Etude de stabilité d'une méthode Galerkin discontinu pour la résolution numérique des équations de Maxwell 2D en domaine temporel sur des maillages triangulaires non-conformes

Hassan Fahs, Stephane Lanteri, Francesca Rapetti

▶ **To cite this version:**

Hassan Fahs, Stephane Lanteri, Francesca Rapetti. Etude de stabilité d'une méthode Galerkin discontinu pour la résolution numérique des équations de Maxwell 2D en domaine temporel sur des maillages triangulaires non-conformes. [Rapport de recherche] RR-6023, INRIA. 2006, pp.46. inria-00114537v3

HAL Id: inria-00114537
https://inria.hal.science/inria-00114537v3

Submitted on 26 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Etude de stabilité d'une méthode Galerkin discontinu pour la résolution numérique des équations de Maxwell 2D en domaine temporel sur des maillages triangulaires non-conformes

Hassan Fahs — Stéphane Lanteri — Francesca Rapetti

N° 6023

Juillet 2006

Thème NUM

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--6023--FR+ENG

Etude de stabilité d'une méthode Galerkin discontinu pour la résolution numérique des équations de Maxwell 2D en domaine temporel sur des maillages triangulaires non-conformes

Hassan Fahs * , Stéphane Lanteri* , Francesca Rapetti †

Thème NUM — Systèmes numériques
Projet Caiman

Rapport de recherche n° 6023 — Juillet 2006 — 46 pages

Résumé : On étudie la stabilité d'une méthode Galerkin discontinu pour la résolution numérique des équations de Maxwell 2D en domaine temporel sur des maillages triangulaires non-conformes. Cette méthode combine l'utilisation d'une approximation centrée pour l'évaluation des flux aux interfaces entre éléments voisins du maillage, à un schéma d'intégration en temps de type saute-mouton. La méthode repose sur une base de fonctions polynomiales nodales $\mathbb{P}_K$ et on considère ici les schémas obtenus pour $K = 0, \cdots, 3$. L'objectif de cette étude est d'exhiber des conditions sous lesquelles les schémas correspondants sont stables, et de comparer ces conditions à celles obtenues dans le cas de maillages conformes.

Mots-clés : équations de Maxwell, domaine temporel, méthode Galerkin discontinu, maillages triangulaires non-conformes, stabilité L^2.

* INRIA Sophia Antipolis, projet Caiman, Hassan.Fahs@sophia.inria.fr
† Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice/Sophia Antipolis

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Téléphone : +33 4 92 38 77 77 — Télécopie : +33 4 92 38 77 65

Stability analysis of a discontinuous Galerkin method for solving the 2D time-domain Maxwell's equations on non-conforming triangular meshes

Abstract: We study the stability of a discontinuous Galerkin for the numerical resolution of the 2D time-domain Maxwell's equations on non-conforming triangular meshes. This method combines a centered approximation for the evaluation of fluxes at interfaces between neighboring elements of the mesh, with a leap-frog time integration scheme. The method relies on a $\mathbb{P}_\kappa$ Lagrange type polynomial basis and we consider here the schemes obtained for $\kappa = 0, \cdots, 3$. The objective of this study is to exhibit conditions under which the corresponding schemes are stable and to compare these conditions with those obtained in the case of conforming meshes.

Key-words: Maxwell's equations, time domain, discontinuous Galerkin method, non-conforming triangular meshes, L^2 stability.

Table des matières

1 Introduction **4**

2 Etude du schéma Galerkin discontinu (GD-$\mathbb{P}_K$) **6**
2.1 Conservation d'une énergie discrète 10
2.2 Stabilité du schéma 12

3 Etude de cas particuliers **16**
3.1 Cas d'un maillage conforme 16
3.1.1 Schéma GD-$\mathbb{P}_0$ (méthode de volume fini) 16
3.1.2 Schéma GD-$\mathbb{P}_1$ 17
3.2 Cas d'un maillage non-conforme 18
3.3 Raffinement local non-conforme 20

4 Validation numérique **23**
4.1 Maillage conforme 23
4.2 Maillage non-conforme 24

5 Conclusion **28**

6 Annexes **40**
6.1 Inégalité généralisée 40
6.2 Problème d'optimisation 41
6.3 Formulation du schéma GD-$\mathbb{P}_K$ 42
6.4 Etude de quelques exemples 43

1 Introduction

Pour la résolution des équations de Maxwell en domaine temporel, la méthode numérique la plus connue et la plus couramment utilisée est la méthode DFDT (différence finie en domaine temporel) proposée par Yee en 1966 [29]. C'est une méthode de conception simple et facile à mettre en œuvre. Toute la physique nécessaire aux simulations numériques complexes en électromagnétisme (matériaux dispersifs, modèles de fils minces, plaques minces, fentes, etc.) a été introduite durant les dernières décennies. Sur des maillages cartésiens, cette méthode est la plus efficace en termes de temps de calcul et lorque la discrétisation est uniforme la méthode DFDT est précise au second ordre en espace et en temps. Cependant, il est malaisé de discrétiser des formes irrégulières avec de tels maillages. En particulier, toute surface courbe est approchée par une surface discrète en marches d'escalier, ce qui peut être préjudiciable à la précision du calcul lorsque cette surface revêt une importance particulière comme par exemple l'interface entre deux tissus biologiques dans les études dosimétriques du rayonnement électromagnétique issu d'un téléphone mobile. De plus, la modélisation de petits détails (fentes minces, plaques minces) impose une taille de maille trop petite, rendant le calcul prohibitif si le maillage sous-jacent est uniforme. Si l'on utilise un maillage cartésien non-uniforme mais conforme pour prendre en compte ces détails, on accroît l'erreur de dispersion du schéma dans les mailles plus grossières.

Une solution élégante pour prendre en compte des éléments géométriques de forme complexe tout en préservant l'utilisation de maillages conformes est proposée par la méthode des domaines fictifs [12]-[11]-[3]. L'inconvénient d'une telle méthode est que la taille du pas de discrétisation de l'objet est liée à celui du maillage et donc, si l'objet est discrétisé finement, on est de nouveau contraint à utiliser un maillage fin dans tout le domaine. Une autre approche consiste à avoir recours à un raffinement local du maillage. Il existe deux types de raffinement : conforme et non-conforme. On s'intéresse dans ce travail aux discrétisations non-conformes qui sont à priori plus intéressantes car elles permettent de réduire de manière spectaculaire le volume des données à traiter. Plusieurs travaux ont été menés pour étendre la méthode DFDT de Yee [29] à ce type de maillage (raffinement spatio-temporel) qui utilisent des formules d'interpolation portant sur les deux champs [19]-[22], ou sur un seul champ (le champ magnétique ou le champ électrique) [6]-[30]. On peut citer deux conclusions de ces travaux. La première est que le raffinement spatio-temporel a surtout été abordé d'un point de vue heuristique et étudié d'un point de vue expérimental (analyse de résultats d'expériences numériques). La deuxième est que des instabilités fortes (explosion au bout de quelques pas de temps) ou faibles (explosion à la suite de multiples aller-retours de l'onde à l'intérieur de la boîte de calcul) ont été signalées par certains auteurs sans qu'aucune analyse mathématique n'ait été donnée. Collino et *al.* [10] ont récemment proposé une nouvelle méthode de raffinement spatio-temporel en trois dimension d'espace garantissant un raccord stable entre les sous-maillages, basée sur la conservation d'une énergie électromagnétique discrète. Cependant, cette méthode est de nature implicite aux interfaces entre sous-maillages et nécessite donc la résolution d'un système linéaire pour l'obtention de la solution.

Un maillage non-structuré (non-orthogonal et non-uniforme) donne la souplesse voulue pour approcher correctement des frontières courbes et des détails géométriques. Deux familles de méthodes numériques travaillent avec ce type de maillage : la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis. Ces méthodes et en particulier celles reposant sur le formalisme volume fini ont fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années pour leur application à la résolution des équations de Maxwell instationnaires [7]. Les méthodes initialement proposées s'appuient sur des schémas de type MUSCL[1] pour obtenir une plus grande précision en espace et, éventuellement, des schémas de type Runge-Kutta pour une plus grande précision en temps. Malheureusement, ces schémas produisent une dissipation numérique non négligeable, qui rend les calculs en temps long irréalistes. Ces méthodes ont aussi des coûts relativement élevés par rapport aux méthodes de différences finies les plus efficaces. Ces dernières années ont vu l'apparition de nouvelles méthodes numériques d'ordre élevé en maillages non-structurés pour la résolution des équations de Maxwell dans le domaine temporel que l'on peut regrouper sous le formalisme des méthodes de type Galerkin discontinu [8].

La méthode Galerkin discontinu respose sur une base de fonctions discontinues d'un élément du maillage à un autre. L'ordre d'interpolation peut être choisi arbitrairement dans chaque élément. La méthode peut être vue comme une approche élément fini pour laquelle aucune continuité n'est imposée entre élément, ou une approche volume fini d'ordre élevé. Par ailleurs, la discontinuité de l'approximation permet de n'imposer aucune contrainte sur le maillage et les discrétisations non-conformes sont donc autorisées. De plus, les matrices de masse obtenues sont locales à un élément ce qui permet de s'affranchir de la question cruciale de l'inversion d'une matrice de masse globale typique des méthodes d'éléments finis classiques. Ces propriétés font des méthodes Galerkin discontinu des candidates idéales pour mettre au point des stratégies de résolution *hp*-adaptatives. La méthode Galerkin discontinu est fréquemment utilisée pour résoudre les systèmes différentiels hyperboliques non-linéaires de la mécanique des fluides compressibles [28] mais son application à la résolution des équations de Maxwell instationnaires est en revanche plus récente [18]-[13]-[20]-[17]. Pour ces équations, des méthodes Galerkin discontinu d'ordre élevé ont été développées en maillages tétraédriques [15] et en maillages hexaédriques [9]. Enfin, la méthode Galerkin discontinu est particulièrement bien adaptée aux architectures de calcul parallèles [14]-[2].

Concernant la méthode Galerkin discontinu en domaine temporel (GDDT), les travaux sur des maillages non-conformes sont très rares, surtout pour les systèmes hyperboliques. Une étude en mécanique des fluides a été publiée en 2003 par Remacle *et al.* [23]. Les auteurs présentent une méthode *hp*-adaptative avec un schéma de Rung-Kutta pour l'intégration en temps. Ils exploitent aussi une stratégie de pas de temps local [24] pour améliorer la performance du schéma d'intégration. A noter que les auteurs se sont focalisés sur la question des limiteurs dans le caclul des flux aux interfaces entre éléments voisins sans aborder la question de la stabilité du schéma. Il est très difficile de juger de la qualité de leurs résultats vu les cas tests choisis où des instabilités physiques sont naturellement présentes. Canouet *et al.* [5] ont proposé une nouvelle méthode de type Galerkin discontinu pour la résolution du système de

[1] Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws

Maxwell, basée sur un espace d'approximation local $\mathbb{P}^1_{div}$, un schéma saute-mouton pour l'intégration en temps et un schéma centré pondéré pour le calcul des flux. Malheureusement ce schéma peut dans certains cas conduire à des solutions incorrectes dans le cas d'un maillage localement raffiné de façon non-conforme. Pour palier ce problème, les auteurs proposent un schéma hybride $\mathbb{P}^1_{div}/\mathbb{P}^2_{div}$. Les résultats numériques montrent clairement l'intérêt de ce type de méthode en maillage non-conforme pour la conception d'antennes. Néanmoins, bien que vérifiée numériquement, la stabilité de la méthode n'est pas étudiée théoriquement.

On s'intéresse ici à la résolution numérique des équations de Maxwell bidimensionnelles en domaine temporel par une méthode de type Galerkin discontinu sur un maillage triangulaire non-conforme. Le point de départ de notre étude est la méthode Galerkin discontinu non-dissipative proposée dans [13] pour la résolution des équations de Maxwell tridimensionnelles en maillages tétraédriques non-structurés conformes. Cette méthode combine l'utilisation d'une approximation centrée pour l'évaluation des flux aux interfaces entre éléments voisins du maillage, à un schéma d'intégration en temps de type saute-mouton. L'objectif de cette étude est d'exhiber les conditions sous lesquelles les schémas correspondant sont stables, et de comparer ces conditions à celles obtenues dans le cas de maillages conformes. Ce rapport est organisé comme suit. Dans la section 2, on formule la méthode Galerkin discontinu d'ordre κ et on établit une condition suffisante de stabilité sur un maillage triangulaire non-conforme. Dans la section 3, on se place dans le cas de fonctions de bases nodales $\mathbb{P}_\kappa$ et on détaille la formulation de la méthode GD-$\mathbb{P}_\kappa$ dans le cas de maillages conforme et non-conforme, en insistant sur les difficultés du cas non-conforme. Enfin, on présente dans la section 4, quelques résultats numériques, qui permettent de vérifier la stabilité du schéma.

2 Etude du schéma Galerkin discontinu (GD-$\mathbb{P}_\kappa$)

On considère le système de Maxwell 2D dans la polarisation transverse électrique TE_z (toutefois, tout ce qui suit reste valide dans le cas de la polarisation TM_z). Nous avons choisi ici la direction O_z comme direction privilégiée et le champ électromagnétique ne dépend que des deux variables d'espace x et y. Le système résultant s'écrit :

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\partial H_z}{\partial t} + \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \\ \epsilon\dfrac{\partial E_x}{\partial t} - \dfrac{\partial H_z}{\partial y} = 0, \\ \epsilon\dfrac{\partial E_y}{\partial t} + \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ces équations sont définies dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$. On initialise le champ électromagnétique à l'instant $t = 0$ pour $(x, y) \in \Omega$ par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E_x(t=0,x,y) & = & E_{0x}(x,y), \\ E_y(t=0,x,y) & = & E_{0y}(x,y), \\ H_z(t=0,x,y) & = & H_{0z}(x,y). \end{array} \right. \tag{2.2}$$

On se donne un maillage triangulaire non-conforme de Ω (voir la figure 2.1). Pour chaque élément T_i, on désigne par $|T_i|$ son aire et, ϵ_i et μ_i respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique locale qui sont supposées constantes sur T_i, et c_i la vitesse de propagation locale définie par $\epsilon_i \mu_i c_i^2 = 1$. On note par $a_{ik} = T_i \cap T_k$ l'interface entre deux éléments voisins (*i.e.* leur intersection). Pour chaque interface interne on note par $\vec{n}_{ik} = {}^t(n_{ikx}, n_{iky})$ la normale orientée de T_i vers T_k (avec $\| \vec{n}_{ik} \|$ la longueur de a_{ik}), par $\vec{\widetilde{n}}_{ik}$ le vecteur unitaire associé et par $\mathcal{V}_i$ l'ensemble des indices des éléments voisins de l'élément T_i. Pour les interfaces aux bords du domaine, l'indice k correspond à un élément fictif extérieur au domaine. Sur chacune des cellules, on se donne un espace vectoriel de dimension d_i et un ensemble de fonctions de bases scalaires $\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i$, où d_i est le nombre de degrés de liberté dans la cellule T_i. On suppose que ces fonctions de bases n'assurent aucune continuité d'une cellule à une autre. On définit l'espace $\mathcal{P}$ d'approximation par :

$$\mathcal{P} := \left\{ \mathbf{W} \in L^2(\Omega) \mid \forall i, \mathbf{W}_{|T_i} \in \mathbb{P}_{\text{K}} \right\},$$

où $\mathbb{P}_{\text{K}}$ est l'espace des polynômes de degré K. On multiplie le système (2.1) par la fonction de base φ_{ij} puis on intègre sur T_i. On obtient après intégration par parties le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mu_i \displaystyle\int_{T_i} \frac{\partial H_z}{\partial t} \varphi_{ij} & - & \displaystyle\int_{T_i} E_y \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} + \int_{T_i} E_x \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \\ & + & \displaystyle\int_{\partial T_i} E_y \varphi_{ij} \widetilde{n}_{ikx} - \int_{\partial T_i} E_x \varphi_{ij} \widetilde{n}_{iky} = 0, \\ \epsilon_i \displaystyle\int_{T_i} \frac{\partial E_x}{\partial t} \varphi_{ij} & + & \displaystyle\int_{T_i} H_z \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} - \int_{\partial T_i} H_z \varphi_{ij} \widetilde{n}_{iky} = 0, \\ \epsilon_i \displaystyle\int_{T_i} \frac{\partial E_y}{\partial t} \varphi_{ij} & - & \displaystyle\int_{T_i} H_z \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} + \int_{\partial T_i} H_z \varphi_{ij} \widetilde{n}_{ikx} = 0. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Pour tout champ $\mathbf{X} \in \{E_x, E_y, H_z\}$ on note par $\mathbf{X}_i$ la projection L^2-orthogonale de $\mathbf{X}$ sur l'espace vectoriel $\mathsf{Vect}\{\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i\}$ du triangle T_i. On a la propriété classique suivante :

$$\forall \varphi \in \mathsf{Vect}\{\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i\}, \ \int_{T_i} \mathbf{X}_i . \varphi = \int_{T_i} \mathbf{X} . \varphi \tag{2.4}$$

Globalement, on a la représentation discontinue suivante des champs :

$$\mathbf{X} \simeq \sum_i \mathbf{X}_i(t,x,y) = \sum_i \sum_{j=1}^{d_i} X_{ij}(t)\varphi_{ij}(x,y), \tag{2.5}$$

où X_{ij} désigne le j^{ieme} degré de liberté de $\mathbf{X}_i$. On note par X_i le vecteur colonne $(X_{ij})_{1\leq j\leq d_i}$. Les inconnues numériques de la méthode sont des approximations des $\mathbf{X}_i$ qui peuvent être ainsi directement utilisées pour calculer les intégrales volumiques et surfaciques de (2.3). Puisque aucune continuité n'est imposée sur les champs d'une cellule à une autre, pour évaluer les intégrales aux bords, des valeurs des champs doivent être définies sur chaque interface a_{ik}. Ces valeurs peuvent être approchées de différentes façons. On décide ici d'adopter une approximation centrée étudiée dans [26]-[21] :

$$k \in \mathcal{V}_i,\ \forall (x,y) \in a_{ik},\ \mathbf{X}(x,y) \approx \frac{\mathbf{X}_i(x,y) + \mathbf{X}_k(x,y)}{2}. \tag{2.6}$$

Concernant la discrétisation temporelle, on utilise un schéma saute-mouton comme dans [21]-[13]. Les degrés de liberté associés au champ électrique E_x (respectivement E_y) sont calculés aux instants $t^n = n\Delta t$ et sont notés E^n_{xij} (respectivement E^n_{yij}). Les degrés de liberté associés au champ magnétique H_z sont quant à eux calculés aux instants $t^{n+\frac{1}{2}} = (n+\frac{1}{2})\Delta t$ et sont notés $H^{n+\frac{1}{2}}_{zij}$.

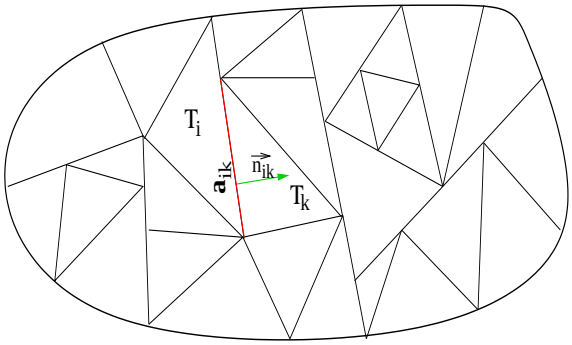


FIG. 2.1 – Maillage triangulaire non-conforme de Ω

Il reste pour compléter le cadre de notre étude à définir les conditions aux limites. Soit une cellule T_i au bord du domaine. On considère une cellule fictive T_k et on note par a_{ik} l'interface frontière. Les conditions aux limites sont obtenues à partir des relations de passage à travers le bord du domaine Ω, donc en imposant des valeurs aux champs sur les cellules fictives T_k. Pour l'analyse de stabilité réalisée dans la suite, on se limite à l'utilisation de conditions de réflexion totale (par exemple, autour d'un objet métallique parfaitement

conducteur) qui se traduisent par la continuité de la composante tangentielle des champs E_x et E_y et de la composante normale de H_z. Ces conditions s'écrivent :

$$\forall (x,y) \in a_{ik} : \left\{ \begin{array}{l} E^n_{xk}(x,y) = -E^n_{xi}(x,y), \quad E^n_{yk}(x,y) = -E^n_{yi}(x,y), \\ H^{n+\frac{1}{2}}_{zk}(x,y) = H^{n+\frac{1}{2}}_{zi}(x,y). \end{array} \right. \tag{2.7}$$

On a par ailleurs les propriétés géométriques suivantes :

$$1. \quad \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \vec{n}_{ik} = 0 \quad \text{et} \qquad 2. \quad \vec{n}_{ik} = -\vec{n}_{ki}. \tag{2.8}$$

Pour $\mathbf{x} = \{x, y\}$, on note par $P^{\mathbf{x}}_i = \sum_{k \in \mathcal{V}_i} |n_{ik\mathbf{x}}|$ le périmètre suivant x (respectivement y) du triangle T_i. Le schéma Galerkin discontinu s'écrit (voir l'annexe 6.3 pour plus de détails) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mu_i M_i \left(\dfrac{H^{n+\frac{1}{2}}_{zi} - H^{n-\frac{1}{2}}_{zi}}{\Delta t} \right) & = & M^x_i E^n_{yi} - M^y_i E^n_{xi} - \sum\limits_{k \in \mathcal{V}_i} \Big(F^n_{xik} - F^n_{yik} \Big), \\ \epsilon_i M_i \left(\dfrac{E^{n+1}_{xi} - E^n_{xi}}{\Delta t} \right) & = & -M^y_i H^{n+\frac{1}{2}}_{zi} + \sum\limits_{k \in \mathcal{V}_i} G^{n+\frac{1}{2}}_{yik}, \\ \epsilon_i M_i \left(\dfrac{E^{n+1}_{yi} - E^n_{yi}}{\Delta t} \right) & = & M^x_i H^{n+\frac{1}{2}}_{zi} - \sum\limits_{k \in \mathcal{V}_i} G^{n+\frac{1}{2}}_{xik}, \end{array} \right. \tag{2.9}$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} F^n_{xik} = S^x_{ik} E^n_{yk} & , & F^n_{yik} = S^y_{ik} E^n_{xk}, \\ G^{n+\frac{1}{2}}_{yik} = S^y_{ik} H^{n+\frac{1}{2}}_{zk} & , & G^{n+\frac{1}{2}}_{xik} = S^x_{ik} H^{n+\frac{1}{2}}_{zk}. \end{array} \right. \tag{2.10}$$

La matrice de masse M_i (d'ordre d_i) est symétrique définie positive, et les matrices de rigidités M^x_i et M^y_i (d'ordre d_i) sont antisymétriques. La matrice S_{ik} est d'ordre $d_i \times d_k$. Ces matrices sont définies par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (M_i)_{jl} = \displaystyle\int_{T_i} \varphi_{ij} \varphi_{il}, \\ (S^{\mathbf{x}}_{ik})_{jl} = \dfrac{1}{2} \widetilde{n}_{ik\mathbf{x}} \displaystyle\int_{a_{ik}} \varphi_{ij} \varphi_{kl} \quad \text{pour} \quad \mathbf{x} = \{x, y\}, \\ (M^x_i)_{jl} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{T_i} \Big(\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} \varphi_{il} - \varphi_{ij} \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial x} \Big), \\ (M^y_i)_{jl} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{T_i} \Big(\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \varphi_{il} - \varphi_{ij} \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial y} \Big). \end{array} \right. \tag{2.11}$$

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, on utilise les notations suivantes :

$$F^{n+\frac{1}{2}}_{\mathbf{x}ik} = \frac{F^{n+1}_{\mathbf{x}ik} + F^{n}_{\mathbf{x}ik}}{2}, \quad E^{n+\frac{1}{2}}_{\mathbf{x}i} = \frac{E^{n+1}_{\mathbf{x}i} + E^{n}_{\mathbf{x}i}}{2} \quad \text{où} \quad \mathbf{x} = \{x, y\}. \tag{2.12}$$

Remarque 1 *On a les propriétés suivantes, pour* $\mathbf{x} = \{x, y\}$ *:*
- *si* a_{ik} *est une interface interne alors* ${}^tS^{\mathbf{x}}_{ik} = -S^{\mathbf{x}}_{ki}$,
- *si* a_{ik} *est une interface métallique alors* ${}^tS^{\mathbf{x}}_{ik} = S^{\mathbf{x}}_{ik}$.

2.1 Conservation d'une énergie discrète

On introduit l'énergie discrète suivante :

$$\mathcal{E}^n = \frac{1}{2}\sum_i \Big(\epsilon_i {}^tE^n_{xi} M_i E^n_{xi} \; + \; \epsilon_i {}^tE^n_{yi} M_i E^n_{yi} \; + \; \mu_i {}^tH^{n-\frac{1}{2}}_{zi} M_i H^{n+\frac{1}{2}}_{zi} \Big). \tag{2.13}$$

On évalue maintenant la variation d'énergie au cours d'un pas de temps :

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{E} &= \mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n \\
&= \sum_i \Big[{}^tE^{n+\frac{1}{2}}_{xi} \epsilon_i M_i (E^{n+1}_{xi} - E^n_{xi}) + E^{n+\frac{1}{2}}_{yi} \epsilon_i M_i (E^{n+1}_{yi} - E^n_{yi}) \\
&\qquad\qquad + {}^tH^{n+\frac{1}{2}}_{zi} (\frac{\mu_i}{2}) M_i (H^{n+\frac{3}{2}}_{zi} - H^{n-\frac{1}{2}}_{zi}) \Big] \\
&= \Delta t \sum_i \Big[- {}^tE^{n+\frac{1}{2}}_{xi} M^y_i H^{n+\frac{1}{2}}_{zi} + {}^tE^{n+\frac{1}{2}}_{xi} \sum_{k\in\mathcal{V}_i} G^{n+\frac{1}{2}}_{yik} + {}^tE^{n+\frac{1}{2}}_{yi} M^x_i H^{n+\frac{1}{2}}_{zi} \\
&\qquad\qquad - {}^tE^{n+\frac{1}{2}}_{xi} \sum_{k\in\mathcal{V}_i} G^{n+\frac{1}{2}}_{yik} + {}^tH^{n+\frac{1}{2}}_{zi} M^x_i E^{n+\frac{1}{2}}_{yi} \\
&\qquad\qquad - {}^tH^{n+\frac{1}{2}}_{zi} M^y_i E^{n+\frac{1}{2}}_{xi} \\
&\qquad\qquad + {}^tH^{n+\frac{1}{2}}_{zi} \sum_{k\in\mathcal{V}_i} (F^{n+\frac{1}{2}}_{yik} - F^{n+\frac{1}{2}}_{xik}) \Big] \\
&= \Delta t \sum_i \sum_{k\in\mathcal{V}_i} \Big[{}^tE^{n+\frac{1}{2}}_{xi} G^{n+\frac{1}{2}}_{yik} - {}^tE^{n+\frac{1}{2}}_{yi} G^{n+\frac{1}{2}}_{xik} + {}^tH^{n+\frac{1}{2}}_{zi} (F^{n+\frac{1}{2}}_{yik} - F^{n+\frac{1}{2}}_{xik}) \Big].
\end{aligned}$$

Dans la troisième égalité, tous les termes qui contiennent M^x_i et M^y_i s'éliminent car ces matrices sont antisymétriques et, dans la quatrième égalité, tous les termes dans la double sommation correspondent aux interfaces des éléments. On a donc :

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta t (A + B),$$

où :

$$A = \sum_{interfaces}^{internes} \Big[{}^tE_{xi}^{n+\frac{1}{2}} G_{yik}^{n+\frac{1}{2}} + {}^tE_{xk}^{n+\frac{1}{2}} G_{yki}^{n+\frac{1}{2}} - {}^tE_{yi}^{n+\frac{1}{2}} G_{xik}^{n+\frac{1}{2}} - {}^tE_{yk}^{n+\frac{1}{2}} G_{xki}^{n+\frac{1}{2}} + {}^tH_{zi}^{n+\frac{1}{2}} (F_{yik}^{n+\frac{1}{2}} - F_{xik}^{n+\frac{1}{2}}) + {}^tH_{zk}^{n+\frac{1}{2}} (F_{yki}^{n+\frac{1}{2}} - F_{xki}^{n+\frac{1}{2}}) \Big],$$

$$B = \sum_{interfaces}^{metalliques} \Big[{}^tE_{xi}^{n+\frac{1}{2}} G_{yik}^{n+\frac{1}{2}} - {}^tE_{yi}^{n+\frac{1}{2}} G_{xik}^{n+\frac{1}{2}} + {}^tH_{zi}^{n+\frac{1}{2}} (F_{yik}^{n+\frac{1}{2}} - F_{xik}^{n+\frac{1}{2}}) \Big].$$

On utilise (2.10), (2.12) et la remarque 1 pour calculer A et on trouve :

$$\begin{aligned} A = \sum_{interfaces}^{internes} \Big[& {}^tE_{xi}^{n+\frac{1}{2}} S_{ik}^y H_{zk}^{n+\frac{1}{2}} + {}^tE_{xk}^{n+\frac{1}{2}} S_{ki}^y H_{zi}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & {}^tE_{yi}^{n+\frac{1}{2}} S_{ik}^x H_{zk}^{n+\frac{1}{2}} - {}^tE_{yk}^{n+\frac{1}{2}} S_{ki}^x H_{zi}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & {}^tH_{zi}^{n+\frac{1}{2}} S_{ik}^y E_{xk}^{n+\frac{1}{2}} - {}^tH_{zi}^{n+\frac{1}{2}} S_{ik}^x E_{yk}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & {}^tH_{zk}^{n+\frac{1}{2}} S_{ki}^y E_{xi}^{n+\frac{1}{2}} - {}^tH_{zk}^{n+\frac{1}{2}} S_{ki}^x E_{yi}^{n+\frac{1}{2}} \Big] = 0. \end{aligned}$$

Pour calculer B, on utilise (2.10), (2.12), (2.7) et la remarque 1. On trouve :

$$\begin{aligned} B = \sum_{interfaces}^{metalliques} \Big[& {}^tE_{xi}^{n+\frac{1}{2}} S_{ik}^y H_{zk}^{n+\frac{1}{2}} - {}^tE_{yi}^{n+\frac{1}{2}} S_{ik}^x H_{zk}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & {}^tH_{zi}^{n+\frac{1}{2}} S_{ik}^y E_{xk}^{n+\frac{1}{2}} - {}^tH_{zi}^{n+\frac{1}{2}} S_{ik}^x E_{yk}^{n+\frac{1}{2}} \Big] = 0. \end{aligned}$$

Donc, pour des conditions aux limites de type métallique seulement, l'énergie est exactement conservée. Ce résultat est cohérent avec le théorème de Poynting. On rappelle que l'énergie électromagnétique en trois dimensions d'espace, dans le vide, en absence de charge et de courant, vérifie le théorème de Poynting :

$$\int_V \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dv + \int_{\partial V} \vec{P}.\vec{\vec{n}} ds = 0.$$

pour tout volume V fermé de frontière ∂V régulier, où $\mathcal{E}$ est l'énergie électromagnétique et $\vec{P}$ est le vecteur de Poynting définis par :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}[\epsilon {}^t\vec{E}\vec{E} + \mu {}^t\vec{H}\vec{H}], \quad \text{et} \quad \vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}.$$

Pour des conditions aux limites de type métallique $\vec{E} \wedge \vec{\widetilde{n}} = 0$ et le théorème de Poynting montre que l'énergie est exactement conservée.

2.2 Stabilité du schéma

On cherche maintenant à exhiber une condition suffisante de stabilité de la méthode Galerkin discontinu (2.9)-(2.10)-(2.11) lorsque les conditions aux limites sont données par (2.7). Pour cela, on veut démontrer que l'énergie discrète (2.13) est une forme quadratique définie positive sous une condition de type CFL sur Δt qui pourrait jouer le rôle de fonction de Lyapunov de toutes les inconnues numériques [27]. On pourra alors conclure que le schéma est conditionnellement stable.

Hypothèse 1 *On suppose que pour tout triangle T_i, il existe une constante α_i telle que :*

$$\begin{aligned} &\forall X \in \mathsf{Vect}\{\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i\}, \quad \|\frac{\partial X}{\partial x}\|_{T_i} \leq \frac{\alpha_i P_i^x}{|T_i|}\|X\|_{T_i}, \\ &\forall X \in \mathsf{Vect}\{\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i\}, \quad \|\frac{\partial X}{\partial y}\|_{T_i} \leq \frac{\alpha_i P_i^y}{|T_i|}\|X\|_{T_i}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

On note par $\|X\|_{T_i}$ la norme L^2 du champ X sur T_i, i.e. $\|X\|_{T_i} = \int_{T_i} |X|^2$. On utilise aussi la même notation pour définir la norme L^2 du champ X sur l'interface a_{ik}.

Hypothèse 2 *On suppose que pour tout triangle T_i de voisin T_k ($k \in \mathcal{V}_i$), il existe des constantes β_{ik} et β_{ki}, telles que :*

$$\begin{aligned} &\forall X \in \mathsf{Vect}\{\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i\}, \quad \|X\|_{a_{ik}}^2 \leq \beta_{ik}\frac{\|\vec{n}_{ik}\|}{|T_i|}\|X\|_{T_i}^2, \\ &\forall Y \in \mathsf{Vect}\{\varphi_{kj}, 1 \leq j \leq d_k\}, \quad \|Y\|_{a_{ik}}^2 \leq \beta_{ki}\frac{\|\vec{n}_{ik}\|}{|T_k|}\|Y\|_{T_k}^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Notons ici que la constante α_i est différente et moins contraignante que celle utilisée dans [13]. Cela vient du fait que les périmètres suivant x et y notés P_i^x et P_i^y respectivement, sont plus petits que le périmètre d'un triangle T_i. De plus, on a introduit une deuxième constante β_{ki} dans l'hypothèse 2 qui n'a pas été adoptée dans [13]. On motivera ce choix dans la section 3.2.

En utilisant la définition de $S_{ik}^{\mathbf{x}}$ pour $\mathbf{x} = \{x, y\}$ et des inégalités élémentaires, on a :

$$|{}^tX S_{ik}^{\mathbf{x}} Y| \leq \frac{|\widetilde{n}_{ik\mathbf{x}}|}{2}\|X\|_{a_{ik}}\|Y\|_{a_{ik}} \leq \frac{|\widetilde{n}_{ik\mathbf{x}}|}{4}\Big(\frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}}\|X\|_{a_{ik}}^2 + \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}}\|Y\|_{a_{ik}}^2\Big).$$

Alors, on peut déduire de l'hypothèse 2 que :

$$|{}^tXS^{\mathbf{x}}_{ik}Y| \leq \frac{|n_{ik\mathbf{x}}|}{4}\Big(\frac{\beta_{ik}}{|T_i|}\frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}}\|X\|^2_{T_i} + \frac{\beta_{ki}}{|T_k|}\frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}}\|Y\|^2_{T_k}\Big) \quad \text{avec} \quad \mathbf{x} = \{x, y\}.$$

On a par ailleurs que :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}^n &= \sum_i \Big[\epsilon_i {}^tE^n_{xi}M_iE^n_{xi} + \epsilon_i {}^tE^n_{yi}M_iE^n_{yi} + \mu_i {}^tH^{n-\frac{1}{2}}_{zi}M_iH^{n+\frac{1}{2}}_{zi}\Big] \\ &= \sum_i \Big[\epsilon_i\|E^n_{xi}\|^2_{T_i} + \epsilon_i\|E^n_{yi}\|^2_{T_i} + \mu_i\|H^{n-\frac{1}{2}}_{zi}\|^2_{T_i} - \Delta t\mathbb{X}^n_i\Big], \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} |\mathbb{X}^n_i| &= \Big|{}^tH^{n-\frac{1}{2}}_{zi}\Big[-M^x_iE^n_{yi} + M^y_iE^n_{xi} + \sum_{k\in\mathcal{V}_i}\Big(F^n_{xik} - F^n_{yik}\Big)\Big]\Big| \\ &\leq \frac{1}{2}\|\frac{\partial H_{zi}}{\partial x}\|_{T_i}\|E_{yi}\|_{T_i} + \frac{1}{2}\|\frac{\partial E_{yi}}{\partial x}\|_{T_i}\|H_{zi}\|_{T_i} + \\ &\quad \frac{1}{2}\|\frac{\partial H_{zi}}{\partial y}\|_{T_i}\|E_{xi}\|_{T_i} + \frac{1}{2}\|\frac{\partial E_{xi}}{\partial y}\|_{T_i}\|H_{zi}\|_{T_i} + \\ &\quad \sum_{k\in\mathcal{V}_i}\Big(\Big|{}^tH^{n-\frac{1}{2}}_{zi}S^x_{ik}E_{yk}\Big| + \Big|{}^tH^{n-\frac{1}{2}}_{zi}S^y_{ik}E_{xk}\Big|\Big) \\ &\leq \sum_{k\in\mathcal{V}_i}\Big[\frac{\alpha_i|n_{ikx}|}{|T_i|}\|H_{zi}\|_{T_i}\|E_{yi}\|_{T_i} + \frac{\alpha_i|n_{iky}|}{|T_i|}\|H_{zi}\|_{T_i}\|E_{xi}\|_{T_i} + \\ &\qquad \frac{|n_{ikx}|}{4}\Big(\frac{\beta_{ik}}{|T_i|}\frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}}\|H_{zi}\|^2_{T_i} + \frac{\beta_{ki}}{|T_k|}\frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}}\|E_{yk}\|^2_{T_k}\Big) + \\ &\qquad \frac{|n_{iky}|}{4}\Big(\frac{\beta_{ik}}{|T_i|}\frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}}\|H_{zi}\|^2_{T_i} + \frac{\beta_{ki}}{|T_k|}\frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}}\|E_{xk}\|^2_{T_k}\Big)\Big] \\ &\leq \sum_{k\in\mathcal{V}_i}\Big[\frac{\alpha_i|n_{ikx}|}{2|T_i|}\frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}}\|H_{zi}\|^2_{T_i} + \frac{\alpha_i|n_{ikx}|}{2|T_i|}\frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}}\|E_{yi}\|^2_{T_i} + \frac{\alpha_i|n_{iky}|}{2|T_i|}\frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}}\|H_{zi}\|^2_{T_i} + \\ &\qquad \frac{\alpha_i|n_{iky}|}{2|T_i|}\frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}}\|E_{xi}\|^2_{T_i} + \frac{|n_{ikx}|\beta_{ik}}{4|T_i|}\frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}}\|H_{zi}\|^2_{T_i} + \frac{|n_{ikx}|\beta_{ki}}{4|T_k|}\frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}}\|E_{yk}\|^2_{T_k} + \\ &\qquad \frac{|n_{iky}|\beta_{ik}}{4|T_i|}\frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}}\|H_{zi}\|^2_{T_i} + \frac{|n_{iky}|\beta_{ki}}{4|T_k|}\frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}}\|E_{xk}\|^2_{T_k}\Big]. \end{aligned}$$

Par suite :

$$
\begin{aligned}
2\mathcal{E}^n \quad \geq \quad & \sum_i \sum_{k\in\mathcal{V}_i} \Big[|n_{iky}| \Big(\frac{\epsilon_i}{P_i^y} - \Delta t \frac{\alpha_i}{2|T_i|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} \Big) \|E_{xi}\|^2_{T_i} + \\
& |n_{ikx}| \Big(\frac{\epsilon_i}{P_i^x} - \Delta t \frac{\alpha_i}{2|T_i|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} \Big) \|E_{yi}\|^2_{T_i} + \\
& |n_{iky}| \Big(\frac{\mu_i}{2P_i^y} - \Delta t \frac{\alpha_i}{2|T_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} - \Delta t \frac{\beta_{ik}}{4|T_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} \Big) \|H_{zi}\|^2_{T_i} + \\
& |n_{ikx}| \Big(\frac{\mu_i}{2P_i^x} - \Delta t \frac{\alpha_i}{2|T_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} - \Delta t \frac{\beta_{ik}}{4|T_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} \Big) \|H_{zi}\|^2_{T_i} - \\
& \Delta t \frac{|n_{iky}|\beta_{ki}}{4|T_k|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} \|E_{xk}\|^2_{T_k} - \Delta t \frac{|n_{ikx}|\beta_{ki}}{4|T_k|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} \|E_{yk}\|^2_{T_k} \Big].
\end{aligned}
$$

Pour simplifier l'écriture de l'énergie on utilise les notations suivantes, pour $\mathbf{x} = \{x, y\}$:

$$
\begin{aligned}
N_{ik}^{\mathbf{x}} &= \Big(\frac{\epsilon_i}{P_i^{\mathbf{x}}} - \Delta t \frac{\alpha_i}{2|T_i|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} - \Delta t \frac{\beta_{ik}}{4|T_i|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} \Big) |n_{ik\mathbf{x}}|, \\
Z_{ik}^{\mathbf{x}} &= \Big(\frac{\mu_i}{P_i^{\mathbf{x}}} - \Delta t \frac{\alpha_i}{2|T_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} - \Delta t \frac{\beta_{ik}}{4|T_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} \Big) |n_{ik\mathbf{x}}|,
\end{aligned}
$$

d'où :

$$
\begin{aligned}
2\mathcal{E}^n \quad \geq \quad & \sum_{interfaces}^{internes} \Big[N_{ik}^y \|E_{xi}\|^2_{T_i} + N_{ik}^x \|E_{yi}\|^2_{T_i} + Z_{ik}^y \|H_{zi}\|^2_{T_i} + \\
& Z_{ik}^x \|H_{zi}\|^2_{T_i} + N_{ki}^y \|E_{xk}\|^2_{T_k} + N_{ki}^x \|E_{yk}\|^2_{T_k} + \\
& Z_{ki}^y \|H_{zk}\|^2_{T_k} + Z_{ki}^x \|H_{zk}\|^2_{T_k} \Big] + \\
& \sum_{interfaces}^{metalliques} \Big[N_{ik}^y \|E_{xi}\|^2_{T_i} + N_{ik}^x \|E_{yi}\|^2_{T_i} + Z_{ik}^y \|H_{zi}\|^2_{T_i} + Z_{ik}^x \|H_{zi}\|^2_{T_i} \Big].
\end{aligned}
$$

Pour que $\mathcal{E}^n$ soit une forme quadratique définie positive, il suffit que les coefficients de tous les termes de l'expression ci-dessus soient positifs. Donc, pour les interfaces internes on doit avoir :

$$
c_i \Delta t (2\alpha_i + \beta_{ik}) \leq \frac{4|T_i|}{P_i^x} \qquad \text{et} \qquad c_i \Delta t (2\alpha_i + \beta_{ik}) \leq \frac{4|T_i|}{P_i^y}, \tag{2.16}
$$

$$
c_k \Delta t (2\alpha_k + \beta_{ki}) \leq \frac{4|T_k|}{P_k^x} \qquad \text{et} \qquad c_k \Delta t (2\alpha_k + \beta_{ki}) \leq \frac{4|T_k|}{P_k^y}. \tag{2.17}
$$

L'équation (2.16) donne :

$$c_i\Delta t_1(2\alpha_i+\beta_{ik}) \leq 4\min\Big(\frac{|T_i|}{P_i^x},\frac{|T_i|}{P_i^y}\Big). \tag{2.18}$$

L'équation (2.17) donne :

$$c_k\Delta t_2(2\alpha_k+\beta_{ki}) \leq 4\min\Big(\frac{|T_k|}{P_k^x},\frac{|T_k|}{P_k^y}\Big). \tag{2.19}$$

Pour les interfaces métalliques on doit avoir :

$$c_i\Delta t(2\alpha_i+\beta_{ik}) \leq \frac{4|T_i|}{P_i^x} \qquad \text{et} \qquad c_i\Delta t(2\alpha_i+\beta_{ik}) \leq \frac{4|T_i|}{P_i^y}. \tag{2.20}$$

L'équation (2.20) conduit à :

$$c_i\Delta t(2\alpha_i+\beta_{ik}) \leq 4\min(\frac{|T_i|}{P_i^x},\frac{|T_i|}{P_i^y}). \tag{2.21}$$

Utilisons les relations (2.18) et (2.19) pour définir la condition de stabilité sur les interfaces internes et (2.21) pour les interfaces métalliques. Ainsi, la condition de stabilité est définit par :

$$\begin{cases} \forall \text{ interface interne } a_{ik}, & \Delta t \leq \min(\Delta t_1,\Delta t_2), \\ \forall \text{ interface métallique } a_{ik}, & c_i\Delta t(2\alpha_i+\beta_{ik}) \leq 4\min(\frac{|T_i|}{P_i^x},\frac{|T_i|}{P_i^y}). \end{cases} \tag{2.22}$$

Le lecteur pourra vérifier que la démonstration ci-dessus, reste valable pour le cas d'un schéma $\mathbb{P}_{\text{K}}/\mathbb{P}_{\text{L}}$. On signifie par un schéma Galerkin discontinu $\mathbb{P}_{\text{K}}/\mathbb{P}_{\text{L}}$, un schéma qui consiste à utiliser simultanément les espaces $\mathbb{P}_{\text{K}}$ et $\mathbb{P}_{\text{L}}$ dans deux cellules différentes.

Remarque 2 *Dans le cas d'un maillage orthogonal conforme ou non-conforme, chaque élément T_i peut être caractérisé par le couple $(\Delta x_i,\Delta y_i)$, l'aire $|T_i| = \dfrac{\Delta x_i.\Delta y_i}{2}$ et on a les propriétés suivantes :*

$$P_i^x = \sum_{k\in\mathcal{V}_i}|n_{ikx}| = 2\Delta y_i \quad et \quad P_i^y = \sum_{k\in\mathcal{V}_i}|n_{iky}| = 2\Delta x_i. \tag{2.23}$$

La condition de stabilité s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \forall \ \textit{interface interne } a_{ik}, & \Delta t \leq \min(\Delta t_1,\Delta t_2), \\ \forall \ \textit{interface métallique } a_{ik}, & c_i\Delta t(2\alpha_i+\beta_{ik}) \leq \min(\Delta x_i,\Delta y_i), \end{cases} \tag{2.24}$$

où Δt_1 et Δt_2 sont définis par :

$$c_i(2\alpha_i+\beta_{ik})\Delta t_1 \leq \min(\Delta x_i,\Delta y_i) \quad et \quad c_k(2\alpha_k+\beta_{ki})\Delta t_2 \leq \min(\Delta x_k,\Delta y_k).$$

A ce stade, quelques remarques s'imposent sur les hypothèses (1) et (2) (voir annexe (6.1) et (6.2) pour des explications) :

- l'existence des constantes α_i et $\beta_{ik}, \forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i$ est toujours assurée pour tout choix de fonctions de base et pour tout maillage conforme ou non-conforme.
- les valeurs des constantes α_i et $\beta_{ik}, \forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i$ croissent avec le degré des fonctions de base.
- par définition, la constante α_i dépend seulement du choix de fontions de base locales. Autrement dit, si on choisit le même espace des fonctions de base dans toutes les cellules, alors α_i est une constante globale (même dans le cas non-conforme). Dans les autres cas (par exemple, le cas d'un schéma $\mathbb{P}_{\mathrm{K}}/\mathbb{P}_{\mathrm{L}}$) la constante α_i devient constante par cellule (locale).

3 Etude de cas particuliers

On a implémenté la méthode GD-$\mathbb{P}_{\mathrm{K}}$ pour $\mathrm{K}=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ sur un maillage triangulaire avec des fonctions de base nodales. On considère plus particulièrement dans la suite les schémas GD-$\mathbb{P}_0$ et GD-$\mathbb{P}_1$ et on cherche à évaluer analytiquement les critères de stabilité correspondant. On distingue deux cas : on commence d'abord par le cas d'un maillage conforme puis on étudie le cas non-conforme.

3.1 Cas d'un maillage conforme

3.1.1 Schéma GD-$\mathbb{P}_0$ (méthode de volume fini)

Pour un maillage triangulaire, le schéma GD-$\mathbb{P}_0$ est exactement un schéma volume fini classique. Dans ce cas $d_i = 0$, *i.e.* chaque inconnue nécessite un seul degré de liberté. Les conditions (2.14) et (2.15) sont vérifiées et on a $\forall i,\ \alpha_i = 0$ et $\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i,\ \beta_{ik} = \beta_{ki} = 1$. La condition de stabilité s'écrit alors pour toute interface interne a_{ik} :

$$\max(c_i, c_k)\Delta t \leq 4 \min\Big(\min(\frac{|T_i|}{P_i^x}, \frac{|T_i|}{P_i^y}), \min(\frac{|T_k|}{P_k^x}, \frac{|T_k|}{P_k^y})\Big). \tag{3.25}$$

Dans le cas d'un maillage triangulaire orthogonal régulier (*i.e.* Δx_l et Δy_l sont constants $\forall l$) la condition de stabilité du schéma GD-$\mathbb{P}_0$ s'écrit pour toute interface interne :

$$\max(c_i, c_k)\Delta t \leq \min(\Delta x_i, \Delta y_i). \tag{3.26}$$

On note par CFL la valeur maximale que peut prendre le rapport $\dfrac{\max(c_i)\Delta t}{\min(\Delta x_i, \Delta y_i)}$. Dans le cas présent, la CFL est égale à 1.

Remarque 3 *Ce schéma volume fini est étudié dans [13] et [21]. Le lecteur pourra vérifier que pour un maillage orthogonal la condition de stabilité obtenue ici est moins contraignante que celles obtenues dans [13] et [21]. Par exemple, dans le cas homogène (i.e. ϵ_i = cte et*

$\mu_i = cte,\ \ \forall i$) et pour un maillage régulier uniforme, la condition CFL obtenue ici est plus grande d'un facteur 1.7 que celles obtenues dans [13] et [21].

3.1.2 Schéma GD-$\mathbb{P}_1$

Dans le cas de fonctions de base nodales linéaires, chaque composante du champ électromagnétique nécessite trois degrés de liberté, *i.e.* $\forall i,\ d_i = 3$. Pour un maillage conforme, on a le lemme suivant.

Lemme 1 *Pour des fonctions de base nodales linéaires, les hypothèses (2.14) et (2.15) sont vérifiées et on a :*

1. $\forall i,\ \ \alpha_i = 3$,
2. $\forall i,\ \forall k \in \mathcal{V}_i,\ \ \beta_{ik} = \beta_{ki} = 3$.

PREUVE. Tout d'abord, on a les intégrales élémentaires suivantes :

$$\int_{T_i} \varphi_{ij}\varphi_{ij'} = \frac{|T_i|}{12}(1+\delta_{jj'}), \tag{3.27}$$

$$\int_{a_{ik}} \varphi_{ij}\varphi_{ij'} = \frac{\|\vec{n}_{ik}\|}{6}(1+\delta_{jj'})(1-\delta_{jk})(1-\delta_{j'k}). \tag{3.28}$$

1. On a : $X = \sum_{j\in\mathcal{V}_i} X_{ij}\varphi_{ij}$ (ici, $|\mathcal{V}_i| = d_i$), alors $\|X\|^2_{T_i} \geq \frac{|T_i|}{12}\sum_{j\in\mathcal{V}_i}|X_{ij}|^2$.

   Pour $\mathbf{x} = \{x, y\}$:

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial X}{\partial \mathbf{x}}\|^2_{T_i} &\leq \frac{3}{4|T_i|}(\sum_{j\in\mathcal{V}_i}|n_{ij\mathbf{x}}X_{ij}|)^2 \leq \frac{3(P_i^{\mathbf{x}})^2}{4|T_i|}\sum_{j\in\mathcal{V}_i}|X_{ij}|^2 \\ &\leq \frac{9(P_i^{\mathbf{x}})^2}{|T_i|^2}\|X\|^2_{T_i} \ \text{ donc } \alpha_i = 3.\end{aligned}$$

   Pour un maillage conforme, $\forall i,\ \forall k \in \mathcal{V}_i$ on a $\beta_{ik} = \beta_{ki}$. On utilise (3.27) et (3.28) pour calculer β_{ik} qui vérifie le problème de minimisation :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \preceq \frac{\beta_{ik}}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

   où "$\preceq$" désigne une inégalité généralisée définie dans l'annexe (6.1). On obtient ainsi $\beta_{ik} = 3$. ■

La condition de stabilité du schéma GD-$\mathbb{P}_1$ s'écrit pour un maillage conforme quelconque :

$$\forall \text{ interface interne } a_{ik} \ , \ \max(c_i, c_k)\Delta t \leq \frac{4}{9} \min\Big(\min(\frac{|T_i|}{P_i^x}, \frac{|T_i|}{P_i^y}), \min(\frac{|T_k|}{P_k^x}, \frac{|T_k|}{P_k^y}).\Big) \quad (3.29)$$

Pour un maillage orthogonal régulier et en utilisant (2.23), la condition de stabilité s'écrit :

$$\forall \text{ interface interne } a_{ik} \ , \ \max(c_i, c_k)\Delta t \leq 0.11 \min(\Delta x_i, \Delta y_i). \quad (3.30)$$

3.2 Cas d'un maillage non-conforme

Le but de cette section est d'étudier et d'expliciter une condition de stabilité des schémas GD-$\mathbb{P}_0$ et GD-$\mathbb{P}_1$ dans le cas d'un maillage non-conforme. L'existence des constantes α_i et β_{ik} (respectivement β_{ki}) $\forall i, \ \forall k \in \mathcal{V}_i$ est toujours assurée, donc les hypothèses 1 et 2 sont toujours valables. Cependant, contrairement au cas conforme où les constantes β_{ik} et β_{ki} sont égales, on va démontrer par la suite que ces constantes sont différentes dans le cas non-conforme (sauf pour un cas particulier). La constante α_i quant à elle, est identique au cas conforme.

On considère deux types de maillage non-conforme, voir les figures 3.2 (a) et (b). Dans la situation (a), le triangle $T_k, k \in \mathcal{V}_i$ touche son voisin T_i par deux sommets ; dans ce cas la non-conformité est de la part de T_i, l'interface a_{ik} est une arête complète du triangle T_k, par contre elle est une portion d'une arête de T_i. Par contre, dans la situation (b), $T_k, k \in \mathcal{V}_i$ touche T_i par un seul sommet et la non-conformité est de la part de T_i et T_k.

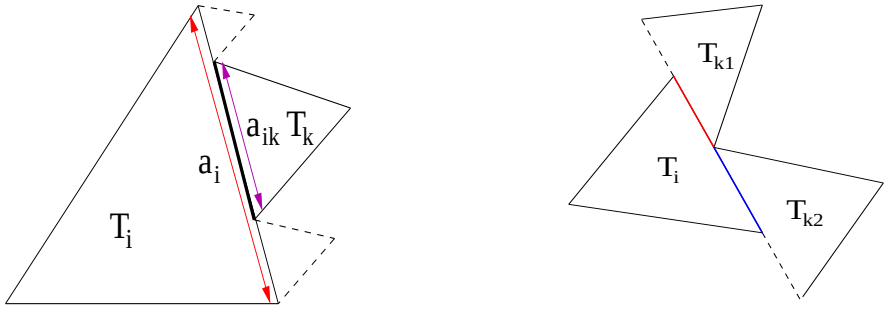


FIG. 3.2 – Deux types de non-conformité

Lemme 2 *Soit un triangle T_i et son voisin T_k. On note par a_i et a_k les arêtes de T_i et T_k respectivement, telles que $a_{ik} = T_i \bigcap T_k = a_i \cap a_k$. On note par $\ell_1 = \dfrac{|a_i|}{|a_{ik}|}$ et $\ell_2 = \dfrac{|a_k|}{|a_{ik}|}$ deux*

constantes positives telles que $\ell_1, \ell_2 \geq 1$, où $|.|$ désigne la longueur d'un côté. On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} 1. \ \textit{Si} \ \ \ell_1 = \ell_2 \quad \textit{alors} \quad \beta_{ik} = \beta_{ki}, \\ 2. \ \textit{Si} \ \ \ell_1 > \ell_2 \quad \textit{alors} \quad \beta_{ik} \geq \beta_{ki}, \\ 3. \ \textit{Si} \ \ \ell_1 < \ell_2 \quad \textit{alors} \quad \beta_{ik} \leq \beta_{ki}. \end{cases} \tag{3.31}$$

PREUVE : On se limite dans la démonstration à des fonctions de base nodales linéaires. On peut néanmoins utiliser les mêmes techniques pour d'autres fonctions de base. Tout d'abord, on note par A_1^i et A_2^i les matrices symétriques positives telles que :

$$(A_1^i)_{jj'} = \int_{a_{ik}} \varphi_{ij}\varphi_{ij'} \ \text{ et } \ (A_2^i)_{jj'} = \int_{a_i} \varphi_{ij}\varphi_{ij'}. \tag{3.32}$$

Puisque les fonctions de bases nodales du triangle T_i sont toujours positives ou nulles sur T_i, on a :

$$\begin{array}{lll} \dfrac{1}{|a_{ik}|}A_1^i \preceq & \chi_1\ell_1\dfrac{1}{|a_i|}A_2^i & \text{avec} \ \ \chi_1 \leq 1, \\ \dfrac{1}{|a_{ik}|}A_1^k \preceq & \chi_2\ell_2\dfrac{1}{|a_k|}A_2^k & \text{avec} \ \ \chi_2 \leq 1. \end{array} \tag{3.33}$$

Pour obtenir (3.33), commençons par remarquer que la comparaison entre les matrices A_1^i et A_2^i, $\forall i$ ne se fait directement pas par le critère de l'annexe 6.1 puisque ces matrices ne sont pas définies, sont singulières et possèdent toujours une ligne et une colonne nulles. En effet, pour des fonctions des bases nodales $\mathbb{P}_1$ les différentes formes des matrices A_1^i et A_2^i sont :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

Donc, ces matrices possèdent une valeur propre nulle. On définit alors les matrices B_1^i et B_2^i obtenues en éliminant la ligne et la colonne nulles des matrices A_1^i et A_2^i. Les matrices B_1^i et B_2^i sont symétriques définies positives, donc on peut les comparer en utilisant le critère classique. De plus, elles possèdent les mêmes valeurs propres non nulles que celles de A_1^i et A_2^i respectivement. Enfin, on peut déduire les vecteurs propres de A_1^i et A_2^i de ceux des matrices B_1^i et B_2^i. Pour comparer A_1^i et A_2^i il suffit de comparer B_1^i et B_2^i et on a : si $B_1^i \preceq \lambda B_2^i$, alors $A_1^i \preceq \lambda A_2^i$, où λ est une constante. Donc :

$$\begin{array}{lll} \dfrac{1}{|a_{ik}|}A_1^i \preceq & \ell_1\dfrac{1}{|a_i|}A_2^i \preceq & \ell_1\beta_{ik}^{\text{conf}}\dfrac{B^i}{|T_i|}, \\ \dfrac{1}{|a_{ik}|}A_1^k \preceq & \ell_2\dfrac{1}{|a_k|}A_2^k \preceq & \ell_2\beta_{ki}^{\text{conf}}\dfrac{B^k}{|T_k|}, \end{array}$$

où pour tout indice i, B^i est la matrice de masse associée au triangle T_i définie par (3.27). Les constantes β_{ik}^{conf} et β_{ki}^{conf} sont égales (l'indice "conf" signifie que ces constantes sont les mêmes que celles qui sont définies dans le cas conforme). Ainsi, si $\ell_1 = \ell_2$ et en prenant $\beta_{ik} = \ell_1 \beta_{ik}^{\text{conf}}$ et $\beta_{ki} = \ell_2 \beta_{ki}^{\text{conf}}$, la première propriété du lemme est démontrée. On suit la même démarche pour démontrer les deux autres propriétés. ■

Remarque 4

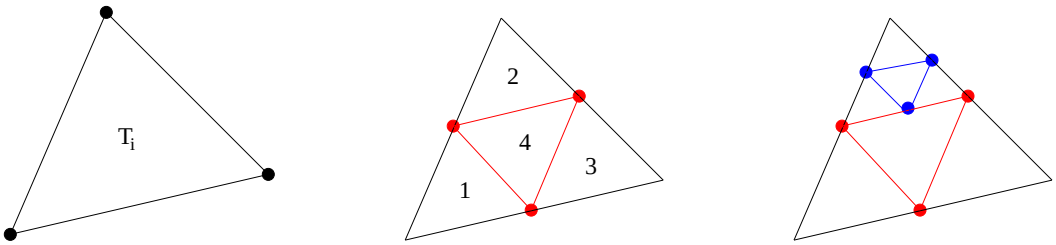
- *Les propriétés du lemme 2 sont des conditions nécessaires seulement. Par exemple pour un maillage du type de la figure 3.2(b), on peut avoir $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ mais $\ell_1 \neq \ell_2$. Par contre, dans le cas d'un maillage du type de la figure 3.2(a), ces conditions deviennent suffisantes aussi (voir exemple 1 dans l'annexe 6.4).*
- *Le lemme 2 montre clairement (pour un maillage non-conforme seulement) l'influence des constantes β_{ik} et β_{ki} par ℓ_1 et ℓ_2 respectivement. Cela vient du fait que les matrices A_1^i et A_1^k dépendent fortement non seulement des constantes ℓ_1 et ℓ_2 respectivement, mais aussi de la position du voisin T_k de T_i, i.e. on peut avoir deux interfaces (sur un côté de T_i) de mêmes longueurs, mais les matrices A_1^i correspondantes sont différentes. On observe cette situation dans le cas d'un raffinement de maillage.*
- *Le lemme 2 permet de différencier les interfaces conformes des interfaces non-conformes. Il pourrait aussi permettre d'identifier le type de non-conformité (voir les figures 3.2, (a) et (b)) de faciliter aussi le calcul du CFL.*

Dans la pratique, on utilise la démarche suivante pour calculer la plus grande valeur de β_{ik} $\forall i,\ \forall k \in \mathcal{V}_i$ (voir exemple 2 dans l'annexe 6.4) :

1. On cherche toutes les interfaces non-conformes.
2. $\forall i,\ \forall k \in \mathcal{V}_i$, on calcule toutes les longueurs ℓ_1 et ℓ_2 qui correspondent aux interfaces non-conformes.
3. On cherche à calculer $\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \ell_1^{\max} = \max(\ell_1)$ et $\ell_2^{\max} = \max(\ell_2)$, puis $\mathcal{L}^{\max} = \max(\ell_1^{\max}, \ell_2^{\max})$. Il se peut qu'on ait plusieurs $\mathcal{L}^{\max}$; soit $\mathcal{L}^{\max}$ l'ensemble des valeurs $\{\mathcal{L}_1^{\max}, \ldots, \mathcal{L}_m^{\max}\}$, où m est un entier naturel. Dans ce cas on calcule toutes les valeurs de β_{ik} et β_{ki}, puis on prend les maximum de toutes les valeurs β_{ik} et β_{ki} calculées.

3.3 Raffinement local non-conforme

Un cas très intéressant à étudier est le cas d'un raffinement non-conforme. Le mode de découpage (de raffinement) d'un triangle décrit ci-dessous (voir la figure 3.3) a été choisi pour ne pas détériorer la qualité du maillage. Soit un triangle T_i ; les nouveaux sommets sont générés aux milieux des côtés et sont utilisés avec les sommets originaux pour créer quatre nouveaux triangles. Le quatrième triangle est situé au centre du triangle original et utilise les trois nouveaux sommets. Pour ce mode de découpage, l'aire de chaque nouveau triangle vaut le quart de l'aire du triangle initial. L'avantage de cette subdivision est la préservation de l'anisotropie du triangle initial. On note par $\ell = \dfrac{|a_i|}{|a_{ik}|}$ (le rapport entre la plus grande arête

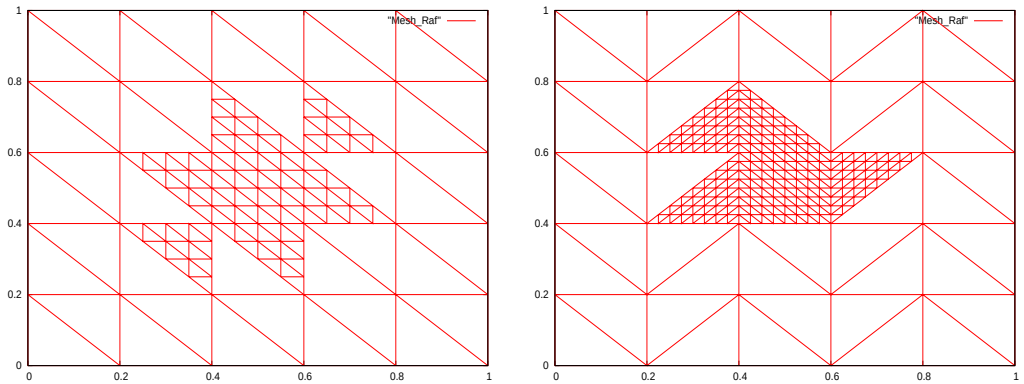


(a) Etape 0 (b) Etape 1 (c) Etape 2

FIG. 3.3 – Les étapes de subdivision d'un triangle

et l'arête la plus petite) le taux de raffinement, ℓ est un entier naturel. Les figures 3.4 (a) et (b) représentent donc des exemples de raffinement de taux $\ell = 4$ et $\ell = 8$ respectivement.

En utilisant les mêmes notations que précédemment, on a $\ell_1 \geq \ell_2 = 1$, et donc $\beta_{ik} \geq \beta_{ki}, \forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i$. Si les valeurs de β_{ik} pouvaient être calculées analytiquement alors une condition de stabilité exacte (CFL théorique) pourrait être obtenue. C'est ce que nous allons faire ici dans le cas d'un maillage triangulaire orthogonal. On donne dans les tableaux 1 et 2 les valeurs des constantes α_i et $\max(\beta_{ik})$, $\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i$ et, dans le tableau 3, les valeurs de la CFL, pour un maillage orthogonal, différentes valeurs du taux de raffinement ℓ et différentes valeurs de l'ordre d'interpolation K. La constante $\beta_{ik}, \forall k \in \mathcal{V}_i$, dépend non seulement de l'ordre du polynôme mais aussi du taux de raffinement. On peut conclure que lorsque le taux de raffinement ℓ croît, notre condition de stabilité devient très restrictive.



(a) Raffinement local de taux $\ell = 4$ (b) Raffinement local de taux $\ell = 8$

FIG. 3.4 – Exemples de raffinements locaux non-conforme d'un maillage triangulaire

$\mathbb{P}_K$	K=0	K=1	K=2	K=3	K=4
$\alpha_i \simeq$	0.0	3.0	8.0	18.4	37.4

TAB. 1 – Valeurs de α_i en fonctions de K

ℓ	β_{ik} K=0	β_{ik} K=1	β_{ik} K=2	β_{ik} K=3	β_{ik} K=4
1	1	3	6	10	23.42
2	1	4.68	10.48	18.39	35.18
4	1	6.44	17.32	32.70	67.90
8	1	7.61	24.28	52.02	107.6
16	1	8.28	29.38	70.34	146.8
64	1	8.81	34.18	91.18	199.5

TAB. 2 – Valeurs de β_{ik} en fonctions de ℓ et K

ℓ	CFL K=0	CFL K=1	CFL K=2	CFL K=3	CFL K=4
1	1	0.11	0.045	0.0213	0.01
2	0.5	0.047	0.019	0.009	0.0045
4	0.25	0.02	0.0075	0.0035	0.00175
8	0.125	0.009	0.003	0.0014	0.00069
16	0.0625	0.0044	0.0014	0.00056	0.00028
64	0.015625	0.0011	0.0003	0.00012	0.000056

TAB. 3 – Valeurs de la CFL en fonctions de ℓ et K (cas d'un maillage triangulaire orthogonal)

4 Validation numérique

On considère une cavité métallique carrée unitaire. Les expressions analytiques des modes de résonance sont connus pour cette géométrie [16] et on propose ici de simuler l'évolution temporelle du mode propre $(1,1)$ pour le cas transverse magnétique TM_z. Nous avons initialisé le champ électromagnétique par la solution analytique à $t = 0$, donnée par l'expression suivante :

$$\begin{cases} H_x &= 0, \\ H_y &= 0, \\ E_z &= \sin \pi x \times \sin \pi y. \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par :

$$\begin{cases} H_x &= \dfrac{-\pi}{\omega} \times \sin \pi x \times \cos \pi y \times \sin \omega t, \\ H_y &= \dfrac{\pi}{\omega} \times \cos \pi x \times \sin \pi y \times \sin \omega t, \\ E_z &= \sin \pi x \times \sin \pi y \times \cos \omega t. \end{cases}$$

où $\omega = 2\pi f$. La fréquence f est ici égale à 212 MHz. L'intérêt de ce cas test est double : il autorise les simulations en temps long et l'énergie de la solution exacte est conservée.

Remarque 5 *On utilise dans ce rapport une implémentation préliminaire de la méthode GD-$\mathbb{P}_\kappa$ dans laquelle on fait une approximation pour le calcul des matrices de surface non-conforme. Une future version sera implémentée en utilisant des formules de quadrature.*

On réalise toutes les simulations avec un maillage triangulaire orthogonal régulier, *i.e.* si chaque triangle T_i est représenté par le couple $(\Delta x_i, \Delta y_i)$ et on choisit ici $\Delta x_i = \Delta y_i$. Pour ce choix du maillage, on désigne par :

- **CFL théorique**, la valeur maximale que peut prendre le rapport $\dfrac{\max(c_i)\Delta t}{\min(\Delta x_i)}$,
- **CFL numérique** (utiliser en pratique), la valeur maximale que peut prendre le rapport $\dfrac{\max(c_i)\Delta t}{\min(h_i)}$ où h_i est le minimum des hauteurs du triangle T_i (ici $h_i = \dfrac{\Delta x_i}{\sqrt{2}}$).

4.1 Maillage conforme

On propose d'abord de vérifier la stabilité des schémas GD-$\mathbb{P}_\kappa$. Pour cela on réalise les mêmes simulations pour $\kappa = 0, 1, 2$ et 3. Le maillage utilisé a une résolution de 14 points par longueur d'onde. On utilise pour chacun des schémas le pas de temps maximal autorisé par la condition de stabilité. On recense dans le tableau 4 les valeurs de la CFL trouvées théoriquement et numériquement pour les différents schémas. Les valeurs de la

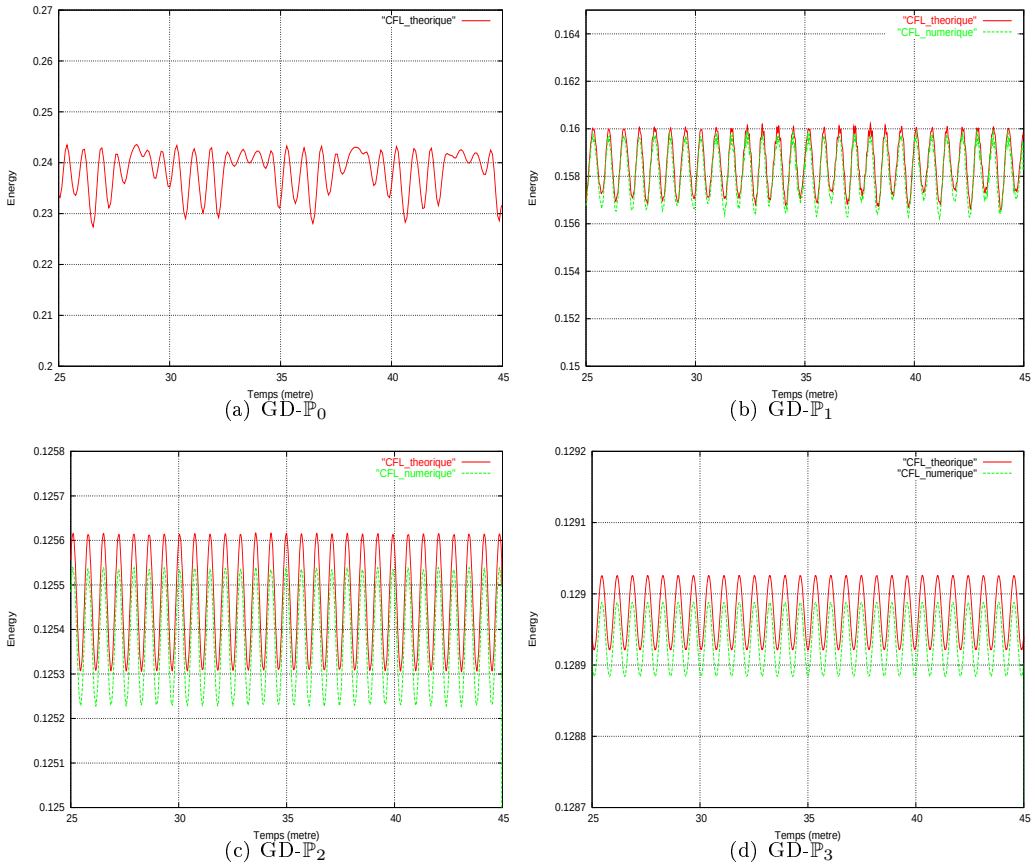
CFL numérique sont celles qui correspondent à la stabilité numérique effective *i.e.* la limite au delà de laquelle on observe une croissance de l'énergie discrète. La durée de toutes les simulations est de 32 périodes. On montre sur la figure 4.5 l'évolution de l'énergie discrète (2.13) au cours du temps pour différentes valeurs de K et pour les deux types de CFL. Il apparaît donc que les CFL trouvées théoriquement sont sous-estimées d'un facteur variant de 2.7 à 4.7 lorsque l'ordre d'interpolation augmente. Puisque la solution exacte est connue, on choisit ensuite de comparer les différents schémas GD-$\mathbb{P}_K$ à partir de la dispersion numérique observée et de l'erreur L^2. Pour cela, on se propose de suivre l'évolution temporelle du champ électromagnétique en un point du maillage. Les simulations sont cette fois réalisées en utilisant différents nombres de points par longueur d'onde (λ) pour chaque schéma GD-$\mathbb{P}_K$. On montre sur les figures 4.6 à 4.12 les évolutions temporelles de l'erreur L^2, et de la composante H_x (zoomée sur les 11 dernières périodes) en un point du maillage. Les résultats sont très satisfaisants même pour peu de points par longueur d'onde. Il est clair que lorsqu'on augmente le degré des polynômes d'interpolation, le schéma devient plus précis. On remarque aussi que les résultats obtenus avec la CFL théorique sont plus précis que ceux obtenus avec la CFL numérique. Enfin on notera que le schéma GD-$\mathbb{P}_0$ semble apparaître ici comme le plus précis si l'on se réfère à l'amplitude de l'erreur L^2 sur les figures 4.6, 4.8, 4.10 et 4.12. On peut attribuer ce comportement au fait que pour la valeur CFL=1.0 qui correspond à la limite de stabilité du schéma GD-$\mathbb{P}_0$, la dispersion du second ordre de ce schéma est probablement nulle (voir par exemple [25] pour une démonstration de cette propriété dans le cas de maillages uniformes parallélépipédiques) alors que, pour les autres schémas GD-$\mathbb{P}_K$, $K \geq 1$, cette propriété n'est pas garantie pour les valeurs de la CFL considérées.

Schémas	CFL théorique	CFL numérique
GD-$\mathbb{P}_0$	1.0	1.0
GD-$\mathbb{P}_1$	0.11	0.3
GD-$\mathbb{P}_2$	0.045	0.15
GD-$\mathbb{P}_3$	0.0213	0.1

TAB. 4 – Valeurs théoriques et numériques de la CFL - schémas GD-$\mathbb{P}_K$

4.2 Maillage non-conforme

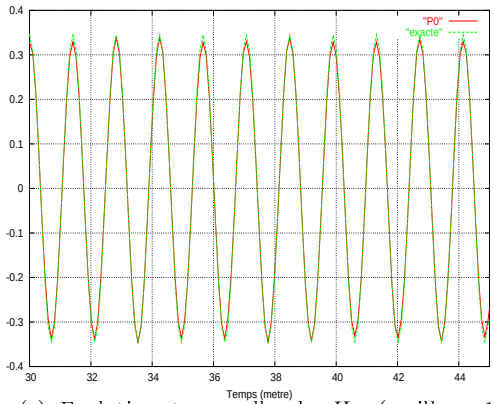
On simule comme dans le cas conforme l'évolution du mode propre $(1,1)$ dans une cavité métallique carrée. On utilise un maillage dont une partie centrale est raffinée de manière non-conforme (voir la figure 4.13). Le taux de raffinement est 8. La résolution du maillage de la grille grossière est de 14 points par longueur d'onde. La durée de toutes les simulations est de 35 périodes. L'objectif ici est de tester la stabilité du schéma GD-$\mathbb{P}_K$ en présence d'un raffinement local non-conforme. On montre sur la figure 4.14 l'évolution de l'énergie (2.13) pour les différents schémas, pour les CFL numériques et théoriques. On peut conclure que le schéma est stable.



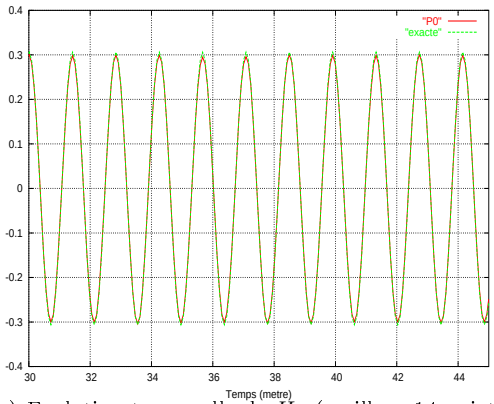
(a) GD-$\mathbb{P}_0$ (b) GD-$\mathbb{P}_1$

(c) GD-$\mathbb{P}_2$ (d) GD-$\mathbb{P}_3$

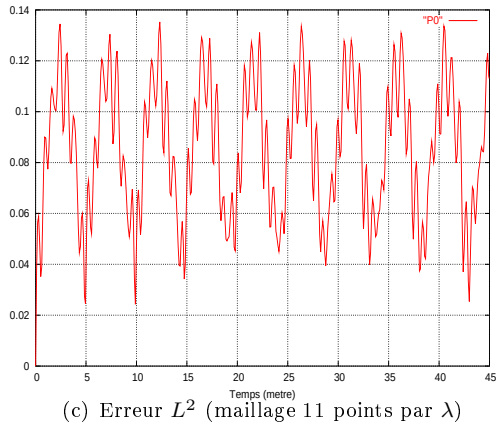
FIG. 4.5 – Evolution de l'énergie pour les différents schémas GD-$\mathbb{P}_K$
Zoom sur les 14 dernières périodes



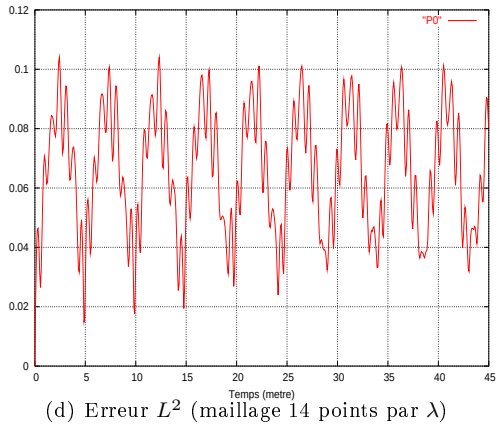
(a) Evolution temporelle de H_x (maillage 11 points par λ)



(b) Evolution temporelle de H_x (maillage 14 points par λ)

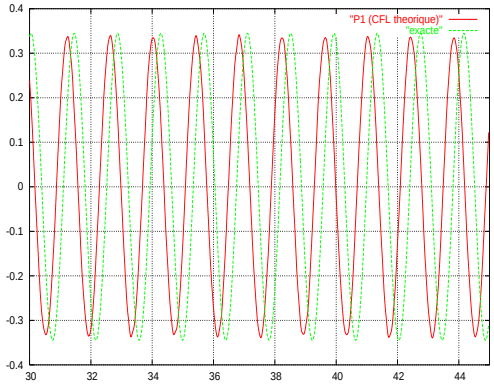


(c) Erreur L^2 (maillage 11 points par λ)

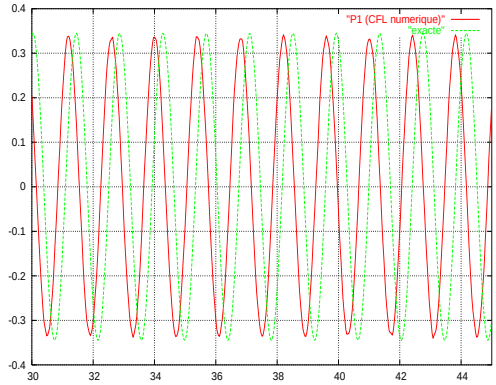


(d) Erreur L^2 (maillage 14 points par λ)

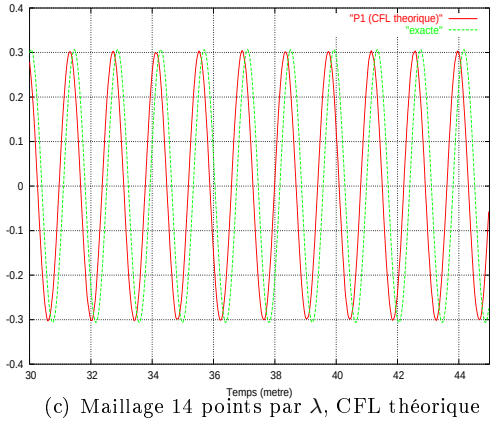
FIG. 4.6 – Evolution temporelle de l'erreur L^2 et de H_x en un point du maillage Schéma GD-$\mathbb{P}_0$



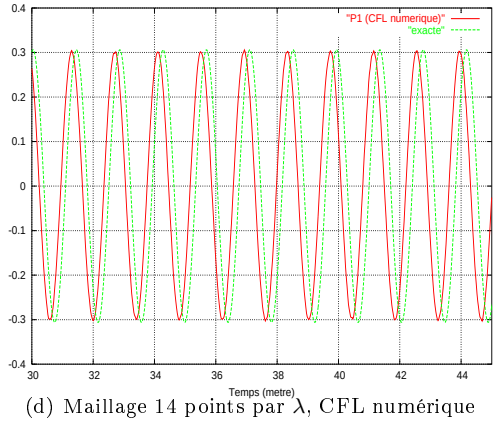
(a) Maillage 11 points par λ, CFL théorique



(b) Maillage 11 points par λ, CFL numérique

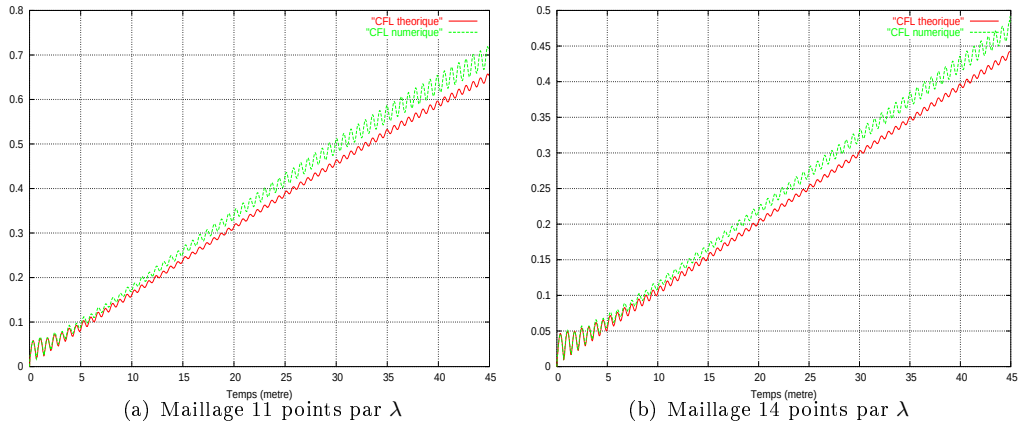


(c) Maillage 14 points par λ, CFL théorique



(d) Maillage 14 points par λ, CFL numérique

FIG. 4.7 – Evolution temporelle de H_x en un point du maillage
Schéma GD-$\mathbb{P}_1$



(a) Maillage 11 points par λ (b) Maillage 14 points par λ

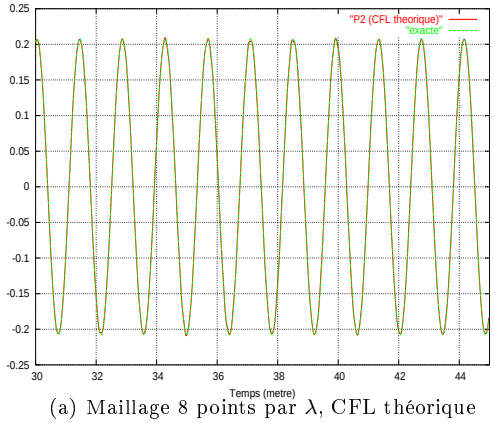
FIG. 4.8 – Evolution temporelle de l'erreur L^2
Schéma GD-$\mathbb{P}_1$

Afin de comparer la dispersion numérique observée pour les différents schémas GD-$\mathbb{P}_K$, on réalise la même simulation avec un raffinement de taux 4 et un autre de taux 8. On utilise pour chacun des schémas le pas de temps maximal autorisé par la condition de stabilité numérique. On montre sur les figures 4.15 à 4.18 l'évolution temporelle de H_x en un point du maillage grossier sur les 11 dernières périodes de la simulation (qui en comporte 35) et l'erreur L^2 pour les deux taux de raffinement considérés. Ces résultats sont à comparer à ceux obtenus dans le cas conforme (figures 4.6 à 4.12). Bien que moins précis que dans le cas conforme, les résultats sont tout de même satisfaisants compte tenu des forts taux de raffinement traités. Afin d'évaluer l'impact des CFL théoriques, on réalise les mêmes simulations pour des raffinements de taux 2 et 8. On montre sur les figures 4.19 et 4.20 l'évolution temporelle de H_x en un point du maillage grossier sur les 10 premières périodes pour les deux taux de raffinement considérés. Les résultats sont toujours acceptables. On a vérifié numériquement les points suivants :

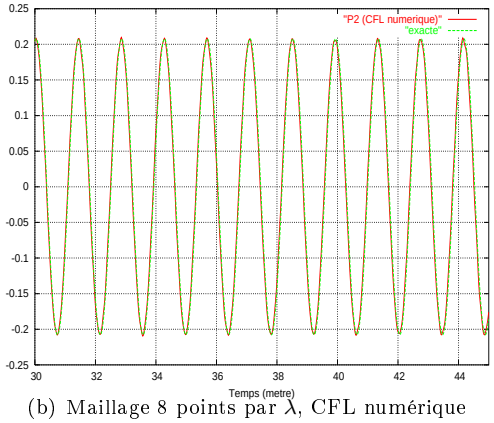
- les CFL théoriques trouvées dans le cas d'un maillage raffiné sont très restrictives,
- augmenter le degré des polynômes d'interpolation n'améliore pas les résultats.

5 Conclusion

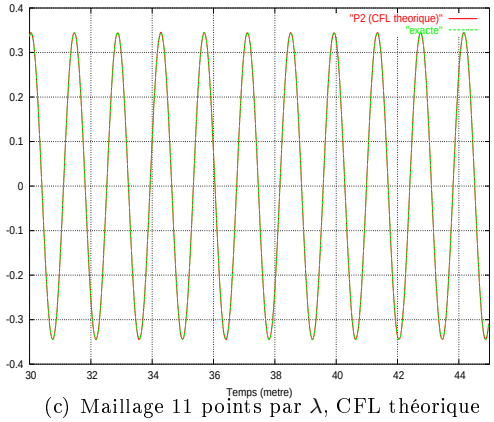
Nous avons étudié dans ce rapport la stabilité d'une méthode Galerkin discontinu GD-$\mathbb{P}_K$ pour la résolution numérique des équations de Maxwell bidimensionnelles dans le domaine temporel sur des maillages triangulaires non-conformes. Cette méthode combine l'utilisation d'un schéma centré pour l'évaluation des flux aux interfaces entre éléments voisins du maillage, avec un schéma d'intégration en temps de type saute-mouton. Une analyse



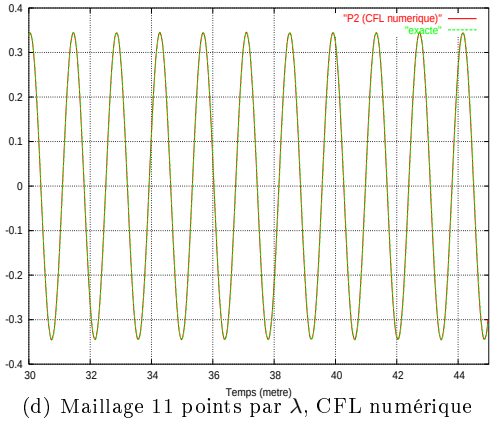
(a) Maillage 8 points par λ, CFL théorique



(b) Maillage 8 points par λ, CFL numérique

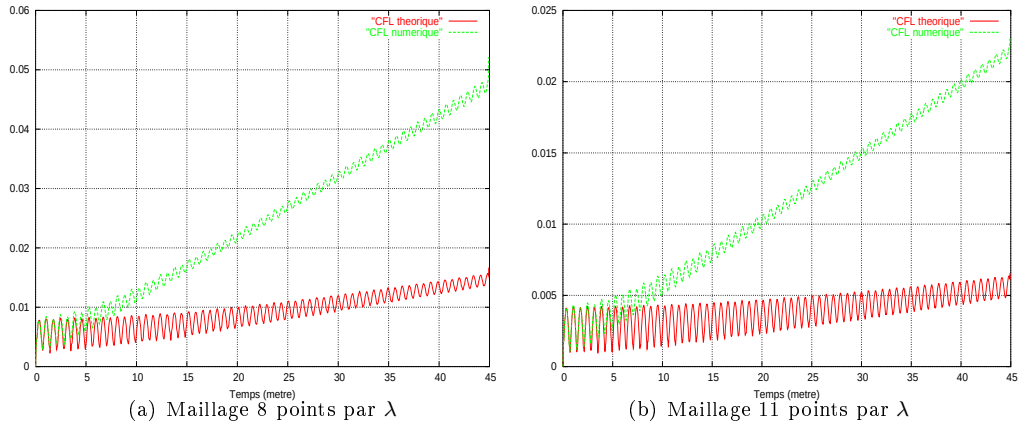


(c) Maillage 11 points par λ, CFL théorique



(d) Maillage 11 points par λ, CFL numérique

FIG. 4.9 – Evolution temporelle de H_x en un point du maillage
Schéma GD-$\mathbb{P}_2$

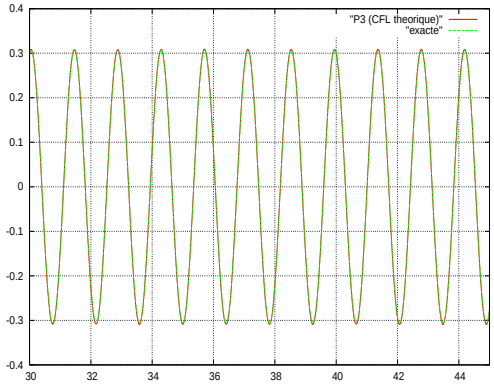


(a) Maillage 8 points par λ (b) Maillage 11 points par λ

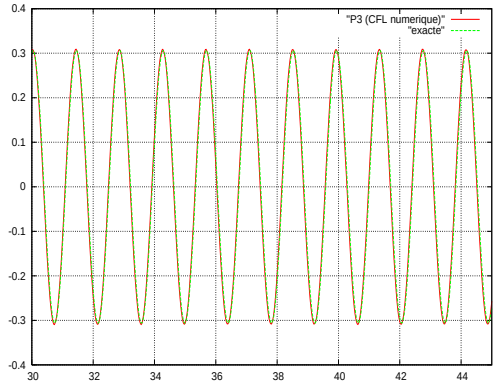
FIG. 4.10 – Evolution temporelle de l'erreur L^2
Schéma GD-$\mathbb{P}_2$

théorique a permis de vérifier que la méthode conserve un équivalent discret de l'énergie électromagnétique. La stabilité est obtenue en démontrant que l'énergie discrète utilisée est une forme quadratique définie positive de ces variables sous une condition de type CFL. Considérant le cas du raffinement local non-conforme d'un maillage triangulaire, nous avons étudié plus précisément le lien entre la stabilité et la non-conformité géométrique, et nous avons exhiber des conditions sous lesquelles les schémas GD-$\mathbb{P}_K$ sont stables. Une implémentation de la méthode a été réalisée en adoptant des fonctions de base nodales polynomiales et un traitement simplifié des intégrales de surface dans le cas d'un maillage non-conforme. Une étude numérique de la stabilité en considérant un cas test de propagation d'un mode propre dans une cavité métallique. Les conditions de stabilité théoriques s'avèrent très restrictives surtout lorsque le taux de raffinement augmente. La connaissance de la solution exacte nous a permis de réaliser une étude préliminaire de la précision des schémas. Les très bons résultats obtenus dans le cas conforme avec peu de points par longueur d'onde n'ont pu être reconduit dans le cas non-conforme du fait de l'erreur de dispersion introduite par les variations de taille de maille. De plus, l'augmentation de l'ordre d'interpolation n'améliore pas les résultats dans le cas d'un maillage non-conforme. La suite de cette étude concerne différentes facettes de la méthode GD-$\mathbb{P}_K$ proposée ici :

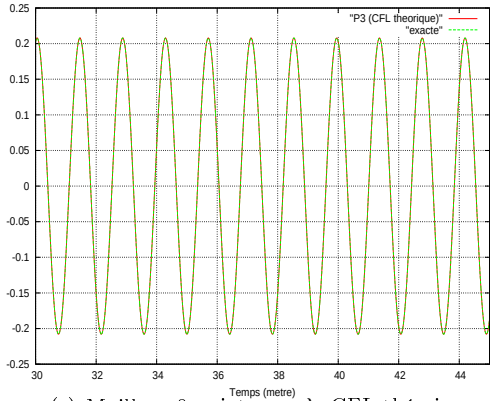
- la mise en œuvre de formules de quadrature pour le calcul des intégrales de surface dans le cas d'un maillage non-conforme,
- une étude numérique de la convergence de la méthode GD-$\mathbb{P}_K$ complétée par une évaluation des gains potentiels en termes de coûts de calcul et consommation mémoire résultant de la non-conformité géométrique,
- lévaluation de la méthode lorsque l'ordre d'interpolation varie localement (*i.e.* schéma $\mathbb{P}_K/\mathbb{P}_L$),



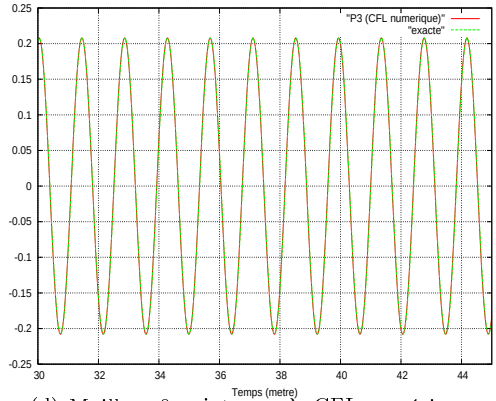
(a) Maillage 6 points par λ, CFL théorique



(b) Maillage 6 points par λ, CFL numérique

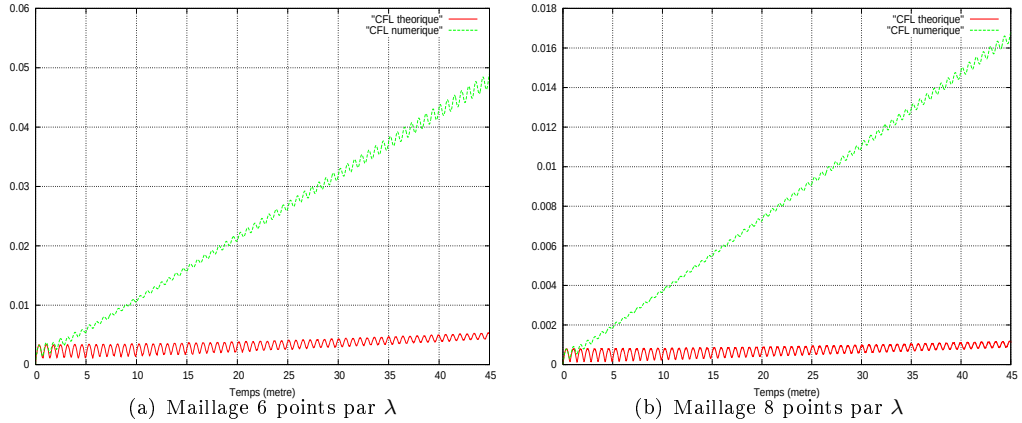


(c) Maillage 8 points par λ, CFL théorique



(d) Maillage 8 points par λ, CFL numérique

FIG. 4.11 – Evolution temporelle de H_x en un point du maillage
Schéma GD-$\mathbb{P}_3$



(a) Maillage 6 points par λ (b) Maillage 8 points par λ

FIG. 4.12 – Evolution temporelle de l'erreur L^2
Schéma GD-$\mathbb{P}_3$

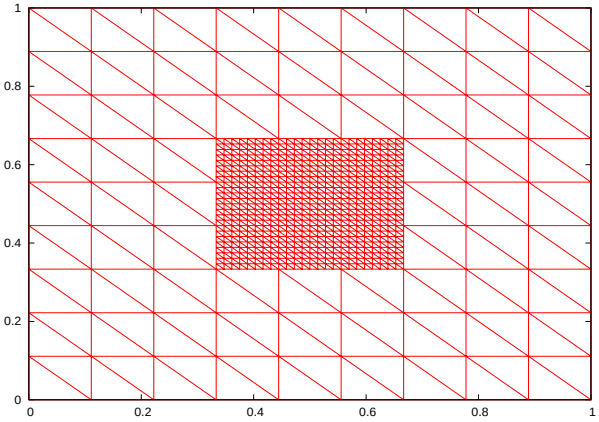
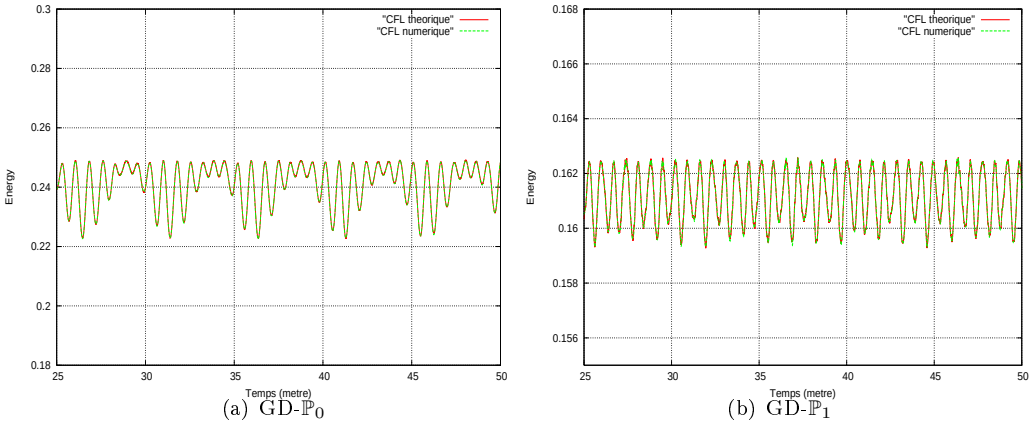


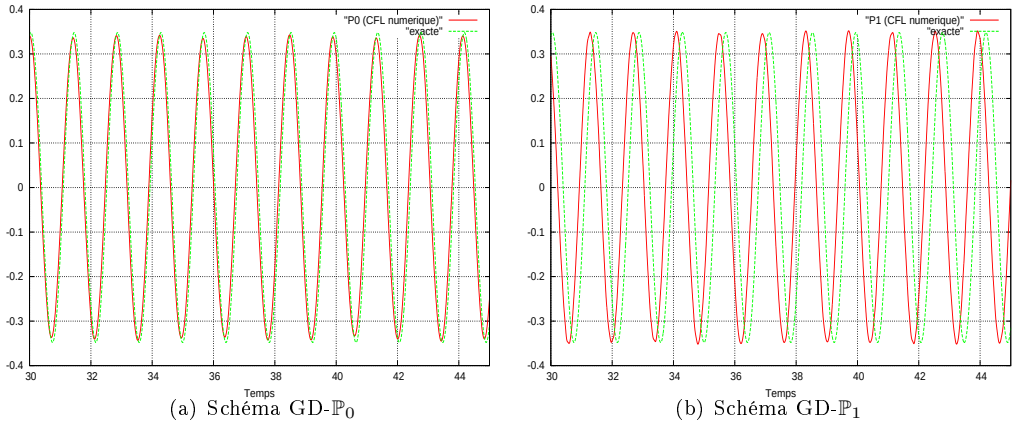
FIG. 4.13 – Maillage non-conforme avec un raffinement local de taux 8



(a) GD-$\mathbb{P}_0$ (b) GD-$\mathbb{P}_1$

(c) GD-$\mathbb{P}_2$ (d) GD-$\mathbb{P}_3$

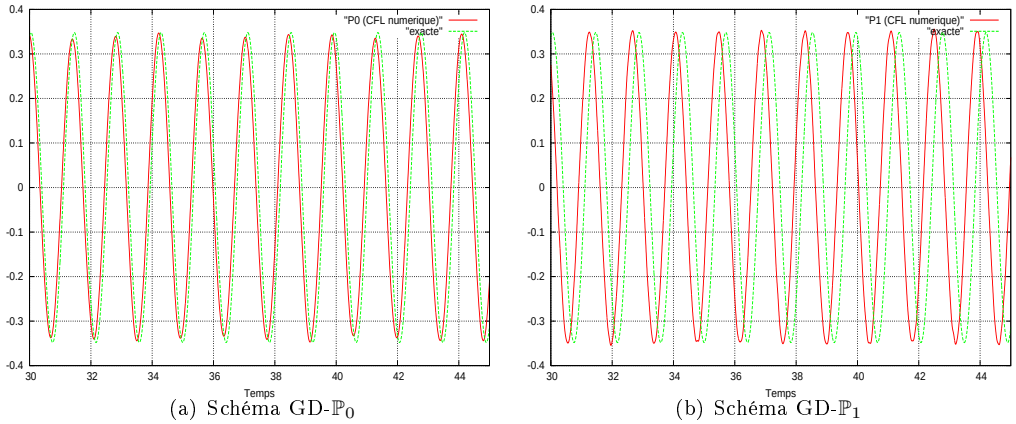
FIG. 4.14 – Evolution de l'énergie pour les différents schémas GD-$\mathbb{P}_K$
Zoom sur les 17 dernières périodes
Maillage non-conforme avec un raffinement local de taux 8



(a) Schéma GD-$\mathbb{P}_0$ (b) Schéma GD-$\mathbb{P}_1$

(c) Schéma GD-$\mathbb{P}_2$ (d) Schéma GD-$\mathbb{P}_3$

FIG. 4.15 – Evolution temporelle de H_x en un point du maillage (CFL numérique)
Maillage triangulaire non-conforme avec raffinement local de taux 4



(a) Schéma GD-$\mathbb{P}_0$ (b) Schéma GD-$\mathbb{P}_1$

(c) Schéma GD-$\mathbb{P}_2$ (d) Schéma GD-$\mathbb{P}_3$

FIG. 4.16 – Evolution temporelle de H_x en un point du maillage (CFL numérique)
Maillage triangulaire non-conforme avec raffinement local de taux 8

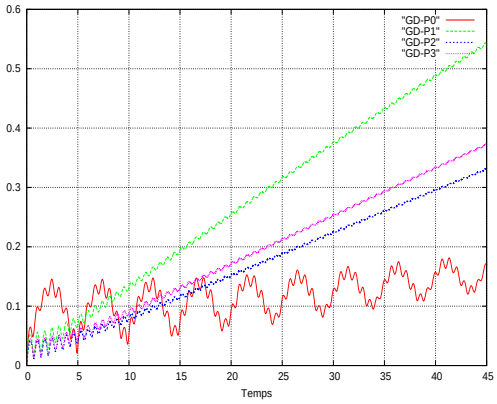


FIG. 4.17 – Evolution temporelle de l'erreur L^2 (CFL numérique)
Maillage triangulaire non-conforme avec raffinement local de taux 4

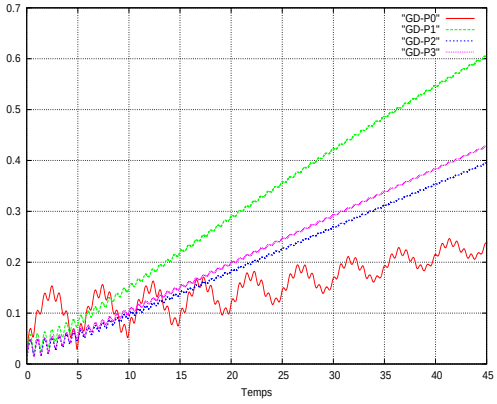
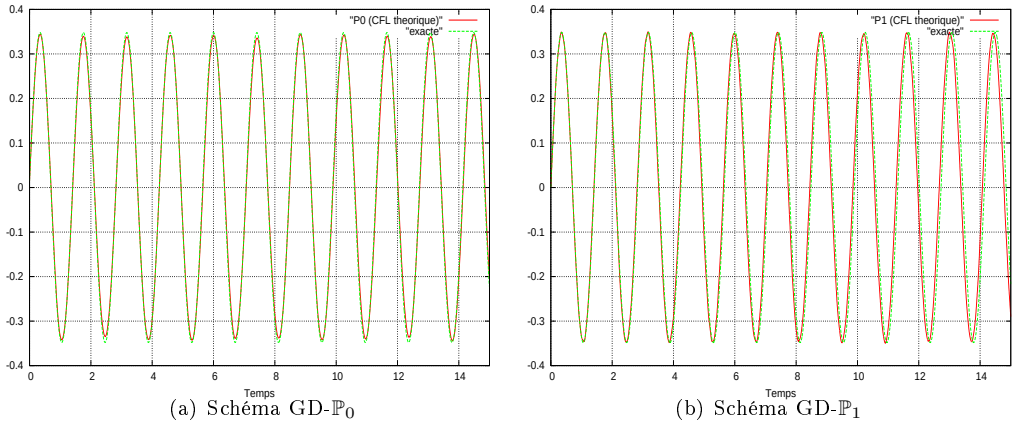
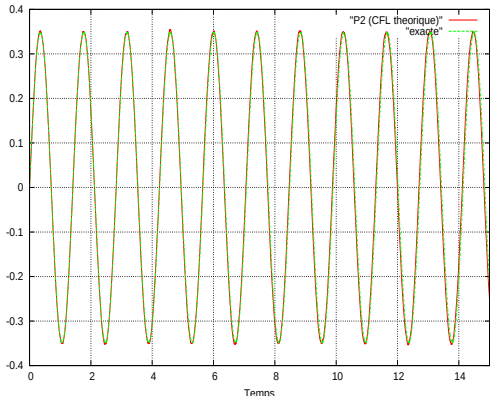


FIG. 4.18 – Evolution temporelle de l'erreur L^2 (CFL numérique)
Maillage triangulaire non-conforme avec raffinement local de taux 8

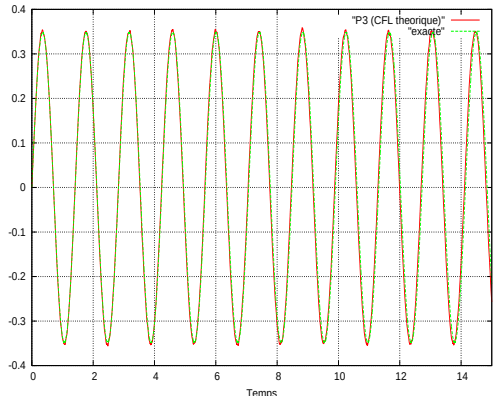


(a) Schéma GD-$\mathbb{P}_0$

(b) Schéma GD-$\mathbb{P}_1$

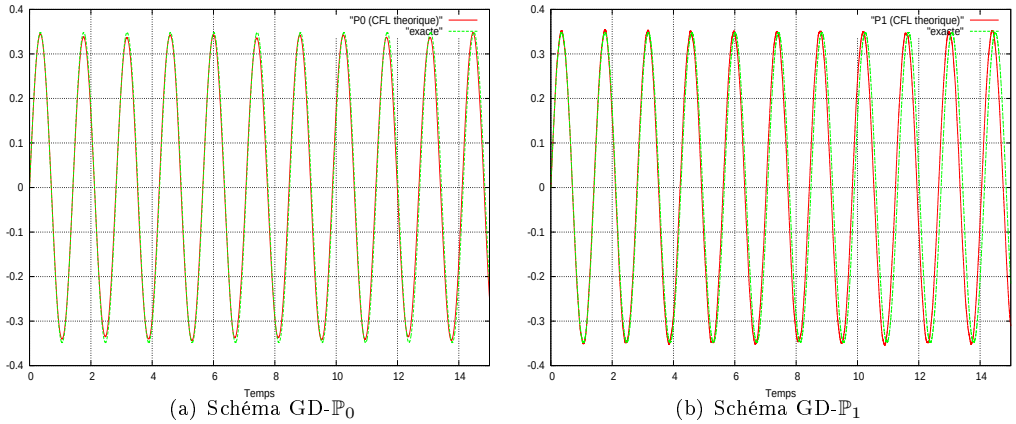


(c) Schéma GD-$\mathbb{P}_2$



(d) Schéma GD-$\mathbb{P}_3$

FIG. 4.19 – Evolution temporelle de H_x en un point du maillage grossier (CFL numérique) Maillage triangulaire non-conforme avec raffinement local de taux 2



(a) Schéma GD-$\mathbb{P}_0$ (b) Schéma GD-$\mathbb{P}_1$

(c) Schéma GD-$\mathbb{P}_2$ (d) Schéma GD-$\mathbb{P}_3$

FIG. 4.20 – Evolution temporelle de H_x en un point du maillage grossier (CFL numérique) Maillage triangulaire non-conforme avec raffinement local de taux 8

– la réduction de l'erreur de dispersion via la mise au point de stratégies de pas de temps local.

Remerciements. Les auteurs remercient Loula Fezoui pour l'aide apportée dans la mise en œuvre de la méthode GD-$\mathbb{P}_K$ en maillages triangulaires non-conformes ainsi que pour les nombreuses discussions autour de la problématique au cœur de cette étude.

6 Annexes

6.1 Inégalité généralisée

1. On dit qu'un ensemble C est un cône, si pour tout $x \in C$ et $\theta \geq 0$ on a $\theta x \in C$. Un ensemble C est un cône convexe s'il est convexe et un cône, c'est à dire que pour tout $x_1, x_2 \in C$ et $\theta_1, \theta_2 \geq 0$, on a $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$
2. Un cône $K \subseteq \mathbb{R}^n$ est appelé un cône propre s'il satisfait les conditions suivantes :
   - K est convexe,
   - K est fermé,
   - K est solide, *i.e.* l'intérieur de K est non vide,
   - K est pointu, *i.e.* $x \in K$, $-x \in K \Rightarrow x = 0$.

Un cône propre K peut être utilisé pour définir une inégalité généralisée, laquelle est une relation d'ordre partielle de $\mathbb{R}^n$ qui possède plusieurs propriétés de la relation d'ordre définie dans $\mathbb{R}$. On associe au cône propre K la relation d'ordre partielle définie par :

$$x \preceq_K y \Longleftrightarrow y - x \in K \tag{6.35}$$

On définit également la relation d'ordre partielle stricte par :

$$x \prec_K y \Longleftrightarrow y - x \in \textbf{int } K \text{ (l'intérieur de } K) \tag{6.36}$$

Dans la suite, on note par $\preceq_K$ et $\prec_K$ les inégalités généralisées respectivement non stricte et stricte, associées au cône K. Si $K = \mathbb{R}_+$, alors la relation d'ordre partielle $\preceq_K$ est la relation d'ordre usuelle $\leq$ sur $\mathbb{R}$, et la relation d'ordre partielle stricte $\prec$ est la relation d'ordre usuelle $<$ sur $\mathbb{R}$. On note par :

- $\mathbf{S}^n$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n :

$$\mathbf{S}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = X^T\}$$

- $\mathbf{S}^n_+$ l'ensemble des matrices carrées symétriques positives d'ordre n :

$$\mathbf{S}^n_+ = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succeq 0\}$$

- $\mathbf{S}^n_{++}$ l'ensemble des matrices carrées symétriques définies positives d'ordre n :

$$\mathbf{S}^n_{++} = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succ 0\}$$

Les deux propriétés suivantes sont immédiates (voir [4]-[1]) :

- $\mathbf{S}^n_+$ est cône propre de $\mathbf{S}^n$,
- $\mathbf{S}^n_+ = \bigcap_{z \neq 0} \{X \in \mathbf{S}^n \mid z^T X z \geq 0\}$.

La première propriété signifie qu'on peut associer à $\mathbf{S}^n_+$ une inégalité généralisée $\preceq$ ou $\prec$, *i.e.* une inégalité entre deux matrices dans $\mathbf{S}^n$. Donc, d'après (6.35) on a, $X \preceq_{\mathbf{S}^n_+} Y \Longleftrightarrow Y - X$ est positive, et en utilisant (6.36), on a $X \prec_{\mathbf{S}^n_+} Y \Longleftrightarrow Y - X$ est définie positive. La deuxième propriété signifie que $X \preceq_{\mathbf{S}^n_+} Y \Longleftrightarrow \forall z, z^T X z \leq z^T Y z$. Pour simplifier l'écriture, on élimine l'indice de $\preceq_{\mathbf{S}^n_+}$ et $\prec_{\mathbf{S}^n_+}$. Pour des matrices symétriques on utilise simplement $X \preceq Y$ ou $X \prec Y$, étant entendu que l'inégalité généralisée est associée au cône propre $\mathbf{S}^n_+$.

Un critère pour comparer deux matrices est alors le suivant : soient X et Y deux matrices symétriques d'ordre n, tel que Y est définie positive. On note par P la matrice telle que $P = Y^{-1/2} X Y^{-1/2}$. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Trouver une constante } \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ telle que } X \preceq \delta Y \tag{6.37}$$

Ce problème admet une solution optimale δ_{opt} qui est le rayon spectral de la matrice P.

6.2 Problème d'optimisation

Dans la suite, on utilise les mêmes notations que celles de la section 2.2. On considère le problème suivant : existent-t-ils deux constantes δ_1 et δ_2 qui vérifient,

$$\forall X \in \mathsf{Vect}\{\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i\}, \quad \|\frac{\partial X}{\partial x}\|^2_{T_i} \leq \delta_1 \|X\|^2_{T_i} \quad \text{et} \quad \|X\|^2_{a_{ik}} \leq \delta_2 \|X\|^2_{T_i} \tag{6.38}$$

La réponse est positive pour tout choix de fonctions de base $\{\varphi_{ij}\}, 1 \leq j \leq d_i$.

PREUVE. Le problème (6.38) est équivalente au problème d'optimisation suivante : trouver deux constantes positives δ_1 et δ_2 telles que,

$$\mathbf{A_1} \preceq \delta_1 \mathbf{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{A_2} \preceq \delta_2 \mathbf{B} \tag{6.39}$$

où les matrices $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}$ sont symétriques et $\mathbf{B}$ est symétrique définie positive, elles sont définies par :

$$(\mathbf{A_1})_{jj'} = \int_{T_i} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij'}}{\partial x}, \quad (\mathbf{A_2})_{jj'} = \int_{a_{ik}} \varphi_{ij} \varphi_{ij'} \quad \text{et} \quad (\mathbf{B})_{jj'} = \int_{T_i} \varphi_{ij} \varphi_{ij'} \tag{6.40}$$

D'après le critère de la section précédente, le problème (6.39) admet une solution optimale $(\delta_1; \delta_2)$ qui est aussi une solution du problème (6.38) et on a :

$$(\delta_1; \delta_2) = (\mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{A_1} \mathbf{B}^{-1/2}; \mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{A_2} \mathbf{B}^{-1/2})$$

On peut vérifier aussi que les valeurs des constantes δ_1 et δ_2 augmentent avec la taille (d_i) des matrices $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}$ et $\mathbf{B}$.

6.3 Formulation du schéma GD-$\mathbb{P}_\kappa$

On précise dans cette section l'écriture du schéma GD-$\mathbb{P}_\kappa$ (2.9). Pour simplifier, on détaille seulement la formulation de la première équation de (2.9). On multiplie la première équation du système (2.1) par la fonction de base locale φ_{ij}, puis on intègre sur chaque triangle T_i :

$$\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}+\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0$$

$$\Rightarrow \quad \int_{T_i}\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}\varphi_{ij}+\int_{T_i}\frac{\partial E_y}{\partial x}\varphi_{ij}-\int_{T_i}\frac{\partial E_x}{\partial y}\varphi_{ij}=0$$

Après intégration par parties, on obtient :

$$\mu_i\int_{T_i}\frac{\partial H_z}{\partial t}\varphi_{ij}-\int_{T_i}E_y\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x}+\int_{T_i}E_x\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y}+\int_{\partial T_i}E_y\varphi_{ij}\widetilde{n}_{ikx}-\int_{\partial T_i}E_x\varphi_{ij}\widetilde{n}_{iky}=0$$

Utilisons les équations (2.5) et (2.6) pour en déduire :

$$\begin{aligned}\mu_i\sum_{l=1}^{d_i}\Big(\int_{T_i}\varphi_{ij}\varphi_{il}\Big)\frac{\partial H_{zil}}{\partial t} \quad &- \quad \sum_{l=1}^{d_i}\Big(\int_{T_i}\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x}\varphi_{il}\Big)E_{yil}\\ &+ \quad \sum_{l=1}^{d_i}\Big(\int_{T_i}\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y}\varphi_{il}\Big)E_{xil}\\ &+ \quad \sum_{k\in\mathcal{V}_i}\int_{a_{ik}}\Big(\frac{E_{yi}+E_{yk}}{2}\Big)\varphi_{ij}\widetilde{n}_{ikx}\\ &- \quad \sum_{k\in\mathcal{V}_i}\int_{a_{ik}}\Big(\frac{E_{xi}+E_{xk}}{2}\Big)\varphi_{ij}\widetilde{n}_{iky}=0\end{aligned}$$

Une intégration par parties conduit à :

$$\begin{aligned}\mu_i\sum_{l=1}^{d_i}\Big(\int_{T_i}\varphi_{ij}\varphi_{il}\Big)\frac{\partial H_{zil}}{\partial t} \quad &- \quad \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{d_i}\Big(\int_{T_i}(\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x}\varphi_{il}-\varphi_{ij}\frac{\partial\varphi_{il}}{\partial x})\Big)E_{yil}\\ &+ \quad \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{d_i}\Big(\int_{T_i}(\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y}\varphi_{il}-\varphi_{ij}\frac{\partial\varphi_{il}}{\partial y})\Big)E_{xil}\\ &+ \quad \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathcal{V}_i}\Bigg[\sum_{l=1}^{d_i}\Big(\int_{a_{ik}}\varphi_{ij}\varphi_{kl}\widetilde{n}_{ikx}\Big)E_{ykl}-\\ &\qquad\qquad \sum_{l=1}^{d_i}\Big(\int_{a_{ik}}\varphi_{ij}\varphi_{kl}\widetilde{n}_{iky}\Big)E_{xkl}\Bigg]=0\end{aligned}$$

qui donne :

$$\mu_i M_i \frac{\partial H_{zi}}{\partial t} - M_i^x E_{yi} + M_i^y E_{xi} + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} (F_{xik} - F_{yik}) = 0$$

Les matrices M_i, M_i^x et M_i^y sont définies dans (2.11) et les vecteurs F_{xik} et F_{yik} sont définies dans (2.10).

6.4 Etude de quelques exemples

Exemple 1 : le but de cet exemple est d'éclaircir les deux points de la remarque (3.31). On utilise les mêmes notations que celles du lemme 2. On considère un triangle T_i défini par les sommets $s_1(2,3), s_2(3,3)$ et $s_3(3,1)$. Les fonctions de base $\mathbb{P}_1$ de T_i sont :

$$\begin{cases} \varphi_{i1} &= 3 - x \\ \varphi_{i2} &= (2x + y - 7)/2 \\ \varphi_{i3} &= (3 - y)/2 \end{cases}$$

Les faces de T_i et son voisin T_k sont définies respectivement par $a_i = [s_2, s_3]$ et $a_k = [(3, 1.5), (3, 2.5)]$. L'interface entre T_i et T_k est telle que $a_{ik} = a_i \cap a_k$, par suite $\ell_1 = 2$ et $\ell_2 = 1$. On trouve alors que $\beta_{ik} = \beta_{ki} = 3$ ce qui justifie le premier point de la remarque (3.31).

On considère maintenant un raffinement de taux 8 de la face a_i. Les faces a_k pour $k \in \mathcal{V}_i$ sont définies dans le tableau 5, on a $\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \ell_1 = 8$ et $\ell_2 = 1$. On recense dans le tableau 5 les valeurs de $\beta_{ik}, k \in \mathcal{V}_i$. Bien que toutes les interfaces $a_{ik}, k \in \mathcal{V}_i$ sont égales, on remarque que les valeurs de $\beta_{ik}, k \in \mathcal{V}_i$ sont influencées par la position du voisisn T_k de T_i. Donc la deuxième point de la remarque (3.31) est justifié.

a_k	β_{ik}	β_{ki}
[(3,1.0), (3,1.25)]	7.613	3.0
[(3,1.25), (3,1.5)]	5.357	3.0
[(3,1.5), (3,1.75)]	3.851	3.0
[(3,1.75), (3,2.0)]	3.095	3.0
[(3,2.0), (3,2.25)]	3.095	3.0
[(3,2.25), (3,2.5)]	3.851	3.0
[(3,2.5), (3,2.75)]	5.357	3.0
[(3,2.75), (3,3.0)]	7.613	3.0

TAB. 5 – Valeurs de β_{ik} et β_{ki} suivant la face a_k de T_k - raffinement de taux 8

Exemple 2 : on précise dans cet exemple le calcul de la valeur maximale des constantes $\beta_{ik}(\beta_{ki})$ dans le cas d'un maillage non-conforme. Supposons que nous sommes dans la situation de la figure 6.21. Les voisins du triangle T_{i1} sont T_{k1} et T_{k2}. Le voisin des triangles

T_{i2}, T_{i3} et T_{i4} est T_{k3}. On note les interfaces non-conformes par $a_1 = T_{i1} \bigcap T_{k1}, a_2 = T_{i1} \bigcap T_{k2}, a_3 = T_{i2} \bigcap T_{k3}, a_4 = T_{i3} \bigcap T_{k3}$ et $a_5 = T_{i4} \bigcap T_{k3}$. On donne dans le tableau 6 les valeurs de ℓ_1 et ℓ_2 pour toutes les interfaces non-conformes. Les maximums de tous les ℓ_1 et ℓ_2 sont $\ell_1^{\max} = 2.7$ et $\ell_2^{\max} = 4.0$ qui correspondent respectivement aux interfaces a_1 et a_3. On a $\mathcal{L}^{\max} = \max(\ell_1^{\max}, \ell_2^{\max}) = \ell_2^{\max}$. Appliquons le lemme 2 : on calcule seulement la valeur de β_{ki} qui correspond à l'interface a_3 qui est le maximum de toutes les valeurs de β_{ik} et β_{ki}.

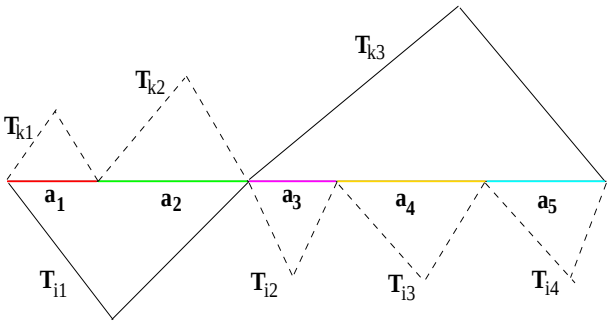


FIG. 6.21 – Exemple d'un maillage non-conforme

interface	ℓ_1	ℓ_2
a_1	2.7	1.0
a_2	1.6	1.0
a_3	1.0	4.0
a_4	1.0	2.4
a_5	1.0	3.0

TAB. 6 – Valeurs de ℓ_1 et ℓ_2 pour toute les interfaces

Références

[1] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. *Optimization I-II, Convex analysis.* Technion-Israel Institute of Technology, 2004.

[2] M. Bernacki, L. Fezoui, S. Lanteri, and S. Piperno. Parallel unstructured mesh solvers for heterogeneous wave propagation problems. *Appl. Math. Model.*, 30(8) :744–763, 2006.

[3] V. A. Bokil and R. Glowinski. An operator splitting scheme with a distributed Lagrange multiplier based fictitious domain method for wave propagation problems. *J. Comput. Phys.*, 205 :242–268, 2005.

[4] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convexe Optimization*, chapter 1 and 2. Cambridge University Press, 2004. disponible sur http ://www.stanford.edu/∼boyd/cvxbook.

[5] N. Canouet, L. Fezoui, and S. Piperno. Discontinuous Galerkin time-domain solution of Maxwell's equations on locally-refined nonconforming cartesian grids. *COMPEL*, 24(4) :1381–1401, 2005.

[6] M.W. Chevalier and R.J. Luebbers. FDTD local grid with material traverse. *IEEE Trans. Antenna Propagation*, 45(3) :411–421, 1997.

[7] J.-P. Cioni, L. Fezoui, and H. Steve. A parallel time-domain Maxwell solver using upwind schemes and triangular meshes. *IMPACT Comput. Sci. Eng.*, 5(3) :215–247, 1993.

[8] B. Cockburn, G.E. Karniadakis, and C.W. Shu, editors. *Discontinuous Galerkin methods. Theory, computation and applications*, volume 11 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, 2000.

[9] G. Cohen, X. Ferrieres, and S. Pernet. A spatial high spatial order hexahedral discontinuous galerkin method to solve Maxwell's equations in time domain. *J. Comp. Phys.*, 217(2) :340–363, 2006.

[10] F. Collino, T. Fouquet, and P. Joly. Conservative space-time mesh refinement methods for the FDTD solution of Maxwell's equations. *J. Comp. Phys.*, 211(1) :9–35, 2006.

[11] F. Collino, S. Garcès, and P. Joly. A fictitious domain method for conformal modeling of the perfect electric conductors in the FDTD method. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 46(10) :1519–1526, 1998.

[12] F. Collino, P. Joly, and F. Millot. Fictitious domain method for unsteady problems : application to electromagnetic scattering. *J. Comp. Phys.*, 138(2) :907–938, 1997.

[13] L. Fezoui, S. Lanteri, S. Lohrengel, and S. Piperno. Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes. *ESAIM : Math. Model. and Numer. Anal.*, 39(6) :1149–1176, 2005.

[14] J. Flaherty, R. Loy, M. Shephard, and J. Teresco. Software for the parallel adaptative solution of conservation laws by discontinuous Galerkin methods. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 113–124, 2000.

[15] J. S. Hesthaven and T. Warburton. Nodal high-order methods on unstructured grids. *J. Comput. Phys.*, 181 :186–221, 2002.

[16] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, INC, third edition edition, 1998.

[17] X. Ji, T. Lu, W. Cai, and P. Zhang. Discontinuous Galerkin time domain (DGTD) methods for the study of 2-D waveguide-coupled microring resonators. *Journal of Lightwave Technology*, 23(11) :3864–3874, 2005.

[18] A. V. Kabakian, V. Shankar, and W. F. Hall. Unstructured grid-based discontinuous Galerkin method for broadband electromagnetic simulations. *J. of Sci. Comput.*, 20(3) :405–431, 2004.

[19] I.S. Kim and W. J.R. Hoefer. A local mesh refinement algorithm for the time domain finite difference method using Maxwell's curl equations. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 38(6) :812–815, 1990.

[20] M. Min. Discontinuous Galerkin method based on quadrilateral mesh for Maxwell's equations. *Wireless Communications and Applied Computational Electromagnetics, 2005. IEEE/ACES International Conference on*, pages 724–727, 2005.

[21] S. Piperno, M. Remaki, and L. Fezoui. A nondiffusive finite volume scheme for the three-dimensional Maxwell's equations on unstructured meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(6) :2089–2108, 2002.

[22] D.T. Prescott and N.V. Shuley. A method for incorporating different sized cells into the finite-difference time-domain analysis technique. *IEEE Microwave Guided Wave Letters*, 2(11) :434–436, 1992.

[23] J.-F. Remacle, J. Flaherty, and M. Shephard. An adaptive discontinuous Galerkin technique with an orthogonal basis applied to compressible flow problems. *SIAM Review*, 45(1) :53–72, 2003.

[24] J.-F. Remacle, K. Pinchedez, J. Flaherty, and M. Shephard. An efficient local time stepping-discontinuous Galerkin scheme for adaptive transient computations, 2003. Unpublished.

[25] M. Remaki. *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1999.

[26] M. Remaki. A new finite volume scheme for solving Maxwell's system. *COMPEL*, 19(3) :913–931, 2000.

[27] M. Vidyasagar. *Nonlinear System Analysis*. Prentice Hall, 1978.

[28] J. Xin and J.E. Flaherty. Viscous stabilization of discontinuous Galerkin solutions of hyperbolic conservation laws. *Appl. Numer. Math.*, 56(3-4) :444–458, 2006.

[29] K.S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 14(3) :302–307, 1966.

[30] A. R. Zakharian, M. Brio, and J. V. Moloney. FDTD based second-order accurate local mesh refinement method for Maxwell's equations in two space dimensions. *Comm. Math. Sci.*, 2(3) :497–513, 2004.

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399