HAL open science

Distribution de maximum d'entropie de moyenne contrainte

Pierre Dangauthier

To cite this version:

Pierre Dangauthier. Distribution de maximum d'entropie de moyenne contrainte. [Rapport de recherche] 2007. inria-00180739

HAL Id: inria-00180739

https://inria.hal.science/inria-00180739

Submitted on 24 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Maximum Entropy Distribution with Constrained Mean

Pierre Dangauthier

N° 6279

Août 2007

Thème NUM

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--6279--FR+ENG

Maximum Entropy Distribution with Constrained Mean

Pierre Dangauthier*

Thème NUM — Systèmes numériques
Projet E-motion

Rapport de recherche n° 6279 — Août 2007 — 8 pages

Abstract: This note presents the derivation of the maximum entropy distribution of a real variable on the unit segment, when its first moment is constrained. The functional form of the resulting distribution is an exponential with two Lagrange multipliers. We show that there is unique solution for those multipliers. However this solution has to be numerically approximated. As a special case, we find the uniform distribution when the constrained mean is centered.

Key-words: probability, bayes, maximum entropy principle

* *pierre.dangauthier@imag.fr*

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes
655, avenue de l'Europe, 38334 Montbonnot Saint Ismier (France)
Téléphone : +33 4 76 61 52 00 — Télécopie +33 4 76 61 52 52

Distribution de maximum d'entropie de moyenne contrainte

Résumé : Cette note présente la dérivation de la distribution d'entropie maximale et de moyenne fixée pour une variable réelle dans l'intervalle unité. La solution est une fonction exponentielle avec deux multiplicateurs de Lagrange. Nous montrons qu'il existe une unique solution pour ces multiplicateurs quelque soit la contrainte. Cependant cette solution doit être approximée numériquement. En particulier, lorsque la moyenne imposée est un demi, nous obtenons la distribution uniforme.

Mots-clés : probabilité, bayes, principe de maximum d'entropie

1 Système d'équation

Soit X une variable aléatoire réelle à valeur dans $[0,1]$. Soit $m = E_p[X] \in [0,1]$ l'espérance de sa distribution de probabilité p. Nous cherchons la distribution maximisant l'entropie différentielle définie par :

$$H(p) = -\int_0^1 p(x) \ln p(x)\, dx. \tag{1}$$

Comme p doit être normalisée, les deux contraintes sont :

$$E_p[1] = \int_0^1 p(x)\, dx = 1 \tag{2}$$

$$E_p[X] = \int_0^1 x\, p(x)\, dx = m. \tag{3}$$

Le lagrangien à maximiser est :

$$H[p] + \lambda_0 \left(\int_0^1 p(x)\, dx - 1 \right) + \lambda_1 \left(\int_0^1 x\, p(x)\, dx - m \right) \tag{4}$$

Alors le calcul variationnel nous donne p comme la solution du système S :

$$\begin{cases} p(x) = e^{\lambda_0 + \lambda x} \\ \displaystyle\int_0^1 p(x)\, dx = 1 \\ \displaystyle\int_0^1 x\, p(x)\, dx = m. \end{cases}$$

2 Solution générale

Le valeur du couple (λ_0, λ) est fixée par les deux équations intégrales. Nous trouvons après une étude de cas

$$\lambda_0 = \ln \left(\frac{\lambda}{e^\lambda - 1} \right)$$

avec λ unique solution de

$$m = \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda}.$$

Le problème est que la fonction

$$M(\lambda) = \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda}$$

n'est pas inversible analytiquement. Donc, en dehors du cas $m = \frac{1}{2}$ traité dans la section 3, nous devrons trouver (λ_0, λ) de façon numérique. Cependant, ce couple existe et est unique car la fonction M (voir courbe 1) est bijective de R^* dans $[0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1]$.

Cette bijection, démontrée dans la section 5, est cohérente avec l'existence et l'unicité de la distribution de maximum d'entropie.

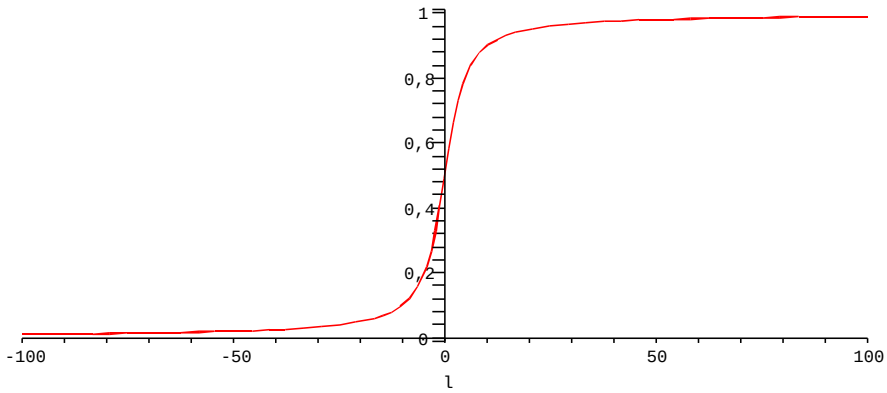


Figure 1: $m = M(\lambda)$. L'axe des abscisses représente λ. Allure de la fonction permettant de trouver numériquement λ sachant la moyenne m. Cette fonction n'est pas définie en 0, mais s'y prolonge par continuité.

3 Cas particulier $m = 1/2$

Le cas $m = \frac{1}{2}$ est particulier pour deux raisons :

- Nous connaissons intuitivement le résultat : $p(x) = 1$
- Les calculs sont différents car dans ce cas $\lambda = 0$, et donc nous ne pouvons pas faire les intégrations de la même façon.

Nous montrons proprement (section 4) que si $m = \frac{1}{2}$ alors l'unique solution est $\lambda_0 = \lambda = 0$ et donc p est uniforme.

Ceci peut se retrouver dans le cas général car, bien que la fonction M ne soit pas définie en 0, elle s'y prolonge par continuité pour prendre la valeur $\frac{1}{2}$. Ainsi, par abus de notation $M^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$.

4 Démonstration

Notons A l'intégrale de normalisation et B celle de la contrainte. Nous cherchons $S = \{(\lambda, \lambda_0)|A, B\}$ avec :

$$A : \int_0^1 e^{\lambda_0 + \lambda x}\, dx = 1$$

$$B : \int_0^1 x\, e^{\lambda_0 + \lambda x}\, dx = m.$$

Pour pouvoir déterminer les primitives il faut séparer le cas $\lambda = 0$ des autres. Notons l'ensemble des solutions $S = S_1 \cup S_2$.

4.1 Cas $\lambda = 0$

Dans ce cas $A \Rightarrow e^{\lambda_0} = 1 \Rightarrow \lambda_0 = 0$. Mais $B \Rightarrow \frac{1}{2} = m$.

Donc il y deux sous-cas : soit $m = \frac{1}{2}$ et alors $(0,0)$ est solution. Soit $m \neq \frac{1}{2}$ et il n'y a pas de solutions de la forme $(0, \lambda_0)$.

$$S_1 = \begin{cases} \{(0,0)\} & \text{si} \quad m = \frac{1}{2} \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.2 Cas $\lambda \neq 0$

Dans ce cas nous pouvons intégrer A et B par partie. Nous obtenons alors le système :

$$\begin{cases} \lambda_0 = \ln\left(\dfrac{\lambda}{e^{\lambda} - 1}\right) \\ \\ m = \dfrac{e^{\lambda}}{e^{\lambda} - 1} - \dfrac{1}{\lambda} = M(\lambda) \end{cases}$$

qui admet une solution unique (λ^*, λ_0^*) pour tout $m \neq \frac{1}{2}$. Il n'y a pas de solution pour $m = \frac{1}{2}$ car M^{-1} n'est pas définie en $\frac{1}{2}$. Notons :

$$S_2 = \begin{cases} \{(\lambda^*, \lambda_0^*)\} & \text{si} \quad m \neq \frac{1}{2} \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.3 Réunification des cas

$$S = S_1 \cup S_2 = \begin{cases} \{(\lambda^*, \lambda_0^*)\} & \text{si} \quad m \neq \frac{1}{2} \\ (0,0) & \text{si} \quad m = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

5 Bijectivité de la fonction M

Nous montrons dans cette partie que la fonction

$$M(\lambda) = \frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda} - 1} - \frac{1}{\lambda}$$

est bijective de R^* dans $[0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1]$ et que donc l'équation $M(\lambda) = m$ y admet une solution unique.

Pour cela, nous traçons le tableau de variation de M en étudiant le signe se dérivée. Comme cette dérivée n'est pas simple nous allons l'étudier en la dérivant. Finalement nous devrons dériver 5 fois avant de pouvoir conclure.

$$M'(x) = \frac{(e^x - 1)^2 - x^2 e^x}{(e^x - 1)^2\ x^2}$$

Comme le dénominateur est positif, étudions le signe du numérateur que nous notons $f(x)$:

$$f'(x) = e^x(2(e^x - 1) - 2x - x^2).$$

Comme e^x est positif, étudions le signe de $g(x) = 2(e^x - 1) - 2x - x^2$:

$$g'(x) = 2e^x - 2x - 2$$
$$g''(x) = 2e^x - 2$$
$$g'''(x) = 2e^x > 0.$$

De plus comme $g''(0) = g'(0) = g(0) = f(0) = 0$, nous avons le tableau de variation 2 permettant de propager les signes et donc de conclure que M est croissante sur $[0, \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}, 1]$. Mais comme

$$\lim_{x \to 0^+} M(x) = \lim_{x \to 0^-} M(x) = \frac{1}{2},$$

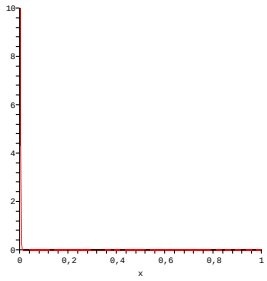
nous pouvons affirmer que M est strictement croissante sur son domaine de définition. Le calcul de la limite se fait par développement limité à l'ordre 2 de M.

Lambda	− infini	0	+ infini
M	0 ↗	$\frac{1}{2}$	↗ 1
M'	+		+
f	+ ↘	0	+ ↗
f'	−	0	+
g	− ↗	0	+ ↗
g'	+ ↘	0	+ ↗
g''	− ↗	0	+ ↗
g'''	+		+

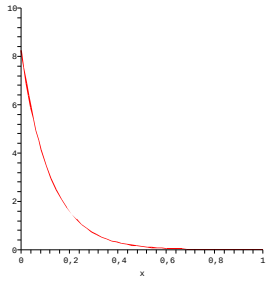
Figure 2: Tableau de variation de M.

6 Exemples de distributions

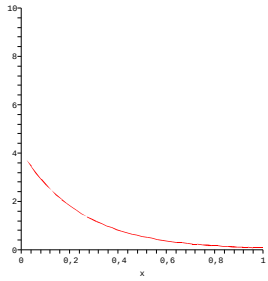
Voici quelques exemples de distributions de maximum d'entropie en fonction du paramètre m.



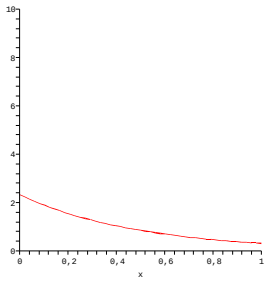
$m = 0.001$



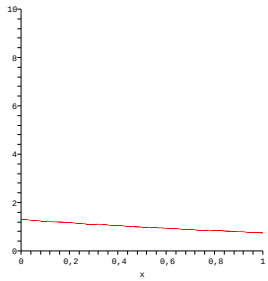
$m = 0.121$



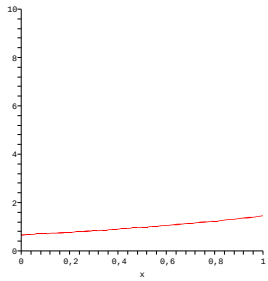
$m = 0.232$



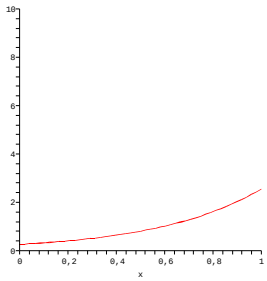
$m = 0.343$



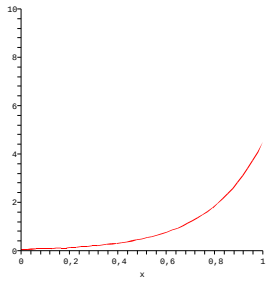
$m = 0.454$



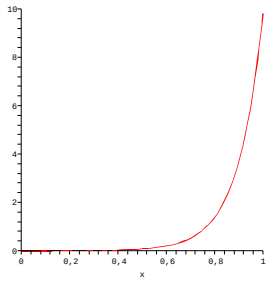
$m = 0.565$



$m = 0.676$



$m = 0.787$



$m = 0.898$

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes
655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399