on a noté TFL l'opérateur de transformation de Fourier-Laplace.

Notons ξ_- l'ensemble des racines ξ_j dont la partie réelle est négative, et ξ_+ celui des racines ξ_j dont la partie réelle est positive. La solution du système de Fourier-Laplace est notée

$$\widehat{W}_-(x, \eta, s) = \widetilde{M}_-(\eta, s) D_-(x) \boldsymbol{\alpha}_- \quad \text{pour } (x, \eta, s) \in]-\infty, L[\times \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \quad (\text{A.8})$$

dans $\text{TFL}(\Omega^-)$, où $\widetilde{M}_-, D_-(x)$ et $\boldsymbol{\alpha}_-$ sont associés aux racines ξ_- , et

$$\widehat{W}_+(x, \eta, s) = \widetilde{M}_+(\eta, s) D_+(x) \boldsymbol{\alpha}_+ \quad \text{pour } (x, \eta, s) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \quad (\text{A.9})$$

dans $\text{TFL}(\Omega^+)$, où $\widetilde{M}_+, D_+(x)$ et $\boldsymbol{\alpha}_+$ sont associés aux racines ξ_+ .

Les constantes α_j doivent pouvoir être déterminées à partir des conditions aux limites, comme nous allons l'illustrer dans la section suivante.

A.2 Algorithme de Schwarz classique de type relaxation d'ondes

Considérons à présent la résolution des équations de Saint-Venant par décomposition du domaine selon l'algorithme de Schwarz classique de type relaxation d'ondes.

Avec des conditions aux frontières ouvertes de Dirichlet, l'algorithme de Schwarz s'écrit, à l'itération $(n + 1)$,

$$\begin{cases} \mathcal{L} W_-^{n+1} &= \mathcal{F} & \text{dans } \Omega^- \times]0, T[, \\ W_-^{n+1}(\cdot, \cdot, 0) &= W_0 & \text{dans } \Omega^-, \\ W_-^{n+1} &= W_+^n & \text{sur } \Gamma_L \times]0, T[, \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{L} W_+^{n+1} &= \mathcal{F} & \text{dans } \Omega^+ \times]0, T[, \\ W_+^{n+1}(\cdot, \cdot, 0) &= W_0 & \text{dans } \Omega^+, \\ W_+^{n+1} &= W_-^n & \text{sur } \Gamma_0 \times]0, T[. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Remarque : Contrairement au cas sans advection, il faut stipuler les conditions aux interfaces pour toutes les composantes de W .

Introduisons l'erreur de l'algorithme à l'étape n dans chaque demi-plan : $E_{W_\pm}^n = W_{|\Omega^\pm} - W_\pm^n$, où W est la solution du système (A.2). Ces erreurs vérifient alors l'algorithme suivant, à l'itération $(n + 1)$,

$$\begin{cases} \mathcal{L} E_{W_-}^{n+1} &= 0 & \text{dans } \Omega^- \times]0, T[, \\ E_{W_-}^{n+1}(\cdot, \cdot, 0) &= 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ E_{W_-}^{n+1} &= E_{W_+}^n & \text{sur } \Gamma_L \times]0, T[, \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{L} E_{W_+}^{n+1} &= 0 & \text{dans } \Omega^+ \times]0, T[, \\ E_{W_+}^{n+1}(\cdot, \cdot, 0) &= 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ E_{W_+}^{n+1} &= E_{W_-}^n & \text{sur } \Gamma_0 \times]0, T[. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Dans chacun des demi-plans, la transformée de Fourier-Laplace des erreurs vérifie un système d'équations similaire au système (A.3) avec comme condition à l'interface $\widehat{E}_{W_\mp}^{n+1} = \widehat{E}_{W_\pm}^n$.

Comme on l'a vu dans la section précédente, la solution est donnée par les équations (A.8) et (A.9) :

$$\begin{aligned} \widehat{E}_{W_-}^n &= \widetilde{M}_- D_-(x) \alpha_-^n \text{ pour } (x, \eta, s) \in]-\infty, L[\times \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \\ \widehat{E}_{W_+}^n &= \widetilde{M}_+ D_+(x) \alpha_+^n \text{ pour } (x, \eta, s) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Comme $D_-(0) = D_+(0) = I$, les conditions aux interfaces s'écrivent

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_- D_-(L) \alpha_-^{n+1} &= \widetilde{M}_+ D_+(L) \alpha_+^n, \\ \widetilde{M}_+ \alpha_+^{n+1} &= \widetilde{M}_- \alpha_-^n. \end{aligned}$$

Hypothèse : on suppose que les matrices \widetilde{M}_\pm (dont la forme dépend des racines ξ_\pm) sont inversibles. On peut ainsi déterminer les vecteurs α_- et α_+ :

$$\begin{aligned} \alpha_-^{n+1} &= D_-(-L) \widetilde{M}_-^{-1} \widetilde{M}_+ D_+(L) \widetilde{M}_+^{-1} \widetilde{M}_- \alpha_-^{n-1}, \\ \alpha_+^{n+1} &= \widetilde{M}_+^{-1} \widetilde{M}_- D_-(-L) \widetilde{M}_-^{-1} \widetilde{M}_+ D_+(L) \alpha_+^{n-1}, \end{aligned}$$

car $D_-(L)^{-1} = D_-(-L)$.

Remarque (sur la démonstration de la convergence de l'algorithme de Schwarz classique dans la thèse de Martin [Mar03]).

Cette démonstration [Mar03, p.191] repose sur l'inégalité

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| \leq |S|^2 + 2|P|,$$

avec $S = (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)$ et $P = |\det A|^2$. Cette inégalité est encore à démontrer. En effet, comme a priori $|\lambda_1|$ et $|\lambda_2|$ ne sont pas supérieures à 1, elle ne peut pas découler de l'inégalité

$$|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 \leq |S|^2 + 2|P|.$$

A.3 Conditions aux limites absorbantes (ou optimales)

Considérons désormais un algorithme de décomposition de domaine à la fois plus performant et qui converge dans le cas sans recouvrement ($L = 0$, *i.e.* $\Gamma_L = \Gamma_0$). Notons Γ l'interface $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$.

A.3.1 Recherche de conditions absorbantes “classiques”

On pourrait chercher les conditions absorbantes de l'algorithme de Schwarz suivant

$$\begin{cases} \mathcal{L} W_-^{n+1} & = \mathcal{F} & \text{dans } \Omega^- \times]0, T[, \\ W_-^{n+1}(\bullet, \bullet, 0) & = W_0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \frac{\partial W_-^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}^- W_-^{n+1} & = \frac{\partial W_+^n}{\partial x} - \mathcal{S}^- W_+^n & \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{L} W_+^{n+1} & = \mathcal{F} & \text{dans } \Omega^+ \times]0, T[, \\ W_+^{n+1}(\bullet, \bullet, 0) & = W_0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \frac{\partial W_+^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}^+ W_+^{n+1} & = \frac{\partial W_-^n}{\partial x} - \mathcal{S}^+ W_-^n & \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

où \mathcal{S}^- et \mathcal{S}^+ sont des opérateurs pseudo-différentiels à définir.

L'algorithme vérifié par les erreurs associées à W , à l'itération $(n + 1)$, est le suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L} E_{W_-}^{n+1} & = 0 & \text{dans } \Omega^- \times]0, T[, \\ E_{W_-}^{n+1}(\bullet, \bullet, 0) & = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ (\partial_x - \mathcal{S}^-) E_{W_-}^{n+1} & = (\partial_x - \mathcal{S}^-) E_{W_+}^n & \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{L} E_{W_+}^{n+1} & = 0 & \text{dans } \Omega^+ \times]0, T[, \\ E_{W_+}^{n+1}(\bullet, \bullet, 0) & = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ (\partial_x - \mathcal{S}^+) E_{W_+}^{n+1} & = (\partial_x - \mathcal{S}^+) E_{W_-}^n & \text{sur } \Gamma \times]0, T[. \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

D'après la section A.1, le système de transformée de Fourier-Laplace des erreurs a pour solution

$$\widehat{E}_{W_\pm}^n = \widetilde{M}_\pm D_\pm(x) \alpha_\pm^n.$$

D'après la définition de $D_\pm(x)$, on a $\partial_x D_\pm(x) = -\Xi_\pm D_\pm(x)$, où Ξ_\pm est la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les racines ξ_\pm . En supposant toujours que les matrices \widetilde{M}_\pm sont inversibles, on a $\partial_x \widehat{E}_{W_\pm}^n = -\widetilde{M}_\pm \Xi_\pm \widetilde{M}_\pm^{-1} \widehat{E}_{W_\pm}^n$. Par conséquent, en choisissant comme symbole de Fourier-Laplace de l'opérateur \mathcal{S}^-

$$-\widetilde{M}_+ \Xi_+ \widetilde{M}_+^{-1}$$

et comme symbole de Fourier-Laplace de l'opérateur \mathcal{S}^+

$$-\widetilde{M}_- \Xi_- \widetilde{M}_-^{-1},$$

les seconds membres des conditions à l'interface dans (A.16) et (A.17) s'annulent. Les erreurs sont alors solutions de deux systèmes homogènes avec des conditions initiales nulles et des conditions aux limites homogènes sur Γ . Par conséquent, $E_{W_\pm}^2 = 0$ dans Ω^\pm : l'algorithme converge dès la deuxième itération vers la solution globale du problème. Comme les opérateurs \mathcal{S}_\pm ne sont pas locaux, il faut les approcher.

A.3.2 Recherche de conditions absorbantes “naturelles”

La formulation variationnelle du système de Saint-Venant, décomposé de part et d’autre des interfaces, nous permet d’établir que le saut de certaines quantités à travers les interfaces est nul, ce qui nous amène à déterminer des conditions de transmission physiques à l’interface.

Dans le cas avec advection², les quantités conservées à travers l’interface, outre U , sont les suivantes [Bla06, p.9] :

$$\begin{cases} -\nu \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + (U_0 \cdot \vec{n})U + c\phi \vec{n}, \\ c(U \cdot \vec{n}) + (U_0 \cdot \vec{n})\phi, \end{cases}$$

ce qui nous conduit à considérer l’algorithme de Schwarz suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} W_-^{n+1} = \mathcal{F} \\ W_-^{n+1}(\cdot, \cdot, 0) = W_0 \\ -\nu \frac{\partial U_-^{n+1}}{\partial x} + u_0 U_-^{n+1} + c\phi_-^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \Lambda_U^+ W_-^{n+1} \\ = -\nu \frac{\partial U_+^n}{\partial x} + u_0 U_+^n + c\phi_+^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \Lambda_U^+ W_+^n \\ c u_-^{n+1} + u_0 \phi_-^{n+1} - \Lambda_\phi^+ W_-^{n+1} = c u_+^n + u_0 \phi_+^n - \Lambda_\phi^+ W_+^n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dans } \Omega^- \times]0, T[, \\ \text{dans } \Omega^-, \\ \text{sur } \Gamma \times]0, T[\end{array} \quad (\text{A.18})$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} W_+^{n+1} = \mathcal{F} \\ W_+^{n+1}(\cdot, \cdot, 0) = W_0 \\ -\nu \frac{\partial U_+^{n+1}}{\partial x} + u_0 U_+^{n+1} + c\phi_+^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \Lambda_U^- W_+^{n+1} \\ = -\nu \frac{\partial U_-^n}{\partial x} + u_0 U_-^n + c\phi_-^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \Lambda_U^- W_-^n \\ c u_+^{n+1} + u_0 \phi_+^{n+1} - \Lambda_\phi^- W_+^{n+1} = c u_-^n + u_0 \phi_-^n - \Lambda_\phi^- W_-^n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dans } \Omega^+ \times]0, T[, \\ \text{dans } \Omega^+, \\ \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \end{array} \quad (\text{A.19})$$

où Λ_U^\pm et Λ_ϕ^\pm sont des opérateurs qu’il faut définir de sorte que la convergence de cet algorithme soit optimale.

Considérons les systèmes vérifiés par les erreurs, ce qui revient à considérer $\mathcal{F} = 0$ et $W_0 = 0$, puis leur transformée de Fourier-Laplace. Les conditions aux limites de ces systèmes s’écrivent

$$\begin{aligned} & -\nu \frac{\partial \widehat{E}_{U_-}^{n+1}}{\partial x} + u_0 \widehat{E}_{U_-}^{n+1} + c \widehat{E}_{\phi_-}^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \widehat{\Lambda}_U^+ \widehat{E}_{W_-}^{n+1} \\ & = -\nu \frac{\partial \widehat{E}_{U_+}^n}{\partial x} + u_0 \widehat{E}_{U_+}^n + c \widehat{E}_{\phi_+}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \widehat{\Lambda}_U^+ \widehat{E}_{W_+}^n, \\ & -\nu \frac{\partial \widehat{E}_{U_+}^{n+1}}{\partial x} + u_0 \widehat{E}_{U_+}^{n+1} + c \widehat{E}_{\phi_+}^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \widehat{\Lambda}_U^- \widehat{E}_{W_+}^{n+1} \end{aligned}$$

²Dans le cas sans advection, deux conditions sur u et v suffisent à poser le problème, du fait que les autres conditions sont automatiquement vérifiées à la convergence de l’algorithme. Martin [Mar03, p.196] avait ainsi utilisé la propriété de conservation de la quantité $-\nu \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + \varepsilon \phi \vec{n}$, où \vec{n} est le vecteur normal à l’interface, pour définir les conditions absorbantes.

$$\begin{aligned} c \widehat{E}_{u_+}^{n+1} + u_0 \widehat{E}_{\phi_+}^{n+1} - \widehat{\Lambda}_\phi^+ \widehat{E}_{W_+}^{n+1} &= c \widehat{E}_{u_+}^n + u_0 \widehat{E}_{\phi_+}^n - \widehat{\Lambda}_\phi^+ \widehat{E}_{W_+}^n, \\ c \widehat{E}_{u_-}^{n+1} + u_0 \widehat{E}_{\phi_-}^{n+1} - \widehat{\Lambda}_\phi^- \widehat{E}_{W_-}^{n+1} &= c \widehat{E}_{u_-}^n + u_0 \widehat{E}_{\phi_-}^n - \widehat{\Lambda}_\phi^- \widehat{E}_{W_-}^n, \end{aligned}$$

sur $\Gamma \times]0, T[$ (en notant $\widehat{\Lambda}^\pm$ les symboles de Fourier-Laplace des opérateurs Λ^\pm). On va choisir les opérateurs Λ_U^\pm et Λ_ϕ^\pm de sorte que les termes de droite s'annulent, afin d'obtenir une convergence en deux itérations. On a déterminé à la section A.1 la solution du système de transformée de Fourier-Laplace des erreurs :

$$\widehat{E}_{W_\pm}^n = \widetilde{M}_\pm D_\pm(x) \alpha_\pm^n,$$

qu'on peut décomposer en

$$\begin{cases} \widehat{E}_{U_\pm}^n = \widetilde{M}_\pm^U D_\pm(x) \alpha_\pm^n, \\ \widehat{E}_{\phi_\pm}^n = \widetilde{M}_\pm^\phi D_\pm(x) \alpha_\pm^n. \end{cases}$$

En supposant que les matrices \widetilde{M}_\pm^U sont inversibles, on a $\partial_x \widehat{E}_{U_\pm}^n = -\widetilde{M}_\pm^U \Xi_\pm \widetilde{M}_\pm^{U-1} \widehat{E}_{U_\pm}^n$ (cf. section précédente). Par conséquent,

$$\begin{aligned} -\nu \frac{\partial \widehat{E}_{U_+}^n}{\partial x} + u_0 \widehat{E}_{U_+}^n + c \widehat{E}_{\phi_+}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \left(\widetilde{D} \widetilde{M}_+^U \Xi_+ \widetilde{M}_+^{U-1} + H^U \right) \widehat{E}_{W_+}^n \\ -\nu \frac{\partial \widehat{E}_{U_-}^n}{\partial x} + u_0 \widehat{E}_{U_-}^n + c \widehat{E}_{\phi_-}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \left(\widetilde{D} \widetilde{M}_-^U \Xi_- \widetilde{M}_-^{U-1} + H^U \right) \widehat{E}_{W_-}^n, \\ c \widehat{E}_{u_+}^n + u_0 \widehat{E}_{\phi_+}^n &= H^\phi \widehat{E}_{W_+}^n \\ \text{et } c \widehat{E}_{u_-}^n + u_0 \widehat{E}_{\phi_-}^n &= H^\phi \widehat{E}_{W_-}^n \end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \end{pmatrix}, \quad H^U = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & c \\ 0 & u_0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H^\phi = \begin{pmatrix} c & 0 & u_0 \end{pmatrix}.$$

Les conditions absorbantes sont alors obtenues en choisissant comme symboles de Fourier-Laplace des opérateurs pseudo-différentiels Λ_U^\pm

$$\widehat{\Lambda}_U^\pm = \widetilde{D} \widetilde{M}_\pm^U \Xi_\pm \widetilde{M}_\pm^{U-1} + H^U$$

et comme opérateurs (non pseudo-différentiels) $\Lambda_\phi^\pm = \widehat{\Lambda}_\phi^\pm = H^\phi$.

A.4 Conditions aux limites optimisées

Comme les opérateurs pseudo-différentiels Λ_U^\pm ne sont (probablement) pas locaux et ne peuvent pas être utilisés directement, il faut les approcher. Les conditions d'ordre 0 correspondent au cas où la forme des opérateurs approchés est la plus simple :

$$\Lambda_{U0}^\pm = \begin{pmatrix} \lambda_{uu} & \lambda_{uv} & \lambda_{u\phi} \\ \lambda_{vu} & \lambda_{vv} & \lambda_{v\phi} \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_{..} \in \mathbb{R}$.

L'approximation des conditions de transmission exactes peut être réalisée en développant les matrices $\widehat{\Lambda}_U^\pm$, obtenues dans la section précédente, selon certains paramètres. Pour cela, il faut connaître l'expression exacte de ces matrices, et donc celle des racines ξ_j . Il faut donc choisir un paramètre relativement petit et reprendre le problème A.4 en développant les termes en séries du paramètre choisi.

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet COMMA par Véronique Martin (communication personnelle), qui a déterminé les conditions absorbantes locales pour le problème de Saint-Venant complet en adimensionnalisant et en développant le problème en $\varepsilon = U/(\mathbf{f} L)$, le nombre de Rossby, avec U la vitesse et la longueur caractéristiques du problème, puis en négligeant le nombre de Rossby. Les résultats devraient paraître prochainement.

Annexe B

Équations d'advection-diffusion harmonique 3-D

B.1 Démonstrations de convergence dans \mathbb{R}^3

On va suivre la même démarche que Martin [Mar05, section 7] pour démontrer la convergence de l'algorithme de Scharz (2) avec les conditions approchées d'ordre 0 ou 1 vers la solution du problème général (1).

(\cdot, \cdot) représente le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

On définit un nouvel opérateur

$$\mathcal{S}^s = -\frac{1}{\nu_h} [\partial_t + b_y \partial_y + b_z \partial_z - \nu_h \partial_{yy} - \nu_z \partial_{zz}].$$

L'opérateur d'advection-diffusion harmonique (3.11) s'écrit alors

$$\mathcal{L} = -\nu_h \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a \frac{\partial}{\partial x} - \nu_h \mathcal{S}^s,$$

ou encore

$$\mathcal{L} = -\nu_h \left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{S}_j^+ \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{S}_j^- \right) + \nu_h (\mathcal{S}_j^+ \mathcal{S}_j^- - \mathcal{S}^s), \quad \forall j \in \{0, 1\}.$$

Remarque : Comme les coefficients des opérateurs différentiels \mathcal{S}_j , $\forall j \in \{0, 1\}$, sont constants, ils commutent : $\mathcal{S}_j^- \mathcal{S}_j^+ = \mathcal{S}_j^+ \mathcal{S}_j^-$ et $(\partial_x - \mathcal{S}_j^+) (\partial_x - \mathcal{S}_j^-) = (\partial_x - \mathcal{S}_j^-) (\partial_x - \mathcal{S}_j^+)$.

Lemme B.1.1. *Si u est solution de $\mathcal{L}u = 0$ dans $\Omega^- \times \mathbb{R}^+$, alors $\forall j \in \{0, 1\}$, on a*

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_h}{2} \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^+ u \right|^2 dy dz - \frac{\nu_h}{2} \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^- u \right|^2 dy dz + \nu_h \left((\mathcal{S}_j^+ - \mathcal{S}_j^-) \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\Omega^-} \\ & + a \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^+ u \right)_{\Omega^-} - a \left(\mathcal{S}_j^+ \frac{\partial u}{\partial x}, u \right)_{\Omega^-} - \nu_h (\mathcal{S}^s u, (\mathcal{S}_j^+ - \mathcal{S}_j^-) u)_{\Omega^-} = 0. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Démonstration. Identique à celle du lemme 21 de Martin [Mar05]. \square

B.1.1 Conditions d'interface d'ordre 0

Théorème B.1.1. *Si f est dans $L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ et si w_0 est dans $H^1(\Omega)$, alors, pour $p > 0$, l'algorithme (2) initialisé avec*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u^0 &= f \text{ dans } \Omega^- \times \mathbb{R}^+, & u^0(\cdot, \cdot, 0) &= w_0 \text{ dans } \Omega^-, & \mathcal{B}_0^- u^0 &= g \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{L}v^0 &= f \text{ dans } \Omega^+ \times \mathbb{R}^+, & v^0(\cdot, \cdot, 0) &= w_0 \text{ dans } \Omega^+, & \mathcal{B}_0^+ v^0 &= h \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

où g et h sont dans $H^{1/2,1/4}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$, converge dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega^-)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega^-)) \times L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega^+)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega^+))$ vers la solution du système (1).

Démonstration. L'erreur dans Ω^- à l'itération $n+1$ de l'algorithme (2) vérifie l'équation homogène $\mathcal{L}e_-^{n+1} = 0$ dans $\Omega^- \times \mathbb{R}^+$. On peut donc appliquer le lemme B.1.1. En remarquant que $(\partial_x u, \mathcal{S}_0^+ u)_{\Omega^-} = (\mathcal{S}_0^+ \partial_x u, u)_{\Omega^-}$, la formulation variationnelle (B.1) appliquée à e_-^{n+1} devient

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_h}{2} \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_0^+ e_-^{n+1} \right|^2 dy dz - \frac{\nu_h}{2} \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_0^- e_-^{n+1} \right|^2 dy dz + p \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} \right\|_{\Omega^-}^2 \\ & + \frac{p}{\nu_h} \left(\frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial t} + b_y \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial y} + b_z \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial z} - \nu_h \frac{\partial^2 e_-^{n+1}}{\partial y^2} - \nu_z \frac{\partial^2 e_-^{n+1}}{\partial z^2}, e_-^{n+1} \right)_{\Omega^-} = 0. \end{aligned}$$

Or on a $(\partial_t e_-^{n+1}, e_-^{n+1})_{\Omega^-} = \frac{1}{2} dt \|e_-^{n+1}\|_{\Omega^-}^2$. En outre, comme la normale à l'interface $\Gamma = \{x=0\}$ a pour coordonnées $(n_x, n_y, n_z) = (1, 0, 0)$, on a $(\partial_y e_-^{n+1}, e_-^{n+1})_{\Omega^-} = 0$, $(\partial_z e_-^{n+1}, e_-^{n+1})_{\Omega^-} = 0$, $(\partial_{yy} e_-^{n+1}, e_-^{n+1})_{\Omega^-} = -\|\partial_y e_-^{n+1}\|_{\Omega^-}^2$ et $(\partial_{zz} e_-^{n+1}, e_-^{n+1})_{\Omega^-} = -\|\partial_z e_-^{n+1}\|_{\Omega^-}^2$. On obtient alors

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_h}{2} \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_0^+ e_-^{n+1} \right|^2 dy dz - \frac{\nu_h}{2} \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_0^- e_-^{n+1} \right|^2 dy dz + p \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} \right\|_{\Omega^-}^2 \\ & + \frac{p}{2\nu_h} \frac{d}{dt} \|e_-^{n+1}\|_{\Omega^-}^2 + p \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial y} \right\|_{\Omega^-}^2 + \frac{p\nu_z}{\nu_h} \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial z} \right\|_{\Omega^-}^2 = 0. \end{aligned}$$

D'après les conditions à l'interface Γ , $\partial_x e_-^{n+1} - \mathcal{S}_0^- e_-^{n+1} = \partial_x e_+^n - \mathcal{S}_0^- e_+^n$. L'équation précédente devient

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_h}{2} \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_0^+ e_-^{n+1} \right|^2 dy dz + \frac{p}{2\nu_h} \frac{d}{dt} \|e_-^{n+1}\|_{\Omega^-}^2 \\ & + p \left(\left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} \right\|_{\Omega^-}^2 + \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial y} \right\|_{\Omega^-}^2 + \frac{\nu_z}{\nu_h} \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial z} \right\|_{\Omega^-}^2 \right) = \frac{\nu_h}{2} \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial e_+^n}{\partial x} - \mathcal{S}_0^- e_+^n \right|^2 dy dz. \end{aligned}$$

Une équation similaire est vérifiée dans Ω^+ . En ajoutant les deux équations, en faisant la somme de ces équations pour les itérations $n \in [0, N]$ et en minorant les coefficients des termes $\|\nabla e_-^{n+1}\|_{\Omega^-}^2$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_h}{2} \left(\iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial e_-^{N+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_0^+ e_-^{N+1} \right|^2 dy dz + \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial e_+^{N+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_0^- e_+^{N+1} \right|^2 dy dz \right) \\ & + \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^N \frac{p}{2\nu_h} \left(\|e_-^{n+1}\|_{\Omega^-}^2 + \|e_+^{n+1}\|_{\Omega^+}^2 \right) \\ & + \sum_{n=0}^N \min(p, p \frac{\nu_z}{\nu_h}) \left(\|\nabla e_-^{n+1}\|_{\Omega^-}^2 + \|\nabla e_+^{n+1}\|_{\Omega^+}^2 \right) \\ & \leq \frac{\nu_h}{2} \left(\iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial e_-^0}{\partial x} - \mathcal{S}_0^+ e_-^0 \right|^2 dy dz + \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial e_+^0}{\partial x} - \mathcal{S}_0^- e_+^0 \right|^2 dy dz \right). \end{aligned}$$

Comme $p > 0$ par hypothèse, après minoration des termes de l'itération $N+1$ (positifs) et après intégration sur $(0, t)$ de l'inégalité, on obtient

$$0 \leq \sum_{n=0}^N (F_-^n + F_+^n) \leq C, \quad (\text{B.2})$$

avec

$$F_{\pm}^n = \min\left(p, \frac{p\nu_z}{\nu_h}, \frac{p}{2\nu_h}\right) \left(\|e_{\pm}^{n+1}\|_{\Omega^{\pm}}^2 + \int_0^t \left(\|\nabla e_{\pm}^{n+1}\|_{\Omega^{\pm}}^2 \right) \right)$$

et

$$C = \frac{\nu_h}{2} \int_0^t \iint_{\Gamma} \left(|\partial_x e_-^0 - S_0^+ e_-^0|^2 + |\partial_x e_+^0 - S_0^- e_+^0|^2 \right) dy dz d\sigma$$

ne dépend pas du nombre d'itérations N . Les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} F_-^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} F_+^n$ sont convergentes. Par conséquent, F_-^n et F_+^n tendent vers 0 : l'algorithme converge dans les espaces spécifiés par le théorème. \square

B.1.2 Conditions d'interface d'ordre 1

Théorème B.1.2. *Si f est dans $H^{1,1/2}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ et si w_0 est dans $H^2(\Omega)$, alors, pour $q > 0$ et $p - \frac{a^2 q}{2} > 0$, l'algorithme (2) initialisé avec*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u^0 &= f \text{ dans } \Omega^- \times \mathbb{R}^+, & u^0(\cdot, \cdot, 0) &= w_0 \text{ dans } \Omega^-, & \mathcal{B}_1^- u^0 &= g \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{L}v^0 &= f \text{ dans } \Omega^+ \times \mathbb{R}^+, & v^0(\cdot, \cdot, 0) &= w_0 \text{ dans } \Omega^+, & \mathcal{B}_1^+ v^0 &= h \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

où g peut s'écrire

$$g = g_1 + \left(-\frac{a-p}{2\nu_h} + q \partial_t + b_y q \partial_y + b_z q \partial_z \right) g_0,$$

avec

$$g_0 \in H^{5/2,5/4}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+) \text{ et } g_1 \in H^{3/2,3/4}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+),$$

$$g_0(\cdot, \cdot, 0) = w_0(0, \cdot, \cdot) \text{ et } g_1(\cdot, \cdot, 0) = \frac{\partial w_0}{\partial x}(0, \cdot, \cdot) \text{ sur } \Gamma,$$

converge dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega^-)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega^-)) \times L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega^+)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega^+))$ vers la solution du système (1).

Démonstration. De la même façon que dans la démonstration du théorème B.1.1, on applique le lemme B.1.1 à l'erreur e_-^{n+1} de l'algorithme à l'itération $n+1$. Dans un premier temps, on explicite les quatre derniers termes de la formulation variationnelle (B.1) :

$$\nu_h \left((S_1^+ - S_1^-) \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\Omega^-} = p \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{\Omega^-}^2 + \nu_h q \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{\Omega^-}^2,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, S_1^+ u \right)_{\Omega^-} - \left(S_1^+ \frac{\partial u}{\partial x}, u \right)_{\Omega^-} &= 2q \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\Omega^-} + 2b_y q \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\Omega^-} + 2b_z q \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{\Omega^-} \\ &\quad - \frac{q}{2} \frac{d}{dt} \iint_{\Gamma} |u|^2 dy dz \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\nu_h (S^s u, (S_1^+ - S_1^-) u)_{\Omega^-} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{2\nu_h} \|u\|_{\Omega^-}^2 + \nu_h q \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{\Omega^-}^2 + \nu_z q \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{\Omega^-}^2 \right) + 2q \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{\Omega^-}^2 \\ &\quad + (p + 2b_y^2 q) \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{\Omega^-}^2 + \left(\frac{\nu_z}{\nu_h} p + 2b_z^2 q \right) \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{\Omega^-}^2 \\ &\quad + 4b_y q \left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\Omega^-} + 4b_z q \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\Omega^-} + 4b_y b_z q \left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{\Omega^-}. \end{aligned}$$

car $(\partial_{yy}u, \partial_y u)_{\Omega^-} = 0$, $(\partial_{zz}u, \partial_z u)_{\Omega^-} = 0$, $(\partial_{yy}u, \partial_z u)_{\Omega^-} = 0$ et $(\partial_{zz}u, \partial_y u)_{\Omega^-} = 0$, du fait que la normale à l'interface Γ dans Ω^- est $(n_x, n_y, n_z) = (1, 0, 0)$. Dans un deuxième temps, la formulation variationnelle (B.1) appliquée à e_-^{n+1} donne

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_h}{2} \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_1^+ e_-^{n+1} \right|^2 dy dz - \frac{\nu_h}{2} \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_1^- e_-^{n+1} \right|^2 dy dz \\ & + \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{2\nu_h} \|e_-^{n+1}\|_{\Omega^-}^2 + \nu_h q \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} \right\|_{\Omega^-}^2 + \nu_h q \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial y} \right\|_{\Omega^-}^2 + \nu_z q \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial z} \right\|_{\Omega^-}^2 - \frac{aq}{2} \iint_{\Gamma} |e_-^{n+1}|^2 dy dz \right) \\ & + p \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} \right\|_{\Omega^-}^2 + (p + 2b_y^2 q) \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial y} \right\|_{\Omega^-}^2 + \left(\frac{\nu_z}{\nu_h} p + 2b_z^2 q \right) \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial z} \right\|_{\Omega^-}^2 + 2q \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial t} \right\|_{\Omega^-}^2 \\ & + 2aq \left(\frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial t} \right)_{\Omega^-} + 2ab_y q \left(\frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial y} \right)_{\Omega^-} + 2ab_z q \left(\frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial z} \right)_{\Omega^-} \\ & + 4b_y q \left(\frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial y}, \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial t} \right)_{\Omega^-} + 4b_z q \left(\frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial z}, \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial t} \right)_{\Omega^-} + 4b_y b_z q \left(\frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial y}, \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial z} \right)_{\Omega^-} = 0. \end{aligned}$$

Comme les termes des deux dernières lignes sont égaux à

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{2q} \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial t} + \frac{a}{2} \sqrt{2q} \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} + b_y \sqrt{2q} \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial y} + b_z \sqrt{2q} \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial z} \right\|_{\Omega^-}^2 \\ & - 2q \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial t} \right\|_{\Omega^-}^2 - \frac{a^2 q}{2} \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} \right\|_{\Omega^-}^2 - 2qb_y^2 \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial y} \right\|_{\Omega^-}^2 - 2qb_z^2 \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial z} \right\|_{\Omega^-}^2, \end{aligned}$$

la formulation variationnelle se simplifie. En remarquant que le terme de la première ligne ci-dessus est positif et que les conditions à l'interface impliquent que $\partial_x e_-^{n+1} - \mathcal{S}_1^- e_-^{n+1} = \partial_x e_+^n - \mathcal{S}_1^+ e_+^n$, on obtient l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_h}{2} \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_1^+ e_-^{n+1} \right|^2 dy dz \\ & + \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{2\nu_h} \|e_-^{n+1}\|_{\Omega^-}^2 + \min(\nu_h q, \nu_z q) \|\nabla e_-^{n+1}\|_{\Omega^-}^2 - \frac{aq}{2} \iint_{\Gamma} |e_-^{n+1}|^2 dy dz \right) \\ & + \left(p - \frac{a^2 q}{2} \right) \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial x} \right\|_{\Omega^-}^2 + p \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial y} \right\|_{\Omega^-}^2 + \frac{\nu_z}{\nu_h} p \left\| \frac{\partial e_-^{n+1}}{\partial z} \right\|_{\Omega^-}^2 \\ & \leq \frac{\nu_h}{2} \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial e_+^n}{\partial x} - \mathcal{S}_1^- e_+^n \right|^2 dy dz. \end{aligned}$$

En ajoutant l'inégalité similaire vérifiée dans Ω^+ , en intégrant sur $(0, t)$ et en faisant la somme pour les itérations $n \in [0, N]$, on obtient une inégalité semblable à (B.2). En faisant tendre N vers l'infini et en suivant un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème B.1.1, on obtient la convergence des erreurs e_{\pm}^n vers 0 dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega^\pm)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega^\pm))$. \square

Annexe C

Équations d'advection-diffusion biharmonique

C.1 Système discret dans le cas simplifié 1-D sans advection

On indique ici l'expression des coefficients des matrices et du vecteur charge du système discrétisé (4.42) dans le cas où l'advection est nulle ($\vec{c} = 0$). On donne aussi la matrice jacobienne des fonctions de base des éléments finis de Hermite, qui permet de calculer la semi-norme $H^1(\Omega)$ de l'erreur, et donc sa norme $H^2(\Omega)$.

C.1.1 Matrice de masse

La matrice de masse \mathcal{M}_h fait intervenir les coefficients $\langle \phi_j, \phi_l \rangle$, $\langle \psi_j, \phi_l \rangle$, $\langle \psi_j, \psi_l \rangle$, donnés dans le tableau ci-dessous.

	$\langle \phi_j, \phi_l \rangle$	$\langle \psi_j, \phi_l \rangle$	$\langle \psi_j, \psi_l \rangle$
$l = j = 1$	$\frac{13}{35}h$	$\frac{11}{210}h^2$	$\frac{1}{105}h^3$
$l = j - 1$	$\frac{9}{70}h$	$-\frac{13}{420}h^2$	$-\frac{1}{140}h^3$
$l = j \in [2, N_x - 1]$	$\frac{26}{35}h$	0	$\frac{2}{105}h^3$
$l = j + 1$	$\frac{9}{70}h$	$\frac{13}{420}h^2$	$-\frac{1}{140}h^3$
$l = j = N_x$	$\frac{13}{35}h$	$-\frac{11}{210}h^2$	$\frac{1}{105}h^3$
ailleurs	0	0	0

C.1.2 Matrice de rigidité

Sans advection, les coefficients de la matrice de rigidité \mathcal{K}_h sont

$$\begin{aligned}
 a_i(\phi_j, \phi_l) &= \nu [\langle \Delta \phi_j, \Delta \phi_l \rangle + \delta_{jl} \delta_{j1} CT_1(\phi_1, \phi_1) + \delta_{jl} \delta_{j, N_x} CT_{N_x}(\phi_{N_x}, \phi_{N_x})], \\
 a_i(\psi_j, \phi_l) &= \nu [\langle \Delta \psi_j, \Delta \phi_l \rangle + \delta_{jl} \delta_{j1} CT_1(\psi_1, \phi_1) + \delta_{jl} \delta_{j, N_x} CT_{N_x}(\psi_{N_x}, \phi_{N_x})], \\
 a_i(\phi_j, \psi_l) &= \nu [\langle \Delta \phi_j, \Delta \psi_l \rangle + \delta_{jl} \delta_{j1} CT_1(\phi_1, \psi_1) + \delta_{jl} \delta_{j, N_x} CT_{N_x}(\phi_{N_x}, \psi_{N_x})], \\
 a_i(\psi_j, \psi_l) &= \nu [\langle \Delta \psi_j, \Delta \psi_l \rangle + \delta_{jl} \delta_{j1} CT_1(\psi_1, \psi_1) + \delta_{jl} \delta_{j, N_x} CT_{N_x}(\psi_{N_x}, \psi_{N_x})].
 \end{aligned}$$

	$\langle \Delta \phi_j, \Delta \phi_l \rangle$	$\langle \Delta \psi_j, \Delta \phi_l \rangle$	$\langle \Delta \psi_j, \Delta \psi_l \rangle$
$l = j = 1$	$\frac{12}{h^3}$	$\frac{6}{h^2}$	$\frac{4}{h}$
$l = j - 1$	$-\frac{12}{h^3}$	$\frac{6}{h^2}$	$\frac{2}{h}$
$l = j \in [2, N_x - 1]$	$\frac{24}{h^3}$	0	$\frac{8}{h}$
$l = j + 1$	$-\frac{12}{h^3}$	$-\frac{6}{h^2}$	$\frac{2}{h}$
$l = j = N_x$	$\frac{12}{h^3}$	$-\frac{6}{h^2}$	$\frac{4}{h}$
ailleurs	0	0	0

Dans le cas de conditions aux interfaces de type $\mathcal{B}^\pm = \mathcal{T}^\pm - A \mathcal{S}^\pm$ (cf. page 62 avec $A^+ = A^-$), les coefficients CT_1 et CT_{N_x} induits par les conditions de transmission sont donnés dans le tableau suivant.

	$CT_j(\phi_j, \phi_j)$	$CT_j(\psi_j, \phi_j)$	$CT_j(\phi_j, \psi_j)$	$CT_j(\psi_j, \psi_j)$
$j = 1$	α_2	$-\alpha_1$	β_2	$-\beta_1$
$j = N_x$	α_2	α_1	$-\beta_2$	$-\beta_1$

C.1.3 Vecteur charge

Sans advection, dans le cas de conditions aux interfaces de type $\mathcal{B}^\pm = \mathcal{T}^\pm - A \mathcal{S}^\pm$ (cf. page 63 avec $A^+ = A^-$), les coefficients du vecteur charge b_h sont

$$\begin{aligned} b_i(\phi_l) &= \langle f, \Delta \phi_l \rangle - \nu (\delta_{l1} g_{3,i}^- + \delta_{l, N_x} g_{3,i}^+), \\ b_i(\psi_l) &= \langle f, \Delta \psi_l \rangle - \nu (\delta_{l1} g_{2,i}^- - \delta_{l, N_x} g_{2,i}^+). \end{aligned}$$

Les produits scalaires $\langle f, \phi_l \rangle$ et $\langle f, \psi_l \rangle$ peuvent être calculés par des formules de quadrature.

C.1.4 Matrice jacobienne

La matrice jacobienne des fonctions de base des éléments finis de Hermite fait intervenir les coefficients $\langle \partial_x \phi_j, \partial_x \phi_l \rangle$, $\langle \partial_x \psi_j, \partial_x \phi_l \rangle$, $\langle \partial_x \psi_j, \partial_x \psi_l \rangle$, donnés dans le tableau ci-dessous.

	$\langle \partial_x \phi_j, \partial_x \phi_l \rangle$	$\langle \partial_x \psi_j, \partial_x \phi_l \rangle$	$\langle \partial_x \psi_j, \partial_x \psi_l \rangle$
$l = j = 1$	$\frac{6}{5h}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}h$
$l = j - 1$	$-\frac{6}{5h}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{30}h$
$l = j \in [2, N_x - 1]$	$\frac{12}{5h}$	0	$\frac{4}{15}h$
$l = j + 1$	$-\frac{6}{5h}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{30}h$
$l = j = N_x$	$\frac{6}{5h}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}h$
ailleurs	0	0	0

C.2 Équation d'advection-diffusion bi-harmonique 2D : approche par développement en série de la viscosité

ν

C.2.1 Transformée de Fourier-Laplace

Dans le cas d'une équation d'advection-diffusion bi-harmonique, l'opérateur du système (1) est défini par la relation

$$\mathcal{L} = \partial_t + \vec{c} \cdot \nabla + \Delta(A_h \Delta), \quad (\text{C.1})$$

où $\vec{c} = (a, b)^t$ est un champ de vitesse constant et $A_h > 0$ dépend de la taille des mailles¹. On suppose ici que le pas d'espace est constant, de sorte que le terme $A_h = \nu$ est constant. Dans $\Omega = \mathbb{R}^2$, cet opérateur s'écrit alors

$$\mathcal{L} = \partial_t + a \partial_x + b \partial_y + \nu (\partial_{4x} + \partial_{4y} + 2 \partial_{2x2y}). \quad (\text{C.2})$$

Les erreurs vérifient l'algorithme (3.1), où la transformée de Fourier-Laplace² de l'opérateur \mathcal{L} est

$$\widehat{\mathcal{L}} = \nu \partial_{4x} - 2 \nu k^2 \partial_{2x} + a \partial_x + (s + i b k + \nu k^4).$$

L'équation quartique correspondant à l'équation caractéristique dans chaque sous-domaine,

$$\nu \sigma^4 - 2 \nu k^2 \sigma^2 + a \sigma + [s + i b k + \nu k^4] = 0, \quad (\text{C.3})$$

a 4 racines complexes $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_d$.

C.2.2 Racines de l'équation quartique

Maple permet de trouver les quatre solutions complexes de l'équation quartique correspondant à la transformée de Fourier du problème (équation (C.3) dans laquelle $s = i\omega$) :

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[\lambda + (-\alpha - \beta)^{1/2} \right], \\ \sigma_b &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[\lambda - (-\alpha - \beta)^{1/2} \right], \\ \sigma_c &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[-\lambda + (-\alpha + \beta)^{1/2} \right], \\ \sigma_d &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[-\lambda - (-\alpha + \beta)^{1/2} \right], \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(\frac{8 k^2 \nu A^{1/3} + 4^{1/3} A^{2/3} + B}{\nu A^{1/3}} \right)^{1/2}, \\ \alpha &= \frac{-16 k^2 \nu A^{1/3} + 4^{1/3} A^{2/3} + 16 \cdot 4^{2/3} \nu^2 k^4 + i 12 \cdot 4^{2/3} \nu (\omega + b k)}{\nu A^{1/3}}, \\ \beta &= \frac{12\sqrt{6} a}{\nu \lambda}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \nu \left\{ 128 \nu^2 k^6 + 27 a^2 + i 144 \nu k^2 (\omega + b k) \right. \\ &\quad \left. + 3\sqrt{3} \left[256 \nu^2 k^4 (b^2 k^2 + 2 b k \omega + \omega^2 + k^2 a^2) + 27 a^4 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i 32 \nu (8 b^3 k^3 + 24 b^2 k^2 \omega + 24 b k \omega^2 + 8 \omega^3 + 9 k^3 b a^2 + 9 k^2 \omega a^2) \right]^{1/2} \right\}, \\ B &= 4^{5/3} [4 \nu^2 k^4 + i 3 \nu (\omega + b k)]. \end{aligned}$$

Lorsque le domaine Ω est décomposé en deux sous-domaines $\Omega^- = \{x < 0\}$ et $\Omega^+ = \{x > 0\}$, la solution dans le sous-domaine Ω^- (resp. Ω^+) s'exprime en fonction des racines dont la partie réelle est positive (resp. négative). Malheureusement, il est impossible de déterminer le signe de la partie réelle de chacune de ces racines à partir des expressions ci-dessus.

¹Dans le logiciel d'océanographie OPA, $A_h \propto \left(\frac{\Delta x}{\Delta x_0} \right)^3$.

² $(y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \xleftarrow{(\text{TFL})} (i k, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

C.2.3 Approximation en ν

Afin d'obtenir une approximation locale, on fait un développement des racines en série de ν : on pose $\sigma = \alpha \nu^{-1/3} + \beta + O(\nu^{1/3})$. L'identification des termes aux ordres les moins élevés dans l'équation (C.3) donne les équations suivantes :

1. en $O(\nu^{-1/3})$, $\alpha(\alpha^3 + a) = 0$,
2. en $O(1)$, $a\beta + 4\alpha^3\beta + (s + i b k) = 0$.

La résolution de la première équation donne $\alpha = 0$ et $\alpha = (-a)^{1/3}$. Celle de la deuxième donne $\beta = -(s + i b k)/(a + 4\alpha^3)$. Les solutions de l'équation quartique sont donc de la forme

$$\begin{cases} \sigma_A &= & - \frac{(s + i b k)}{a} + O(\nu^{1/3}), \\ \sigma_{B,C,D} &= & \left(\frac{-a}{\nu}\right)^{1/3} + \frac{(s + i b k)}{3a} + O(\nu^{1/3}). \end{cases}$$

Nota : la dernière équation est en fait constituée de plusieurs équations dans \mathbb{C} . En effet, $(-a)^{1/3} = (-a)^{1/3} e^{i(2m\pi)/3} = a^{1/3} e^{i(\pi+2m'\pi)/3}$, $m \in \{-1, 0, 1\}$, $m' \in \{-1, 0, 1\}$.

- **Si $a < 0$** , alors $(-a) = |a|$ et $(-a)^{1/3} = |a|^{1/3} e^{i(2m\pi)/3}$, $m \in \{-1, 0, 1\}$. Les racines s'écrivent

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_A = & \frac{(s + i b k)}{|a|} + O(\nu^{1/3}), \\ \sigma_2 = \sigma_C = & \left|\frac{a}{\nu}\right|^{1/3} - \frac{(s + i b k)}{3|a|} + O(\nu^{1/3}), \\ \sigma_3 = \sigma_B = & -\frac{1}{2} \left|\frac{a}{\nu}\right|^{1/3} (1 + i\sqrt{3}) - \frac{(s + i b k)}{3|a|} + O(\nu^{1/3}), \\ \sigma_4 = \sigma_D = & -\frac{1}{2} \left|\frac{a}{\nu}\right|^{1/3} (1 - i\sqrt{3}) - \frac{(s + i b k)}{3|a|} + O(\nu^{1/3}). \end{cases}$$

- **Si $a > 0$** , alors $(-a)^{1/3} = |a|^{1/3} e^{i(\pi+2m'\pi)/3}$, $m' \in \{-1, 0, 1\}$. Les racines s'écrivent

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{B'} = & \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\nu}\right)^{1/3} (1 - i\sqrt{3}) + \frac{(s + i b k)}{3a} + O(\nu^{1/3}), \\ \sigma_2 = \sigma_{D'} = & \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\nu}\right)^{1/3} (1 + i\sqrt{3}) + \frac{(s + i b k)}{3a} + O(\nu^{1/3}), \\ \sigma_3 = \sigma_{C'} = & -\left(\frac{a}{\nu}\right)^{1/3} + \frac{(s + i b k)}{3a} + O(\nu^{1/3}), \\ \sigma_4 = \sigma_A = & -\frac{(s + i b k)}{a} + O(\nu^{1/3}). \end{cases}$$

Nota : Si $a = 0$, l'équation (C.3) devient bi-carrée. Elle admet alors 2 racines doubles. Il devient alors aussi simple de résoudre ce cas que celui sans advection déjà traité par Martin [Mar05]. On ne détaillera pas davantage ce cas ici.

On distingue deux cas.

1. On considère la transformée de Fourier-Laplace ($\mathcal{R}e(s) > 0$) à l'ordre $O(\nu^{1/3})$. Dans ce cas, les racines σ_1 et σ_2 sont de partie réelle positive, σ_3 et σ_4 de partie réelle négative. Les erreurs solutions de l'algorithme (3.1) sont alors

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{e}}_-^n(x, k, s) = \mu_1^n(k, s) e^{\sigma_1 x} + \mu_2^n(k, s) e^{\sigma_2 x} & \text{dans TF}(\Omega^-), \\ \widehat{\mathbf{e}}_+^n(x, k, s) = \mu_3^n(k, s) e^{\sigma_3 x} + \mu_4^n(k, s) e^{\sigma_4 x} & \text{dans TF}(\Omega^+). \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

2. On considère la transformée de Fourier (ou celle de Fourier-Laplace à l'ordre $O(1)$ en ν). Dans ce cas, la partie réelle de σ_A est nulle.

– Si $a < 0$, les erreurs s'écrivent

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{e}}_-^n(x, k, s) = \mu_1^n(k, s) + \mu_2^n(k, s) e^{\sigma_2 x} & \text{dans TF}(\Omega^-), \\ \widehat{\mathbf{e}}_+^n(x, k, s) = \mu_3^n(k, s) e^{\sigma_3 x} + \mu_4^n(k, s) e^{\sigma_4 x} & \text{dans TF}(\Omega^+). \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

– Si $a > 0$, les erreurs s'écrivent

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{e}}_-^n(x, k, s) = \mu_1^n(k, s) e^{\sigma_1 x} + \mu_2^n(k, s) e^{\sigma_2 x} & \text{dans TF}(\Omega^-), \\ \widehat{\mathbf{e}}_+^n(x, k, s) = \mu_3^n(k, s) e^{\sigma_3 x} + \mu_4^n(k, s) & \text{dans TF}(\Omega^+). \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

C.2.4 Conditions de transmission

Aucune des formulations précédentes ne permet de se ramener à une simple condition de la forme

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{e}}_{\pm}^n}{\partial x} = \lambda \widehat{\mathbf{e}}_{\pm}^n$$

dans chaque sous-domaine. . .

La forme des conditions à l'interface est choisie en se basant sur celles issues de la formulation variationnelle :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + a \left(\frac{\partial u}{\partial x}, v \right) + b \left(\frac{\partial u}{\partial y}, v \right) + \nu \left[\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, v \right) + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}, v \right) + 2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, v \right) \right] = (F, v).$$

Selon le choix de l'intégration par parties, on obtient diverses conditions de transmission proches les unes des autres :

1. Si on utilise $\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, v \right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \int_{\Gamma} \left(\gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} v - (1 - \gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x$, $\forall \gamma \in [0, 1]$, on obtient la formulation variationnelle

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + \frac{1}{2} a \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}, v \right) - \left(u, \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{2} b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}, v \right) - \left(u, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ & + \nu \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \\ & + \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{a}{2} u + \nu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \nu \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) v - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \nu (1 - \gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] n_x = (F, v) \end{aligned}$$

et par conséquent les conditions de transmission s'écrivent

$$\begin{cases} \left[\frac{a}{2} u + \nu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \nu \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right] = 0, \\ -\nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = 0, \\ -(1 - \gamma) \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] = 0, \end{cases} \quad \forall \gamma \in [0, 1],$$

en notant $[\cdot]$ le saut à l'interface.

2. Si on utilise $\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, v \right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$, on obtient la formulation variationnelle

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + \frac{1}{2} a \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}, v \right) - \left(u, \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{2} b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}, v \right) - \left(u, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ & + \nu \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \\ & + \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{a}{2} u + \nu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) v - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right] n_x = (F, v), \end{aligned}$$

ce qui donne comme conditions de transmission

$$\begin{cases} \left[\frac{a}{2}u + \nu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] = 0, \\ -\nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = 0. \end{cases}$$

3. Si on utilise $\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, v \right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} v - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x$, on obtient les conditions de transmission

$$\begin{cases} \left[\frac{a}{2}u + \nu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2\nu \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right] = 0, \\ -\nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0. \end{cases}$$

4. Par une combinaison des deux étapes précédentes, on obtient

$$\begin{cases} \left[\frac{a}{2}u + \nu \frac{\partial}{\partial x} (\Delta u) \right] = 0, \\ -\nu [\Delta u] = 0. \end{cases}$$

C.2.5 Conditions optimales dans un cas particulier

Considérons le cas particulier (et incorrect au point de vue de la formulation variationnelle) où on stipule que parmi les conditions à l'interface figure une condition de Robin. On déduit des conditions de transmission ci-dessus la forme de la deuxième condition : par exemple,

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + p u \right] = 0, \\ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q u \right] = 0. \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

a) Transformée de Fourier ou transformée de Fourier-Laplace à l'ordre $O(1)$

On applique ces conditions selon l'algorithme de Schwarz

$$\begin{cases} \mathcal{B}^- e_-^{n+1} = \mathcal{B}^- e_+^n \\ \mathcal{B}^+ e_+^{n+1} = \mathcal{B}^+ e_-^n \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma$$

aux erreurs définies par (C.5) ou (C.6).

Considérons le cas $a < 0$. On obtient les relations suivantes valables à l'interface $\{x = 0\}$

$$\begin{cases} \mu_1^{n+1} p^- + \mu_2^{n+1} (\sigma_2 + p^-) = \mu_3^n (\sigma_3 + p^-) + \mu_4^n (\sigma_4 + p^-), \\ \mu_1^{n+1} q^- + \mu_2^{n+1} (\sigma_2^2 + q^-) = \mu_3^n (\sigma_3^2 + q^-) + \mu_4^n (\sigma_4^2 + q^-), \\ \mu_3^{n+1} (\sigma_3 + p^+) + \mu_4^{n+1} (\sigma_4 + p^+) = \mu_1^n p^+ + \mu_2^n (\sigma_2 + p^+), \\ \mu_3^{n+1} (\sigma_3^2 + q^+) + \mu_4^{n+1} (\sigma_4^2 + q^+) = \mu_1^n q^+ + \mu_2^n (\sigma_2^2 + q^+), \end{cases}$$

autrement dit

$$\begin{cases} N_1^- \begin{pmatrix} \mu_1^{n+1} \\ \mu_2^{n+1} \end{pmatrix} = N_3^- \begin{pmatrix} \mu_3^n \\ \mu_4^n \end{pmatrix}, \\ N_3^+ \begin{pmatrix} \mu_3^{n+1} \\ \mu_4^{n+1} \end{pmatrix} = N_1^+ \begin{pmatrix} \mu_1^n \\ \mu_2^n \end{pmatrix}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_1^\pm = \begin{pmatrix} p^\pm & \sigma_2 + p^\pm \\ q^\pm & \sigma_2^2 + q^\pm \end{pmatrix}, \\ N_3^\pm = \begin{pmatrix} \sigma_3 + p^\pm & \sigma_4 + p^\pm \\ \sigma_3^2 + q^\pm & \sigma_4^2 + q^\pm \end{pmatrix}. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mu_1^{n+1} \\ \mu_2^{n+1} \end{pmatrix} = P_1^- \begin{pmatrix} \mu_3^n \\ \mu_4^n \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mu_3^{n+1} \\ \mu_4^{n+1} \end{pmatrix} = P_3^+ \begin{pmatrix} \mu_1^n \\ \mu_2^n \end{pmatrix}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_1^- = (N_1^-)^{-1} N_3^-, \\ P_3^+ = (N_3^+)^{-1} N_1^+, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \mu_1^{n+1} \\ \mu_2^{n+1} \\ \mu_3^{n+1} \\ \mu_4^{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mu_1^{n-1} \\ \mu_2^{n-1} \\ \mu_3^{n-1} \\ \mu_4^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad M = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_3 \end{array} \right), \quad \text{où} \quad \begin{cases} M_1 = P_1^- P_3^+, \\ M_3 = P_3^+ P_1^-. \end{cases}$$

Le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz est

$$\rho = \left| \frac{e_{\pm}^{n+1}}{e_{\pm}^{n-1}} \right| = \begin{cases} \left| \frac{\mu_1^{n+1} + \mu_2^{n+1} e^{\sigma_2 x}}{\mu_1^{n-1} + \mu_2^{n-1} e^{\sigma_2 x}} \right| & \text{dans } \Omega^-, \\ \left| \frac{\mu_3^{n+1} e^{\sigma_3 x} + \mu_4^{n+1} e^{\sigma_4 x}}{\mu_3^{n-1} e^{\sigma_3 x} + \mu_4^{n-1} e^{\sigma_4 x}} \right| & \text{dans } \Omega^+. \end{cases}$$

Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée. On a $\|(\mu_i^{n+1})\| \leq \|M\| \|(\mu_i^{n-1})\|$. La minimisation d'une norme subordonnée de la matrice M permet donc de majorer le taux de convergence. On résout alors le problème d'optimisation

$$\min_{\substack{p^-, q^- \\ p^+, q^+}} \max_{k, s} \|M\|,$$

avec $s = i\omega$, $(k, \omega) \in D$, où le domaine D est celui défini à la section 3.2.4.

Remarque. À l'ordre $O(1)$ en ν , les racines $(\sigma_i)_{i=1,4}$ ne dépendent pas de (k, s) , de sorte que le problème d'optimisation se réduit à chercher

$$\min_{\substack{p^-, q^- \\ p^+, q^+}} \|M\|.$$

Choix de la norme subordonnée. On utilisera

- soit la norme matricielle subordonnée à la norme l^1 :

$$\|M\|_1 = \max_{1 \leq j \leq 4} \sum_{i=1}^4 |M_{i,j}| = \max(\|M_1\|_1, \|M_3\|_1),$$

- soit la norme matricielle subordonnée à la norme l^∞ :

$$\|M\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 4} \sum_{j=1}^4 |M_{i,j}| = \max(\|M_1\|_\infty, \|M_3\|_\infty).$$

b) Transformée de Fourier-Laplace à l'ordre $O(\nu^{1/3})$

En appliquant les conditions (C.7) selon l'algorithme de Schwarz aux erreurs (C.4), on obtient les relations suivantes valables à l'interface $\{x = 0\}$

$$\begin{cases} \mu_1^{n+1}(\sigma_1 + p^-) + \mu_2^{n+1}(\sigma_2 + p^-) = \mu_3^n(\sigma_3 + p^-) + \mu_4^n(\sigma_4 + p^-), \\ \mu_1^{n+1}(\sigma_1^2 + q^-) + \mu_2^{n+1}(\sigma_2^2 + q^-) = \mu_3^n(\sigma_3^2 + q^-) + \mu_4^n(\sigma_4^2 + q^-), \\ \mu_3^{n+1}(\sigma_3 + p^+) + \mu_4^{n+1}(\sigma_4 + p^+) = \mu_1^n(\sigma_1 + p^+) + \mu_2^n(\sigma_2 + p^+), \\ \mu_3^{n+1}(\sigma_3^2 + q^+) + \mu_4^{n+1}(\sigma_4^2 + q^+) = \mu_1^n(\sigma_1^2 + q^+) + \mu_2^n(\sigma_2^2 + q^+), \end{cases}$$

autrement dit

$$\begin{cases} N_1^- \begin{pmatrix} \mu_1^{n+1} \\ \mu_2^{n+1} \end{pmatrix} = N_3^- \begin{pmatrix} \mu_3^n \\ \mu_4^n \end{pmatrix}, \\ N_3^+ \begin{pmatrix} \mu_3^{n+1} \\ \mu_4^{n+1} \end{pmatrix} = N_1^+ \begin{pmatrix} \mu_1^n \\ \mu_2^n \end{pmatrix}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_1^\pm = \begin{pmatrix} \sigma_1 + p^\pm & \sigma_2 + p^\pm \\ \sigma_1^2 + q^\pm & \sigma_2^2 + q^\pm \end{pmatrix}, \\ N_3^\pm = \begin{pmatrix} \sigma_3 + p^\pm & \sigma_4 + p^\pm \\ \sigma_3^2 + q^\pm & \sigma_4^2 + q^\pm \end{pmatrix}. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mu_1^{n+1} \\ \mu_2^{n+1} \end{pmatrix} = P_1^- \begin{pmatrix} \mu_3^n \\ \mu_4^n \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mu_3^{n+1} \\ \mu_4^{n+1} \end{pmatrix} = P_3^+ \begin{pmatrix} \mu_1^n \\ \mu_2^n \end{pmatrix}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_1^- = (N_1^-)^{-1} N_3^-, \\ P_3^+ = (N_3^+)^{-1} N_1^+, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \mu_1^{n+1} \\ \mu_2^{n+1} \\ \mu_3^{n+1} \\ \mu_4^{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mu_1^{n-1} \\ \mu_2^{n-1} \\ \mu_3^{n-1} \\ \mu_4^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad M = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_3 \end{array} \right), \quad \text{où} \quad \begin{cases} M_1 = P_1^- P_3^+, \\ M_3 = P_3^+ P_1^-. \end{cases}$$

Le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz est

$$\rho = \left| \frac{\mathbf{e}_-^{n+1}}{\mathbf{e}_-^{n-1}} \right| = \left| \frac{\mu_1^{n+1} e^{\sigma_1 x} + \mu_2^{n+1} e^{\sigma_2 x}}{\mu_1^{n-1} e^{\sigma_1 x} + \mu_2^{n-1} e^{\sigma_2 x}} \right| \text{ par exemple.}$$

Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée. On a $\|(\mu_i^{n+1})\| \leq \|M\| \|(\mu_i^{n-1})\|$. La minimisation d'une norme subordonnée de la matrice M permet donc de majorer le taux de convergence. On résout alors le problème d'optimisation

$$\boxed{\min_{\substack{p^-, q^- \\ p^+, q^+}} \max_{k, s} \|M\|},$$

avec $s = \eta + i\omega$, $(k, \omega) \in D$, où le domaine D est celui défini à la section 3.2.4, et $\eta \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé de sorte que la partie réelle des racines soit toujours du même signe.

Bibliographie

- [BD05] E. Blayo and L. Debreu. Revisiting open boundary conditions from the point of view of characteristic variables. *Ocean Modelling*, 9 :231–252, 2005.
- [BD06] E. Blayo and L. Debreu. *Ocean weather forecasting*, chapter 5 : Nesting ocean models, pages 127–146. Springer, 2006.
- [Bla06] Eric Blayo. Quelques notes sur le couplage océan - atmosphère. Mémo, 2006.
- [CFB⁺07] S. Cailleau, V. Fedorenko, B. Barnier, E. Blayo, and L. Debreu. Comparison of different open boundary, nesting, and coupling methods for a numerical model of the bay of biscay. *Ocean Modelling*, 2007.
- [EM77] Bjorn Engquist and Andrew Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of computation*, 31(139) :629–651, July 1977.
- [Fle91] C.A.J. Fletcher. *Computational techniques for fluid dynamics*. Springer series in computational physics. Springer, Berlin, 2nd ed. edition, 1991.
- [Hal91] Laurence Halpern. Artificial boundary conditions for incompletely parabolic perturbations of hyperbolic systems. *SIAM J. Math. Anal.*, 22(5) :1256–1283, September 1991.
- [Hal05] Laurence Halpern. Equations shallow-water visqueuses et non visqueuses : ABC. Mémo transmis à Eric Blayo, 10 septembre 2005.
- [HL99] Astrid Holstad and Ivar Lie. On transparent boundary conditions and nesting for ocean models. Technical Report 91, Norwegian Meteorological Institute (DNMI), Oslo, December 17 1999.
- [HS89] L. Halpern and M. Schatzmann. Artificial boundary conditions for incompressible flows. *SIAM Journal on Math. Anal.*, 20(2) :308–353, 1989.
- [Mar03] Véronique Martin. *Méthodes de décomposition de domaine de type relaxation d’ondes pour des équations de l’océanographie*. PhD thesis, Université Paris 13, 15 décembre 2003.
- [Mar05] Véronique Martin. An optimized Schwarz waveform relaxation method for the unsteady convection diffusion equation in two dimensions. *Applied Numerical Mathematics*, 52(4) :401–428, March 2005.
- [MDIL98] Gurvan Madec, Pascale Delecluse, Maurice Imbard, and Claire Lévy. OPA 8.1 ocean general circulation model reference manual. Technical Report 11, Institut Pierre-Simon Laplace (IPSL), 1998.
- [Nir73] L. Nirenberg. Lectures on linear partial differential equations. In *CBMS Regional Conf. Ser. in Math.*, number 17. Am. Math. Soc., 1973.
- [NRS95] F. Nataf, F. Rogier, and E. Sturler. *Navier-Stokes Equations and Related Nonlinear Analysis*, chapter Domain decomposition methods for fluid dynamics, pages 367–376. Plenum, New York, a. sequeira edition, 1995.

- [OS78] Joseph Oliger and Arne Sundström. Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics. *SIAM J. Appl. Math.*, 35(3) :419–446, November 1978.
- [Tay75] M. E. Taylor. Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(21) :457–478, 1975.



Centre de recherche INRIA Grenoble – Rhône-Alpes
655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Centre de recherche INRIA Futurs : Parc Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex

Centre de recherche INRIA Nancy – Grand Est : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex

Centre de recherche INRIA Rennes – Bretagne Atlantique : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex
Centre de recherche INRIA Paris – Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
Centre de recherche INRIA Sophia Antipolis – Méditerranée : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399