HAL open science

Notes sur la régularité Lipschitzienne

Christophe Damerval

To cite this version:

Christophe Damerval. Notes sur la régularité Lipschitzienne. 2007. inria-00188421

HAL Id: inria-00188421

https://inria.hal.science/inria-00188421v1

Preprint submitted on 16 Nov 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Notes sur la régularité Lipschitzienne

Christophe DAMERVAL

LJK, Grenoble, novembre 2007

Table des matières

Introduction – Notion de régularité α **1**

1 Construction des lignes de maxima **2**

1.1 Maxima multiéchelles associés à une image 2

1.1.1 Modules maxima en 2D 2

1.1.2 Maxima multiéchelles au sens de Canny 3

1.2 Lignes de Canny (LC) 4

1.2.1 Calcul multiéchelles des cartes 4

1.2.2 Règles de construction des LC 6

1.2.3 Complexité algorithmique 7

1.3 Construction des Maxima Lines (ML) 8

1.3.1 Calcul des cartes de MM 8

1.3.2 Règles de construction des ML 8

1.3.3 Complexité algorithmique 9

2 Propriétés des lignes de maxima **11**

2.1 Quelques propriétés des Maxima Lines 11

2.1.1 Dérive spatiale des ML 11

2.1.2 Evolution de la réponse le long des ML 11

2.1.3 Synthèse 12

2.2 Quelques propriétés des lignes de Canny 12

2.2.1 Dérive spatiale 12

2.2.2 Evolution de la réponse le long des LC 13

2.3 Comparaison des ML et et LC 14

3 Estimation et applications de la régularité Lipschitzienne **16**

3.1 Caractérisation de structures monodimensionnelles 16

3.2 Comparaison des méthodes d'estimations de la régularité 18

3.3 Robustesse de la régularité Lipschitzienne 19

3.3.1 Influence du bruit 20

3.3.2 Influence d'une rotation 21

3.3.3 Influence d'une déformation affine 22

Introduction

Nous présentons ici des résultats sur la régularité Lipschiztienne $\alpha \in \mathbb{R}$, dans un cadre bidimensionnel. L'intérêt de cette notion de régularité est qu'en un point présentant une discontinuité, la valeur de la régularité Lipschitzienne $\alpha \in \mathbb{R}$ donne une information sur le type de singularité.

Nous rappelons d'abord cette notion, reliée à la régularité d'un signal, et nous nous focalisons sur les régularités ponctuelles. Le calcul de telles régularités peut être réalisé grâce à des lignes de maxima – lignes de Canny (LC) et Maxima Lines (ML) – dont nous détaillons la construction.

Ainsi, les régularités sont estimées en des points associés à des singularités de l'image. D'une part, la régularité α permet de caractériser la singularité associée (point appartenant à une frontière par exemple) ; d'autre part, nous montrons que les LC apparaissent comme mieux adaptées quue les ML à l'estimation de α.

Nous montrons alors que la régularité Lipchitzienne, estimée de cette manière, constitue une grandeur robuste à différentes tranformation de l'image : ajout de bruit, rotation, déformations affines.

Notion de régularité en 2D

Définition 1. *(Régularité Lipschitzienne en 2D) Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sera dite α-Lipschitz (pour $\alpha \in]0,1[$, $||.||$ désignant une norme sur $\mathbb{R}^2$) en un point $v \in \mathbb{R}^2$ s'il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, |f(u) - f(v)| \leq K||u - v||^\alpha \tag{1}$$

Remarques :

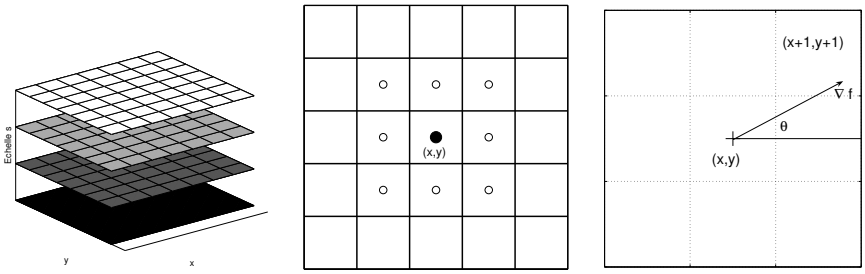
1. La régularité locale en $v \in \mathbb{R}^2$ est définie comme : $\alpha = \sup\{\alpha_0 / f \ \ \alpha_0-\text{Lipchitz au point } v\}$
2. Cette notion peut être étendue à $\alpha \in \mathbb{R}$ [6] ; en particulier, il est possible de définir la régularité en des points où f est non-différentiable (singularités) ;
3. f sera dite uniformément Lipschitz sur un ouvert Ω s'il existe une constante $K > 0$ telle que f soit α-Lipschitz en tout $v \in \Omega$;
4. Cette notion de régularité ne privilégie pas de direction particulière. Cependant, dans le cadre 2D, il existe souvent des directions privilégiées. Par exemple, suivant des contours, il est intéressant de remarquer que l'intensité est régulière dans la direction tangentielle au contour et irrégulière dans la direction normale (cette dernière étant donnée par la direction du gradient). Ceci justifie alors l'emploi de méthodes qui cherchent d'abord certaines directions particulières, puis estiment la régularité suivant cette direction (problème monodimensionnel).

1 Construction des lignes de maxima

1.1 Maxima multiéchelles associés à une image

Le cadre 2D conduit à différents types de maxima associés à une image, en particulier les modules maxima et les maxima au sens de Canny que nous présentons ici. Les décompositions en ondelettes et leurs extensions permettent d'établir des cartes de maxima multiéchelles : ainsi, en posant telle ou telle définition d'un maximum, à chaque échelle est associée une certaine carte, indiquant s'il y a ou non un maximum, associée à un certain coefficient réel ou complexe (coefficient d'ondelette par exemple, Fig. 1).

Pour certaines transformées (TOC, DTCWT), les cartes obtenues sont de même taille que l'image, ce qui permet une mise en correspondance immédiate entre les cartes et l'image. Pour d'autres transformées (comme les curvelets), la localisation des maxima dans la carte permet de déduire approximativement celle de la singularité dans l'image. Par ailleurs, relevons que la localisation des maxima d'une carte à une échelle quelconque ne correspond pas nécessairement à la localisation d'une singularité dans l'image, étant donné qu'à mesure que l'échelle croît, les différentes singularités interfèrent entre elles.



(A) (B) (C)

Fig. 1 – (A) Exemple de cartes multiéchelles ; (B) Module maximum : point où le module de la TOC admet un maximum local (maximum dans toutes les directions) ; (C) Maximum au sens de Canny : point où le module du gradient admet un maximum suivant la direction du gradient (maximum dans une direction particulière).

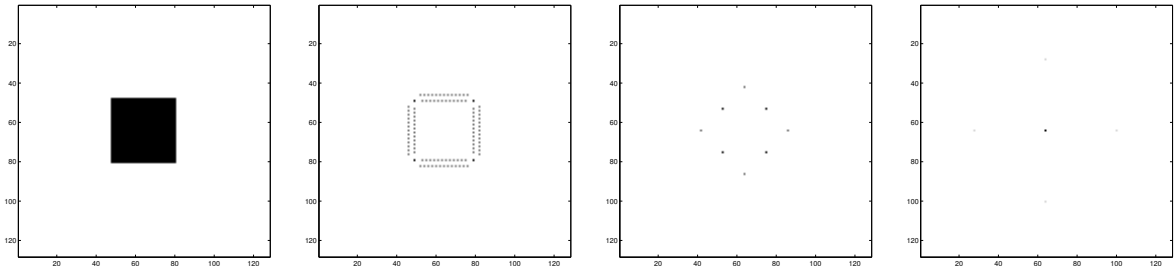
1.1.1 Modules maxima en 2D

Définition 2. *(Modules Maxima, MM) Etant donné un signal bidimensionnel f auquel est associé une décomposition en ondelette $Wf(.,.,s)_{s>0}$, les modules maxima à une échelle s sont définis comme les maxima locaux de $|Wf(.,.,s)|$.*

Remarquons que les modules maxima dépendent de l'ondelette choisie (nous privilégions ici l'ondelette ΔG). A titre d'exemple, nous représentons les MM de la TOC utilisant l'ondelette ΔG, sur une image simple (Fig. 2). Notons que lorsque l'échelle croît, le nombre de MM tend

à diminuer. De plus, certains MM dérivent vers l'extérieur du carré et d'autres vers l'intérieur. En outre, des résultats pratiques permettent de remarquer que ces MM correspondent à des singularités différentes :

- aux échelles fines, à des singularités bien localisées (coins, bords, points de contours) ;
- à de plus grandes échelles, à des entités présentant une certaine cohérence, ce que nous préciserons plus loin.



(A) (B) (C) (D)

FIG. 2 – Localisation des modules maxima (MM) de l'ondelette ΔG sur une image simple : (A) Carré ; (B) MM à l'échelle la plus fine ; (C) MM à une échelle intermédiaire ; (D) MM à une échelle grossière.

1.1.2 Maxima multiéchelles au sens de Canny

Les maxima au sens de Canny sont définis à partir du gradient de l'image [1], et plus précisément par son module et son orientation, qui s'expriment comme

$$\begin{cases} \text{Gradient de l'image} & \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \\ \text{Module du gradient} & |\nabla f| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \\ \text{Direction du gradient} & (0x, \nabla f) \end{cases}$$

Si f n'est pas suffisamment régulière, le gradient de l'image ∇f peut être néanmoins défini à l'aide de la théorie des distributions [13]. En pratique, l'image est d'abord convoluée avec un noyau régularisant, le gradient étant alors bien défini.

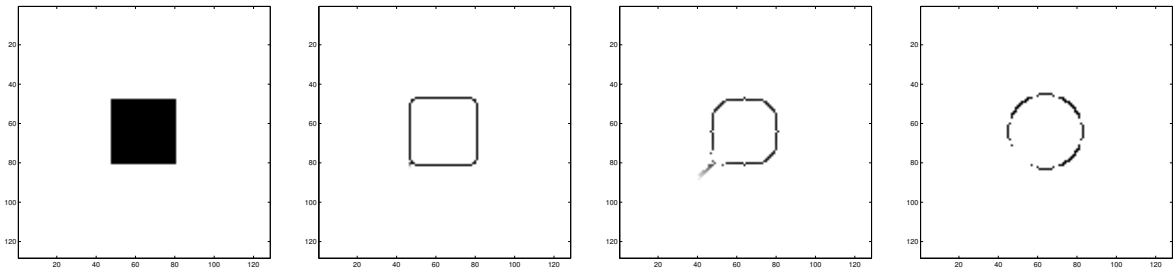
Définition 3. *(Maxima au sens de Canny, MC) Un point (x, y) est appelé maxima au sens de Canny si, dans la direction du gradient, le module du gradient est localement maximum.*

L'intérêt de ces maxima est qu'ils sont localisés sur des contours de l'image (Fig. 3). Une fois ces maxima détectés, il est possible d'estimer les contours en les regroupant de manière judicieuse [8]. Un détecteur efficace doit localiser précisément ces contours tout en étant robuste au bruit. A cet effet, l'algorithme suivant a été proposé [1, 5] :

1. Lissage de l'image par un noyau Gaussien :

$$L(x,y,s) = (f * G_s)(x,y) \quad \text{où } G_s(x,y) = \frac{1}{2\pi s^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2s^2}\right)$$

2. Calcul du gradient de l'image lissée ∇L, conduisant à son module $M = |\nabla L|_2$ et sa direction $A = (Ox, \nabla L)$;
3. Calcul des maxima de Canny à partir de M et A ;
4. Seuillage des maxima les plus significatifs, d'après le module M.



(A) (B) (C) (D)

FIG. 3 – Localisation des maxima de Canny (MC) multiéchelles : (A) Carré ; (B) MC à l'échelle la plus fine ; (C) MC à une échelle intermédiaire ; (D) MC à une échelle grossière.

1.2 Lignes de Canny (LC)

1.2.1 Calcul multiéchelles des cartes

Nous présentons ici un algorithme permettant de calculer des cartes de maxima au sens de Canny dans un cadre multiéchelles. Initialement, le détecteur de Canny considérait une échelle s fixée ; il est possible de l'étendre en une version multiéchelles, et de le formuler à l'aide d'une ondelette gradient [11].

Formulation multiéchelle utilisant une ondelette gradient

Définition 4. *(Ondelette gradient)*

Etant donné un noyau de lissage $\Lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, une ondelette gradient en 2D est définie comme

$$\Psi = \nabla\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Lambda}{\partial x} \\ \frac{\partial\Lambda}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} \tag{2}$$

Alors la transformée en ondelette (associée à Ψ, appliquée à f) s'écrit comme

$$Wf = \begin{pmatrix} W_x f \\ W_y f \end{pmatrix} \tag{3}$$

Dans le cas où le noyau régularisant est une Gaussienne 2D, il s'exprime comme le produit tensoriel de deux Gaussiennes 1D, ce qui simplifie le calcul de $W_x f$ et $W_y f$. En particulier, comme $\widehat{\psi_x}$ et $\widehat{\psi_y}$ admettent une expression analytique connue, nous pouvons utiliser la méthode de calcul présentée dans la section **??**. En posant $\Lambda_s = \frac{1}{s^2}\Lambda(-\frac{\cdot}{s}, -\frac{\cdot}{s})$, nous avons

$$\begin{aligned} W_x f &= s\partial_x(f * \Lambda_s) \\ W_y f &= s\partial_y(f * \Lambda_s) \end{aligned}$$

d'où il ressort

$$Wf = s\nabla L \tag{4}$$

Tab. 1 – Règles permettant de déterminer si (x, y) est un maxima au sens de Canny. La direction du gradient $\theta = Af$ détermine un point voisin PV ; si le module du gradient Mf en (x, y) est plus grand qu'en PV_θ et $\mathrm{PV}_{-\theta}$ (strictement dans au moins un des deux cas), alors (x, y) est un maxima au sens de Canny.

Valeurs de θ (mod.2π)					PV_θ
$-\pi/8$	$\leq$	θ	$<$	$\pi/8$	$(x+1, y)$
$\pi/8$	$\leq$	θ	$<$	$3\pi/8$	$(x+1, y)$
$3\pi/8$	$\leq$	θ	$<$	$5\pi/8$	(x, y)
$5\pi/8$	$\leq$	θ	$<$	$7\pi/8$	$(x-1, y)$
$7\pi/8$	$\leq$	θ	$<$	$-7\pi/8$	$(x-1, y)$
$-7\pi/8$	$\leq$	θ	$<$	$-5\pi/8$	$(x-1, y)$
$-5\pi/8$	$\leq$	θ	$<$	$-3\pi/8$	(x, y)
$-3\pi/8$	$\leq$	θ	$<$	$-\pi/8$	$(x+1, y)$

Détermination des maxima de Canny multiéchelles

Dans le cas où le noyau est Gaussien, le module du gradient s'exprime comme

$$Mf = \sqrt{|W_x f|^2 + |W_y f|^2} \tag{5}$$

En outre, l'orientation du gradient s'exprime comme $Af = Af(x, y, s)$:

$$Af = \begin{cases} \alpha(u) & \text{si } W_x f \geq 0 \\ \pi - \alpha(u) & \text{si } W_x f < 0 \end{cases} \quad \text{avec } \alpha(u) = \arctan\left(\frac{W_y f}{W_x f}\right) \tag{6}$$

Une fois Mf et Af calculés en tout (x, y, s), la règle permettant de déterminer si un point (x, y) est un maxima au sens de Canny (à une échelle s quelconque) est résumée dans le tableau 1. Les maxima multiéchelles de Canny sont alors de la forme $(x(s), y(s), s, Mf, Af)$ (nous représntons sur la figure 4 des exemples de tels maxima).

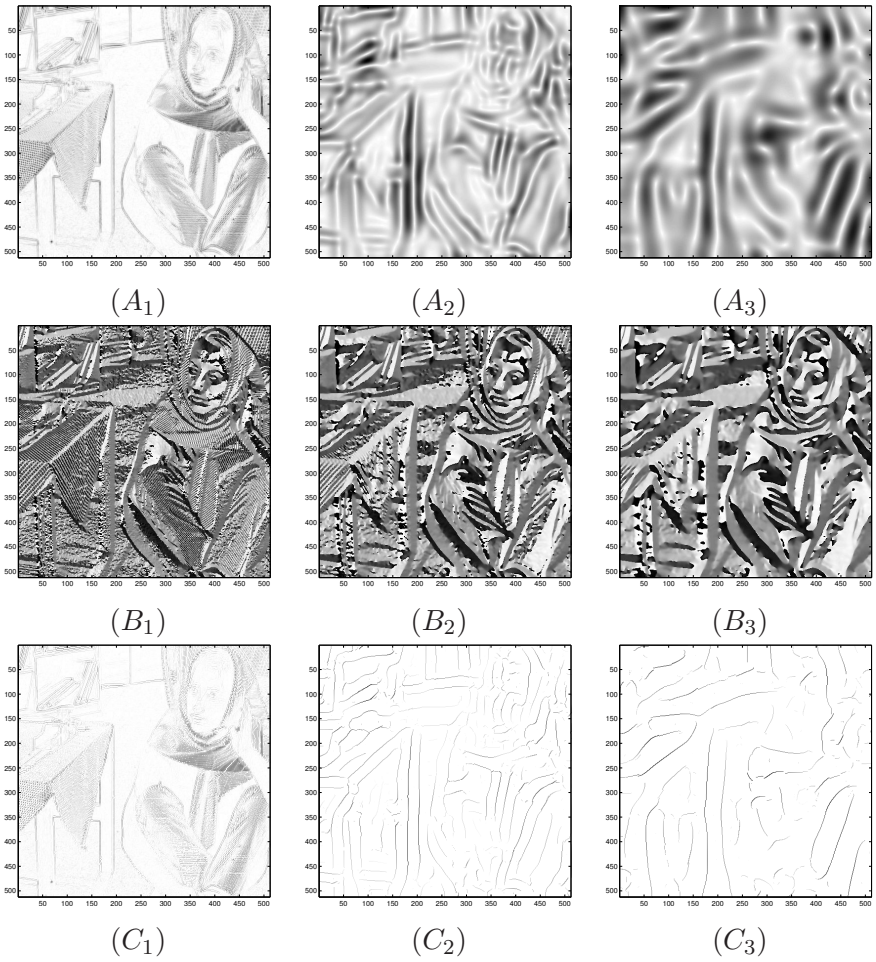


FIG. 4 – Maxima au sens de Canny pour une image naturelle *Barbara*, à différentes échelles s_i ($s_1 = 1, s_2 = 10, s_3 = 20$) : (A_i) Module du gradient ; (B_i) Orientation du gradient ; (C_i) Maxima au sens de Canny.

1.2.2 Règles de construction des LC

Nous présentons ici des règles permettant de définir empiriquement des chemins à travers les échelles de maxima au sens de Canny, appelées lignes de Canny (LC). Ces règles permettent de construire des lignes non triviales – par exemple, qui s'interrompraient trop rapidement – et surtout cohérentes avec le contenu de l'image. Ainsi, une ligne doit suivre un contour à travers les échelles : à mesure que l'échelle croît, le lissage sous-jacent est de plus en plus important et seul les contours les plus significatifs sont conservés. La règle de chaînage est la suivante : étant donné deux maxima au sens de Canny à des échelles successives, notés $(x_i, y_i, s_i, Mf_i, Af_i)$ ($i = 1$ ou 2), ils seront chaînables à condition que :

- (x_2, y_2) soit dans le voisinage 3×3 de (x_1, y_1) ;
- les angles Af_1 et Af_2 soient assez proches ($|Af_1 - Af_2| < \pi/4$).

Alors, pour la construction des LC, nous choisissons les maxima de Canny tels que l'orientation du gradient soit la plus stable possible le long de ces lignes.

Par ailleurs, notons que deux choix sont possibles pour le chaînage : depuis les petites vers les grandes échelles ou en sens inverse.

- dans le sens des échelles croissantes (en partant des échelles fines), il y aura un grand nombre de singularités détectées ; cependant, parmi celles-ci, nombreuses seront celles qui ne traverseront pas un nombre d'échelles suffisant, et qui ne seront pas exploitables. Notons qu'en parcourant les échelles dans le sens croissant, il est possible de décider qu'un maxima ne perdure pas de s à $s+1$, ce qui permet de gérer l'interruption de certaines lignes ;
- à l'inverse, dans le sens des échelles décroissantes (en partant des échelles grossières), nous garantissons que les lignes de maxima correspondront à des singularités significatives. Il apparaît alors l'importance du choix de l'échelle $s_{\max}$, qui doit être ajustée de manière à ce que suffisamment de maxima soient présents ($s_{\max} = 10$ constitue une valeur satisfaisante). Si nous supposons que les lignes ne s'interrompent pas lorsque l'échelle diminue, cela implique que tout maxima à l'échelle s doit être chaîné à un autre maxima à l'échelle $s-1$.

Ainsi suivant les échelles considérées, l'un ou l'autre sens de parcours pourra être utilisé : dans le sens décroissant si $s_{\max}$ est petit et dans le sens croissant si $s_{\max}$ est grand ; dans ce dernier cas, il est important de réussir à chaîner jusqu'aux plus petites échelles, et de s'assurer qu'aucune ligne de maxima n'est perdue (cf. adéquation entre lignes théoriques et règles de chaînage). Notons enfin que dans le cas du chaînage dans le sens des échelles décroissantes, nous excluons des lignes de Canny qui s'interrompent prématurément : ceci est justifié par le fait que seuls les contours les plus significatifs nous intéressent.

Tab. 2 – Temps de calcul (en secondes) de la construction des LC pour des images de taille $n \times n$, $1 \leq s \leq s_{\max} = 10$.

n	64	128	256	512
Carré	2.06	7.35	32.1	144
Carré bruité	3.73	25.1	346	5911
Barbara	X	X	168	22291

1.2.3 Complexité algorithmique

Pour des données de taille N ($N = n_1 \times n_2$ pour une image de taille (n_1, n_2)), le coût du calcul des cartes est $O(N \log N)$. En notant N_1 (resp. $N_{\max}$) le nombre de maxima de Canny à l'échelle $s = 1$ (resp. $s = s_{\max}$), le coût associé à la construction des lignes de Canny est $O(N_1)$ (resp. $O(N_{max})$). Vu que $N_{max} << N_1$, le coût de calcul est moindre pour un chaînage dans

le sens des échelles décroissantes. Enfin, comme $N_1 < N$, le détecteur de Canny multiéchelle a une complexité en $O(N \log N)$. A titre d'exemple nous mentionnons des temps de calculs obtenus sous *matlab* (Tab. 2).

1.3 Construction des Maxima Lines (ML)

Nous détaillons ici la construction des ML : le calcul des cartes de MM et les règles permettant de chaîner ces MM d'une échelle à une autre. Rappelons que chaque MM considéré est un maximum en espace, les cartes étant établies de manière indépendante les unes des autres. Du point de vue théorique, nous sommes assurés que certains maxima perdurent vers les échelles fines, ce qui aboutit à la notion de Maxima Line (ML). Nous proposons alors des règles permettant la construction effective des Maxima Lines (ML) à partir des modules maxima aux différentes échelles, de manière cohérente avec le comportement théorique des ML.

1.3.1 Calcul des cartes de MM

Si un module maxima est présent en (x, y) à une échelle s, celui-ci vérifie $|Wf(x, y, s)| > 0$ et donc la valeur associée $Wf(x, y, s)$ est non nulle. Ainsi, une carte associée à une certaine échelle est donnée par un tableau T de taille $n \times n$, où en tout point $(x, y) \in \{1, 2, ..., n\}$:

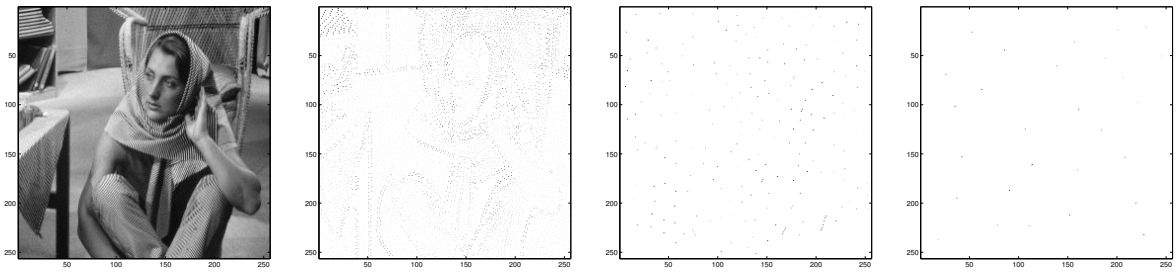
$$T(x, y) = \begin{cases} Wf(x, y, s) & \text{s'il y a un MM en } (x, y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Afin d'obtenir de telles cartes pour une certaine gamme d'échelles, $s \in \{1, 2, 3...s_{\max}\}$ par exemple, nous calculons d'abord, pour chaque échelle s, la transformée en ondelette continue avec l'ondelette ΔG. Nous disposons alors à chaque échelle correspond une carte de MM, et nous conservons Wf comme information supplémentaire (son module et son signe renseignent sur). Un MM sera donné par $(x(s), y(s), s, Wf(x(s), y(s), s))$, et l'ensemble des MM peut alors être représenté comme une série de cartes indexées par l'échelle et de même taille que l'image (Fig. 5).

1.3.2 Règles de construction des ML

Dans l'approche proposée ici, le point de départ consiste à considérer un module maximum à l'échelle la plus fine $s = 1$, présent en $(x_0, y_0) = (x(1), y(1))$, ce qui définit l'origine d'une ML, et associé à la valeur $Wf(x(1), y(1), 1)$. Nous cherchons alors à le connecter à un module maxima de même signe, de manière à ce que la ML construite permette de suivre une singularité donnée à travers les échelles :

- aux plus petites échelles ($s = 1, 2, 3, ...$), où il y a généralement un grand nombre de module maxima, parmi ceux de même signe présents dans un voisinage 3x3 à l'échelle $s + 1$, nous le connectons à celui dont le module est le plus proche (s'il n'y en a aucun, la ML s'interrompt) ;



(A) (B) (C) (D)

FIG. 5 – Localisation des modules maxima (MM) de l'ondelette ΔG sur une image naturelle : (A) Image classique *Barbara* ; (B) MM à l'échelle la plus fine ; (C) MM à une échelle intermédiaire ; (D) MM à une échelle grossière.

- à des échelles plus grandes, là où les modules maxima sont plus épars, nous connectons un module maxima à l'échelle s à celui qui est le plus proche en distance euclidienne à l'échelle $s+1$, à condition que :
  - il n'y ait pas de module de signe opposé dans le rectangle défini par les coins $(x(s), y(s))$ et $(x(s+1), y(s+1))$ (pas de croisement de ML),
  - les modules associés $Wf(x(.), y(.), .)$ soient suffisamment proches (de sorte que la ML suit bien la même singularité).

En ce qui concerne le choix des échelles, la construction des ML présentée ici est fondée sur des cartes correspondant à des échelles entières. Notons qu'une discrétisation fine ($s = n\delta, n \in \mathbb{N}^*$ avec $\delta \in]0,1[$) permettrait de mieux suivre la dérive spatiale des ML. En particulier, lorsque deux (ou plusieurs) ML fusionnent, la dérive spatiale peut être importante entre les échelles s et $s+1$; ce phénomène est prononcé en 1D et amplifié en 2D, où, dans certains cas, de nombreuses ML fusionnent simultanément ; une discrétisation fine assurerait alors qu'entre deux échelles successives la ML ne dérive pas de plus d'un pixel et ainsi la règle de recherche dans un voisinage 3x3 serait valable pour toutes les échelles. Cependant, en pratique, cela amène à choisir une résolution très fine en échelle (typiquement $\delta \leq 0.01$) et conduit à un temps de calcul très élevé.

Par ailleurs, dans un cadre plus général, il est possible de considérer un ensemble quelconque de cartes (dépendant de l'échelle). L'application des règles proposées ici permet alors de construire empiriquement des chemins dans l'espace-échelle (x, y, s) (ou lignes de maxima), sans qu'une continuité de ces chemins soit établie théoriquement.

1.3.3 Complexité algorithmique

Nous notons ici N la taille des données (pour une image carrée de taille $n \times n$, $N = n^2$), et $s_{\max}$ la plus grande échelle considérée ; de plus, nous supposons que $s_{\max} << N$ (typiquement N=256x256 et $s_{\max} = 40$). Comme il utilise une FFT, le calcul de la TOC nécessite

$O(N \log_2 N)$ opérations et la détermination des modules maxima aux échelles considérées se fait en $O(N)$ opérations. En notant $N_1 < N$ le nombre de modules maxima à l'échelle la plus fine $s = 1$, la construction des ML est réalisée en $O(N_1)$ opérations. Ainsi, le coût de ces étapes est de l'ordre de $O(N \log_2 N)$. Remarque : en pratique, c'est la dernière étape qui est la plus coûteuse en temps de calcul effectif, du fait de la complexité de construction d'une ML (recherche de modules maxima à l'échelle supérieure, tests, etc.). A titre d'exemple nous mentionnons des temps de calculs obtenus sous *matlab* (Tab. 3).

TAB. 3 – Temps de calcul (en secondes) de la construction des ML, pour des images de taille $n \times n$, $1 \leq s \leq s_{\max} = 10$.

n	64	128	256	512
Carré	0.23	0.85	5.51	57.5
Carré bruité	0.41	3.75	60.8	939
Barbara	X	X	24.5	433

2 Propriétés des lignes de maxima

Nous étudions ici les propriétés des maxima multiéchelles au sens de Canny (MC) et des modules maxima (MM) de l'ondelette ΔG. Etant donné que ces maxima sont associés à des singularités présentes dans l'image, les lignes de maxima correspondantes permettent de suivre ces singularités dans l'espace-échelle. Deux choses apparaissent alors comme essentielles : d'une part la dérive spatiale des ML, et d'autre part l'évolution de la réponse en fonction de l'échelle. En outre, ces lignes permettent de calculer certaines grandeurs caractéristiques, telles que la régularité Lipschitzienne associée à une singularité, ou l'échelle caractéristique associée à un certain objet.

2.1 Quelques propriétés des Maxima Lines

2.1.1 Dérive spatiale des ML

Notons d'abord que le nombre d'échelles qu'une ML traverse indique l'importance de la singularité sous-jacente au sein de l'image ; en particulier, des lignes correspondant à du bruit ne traverseront souvent que peu d'échelles. Pour des ML traversant suffisamment d'échelles, il est alors intéressant d'étudier quelle est sa dérive spatiale $s \mapsto (x(s), y(s))$. A mesure que l'échelle croît, le support de l'ondelette est de plus en plus étendu, et un grand nombre de singularités peut n'être associé qu'à un nombre restreint de modules maxima. Aux échelles fines, les modules maxima sont localisés au voisinage des singularités, tandis qu'à des échelles plus grandes, les modules maxima proviennent de l'interaction entre différentes singularités. Ainsi la dérive spatiale des ML provient de la somme des influences des différentes singularités présentes dans l'image sur la TOC. Cette interaction est complexe, mais nous retrouvons les résultats vus en 1D, à savoir que pour un objet délimité par des frontières, nous observons certaines ML dérivant vers l'extérieur, et d'autres ML dérivant vers l'intérieur, jusqu'à fusionner à une certaine échelle.

2.1.2 Evolution de la réponse le long des ML

Aux échelles les plus fines, une ML permet d'identifier la singularité présente dans l'image, dont la localisation est donnée par l'origine de la ML (x_0, y_0) (MM à l'échelle $s = 1$). Il est possible d'estimer ponctuellement la régularité Lipschitzienne α en (x_0, y_0) d'après la relation

$$|Wf(x(s), y(s), s)| \leq Cs^{\alpha+2} \tag{7}$$

($|Wf(x(s), y(s), s)|$: module du coefficient d'ondelette, normalisé L^1, le long d'une ML).

Alors qu'aux échelles fines, les ML proviennent souvent d'une unique singularité (dont le cône d'influence contient la ML), la situation est différente à des échelles plus grandes. Plus précisément, nous constatons un phénomène analogue à celui observé pour la TOC d'un créneau 1D utilisant l'ondelette (1D) ΔG. Deux ML – associées à deux singularités différentes

– fusionnaient à une certaine échelle. Autour de cette échelle, nous constatons qu'en plus de fusionner, elles admettent un pic : la réponse associée le long de ces ML admet un maximum local (la valeur du maximum est identique, puisqu'il y a fusion). De surcroît, la ML issue de la fusion s'avère stable spatialement pour des échelles immédiatement supérieures (pour $s^* \leq s \leq s^* + 2$).

Du point de vue théorique, il serait intéressant de montrer les liens existants entre la jonction de ML et le pic de ML impliquées dans cette jonction. Nous constatons empiriquement qu'aux échelles intermédiaires, il existe effectivement des points dans l'espace-échelle qui correspondent simultanément à des jonctions de ML et à des pics de ML. Nous verrons ultérieurement des applications de ces jonctions de ML admettant un pic en détection de points d'intérêt [2, 3, 4].

2.1.3 Synthèse

Il est important de noter que la dérive spatiale et la réponse associée à une ML sont reliées. Schématiquement, dans le cas où deux ML se rapprochent, soit elles renforcent leur réponses respectives jusqu'à fusionner, soit l'une d'elles domine nettement, auquel cas l'autre s'interrompt (la première subissant une légère dérive et une légère atténuation). Suivant les échelles considérées, la réponse $s \mapsto Wf(.,.,s)$ le long d'une ML a un comportement différent :

- aux petites échelles, la dérive spatiale est liée au support de l'ondelette qui s'élargit, et la réponse évolue en fonction de la régularité Lipschitzienne ;
- à des échelles intermédiaires, la dérive spatiale est plus importante, et la réponse subit diverses fluctuations liées à l'interaction entre différentes ML ;
- aux plus grandes échelles, tout se passe comme s'il n'y avait qu'une seule singularité ; la dérive spatiale est similaire à celle aux petites échelles, et la réponse tend vers zéro.

2.2 Quelques propriétés des lignes de Canny

2.2.1 Dérive spatiale

Une première chose que nous constatons est que les LC dérivent relativement peu, ce qui facilite leur construction en pratique. Si deux LC voisines sont associées au même type de contour (vertical par exemple) elles tendent à se renforcer puis à fusionner, comme si à partir d'une certaine échelle, il n'y avait qu'un seul contour présent. Si ce sont deux LC associées à des contours différents (un horizontal et un vertical, ou deux verticaux de signes opposés), l'une des deux lignes tend à s'interrompre tandis que l'autre perdure. Relevons également que les lignes associées à des bords sont plus stables à travers les échelles que celles associées à des coins.

2.2.2 Evolution de la réponse le long des LC

Aux échelles fines, le comportement de Mf le long d'une LC peut être relié à la régularité Lipschitzienne ponctuelle. En effet, les singularités associés aux MC sont des points de contours. Or un contour présente deux directions particulières, l'intensité f étant irrégulière dans la direction du gradient et régulière dans la direction orthogonale. De plus, nous disposons de la relation

$$Mf(x(s), y(s), s) \leq Cs^{\alpha+1} \quad \text{où} \quad Mf = \sqrt{W_x f^2 + W_y f^2} \tag{8}$$

qui est une quasi-égalité aux échelles fines, vu que les LC suivent ces contours à travers les échelles. Ceci permet alors de donner une estimation de la régularité Lipschitzienne en tout point de contour. Remarquons que si les relations (7) et (8) diffèrent (approches ML et de Canny), elles conduisent néanmoins toutes les deux à des estimations correctes de α, comme nous le verrons en 3.1 et 3.3.

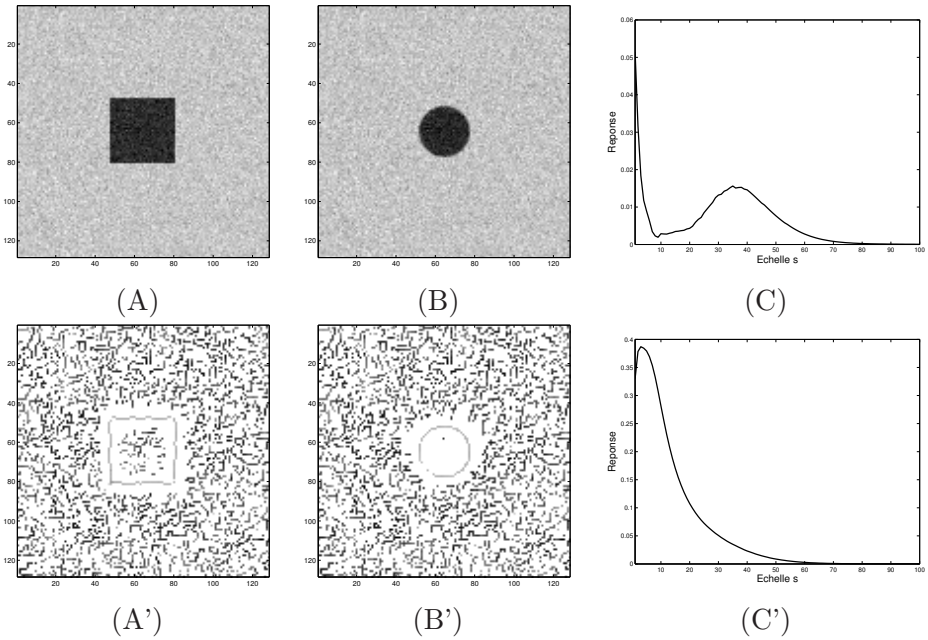


FIG. 6 – Approche de Canny dans un cadre bruité : (A) Carré bruité (SNR= $20dB$) ; (B) Disque bruité (SNR= $20dB$) ; (A', B') MC associés. Etude de la réponse en fonction de l'échelle, le long de LC relatives au disque bruité : (C) Ligne associée à du bruit ; (C') Ligne associée à un contour significatif.

Afin d'étudier le comportement global de la réponse en fonction de l'échelle, nous considérons deux images géométriques (carré et disque de taille 128×128, Fig. 6 (A–B)) auxquelles un bruit blanc Gaussien a été ajouté. Le détecteur multiéchelles de Canny permet de mettre en évidence certains points de contours plus ou moins marqués, (Fig. 6 (A–B')). Les points de

contours liés au bruit peuvent être éliminés sur la base du nombre de lignes traversées, de la régularité Lipschitzienne ponctuelle associée ou de l'amplitude de la réponse à l'échelle la plus fine. Nous observons que pour les lignes associée à du bruit, soit elles s'interrompent à une certaine échelle soit elles rejoignent des lignes associées à de plus fortes réponses (Fig. 6 (C)). En ce qui concerne les lignes associées à des points de contour, nous observons que la réponse croît aux fines échelles (comportement lié à la régularité Lipschitzienne), atteint un pic (maximum local de la réponse) à une certaine échelle, puis tend vers zéro. Relevons que ce pic est relatif à l'importance du point de contour par rapport au voisinage. Le lien entre des objets présents dans l'image et des échelles pouvant leur être associées permet de qualifier celles-ci de *caractéristiques* (voir section suivante).

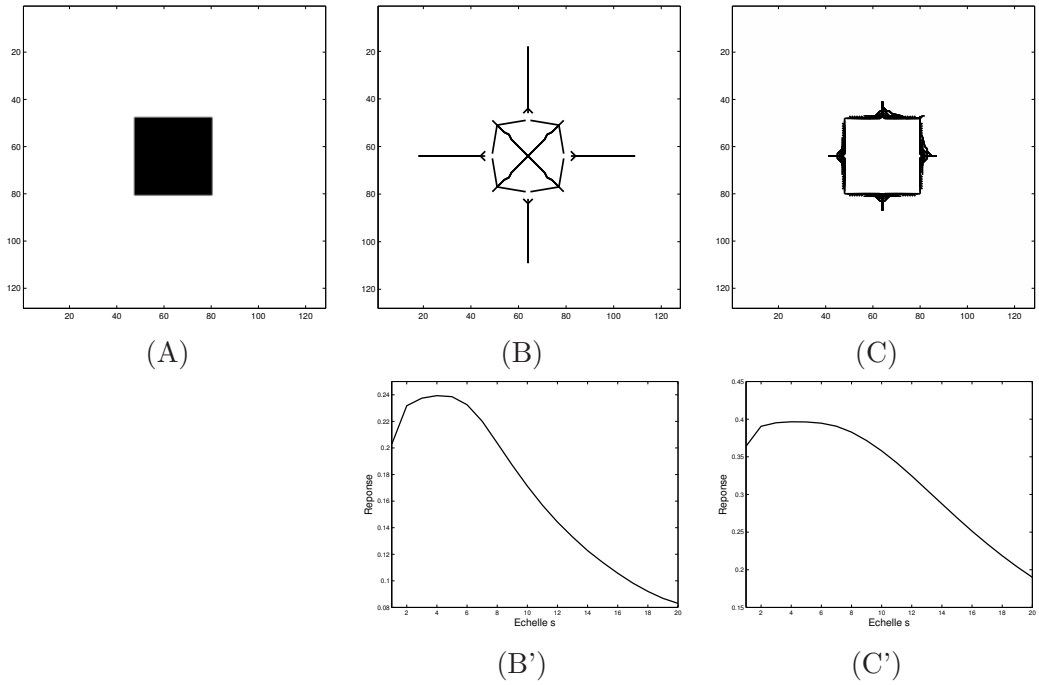


FIG. 7 – (A) Image représentant un carré ; (B) Dérive des ML (les ML partent toutes des bords du carré, certaines dérivent vers l'intérieur, d'autres vers l'extérieur) ; (C) Dérive des LC ; (B') Evolution de la réponse le long d'une ML ; (C') Evolution de la réponse le long d'une LC.

2.3 Comparaison des ML et et LC

D'abord, notons que si la continuité des ML de l'ondelette ΔG est assurée théoriquement (comme conséquence du principe du maximum), le résultat est moins évident pour les LC. La stabilité de la direction du gradient joue un rôle clé : nous avons remarqué auparavant qu'à mesure que l'échelle augmente, le gradient ne reste pas nécessairement dans la même direction ; mais tend à se stabiliser assez rapidement. Du point de vue pratique, pour la construction des

LC, il est aisé de chaîner les MC d'un échelle à une autre ; pour les ML, le chaînage des MM d'une échelle à une autre est parfois plus délicat, étant donné qu'il existe une grande dérive spatiale de s à $s+1$ pour certaines échelles s.

Ensuite, il est intéressant de remarquer que dans le cas des ML, l'opérateur est basé sur les dérivées secondes (ondelette ΔG) tandis que dans le cas des LC, il est basé sur des dérivées premières (ondelette gradient). Ceci explique notamment que les ML et les LC ont des comportements assez différents à mesure que l'échelle augmente.

Afin de mieux cerner cette différence, nous comparons ces deux types de lignes sur l'exemple simple du carré (Fig. 7 (A)). Alors que les LC sont stables spatialement, il apparaît que les ML dérivent bien plus. La stabilité des LC s'explique par le fait que les contours les plus significatifs sont visibles à toutes les échelles. Quant à elle, la dérive des ML peut être exploitée pour mettre en évidence la structure globale du carré. Plus précisément, aux fines échelles, les ML sont reliées aux bords du carré, puis dérivent (vers l'extérieur ou l'intérieur du carré). Nous remarquons alors qu'à de plus grandes échelles, les ML dérivant vers l'intérieur sont reliées au carré : il y a jonction de ML.

D'autre part, nous pouvons comparer l'évolution de la réponse associée à ces lignes en fonction de l'échelle s ($|Wf|$ pour les ML, Mf pour les LC). En ce qui concerne les ML, les réponses associées aux ML intérieures correspondent toutes à l'évolution représentée sur la figure 7 (B'), en particulier la réponse admet le même maximum local. Nous relevons alors que la localisation associée correspond au centre du carré, tandis que l'échelle associée est proportionnelle à la taille de l'objet. En ce qui concerne les LC, la réponse le long d'une LC admet également un maximum local, et l'échelle associée est alors identique à celle issue des ML (Fig. 7 (C')).

Ainsi, les LC se focalisent sur les contours de l'objet (bords du carré), tandis que les ML, par la jonction de ML intérieures, mettent en évidence l'objet entier (le carré).

3 Estimation et applications de la régularité Lipschitzienne

3.1 Caractérisation de structures monodimensionnelles

Les régularités Lipschitziennes α ponctuelles correspondent souvent à des valeurs comprises entre -2 et 1, et dépendent du type de contour :

$$\begin{cases} \text{Frontière} & \alpha = 0 \\ \text{Ligne} & \alpha = -1 \\ \text{Point isolé} & \alpha = -2 \end{cases}$$

Concernant l'estimation de α, les méthodes d'ondelettes permettent de détecter certains points singuliers, et également d'estimer la régularité Lipschitzienne en ces points. Ces derniers peuvent être, par exemple, des MM à l'échelle la plus fine d'une TOC, ou des points de contours. Dans ces deux cas, ces maxima peuvent être associés à des chemins traversant les échelles (ML, LC) qui donnent alors une information supplémentaire sur la singularité sous-jacente. En notant M_s la réponse de l'opérateur le long d'un tel chemin, nous avons une relation du type (cf. eq. (7) et (8))

$$\log M_s \leq (\alpha + k) \log s + C \tag{9}$$

où C est une constante et k une quantité connue (par exemple, $k = 2$ pour l'approche par ML utilisant une transformée normalisée L^1 avec l'ondelette ΔG). Cette inégalité est une quasi-égalité aux échelles fines (et d'autant meilleure que la singularité est bien suivie), ce qui permet alors une estimation de α (Fig. 8). Enfin, notons que des estimations de α sont possibles [7]. Ici, nous nous focalisons sur les méthodes par ML et LC, pour lesquelles les régularités ponctuelles sont finement estimées en des points particuliers.

Les valeurs obtenues concordent avec les valeurs attendues sur une image géométrique (Fig. 8 (A–A")) et permettent d'estimer des valeurs de la régularité Lipschitzienne en un nombre de points assez conséquent sur une image naturelle (Fig. 8 (B–B")). Relevons au passage que la distribution des régularités est bien différente entre ces deux images (Fig. 9). Maintenant, nous montrons que l'estimation de la régularité α fondée sur les LC apparaît comme la plus adaptée, au sens où des régularités sont correctement estimées, et où le nombre de points obtenus sur une image naturelle est important. Par la suite, nous montrerons également cette estimation est robuste (section 3.3).

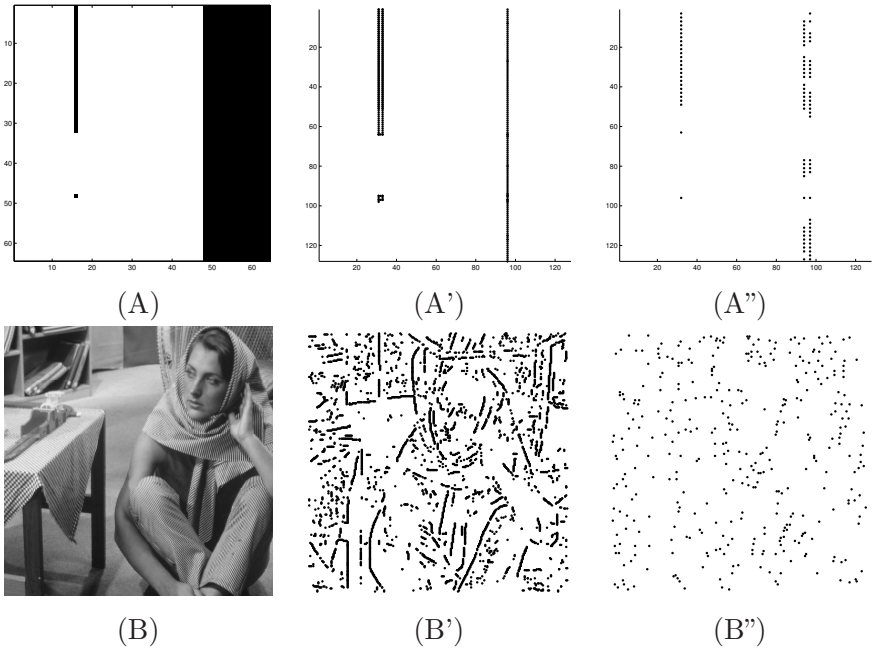


FIG. 8 – (A) Image géométrique contenant des régularités connues *a priori* ; (B) Image naturelle dont les régularités sont inconnues *a priori* ; (A') et (B') Régularités Lipschitziennes calculées d'après les LC ; (A") et (B") Régularités Lipschitziennes calculées d'après les ML.

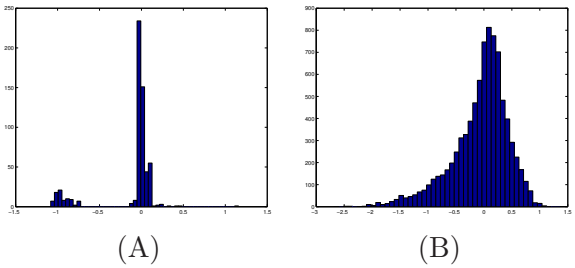
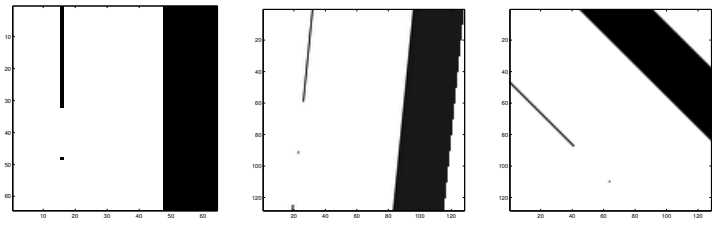


FIG. 9 – Histogrammes des régularités Lipschitziennes α (estimées d'après les LC) : (A) Image géométrique (cf. Fig. 8 (A)) (B) Image *Barbara* (cf. Fig. 8 (B)).

3.2 Comparaison des méthodes d'estimations de la régularité

Afin de comparer les approches ML et LC, nous considérons l'images géométrique vue précédemment, à laquelle nous appliquons une déformation affine ou une rotation, ce qui conduit à trois images déformées contenant les mêmes régularités (Fig. 10). Nous calculons alors les régularités par ML et LC, ce qui permet alors de comparer les valeurs obtenues en certains points singuliers (Tab. 4). Les valeurs obtenues s'avère globalement meilleures. Par ailleurs, du point de vue quantitatif, l'approche par les LC permet de mettre en évidence un plus grand nombre de points singuliers que celle des MM (rappelons que la condition de MM impose des conditions strictes). En considérant différentes images (un bruit blanc Gaussien, une image naturelle, une géométrique), nous représentons comment se comportent le nombre de MC ainsi que le nombre de MM en fonction de l'échelle (Tab. 5, Fig. 11). Nous remarquons alors que les MC sont bien plus nombreux que les MM, et qu'à mesure que l'échelle augmente, les MC persistent mieux que les MM. Ainsi, l'estimation par les LC apparaît comme mieux adaptée que par les ML.



(A_1) (A_2) (A_3)

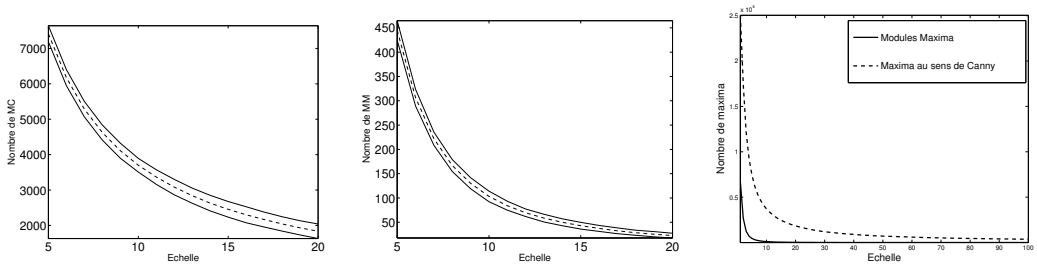
FIG. 10 – Images géométriques : (A_1) orignale ; (A_2) ayant subi une déformation affine ; (A_3) ayant subi une roation.

TAB. 4 – Comparaison des estimations de α d'après les ML et les LC, sur des images géométriques.

Image	(A_1)	(A_2)	(A_3)
Frontière ($\alpha = 0$)			
α_{ML}	0.15	-0.04	0.09
α_{LC}	0.08	0.08	0.04
Ligne ($\alpha = -1$)			
α_{ML}	-0.98	-0.90	-0.74
α_{LC}	-1.00	-0.97	-0.87
Point Isolé ($\alpha = -2$)			
α_{ML}	-1.98	-1.74	-1.87
α_{LC}	-2.00	-1.91	-1.78

Tab. 5 – Nombre de modules maxima (MM) et de maxima au sens de Canny (MC) pour différentes images (taille 256x256) : un bruit blanc Gaussien, l'image naturelle *Barbara*, et une image géométrique représentant un carré.

Echelle	Bruit blanc		Barbara		Carré	
s	MM	MC	MM	MC	MM	MC
1	6658	25154	5128	17372	232	810
2	2682	17640	1470	9567	152	761
3	1258	12128	628	6878	33	333



(A) (B) (C)

Fig. 11 – Evolution des nombres de MC et de MM en fonction de l'échelle – étude réalisée en moyenne sur 100 signaux de taille 256x256, sur des bruits blanc Gaussiens d'écart-type $\sigma = 100$; notations : s désigne l'échelle, m_{mc} et σ_{mc} la moyenne et l'écart-type relatifs aux MC m_{mm} et σ_{mm} la moyenne et l'écart-type relatifs aux MM. (A) $m_{mc} = f(s)$ et $m_{mc} \pm 2\sigma_{mc} = f(s)$ (MC) ; (B) $m_{mm} = f(s)$ et $m_{mm} \pm 2\sigma_{mc} = f(s)$ (MM) ; (C) $m_{mc} = f(s)$ et $m_{mm} = f(s)$.

3.3 Robustesse de la régularité Lipschitzienne

Proposition 1. *(Influence d'une déformation sur la régularité Lipschitzienne) Etant donné une image f et une matrice $B \in GL_2$ nous considérons l'image déformée g définie par :*

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, f(X) = g(BX) \tag{10}$$

Supposons que f soit α-Lipschitz. En notant $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^2$ et $||B||$ la norme de la matrice B, il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} |g(X) - g(Y)| = |f(B^{-1}X) - f(B^{-1}Y)| &\leq K|B^{-1}X - B^{-1}Y|^\alpha \\ &\leq \left(K||B^{-1}||^\alpha\right)|X - Y|^\alpha \end{aligned}$$

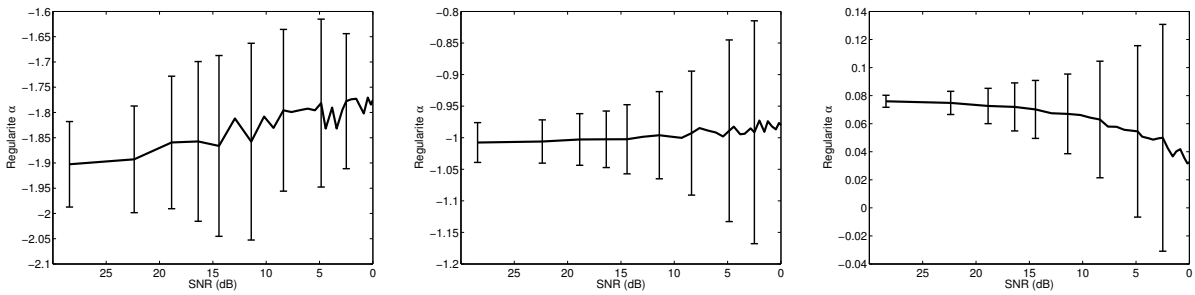
Ainsi, la régularité Lipschitzienne est conservée par déformation affine.

Interprétation : tant qu'une déformation ne change pas la nature d'une singularité (comme une ligne légèrement déformée par exemple), la régularité Lipschitzienne associée n'est pas modifiée. Par ailleurs, vu que l'estimation de α est basée sur des lignes de maxima, il importe que ces lignes ne soient pas détruites par la transformation (problème abordé à la section précédente). Du point de vue pratique, il est alors intéressant de quantifier la robustesse de la régularité Lipschitzienne, estimée d'après les LC. Nous évaluons cette robustesse d'abord vis à vis du bruit, puis vis à vis de transformations géométriques, comme des rotations et des déformations affines. Dans ce qui suit, afin de synthétiser l'information associée à une image, nous traitons les régularités obtenues comme des variables aléatoires, ce qui permet d'utiliser le vocabulaire statistique (moyenne, écart-type, estimation, biais).

3.3.1 Influence du bruit

Nous considérons une image 64×64 contenant différentes régularités : $\alpha = -2$ pour le point isolé, $\alpha = -1$ pour la ligne et $\alpha = 0$ pour la frontière (Fig. 12 (A)) ; un bruit blanc Gaussien est alors ajouté (pour chaque niveau de bruit, 100 simulations sont effectuées). Nous calculons les régularités d'après les LC, et isolons (d'après un critère géométrique) celles qui correspondent au point isolé, à la ligne et à la frontière. En l'absence de bruit, les régularités calculées valent -2.003 pour le point isolé, -1.004 pour la ligne, 0.078 pour la frontière.

Nous pouvons alors représenter l'évolution des régularités associées à ces trois types de singularités (Fig. 12 (B–C)). Pour le point isolé, la régularité est légèrement instable ; notons l'écart-type non-négligeable, présent dès un faible niveau de bruit. En ce qui concerne la ligne, l'estimation de la régularité est correcte (très proche de -1) et l'estimation stable à mesure que le niveau de bruit augmente. Quant à la frontière, l'estimation est légèrement biaisée (comme dans le cas non-bruité), et s'avère très stable. Globalement, retenons que les régularités sont robustes au bruit.



(A) (B) (C)

FIG. 12 – (A–C) Evolution en fonction du niveau de bruit (moyenne et écart-type) des régularités estimées d'après les LC sur une image géométrique. Ces régularités sont calculées : (A) au point isolé, (B) à la ligne et (C) à la frontière.

3.3.2 Influence d'une rotation

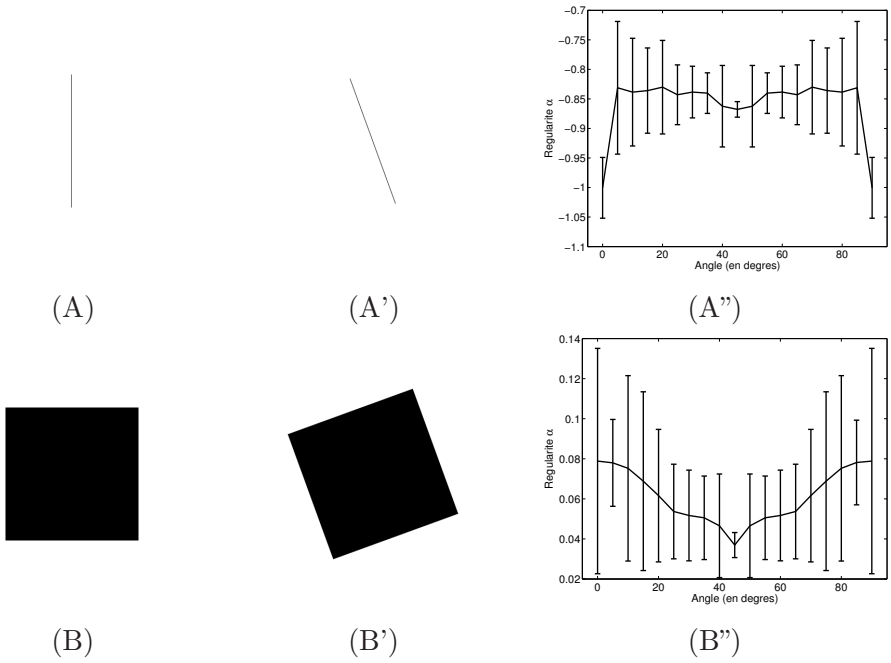


FIG. 13 – Influence d'une rotation sur la régularité Lipschitzienne : (A–A') Images originale et déformée par une rotation ($\alpha = -1$) ; (B–B') *idem* ($\alpha = 0$) ; (A") Evolution des régularités Lipschitziennes (moyenne et écart-type) suivant l'angle de rotation appliqué à l'image (A) ; (B") *idem*, l'image originale étant (B).

Nous considérons deux images, l'une représentant une ligne et l'autre un carré, auxquelles nous appliquons une rotation d'un angle variant de 0 à 90 degrés (Fig. 13 (A–B, A'–B')). Nous calculons alors les régularités associées à chaque angle, ainsi que la moyenne et l'écart-type des régularités obtenues. Nous observons que celles-ci ce concentrent autour de 0 pour le carré, et autour de -1 pour la ligne, ce qui est conforme à la théorie. Nous représentons alors la régularité Lipschitzienne en fonction de cet angle de rotation (Fig. 13 (A"–B"). Dans le cas de la ligne, l'estimation de α présente un certain biais (de 0.15 environ) pour tous les angles sauf 0 et 90 degrés, pour lesquels l'estimation donne exactement la valeur attendue ($\alpha = -1$). Dans le cas du carré, l'estimation de α est très proche de la valeur attendue, avec un biais compris entre 0.04 et 0.06. Notons par ailleurs que pour une image donnée, il existe une légère hétérogénité des régularités : les extrémités de la ligne et les coins du carré diffèrent des autres régularités. Ceci explique qu'il existe un certain écart-type, mais celui-ci reste inférieur à 0.1 dans tous les cas. Ainsi, la régularité Lipschitzienne s'avère robuste à la rotation.

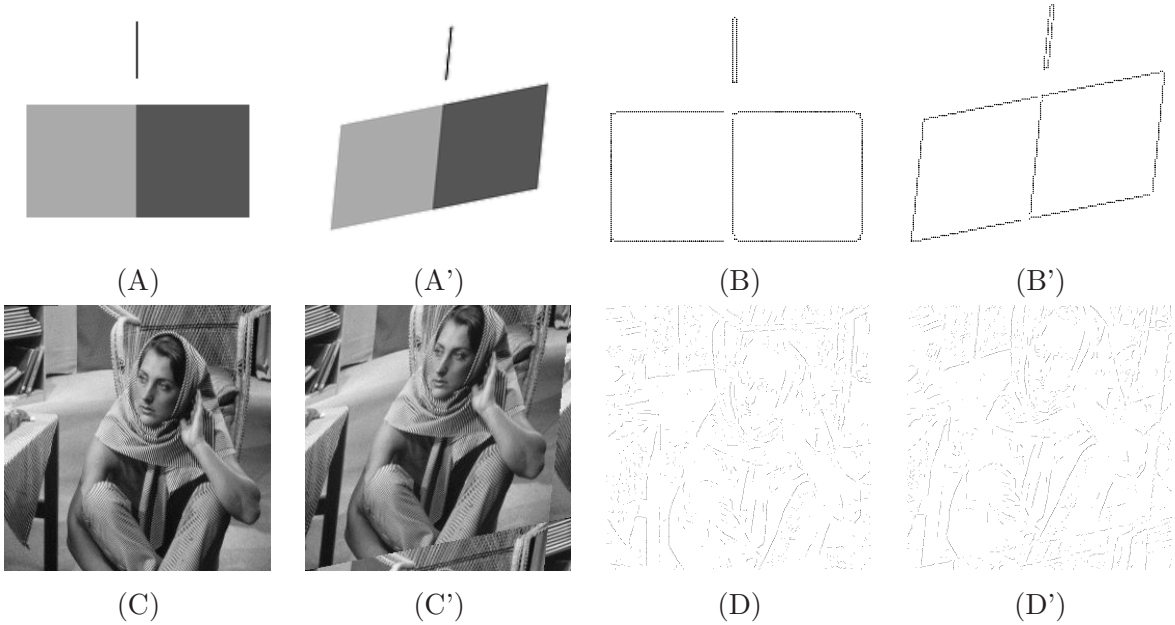


FIG. 14 – (A–A') Image géométrique, originale et déformée ; (B–B') Régularités associées. (C–C') Image *Barbara*, orignale et déformée ; (D–D') Régularités associées.

3.3.3 Influence d'une déformation affine

Nous considérons maintenant deux images de taille 256×256 – une image géométrique et *Barbara* (Fig. 14) – auxquelles nous appliquons une déformation affine connue. Puis, nous calculons les régularités Lipschitziennes associées, d'après les LC. Nous apparions alors certains pixels deux à deux, et comparons alors les valeurs des régularités.

Comme nous connaissons la matrice de déformation, l'appariement est aisé : étant donné deux points $p_0^i = (x_O^i, y_O^i)$ (issu de l'image originale) et $p_D^j = (x_D^j, y_D^j)$ (issu de l'image déformée), nous les apparions à condition que la distance Euclidienne entre ces deux points, en exprimant leurs coordonnées dans l'image *originale*, soit suffisamment faible. En pratique, pour la plupart des points appariés, cette distance est inférieure à 1 pixel. Une fois cet appariement effectué, nous nous intéressons à l'écart $d_\alpha = |\alpha_O^i - \alpha_D^j|$ (Tab. 6). Nous remarquons alors que les valeurs des régularités sont très proches dans les images originale et déformée.

De plus, nous relevons que la proportion de points appariés pour lesquels $d_\alpha < 0.2$ est élevée (97% et 80%) ; ainsi, dans le cas d'une déformation affine, la régularité Lispchitzienne permet d'identifier correctement le type de singularité.

Tab. 6 – Influence d'une déformation affine sur le calcul des régularités Lipschitziennes.

Image	Géométrique	*Barbara*
Nombre de points de régularité		
- dans l'image originale	599	8474
- dans l'image déformée	657	8517
Nombre de de points appariés	599	6929
Ecart d_α		
Valeur moyenne	0.077	0.15
Ecart-type	0.06	0.23
Proportion de points pour lesquels $d_\alpha < 0.2$	97%	80%

Conclusion

Nous avons expliqué comment calculer des régularités ponctuelles par des lignes de maxima issues d'approches multiéchelles, les Maxima Lines (ML) et les lignes de Canny (LC).

En étudiant les comportements des ML et des LC en fonction de l'échelle, nous avons vu que tandis que la dérive des ML est prononcée (depuis une singularité vers une jonction de ML), celle des LC est limitée (localisation sur les contours). L'estimation de la régularité Lipschitzienne est possible tant partant des ML que des LC, et ces dernières apparaissent comme plus pertinentes.

Ainsi les LC permettent d'estimer des régularités ponctuelles en certains points associés à la géométrie de l'image (points de contour). D'une part, la régularité α permet de caractériser le type de singularité associée (frontière, ligne). D'autre part, cette régularité α présente une certaine robustesse au bruit et à des déformations de l'image.

Ceci montre que la régularité Lipschitzienne constitue une information pertinente pour différentes applications, où la robustesse ou l'invariance vis à vis de certaines transformations de l'image est cruciale, comme en vision par ordinateur [9]. Par exemple, rappelons que pour décrire l'information contenue dans une région d'intérêt, il est courant d'utiliser des descripteurs basés sur la distribution du gradient [10, 12]. Ainsi, une perpective intéressante serait l'utilisation de la régularité Lipschitzienne pour formuler un tel descripteur.

Références

[1] J. Canny. A computational approach to edge detection. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(6) :679–698, 1986.

[2] C. Damerval and S. Meignen. Computation of blob-like structures characteristic scale with wavelet maxima lines. In T. Lyche P. Chenin, J. L. Merrien, editor, *Proceedings of the 6th Conference on Curves and Surfaces*, pages 111–120. Nashboro Press, June 29 - July 5 2006.

[3] C. Damerval and S. Meignen. Blob detection with wavelet maxima lines. *IEEE Signal Processing Letters*, 14(1) :39–42, 2007.

[4] C. Damerval and S. Meignen. Interest point detection with wavelet maxima lines. Technical Report, HAL Inria, no. 171678, 2007.

[5] R. Deriche. Using canny's criteria to derive an optimal edge detector recursively implemented. *International Journal on Computer Vision*, 2 :15–20, 1987.

[6] S. Jaffard and Y. Meyer. On the pointwise regularity of functions in critical Besov spaces. *J. Funct. Anal.*, 175(2) :415–434, 2000.

[7] L. M. Kaplan and R. Murenzi. Texture segmentation using multiscale hurst features. In *ICIP97*, pages 205–208, 1997.

[8] O. LeCadet. Méthodes d'ondelettes pour la segmentation d'images, 2004. Thèse de doctorat de l'INPG.

[9] T. Lindeberg and J. Garding. Shape-adapted smoothing in estimation of 3-d shape cues from affine deformations of local 2-d brightness structure. *Image and Vision Computing*, 15(6) :415–434, 1997.

[10] D. G. Lowe. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*, 60(2) :91–110, 2004.

[11] S. Mallat and S. Zhong. Characterization of signals from multiscale edges. *IEEE Transactions on Pattern Anal. and Mach. Intell.*, 14(7) :710–732, 1992.

[12] K. Mikolajczyk and C. Schmid. A performance evaluation of local descriptors. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 27(10) :1615–1630, 2005.

[13] L. Schwartz. *Théorie des Distributions*. Hermann, Paris, 1966.