



**HAL**  
open science

# Une méthode d'identification pour un système linéaire à retards

François Ollivier, Saïd Moutaouakil, Brahim Sadik

► **To cite this version:**

François Ollivier, Saïd Moutaouakil, Brahim Sadik. Une méthode d'identification pour un système linéaire à retards. 2007. inria-00128173

**HAL Id: inria-00128173**

**<https://inria.hal.science/inria-00128173>**

Submitted on 31 Jan 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une méthode d'identification pour un système linéaire à retards

## A method of identification for a linear delays system.

François Ollivier  
ALIEN, INRIA Futurs & LIX, UMR CNRS 7161  
École polytechnique  
91128 Palaiseau CEDEX, France  
francois.ollivier@lix.polytechnique.fr

Saïd Moutaouakil et Brahim Sadik  
Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences Semlalia  
B.P. 2390, Avenue Safi, Marrakech, Maroc  
{sadik,s.moutaouakil}@ucam.ac.ma

26 janvier 2007

### Abstract

We provide a class of methods for the identification of a linear system with delay of the shape  $x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) + bu(t-h)$ . They allow the simultaneous identification of the parameters and delay, the observation of  $x$  and its derivatives, knowing only generic input  $u$  and output  $x$ . They are robust to the noise. Used in continuous time, they may follow the evolution of slowly varying parameters and noise. The method may be generalized to systems with two or more delays, e.g.  $x''(t) + ax(t-R_1) = bu(t-R_2)$ .

**Résumé** On introduit une classe de méthodes d'identification et d'observation pour un système linéaire à retard de la forme  $x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) + bu(t-h)$ . Celles-ci permettent l'identification simultanée du retard et des paramètres, l'observation de  $x$  et de ses dérivées et ne supposent que la connaissance de la sortie  $x$  et de l'entrée  $u$ , sans autre hypothèse que leur généricité. Elles se révèlent assez robustes au bruit. Utilisées en temps continu, elles permettent de suivre l'évolution de paramètres ou de retards lentement variables. La méthode peut être généralisée à des systèmes avec plusieurs retards, e.g.  $x''(t) + ax(t-R_1) = bu(t-R_2)$ .

## Abridged English version

Time delay systems are known to take an important place in many fields of application. We refer to [9] and the references therein for more details on the subject. We propose a method for parameters and delay identification, related to the method introduced by Fliess and Sira-Ramírez [4, 5] (see also [1]).

We write the system  $\sum_{i=0}^n a_i x^{(i)}(t) + bu(t) = 0$ , with  $a_n = -1$ . The output is  $y = x + w$  where  $w$  stands for the noise which is such that  $\left( \int_{T_1}^{T_2} w(\tau) d\tau \right) / (T_2 - T_1)$  goes to 0 when  $T_2 - T_1$  goes to infinity. The main idea is to use a family of functions  $f_i$  such that  $f_j^{(k)}(T_1) = f_j^{(k)}(T_2) = 0$  for  $k < n$ . Let  $I_{x,f} := \int_{T_1}^{T_2} f(\tau)x(\tau)d\tau$ .

Integrating by parts, we get  $I_{x^{(i)},f_j} = (-1)^i I_{x,f_j^{(i)}}$ . So we may estimate the values of the coefficients  $a_i$  and  $b$  by solving the system  $\sum_{i=0}^n \left( (-1)^i a_i I_{y,f_j^{(i)}} \right) + b I_{u,f_j} = 0$  for  $j = 1, \dots, m$ , by the mean squares method.

We can estimate  $x$  and its derivatives in the same way, using functions  $g_j$   $0 \leq j < n$  such that  $g_j^{(k)}(T_1) = 0$  for  $0 \leq k < n$  and  $g_j^{(k)}(T_2) = 0$  for  $0 \leq k < j$ , with  $g_j^{(j)}(T_2) \neq 0$ .

In practice we have used  $f_j(t) = (T_2 - t)^{n+j} e^{-\lambda(T_2-t)}$ , the integration being done between  $-\infty$  and the current time. A good approximation of the integrals is obtained by integrating the system  $J'_{x,0} = x - \lambda J_{x,0}$  and  $J'_{x,j} = j J_{x,j-1} - \lambda J_{x,j}$  if  $j > 0$ , with initial conditions  $J_j(0) = 0$ :  $J_j(t)$  tends quickly to  $I_{x,f_j-n+1}$  for  $\lambda$  great enough. Numerical simulations are given with example 1.

In section 3, we consider a delay system  $\sum_{i=0}^n a_i x^{(i)}(t) + bu(t-h)$ , with  $a_n = -1$ . We use the notation  $I_{x,f,T_1,T_2} = \int_{T_1}^{T_2} f((\tau - T_1)/(T_2 - T_1))x(\tau)d\tau$ , where  $f$  is such that  $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0$ , for  $j < m$  with  $m \geq n$ . Let  $E_{(T_1,T_2),x,u}$  denote the equation

$$\sum_{i=0}^n (T_1 - T_2)^{-i} a_i I_{x,f^{(i)},T_1,T_2} + \sum_{\ell=0}^k b_\ell (T_2 - T_1)^{-\ell} I_{u,f^{(\ell)},T_1,T_2} + O(h^{\min(k+1,m)}) = 0,$$

where the term  $O(h^{\min(k+1,m)})$  is neglected. Solving it by the mean squares method for generic  $x$  and  $u$  and a generic set  $S$  of couples  $(T_1, T_2)$ , we get approximations  $\hat{a}_i$  of the coefficients and an approximation of delay equal to  $\hat{h} = \hat{b}_1/\hat{b}_0$ . We can then replace  $u$  by  $u_{\hat{h}}(t) = u(t - \hat{h})$  in  $E_{(T_1,T_2),x,u}$  in order to get the improved approximation and iterate the process. Better precision could be achieved if  $f$  is such that  $f(t-h) = \sum_{k=0}^p c_k(h) f^{(k)}(t)$ , for example with  $f(t) = \sin^m(\pi t)$ .

In example 2, we use  $f = \sin^2$  on  $[0, \pi]$  and investigate the precision of the evaluation depending on the size of the noise. See *Table 0* and *Table 1*, which shows how our method may be improved by using a nonlinear least square method, initialized with our data.

In example 3 the method is generalized to the two delays system  $x''(t) + ax(t - R_1) = bu(t - R_2)$ . The standard deviation of our computed values are given in *table 2* for different noise level, stated values being improved by using a nonlinear least square method initialized with our results.

In section 4, we adapt the method of section 1 to the delay situation, solving the system

$$\sum_{i=0}^n \left( (-1)^i a_i I_{y,f_j^{(i)}} \right) + b_0 I_{u_{\hat{h}},f_j} + b_1 I_{u_{h\hat{h}},f_j} + O(h^2) = 0,$$

where  $u_{\hat{h}}(t) = u(t - \hat{h})$  for  $|h - \hat{h}| \ll 1$ . The delay evaluation is then  $\hat{h} + \hat{b}_1/\hat{b}_0$ . For  $t > T_0$ , when  $\hat{b}_0$  does not vanish any more and the evaluation  $\hat{h}(0) + \hat{b}_1/\hat{b}_0$  is assumed to be close enough, we take  $\hat{h}' = \lambda_h \hat{b}_1/\hat{b}_0$ , so that  $\hat{h}$  will converge to  $h$ .

Example 3 shows a simulation with  $h = 0.5$ . Greater delays could be considered by changing the time scale. Example 4 considers the case of a slowly varying delay. Scilab simulation files are available at url [13].

## 1 Introduction

Les systèmes à retard sont l'objet de recherches actives, en raison de leur importance dans de nombreux champs d'applications. Nous renvoyons à l'article de synthèse [9] et aux références incluses pour plus de détails. L'identification simultanée du retard et des paramètres demeure un problème difficile, mais crucial pour la mise en œuvre de méthodes de contrôle appropriées.

Nous proposons une méthode qui peut s'interpréter comme une variante de la méthode d'identification et d'observation due à Michel Fliess et Hebertt Sira-Ramirez [4, 5], et qui est susceptible de s'adapter à des systèmes à retard. L'article [1] fournit une application plus directe de cette approche. On pourra consulter, par exemple, [11, 12, 10, 7, 6, 2, 8] pour un aperçu d'autres approches.

L'introduction d'un facteur d'oubli permet l'identification et l'observation en continu, ce qui est décrit dans la section 2 pour des systèmes sans retard et dans la section 4 pour des systèmes à retard.

La section 3 décrit une méthode d'identification *a posteriori*. Une simulation permet d'évaluer sa précision en fonction du niveau de bruit. Nous avons utilisé à titre d'exemple des systèmes d'ordre 2, qui correspondent à une classe de modèles très répandus (voir [3]). Les calculs numériques ont été effectués sur Dell Latitude D400 avec Scilab 3.0, à partir de formules littérales calculées en Maple 9.5.

## 2 Identification d'un système sans retard

Pour alléger les formules, nous écrirons le système sous la forme :  $\sum_{i=0}^n a_i x^{(i)}(t) + bu(t) = 0$ , avec  $a_n = -1$ . La sortie est  $y = x + w$ , où  $w$  désigne le bruit, que nous supposons tel que  $\left(\int_{T_1}^{T_2} w(\tau) d\tau\right) / (T_2 - T_1)$  tend vers 0 quand  $T_2 - T_1$  tend vers l'infini. L'idée de base est d'utiliser une famille de fonctions  $f_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  telles que  $f_j^{(k)}(T_1) = f_j^{(k)}(T_2) = 0$  pour  $k < n$ .

On pose  $I_{x,f} := \int_{T_1}^{T_2} f(\tau) x(\tau) d\tau$ . En intégrant par parties, on aura  $I_{x^{(i)}, f_j^{(k)}} = -I_{x^{(i-1)}, f_j^{(k+1)}}$ , si  $k < n$ , et donc  $I_{x^{(i)}, f_j} = (-1)^i I_{x, f_j^{(i)}}$ . On peut donc calculer la valeur des coefficients  $a_i$  et  $b$  en résolvant le système

$$\sum_{i=0}^n \left( (-1)^i a_i I_{y, f_j^{(i)}} \right) + b I_{u, f_j} = 0$$

pour  $j = 1, \dots, m$ , si  $m \geq n$ . Pour  $m > n$ , ce système sera résolu par la méthode des moindres carrés.

Si l'on se donne une famille  $g_j$ ,  $0 \leq j < n$  telle que  $g_j^{(k)}(T_1) = 0$  pour  $0 \leq k < n$  et  $g_j^{(k)}(T_2) = 0$  pour  $0 \leq k < j$ , avec  $g_j^{(j)}(T_2) \neq 0$ , on obtient alors  $I_{x^{(i)}, g_j} = (-1)^i I_{x, g_j^{(i)}} + \sum_{\ell=0}^{i-j} (-1)^{i-\ell-1} g_j^{(i-\ell-1)}(T_2) x^{(\ell)}(T_2)$ . On estime  $x(T_2), \dots, x^{(n-1)}(T_2)$  en résolvant le système

$$\sum_{i=0}^n \left( \sum_{\ell=0}^{i-j} \left( (-1)^{i-\ell-1} g_j^{(i-\ell-1)}(T_2) x^{(\ell)}(T_2) \right) + (-1)^i a_i I_{y, g_j^{(i)}} \right) + b I_{u, g_j} = 0,$$

pour  $j = 0, \dots, n-1$ . Ces équations se déduisent immédiatement de  $\sum_{i=1}^n a_i I_{x^{(i)}, g_j} + b I_{u, g_j} = 0$ .

Par exemple, on peut prendre  $f_j(t) = (T_2 - t)^{n+j} e^{-\lambda(T_2-t)}$ , et  $g_j = (T_2 - t)^j e^{-\lambda(T_2-t)}$ . Ces fonctions satisfont les hypothèses pour  $T_1 = -\infty$ . Si l'on pose  $J'_{x,0} = x - \lambda J_{x,0}$  et  $J'_{x,j} = j J_{x,j-1} - \lambda J_{x,j}$  si  $j > 0$ , avec les conditions initiales  $J_j(0) = 0$ ,  $J_j(T_2)$  tend vers  $I_{x, g_j}$  pour  $j = 1, \dots, n-1$  et vers  $I_{x, f_{j-n+1}}$  pour  $j \geq n$ , quand  $T_2$  tend vers l'infini. La convergence est rapide pour  $\lambda$  suffisamment grand. On a  $g'_j = \lambda g_j - j g_{j-1}$  et une relation similaire pour les  $f_j$ . On a donc  $I_{x^{(i)}, f_j} = \sum_{k=j-1}^{n-1} M_{i,j,k} I_{x, g_k} + \sum_{k=1}^j M_{i, n+j-1, k} I_{x, f_k}$ , où les matrices  $M_{i,j,k}$  satisfont des relations de récurrence simples, ce qui facilite les calculs. On obtient en un temps  $t$  générique et suffisamment grand une bonne approximation des paramètres  $a_i$  et  $b$  en résolvant le système

$$\sum_{i=0}^n a_i \left( \sum_{k=j-1}^{n-1} M_{i,j,k} I_{y, g_k} + \sum_{k=1}^j M_{i, n+j-1, k} I_{y, f_k} \right) + b I_{u, f_j} = 0,$$

que nous noterons  $CA = D$ , où  $A = (a_1, \dots, a_{n-1}, b)^t$ . Comme il se peut que pour certaines valeurs le rang du système ne s'annule, il est préférable de ne pas le résoudre directement mais d'en chercher la solution par une méthode de gradient, en se donnant de nouvelles variables  $\hat{a}_i$  et  $\hat{b}$ , et en intégrant le système  $\hat{A}' = -\Lambda C^t (CA - D)$ . Ce choix permet de conserver des valeurs précises lorsque  $C$  devient mal conditionnée et de réduire encore l'influence du bruit. Les valeurs de  $\lambda$  et de  $\Lambda$  résultent d'un compromis entre la vitesse de convergence souhaitée et la précision recherchée.

*Exemple 1* On a pris  $x$  solution de l'équation  $x'' = a_1x' + a_0x + bu$ , où  $u = 60 \cos(1,23t + 1,3 \sin(t) - 0,7 \cos(0,5t))$ , avec les conditions initiales  $x(0) = 20$  et  $x'(0) = 0,3$ . On a choisi un bruit gaussien avec un écart type de 5. La sortie est échantillonnée à 100 Hz. On a pris  $b = 2$ ,  $a_0 = -0,35$ ,  $a_1(t) = -1,2$  si  $t < 30$  et  $a_1 = -1,2 - 0,02(t - 30)$  sinon. Les courbes de la figure 1 résument les résultats obtenus pour  $\lambda = 1$  et  $\Lambda = 10^{-3}$ . On voit qu'après une phase de convergence, l'approximation obtenue est excellente. La précision

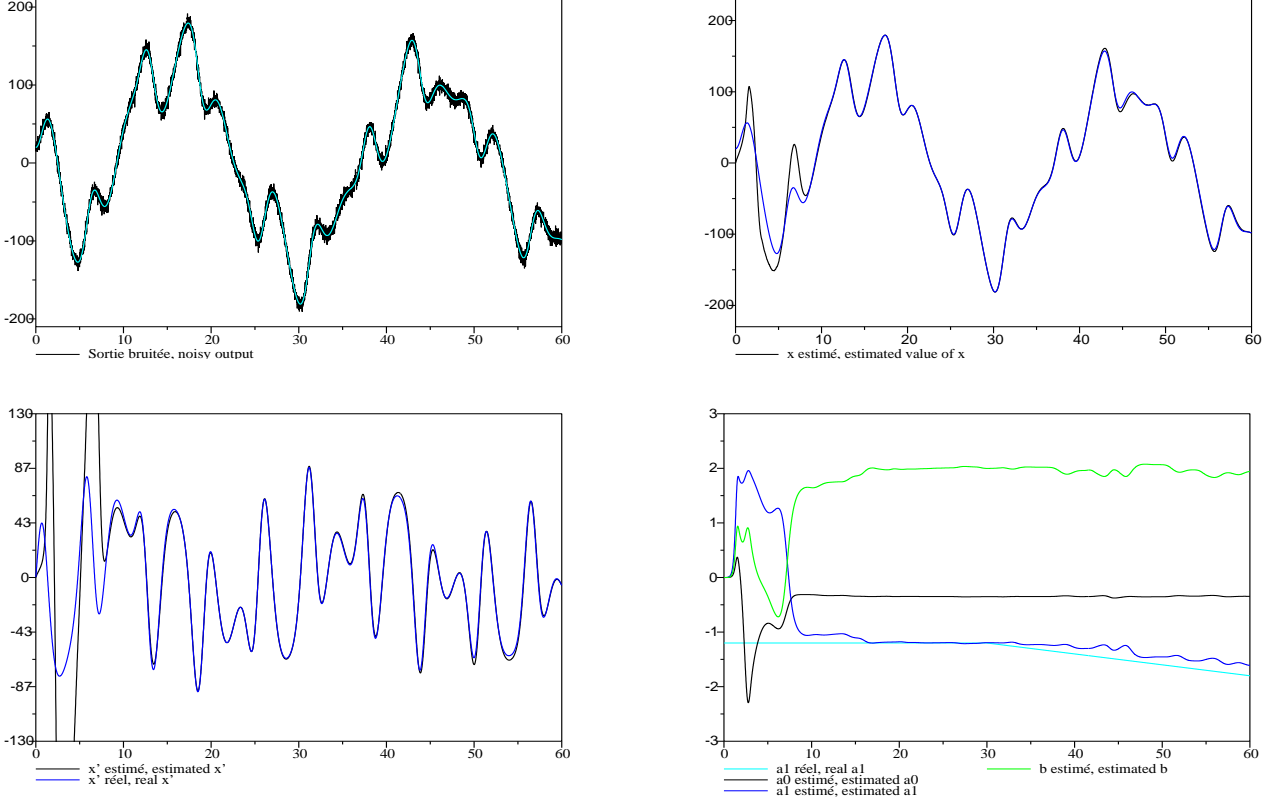


FIG. 1 – Estimations des coefficients de  $x$  et de  $x'$ , *Estimations of the coefficients,  $x$  and  $x'$ .*

de l'évaluation des coefficients est naturellement moins bonne quand  $a_1$  commence à varier. Toutefois, les évaluations de  $x$  et  $x'$  demeurent assez précises.

### 3 Identification avec retards

On considère maintenant un système à retard écrit sous la forme  $\sum_{i=0}^n a_i x^{(i)}(t) + bu(t-h)$ , avec  $a_n = -1$ . Soit  $f$  une fonction telle que  $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0$ , pour  $j < m$  avec  $m \geq n$ . On pose  $I_{x,f,T_1,T_2} = \int_{T_1}^{T_2} f((\tau - T_1)/(T_2 - T_1))x(\tau)d\tau$ . En intégrant par parties, on déduit de l'équation du système

$$\sum_{i=0}^n (T_1 - T_2)^{-i} a_i I_{x,f^{(i)},T_1,T_2} + b \left( \sum_{\ell=0}^k (T_2 - T_1)^{-\ell} I_{u,f^{(\ell)},T_1,T_2} h^\ell \right) + O(h^{\min(k+1,m)}) = 0.$$

On désignera par  $E_{(T_1,T_2),x,u}$  cette équation, où le terme  $O(h^{\min(k+1,m)})$  a été négligé et chaque puissance  $h^\ell$  remplacée par  $b_\ell/b$  afin de se ramener à une équation linéaire. Pour  $x$  et  $u$  génériques, on résoud par moindres

carrés le système  $E_{s,y,u}$ ,  $s \in S$  en les inconnues  $a_i$  et  $b_\ell$ , où  $S$  est un ensemble générique d'intervalles d'un cardinal suffisant. On obtient des approximations  $\hat{a}_i$  et  $\hat{b}_0$  des coefficients  $a_i$  et  $b$  et une approximation du retard égale à  $\hat{b}_1/\hat{b}_0$ . La précision du résultat sera d'autant meilleure que le rapport  $h/(T_2 - T_1)$  est petit pour chaque couple de  $S$ .

Une fois obtenue une approximation  $h_0$  du retard, on améliore la précision du résultat en résolvant le système  $E_{s,y,u_{h_0}}$ ,  $s \in S$ , où  $u_{h_0}(t) = u(t - h_0)$ , ce qui donnera la nouvelle approximation  $h_0 + \hat{b}_1/\hat{b}_0$ . On itère le processus.

Pour de meilleurs résultats, on peut également choisir une fonction  $f$  telle que  $f(t+h) = \sum_{k=0}^p a_k(h)f^{(k)}$ , par exemple  $f(t) = t^m(1-t)^m$  ou  $\sin^m(\pi t)$ .

*Exemple 2* Nous avons fait des simulations numériques avec  $f(t) = \sin^2(t)$  sur l'intervalle  $[0, \pi]$  pour un système d'ordre 2. L'équation  $E_{(T_1, T_2), y, u}$  s'écrit alors  $(T_1 - T_2)^{-1}a_1 I_{x, f', T_1, T_2} + a_0 I_{x, f, T_1, T_2} + b_0 I_{u, f, T_1, T_2} - b_1 I_{u, \cos(2t), T_1, T_2} + b_2 I_{u, \sin(2t), T_1, T_2} + 0(h^2) = (T_1 - T_2)^{-2} I_{x, f'', T_1, T_2}$  et l'on obtient une approximation de  $h$  égale à  $h_0 + a \cos(\hat{b}_2/\hat{b}_0)$  à partir d'un système  $E_{s, u_{h_0}}$ ,  $s \in S$ , où  $h_0$  est une estimation préalable du retard.

Les valeurs des coefficients sont les mêmes que celles de l'exemple 1. On a choisi la commande  $u = 60 \cos(1, 23t + 0, 33 * \sin(t) - 0, 47 \cos(0, 5t))$  et un retard  $h = 4$ . Le bruit est un bruit gaussien et la fréquence d'échantillonnage est de 500 Hz. On a pris pour  $S$  les couples  $(10k, 10k + 15)$ ,  $1 \leq k \leq 9$ . On part de  $h_0 = 0$  et l'on itère les calculs une cinquantaine de fois (en un temps de l'ordre de quelques secondes sur un Dell Latitude D400), ce qui est suffisant pour atteindre un point fixe à la précision numérique près.

Le tableau ci-dessous, qui donne la moyenne (M.) et l'écart type (É.) de séries de cent estimations des coefficients et du retard réalisées pour des bruits gaussiens d'écart types croissant, montre que l'on obtient des estimations crédibles, même pour un niveau de bruit notable.

| É. bruit | M. $a_1$ | É. $a_1$ | M. $a_0$ | É. $a_0$ | M. $b$ | É. $b$ | M. $h$ | É. $h$ |
|----------|----------|----------|----------|----------|--------|--------|--------|--------|
| 1        | -1,20    | 0,020    | -0,35    | 0,007    | 2,00   | 0,04   | 4,00   | 0,015  |
| 2        | -1,20    | 0,028    | -0,35    | 0,010    | 2,00   | 0,05   | 4,00   | 0,023  |
| 5        | -1,17    | 0,084    | -0,34    | 0,029    | 1,94   | 0,17   | 3,97   | 0,065  |
| 10       | -1,12    | 0,15     | -0,32    | 0,055    | 1,84   | 0,33   | 3,91   | 0,132  |

Tableau 1. Moyenne et écart type des valeurs calculées  
Table 1. Mean and standard deviations (É.) of computed values

Nous avons comparé nos résultats avec une méthode souvent utilisée en pratique qui consiste à évaluer les coefficients par une méthode de moindres carrés non linéaire, pour différentes valeurs du retard régulièrement espacées, et à choisir celle pour lesquelles on approche le mieux la sortie. Cette méthode est inapplicable pour l'exemple 2 avec la méthode de moindre carré non linéaire disponible dans scilab, car celle-ci ne converge vers les paramètres que si elle est initialisée avec des valeurs voisines. Toutefois, les moindres carrés non-linéaires permettent d'améliorer la précision de l'évaluation des paramètres et du retard, une fois initialisés avec les résultats fournis par notre méthode. Le tableau ci-dessous fournit les valeurs approchées des écarts types obtenus par notre méthode et après utilisation des moindres carrés (\*), évaluées sur 100 essais, la durée moyenne d'un calcul étant de 10,5 s.

| É. bruit | É. $a_1$ | É. $a_1^*$ | É. $a_0$ | É. $a_0^*$ | É. $b$ | É. $b^*$ | É. $x(0)$ | É. $x(0)^*$ | É. $x'(0)$ | É. $x'(0)^*$ | É. $h$ | É. $h^*$ |
|----------|----------|------------|----------|------------|--------|----------|-----------|-------------|------------|--------------|--------|----------|
| 5        | 0,1      | 0,002      | 0,03     | 0,0005     | 0,2    | 0,002    | 1         | 0,4         | 6          | 0,5          | 0,07   | 0,001    |
| 10       | 0,15     | 0,005      | 0,06     | 0,001      | 0,35   | 0,005    | 1,7       | 0,6         | 10         | 0,9          | 0,1    | 0,0015   |

Tableau 1. Écart type des valeurs calculées  
Table 1. Standard deviations of computed values, starred values improved with mean-square

Ce type de calcul suppose, naturellement l'identifiabilité du système. Si la commande est nulle, la sortie constante etc. celui-ci ne sera pas identifiable et il ne le sera que localement pour un comportement périodique. Notons que, nos calculs reposant uniquement sur des résolutions au sens des moindres carrés, il n'y a jamais d'erreurs numériques du type « division par 0. » Pour des retard grands, les itérations peuvent diverger et produire une erreur du type `invalid index` si les intervalles d'intégration sortent de la période d'observation du système.

*Exemple 3* Cette méthode se généralise au cas de plusieurs retards. Considérons le système  $x''(t) + ax(t - h_1) = bu(t - h_2)$ . En utilisant  $f(t) = 1 - \cos(t)$  sur  $[0, 2\pi]$ , on a  $a I_{u, f, T_1, T_2} + b \sin(h_2/(T_2 - T_1)) I_{x, \sin, T_1, T_2} + \mathcal{O}(h_2^2) - b I_{x, f, T_1, T_2} - a \sin(h_1/(T_2 - T_1)) I_{x, \sin, T_1, T_2} + \mathcal{O}(h_1^2) = (T_2 - T_1)^{-2} I_{x, f'', T_1, T_2}$ . En choisissant un

nombre suffisant d'intervalles  $[T_1, T_2]$ , on peut évaluer par moindres carrés linéaires des approximations de  $a$ ,  $a \sin(h_1/(T_2 - T_1))$ ,  $b$  et  $b \sin(h_1/(T_2 - T_1))$ . On en déduit des valeurs de  $h_1$  et  $h_2$  que l'on peut réinjecter dans les équations pour améliorer la précision.

Les simulations ont été faites avec  $x = 3 \sin(t/2) + 2 \cos(t/3)$ ,  $a = 2,7$ ,  $b = 1,5$ ,  $h_1 = 2$ ,  $h_2 = 4$ . L'échantillonnage est effectué à 500 Hz avec des bruits gaussiens d'écart-types différents. On a pris  $T_2 - T_1 = 10$  et 20 intervalles avec  $T_1$  variant par pas de 2 à partir de  $T_1 = 15$ . Le tableau suivant donne la moyenne et l'écart-type des valeurs calculées (sur 100 essais, chaque calcul durant environ 1,5 s. avec 10 itérations) pour différents niveaux de bruit. Les valeurs de  $h_1$  et  $h_2$  ne sont naturellement définies que modulo la période  $12\pi$  de la sortie. La précision du calcul se dégrade si les intervalles n'ont pas une longueur  $T_2 - T_1$  suffisamment grande devant  $h_1$  et  $h_2$ , mais aussi pour un signal périodique si  $T_2 - T_1$  n'est pas assez petit devant la période.

| É. du bruit | M. $a$ | É. $a$ | M. $b$ | É. $b$ | M. $h_1$ | É. $h_1$ | M. $h_2$ | É. $h_2$ |
|-------------|--------|--------|--------|--------|----------|----------|----------|----------|
| 0,025       | 2,69   | 0,012  | 1,50   | 0,006  | 1,99     | 0,005    | 3,99     | 0,0051   |
| 0,05        | 2,69   | 0,018  | 1,49   | 0,010  | 1,99     | 0,010    | 3,99     | 0,011    |
| 0,1         | 2,70   | 0,043  | 1,50   | 0,025  | 1,99     | 0,01     | 3,99     | 0,017    |
| 0,2         | 2,68   | 0,095  | 1,48   | 0,054  | 1,99     | 0,039    | 4,00     | 0,043    |

Tableau 2. Moyenne et écart type des valeurs calculées  
Table 2. Mean and standard deviations (É.) of computed values

## 4 Identification en temps réel avec retard lentement variable

On peut également adapter aux systèmes à retard les méthodes d'identification et d'observation en temps réel introduites dans la section 1. On utilise les équations

$$\sum_{i=0}^n a_i \left( \sum_{k=j-1}^{n-1} M_{i,j,k} I_{y,g_k} + \sum_{k=1}^j M_{i,n+j-1,k} I_{y,f_k} \right) + b_0 I_{u_{\hat{h}},f_j} + b_1 I_{u_{\hat{h}},f_j} + 0(h^2) = 0,$$

avec  $b_\ell = bh^\ell$  et  $u_{\hat{h}}(t) = u(t - \hat{h})$ . Ceci suppose que  $|h - \hat{h}| \ll 1$ . On peut s'y ramener quel que soit le retard par un changement d'échelle de temps. L'évaluation du retard est alors  $\hat{h} + \hat{b}_1/\hat{b}_0$ . On résout le système par intégration au moyen d'une méthode de gradient comme décrit section 2. Lorsque  $t > T_0$ , on suppose que les valeurs des estimations sont devenues assez stables (il faut au moins que  $\hat{b}_0$  ne s'annule plus). On pose alors  $\hat{h}' = 0$  si  $t < T_0$  et  $\hat{h}' = \lambda_h b_1/b_0$  sinon. Pour plus de précision, on calcule  $I_{u_{\hat{h}},f_j}$  en posant  $I'_{u_{\hat{h}},f_j} = (1 + \lambda_h b_1/b_0)(u_{\hat{h}}(t) - \lambda I_{u_{\hat{h}},f_j})$ .

*Exemple 4* On utilise les mêmes commande, coefficients, type de bruit et fréquence que pour l'exemple 1. On prend  $T_0 = 14$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\Lambda = 4.10^{-3}$  et  $\lambda_h = 0,4$ .

*Exemple 5* On utilise les mêmes commande, coefficients, type de bruit et fréquence que pour les exemples 1 et 3. On prend  $T_0 = 40$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\Lambda = 4.10^{-4}$  et  $\lambda_h = 0,4$ . Le retard est initialisé à 3,6 sa valeur à  $T_0$ , afin d'accélérer la convergence.

## 5 Conclusion

Les méthodes que nous avons introduites permettent un large choix dans leur mise en œuvre. Les quelques essais réalisés montrent qu'elles sont applicables dans des situations réalistes, en particulier avec un niveau de bruit conséquent. Elles peuvent se généraliser aisément, au moins en théorie à des situations plus complexes : retards multiples ou n'intervenant pas uniquement au niveau de la commande, comme l'illustre l'un de nos exemples.

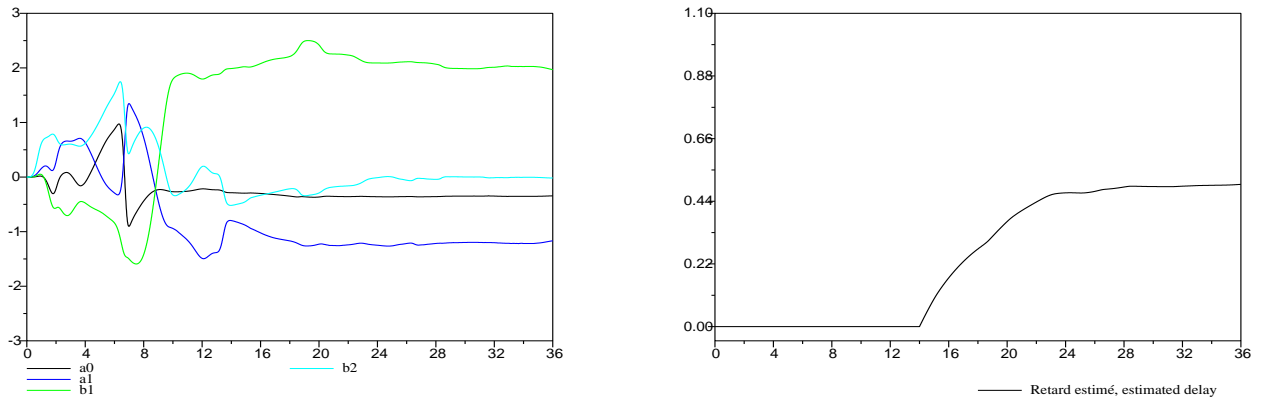


FIG. 2 – Estimations des coefficients et du retard, *Estimations of coefficients and delay.*

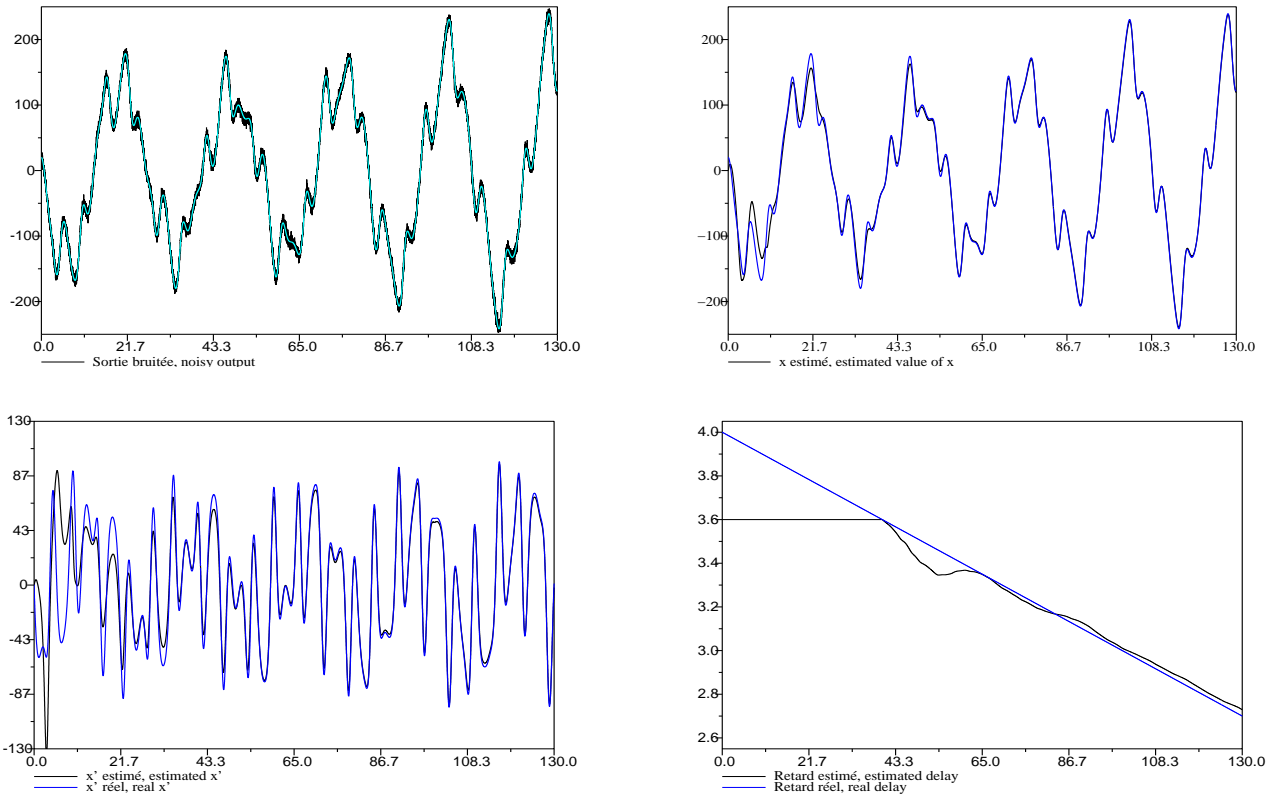


FIG. 3 – Estimations du retard de  $x$  et de  $x'$ , *Estimations of the delay, of  $x$  and of  $x'$ .*

Leur utilisation suppose la connaissance *a priori* d'une borne supérieure pour le retard, ce qui est essentiel pour un choix approprié des différents paramètres  $\lambda$ ,  $\Lambda$ ,  $\lambda_h$  et  $T_0$ . En revanche, leur capacité à s'adapter à des coefficients ou à un retard lentement variable nous semble un atout intéressant. Les fichiers utilisés pour les simulations sont disponibles *via* l'url [13].



## Références

- [1] Belkoura (L.), Richard (J.-P.), Fliess (M.) « On-line identification of systems with delayed inputs », *MTNS'06, 16th Conf. Mathematical Theory of Networks & Systems*, 2006.
- [2] DIOP (S.), KOLMANOVSKY (I.), MORAAL (P.) et VAN NIEUWSTADT (M.) « Preserving stability/performance when facing an unknown time delay », *Control Engineering Practice*, **9** 1319-1325, 2001.
- [3] FLIESS (M.), MOUNIER (H.), « On a class of delay systems often arising in practice », *Kybernetika*, **27**, 295-308, 2000.
- [4] FLIESS (M.) et SIRA-RAMÍREZ (H.), « An algebraic framework for linear identification », *ESAIM Contr. Optim. Cal. Variat.*, vol. 9, 151-168, 2003.
- [5] FLIESS (M.) et SIRA-RAMÍREZ (H.), « Reconstructeurs d'état », *C.R. Acad. Sci. Paris*, 338 (2004), no. 1, 91-96.
- [6] KOLMANOVSKII (V. B.) et MYSHKIS (A.), *Introduction to the theory and application of functional differential equations*, Dordrecht, Kluwer Academy, 1999.
- [7] MAHJI (S.) ATHERTON (D. P.), « A novel identification method for time delay processes », *ECC'99 (Fifth European Control Conference)*, Karlsruhe, Allemagne, 1999.
- [8] ORLOV (Y.) BELKOURA (L.) RICHARD (J. P.) et DAMBRINE (M.) « On-line parameter identification of linear time-delay systems », *Proceedings of the 41<sup>st</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, USA, décembre 2002.
- [9] RICHARD (J.P.) « Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems » *Automatica*, **39**, 10, 1667-1694, Octobre 2003.
- [10] TAN (K. K.) WANG (Q. K.) et LEE (T. II.), « Finite spectrum assignment control of unstable time delay processes with relay tuning », *Industrial Engineering and Chemical Research*, **37** (4), 1351-1357, 1998.
- [11] TUCH (J.) FEUER (A.) et PALMOR (Z.J.), « Time delay estimation in continuous linear time-invariant systems », *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**, 823-827.
- [12] VERDUYN-LUNEL (S. M.), « Identification problems in functional differential equations », *36<sup>th</sup> IEEE CDC'99 (Conference on Decision and Control)*, San Diego CA, décembre 1997, 4409-4413.
- [13] <http://www.lix.polytechnique.fr/~ollivier/>