



HAL
open science

Relations et treillis de Galois

Arnaud Simon

► **To cite this version:**

Arnaud Simon. Relations et treillis de Galois. Septième journées de la Société Francophone de Classification - SFC'99, Loria, 1999, Nancy, France, pp.299–306. inria-00107817

HAL Id: inria-00107817

<https://inria.hal.science/inria-00107817>

Submitted on 19 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Relations et treillis de Galois

Arnaud Simon
LORIA UMR 7503
615 rue du Jardin Botanique, BP 101,
F-54600 Villers-lès-Nancy, France
e-mail : Arnaud.Simon@loria.fr

Résumé

Les treillis de Galois ont fait l'objet de nombreux travaux notamment en analyse de données où leur structure est utilisée pour extraire des règles d'implication. Les treillis sont cependant obtenus à partir de données décrites par des propriétés booléennes ne permettant pas d'exhiber les éventuelles relations qui existent entre les données. Nous montrons dans cet article qu'en décrivant les données dans un système de représentation des connaissances par objets, il devient alors possible de mettre en correspondance les classes des treillis de Galois via des relations qui lient par ailleurs les données. Les relations définies dans le treillis sont de plus utilisées pour extraire des règles d'implication non détectables par les méthodes classiques.

Mots-clés Treillis de Galois, Extraction de règles, Relations, Systèmes de représentation des connaissances par objets..

1 Introduction

La construction de *treillis de Galois* d'une relation binaire introduite dans [Barbut et Monjardet, 1970], a été appliquée à la construction de *concepts formels* dans [Wille, 1982], à l'acquisition et à la représentation de connaissances [Bournaud et Ganascia, 1996; Mineau et Godin, 1995], à l'apprentissage [Carpineto et Romano, 1996; Godin et Missaoui, 1994]. En analyse de données, les treillis sont utilisés pour la construction de hiérarchies de classes et pour l'extraction de règles d'implication entre les propriétés [Duquenne, 1996; Luxenburger, 1991].

Les données traitées pour la construction de treillis de Galois sont habituellement décrites par des propriétés booléennes. Un tel formalisme n'autorise cependant pas la mise en évidence de relations¹ entre les classes du treillis. L'utilisation d'un *système de représentation des connaissances par objets*, aussi appelé système de RCO, permet de représenter les relations pouvant exister entre les données [Chouvet *et al.*, 1996]. Les classes du treillis construit (aussi appelé *point de vue*) sont alors elles aussi mises en correspondance par l'intermédiaire des mêmes relations [Simon et Napoli, 1998].

Nous montrons dans cet article que les relations définies entre les classes d'un point de vue peuvent être exploitées afin d'extraire des règles d'implication qui complètent les connaissances disponibles sur le domaine. De plus, les règles obtenues n'auraient pas été détectables avec une représentation booléenne des données.

1. Une classe C_1 est en relation par r avec une classe C_2 si tout individu représenté par C_1 est en relation par r avec un ou plusieurs individus de C_2 .

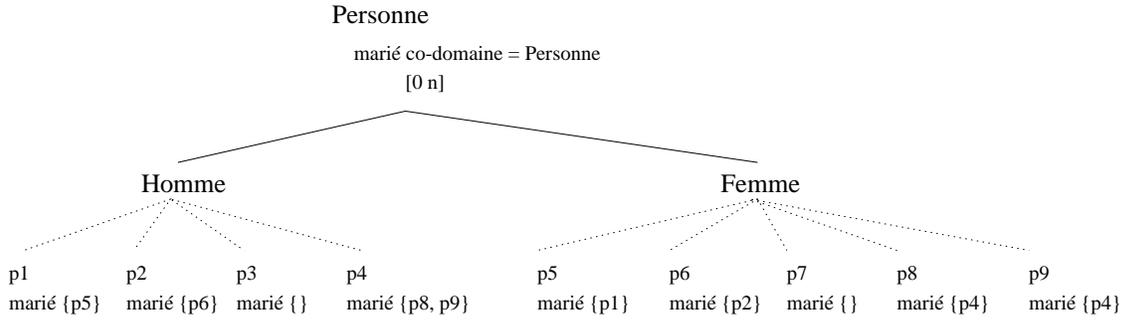


FIG. 1 – Exemple d’une hiérarchie conceptuelle \mathcal{H} .

L’organisation de cet article est la suivante. Nous précisons d’abord la façon dont sont représentées les relations dans un système de RCO. Nous montrons ensuite comment les algorithmes de construction de treillis de Galois peuvent être adaptés pour prendre en compte des relations. Enfin, nous décrivons en nous appuyant sur un exemple, comment sont obtenues les règles d’implication faisant intervenir des relations.

2 Relations et systèmes de RCO

Un système de RCO s’appuie sur une *hiérarchie conceptuelle*, $\mathcal{H} = (\mathcal{X}, \preceq, \omega)$. \mathcal{H} est un graphe orienté sans circuit où \mathcal{X} est un ensemble de classes, \preceq est une relation d’ordre partiel — relation de *subsumption* ou de *spécialisation* selon le contexte — et ω est l’élément maximal de \mathcal{X} suivant \preceq . ω est appelée la *racine* de la hiérarchie et elle est supposée toujours exister.

Une classe C de \mathcal{X} représente un concept du monde réel et possède à la fois une *intension*, $\text{Intension}(C)$, et une *extension*, $\text{Extension}(C)$. $\text{Intension}(C)$ fait référence aux propriétés de C et $\text{Extension}(C)$ représente l’ensemble des entités individuelles, ou *instances* de C , qui « tombent » sous le concept représenté par C : en d’autres termes, une instance i de C vérifie l’ensemble des propriétés définies dans $\text{Intension}(C)$.

Dans \mathcal{H} , le fait qu’une classe $C2$ est subsumée par $C1$ se note $C2 \preceq C1$ et les deux expressions duales suivantes sont vérifiées² : $\text{Intension}(C1) \subseteq \text{Intension}(C2)$ et $\text{Extension}(C2) \subseteq \text{Extension}(C1)$. L’intension de $C2$ est caractérisée d’une part par ses propriétés *propres* et d’autre part par les propriétés *héritées* de l’intension de $C1$.

Mettre en correspondance une classe $C1$ avec une classe $C2$ par la relation r revient à définir r comme une propriété de $\text{Intension}(C1)$ ayant pour co-domaine la classe $C2$ (le domaine de r étant la classe $C1$). La cardinalité de r , c’est à dire les nombres minimal et maximal de valeurs élémentaires que peut prendre r est donnée par un intervalle $[n1 \ n2]$. Pour une instance i de $C1$ la valeur associée à r est un ensemble d’instances de $C2$, dont le cardinal est compris dans $[n1 \ n2]$. Comme une instance peut prendre plusieurs valeurs pour r , la relation r est dite *multi-valuée*.

Par exemple, la figure 1 représente une hiérarchie conceptuelle \mathcal{H} où la classe *Personne* est décrite intensionnellement par la relation multi-valuée *marié* de co-domaine la classe *Personne* et de cardinalité $[0 \ n]$. Les classes *Homme* et *Femme* sont subsumées par *Personne* (et héritent de la relation *marié*). $p1$ qui est une instance de *Homme* est en relation par *marié* avec $p5$ qui est une instance de *Femme*.

2. Ceci n’est pas nécessairement vrai en cas de masquage de propriétés. Nous supposons donc ici que le masquage de propriétés est interdit.

3 Relations et construction de points de vue

Un treillis de Galois représente les regroupements naturels d'un ensemble \mathcal{D} d'individus décrits par un ensemble \mathcal{A} de propriétés. Un regroupement ou classe \mathcal{C} , aussi appelé *concept formel* dans [Wille, 1982], est défini comme un couple $(\text{Extension}(\mathcal{C}), \text{Intension}(\mathcal{C}))$ où $\text{Extension}(\mathcal{C})$ représente tous les individus de \mathcal{D} qui vérifient les propriétés de $\text{Intension}(\mathcal{C})$ et réciproquement, $\text{Intension}(\mathcal{C})$ est décrite par toutes les propriétés de \mathcal{A} qui sont communes aux individus de $\text{Extension}(\mathcal{C})$.

De nombreux algorithmes de construction de treillis de Galois ont été étudiés [Ganter, 1984; Guénoche, 1990; Godin *et al.*, 1991; Carpineto et Romano, 1996]. Ils reposent tous sur le calcul des fonctions $\mathbf{f}_{\mathcal{A}}$ définie de \mathcal{D} dans \mathcal{A} et $\mathbf{g}_{\mathcal{D}}$ définie de \mathcal{A} dans \mathcal{D} ³. La fonction $\mathbf{f}_{\mathcal{A}}$ associe à un ensemble d'individus $D \subseteq \mathcal{D}$ l'ensemble de leurs propriétés communes, qui est aussi l'intension la plus spécifique associée à D . La fonction $\mathbf{g}_{\mathcal{D}}$ associe à un ensemble de propriétés $A \subseteq \mathcal{A}$ (ou intension) l'ensemble des individus qui les vérifient toutes, qui est aussi l'extension associée à A .

Dans un système de RCO, les données traitées sont vues comme des instances des classes d'une hiérarchie conceptuelle $\mathcal{H} = (\mathcal{X}, \preceq, \omega)$ qui est utilisée pour modéliser les connaissances du domaine. Notre but est d'utiliser les algorithmes de construction de treillis de Galois existant pour traiter des données représentées dans un système de RCO. Pour cela, il est nécessaire d'adapter la définition des fonctions $\mathbf{f}_{\mathcal{A}}$ et $\mathbf{g}_{\mathcal{D}}$. Un treillis de Galois ou *points de vue*, noté $\mathcal{H}_{\mathcal{D}, \mathcal{A}} = (\mathcal{X}_{\mathcal{D}, \mathcal{A}}, \preceq, \omega_{\mathcal{D}, \mathcal{A}})$, est une hiérarchie conceptuelle construite sur la base d'un ensemble d'individus \mathcal{D} (instances des classes de \mathcal{X}) et d'un ensemble de propriétés \mathcal{A} .

Dans le cadre de cet article, une propriété est une relation décrite par un co-domaine et une cardinalité. L'intension la plus spécifique I associée aux individus de $D \subseteq \mathcal{D}$ est donnée par $\mathbf{f}_{\mathcal{A}}(D)$. Calculer $\mathbf{f}_{\mathcal{A}}(D)$ revient à déterminer l'ensemble R des relations de \mathcal{A} qui sont communes aux individus de D . Puis, pour chacune des relations de R il est nécessaire de calculer son co-domaine et sa cardinalité. Pour un individu i de D , la valeur associée à la relation r , notée $\text{Valeur}(r, i)$, est un ensemble d'instances des classes de \mathcal{X} . Le co-domaine associé à r est alors représenté en extension par l'ensemble des instances $\mathbf{r}(D) = \cup_{i \in D} \text{Valeur}(r, i)$ et en intension par $\mathbf{f}_{\mathcal{A}}(\mathbf{r}(D))$. Lorsque les individus de $\mathbf{r}(D)$ sont aussi décrits par la relation r , le calcul de $\mathbf{f}_{\mathcal{A}}(\mathbf{r}(D))$ fait de nouveau intervenir le calcul de $\mathbf{f}_{\mathcal{A}}(\mathbf{r}(\mathbf{r}(D)))$, et ainsi de suite. Afin d'éviter un calcul infini, nous posons que la définition en intension du co-domaine de r est calculée par $\mathbf{f}_{\mathcal{A}-r}(\mathbf{r}(D))$. La cardinalité de r est donnée par l'intervalle $[\text{Min}(|\text{Valeur}(r, i)|) \text{ Max}(|\text{Valeur}(r, i)|)]$ pour $i \in D$. Les individus de D possèdent tous la propriété d'être instance d'une ou plusieurs classes de \mathcal{X} . Cette propriété sera toujours prise en compte lors du calcul de $\mathbf{f}_{\mathcal{A}}(D)$ par l'intermédiaire de la relation *sorte-de*. Le co-domaine associé à *sorte-de* est alors la classe la plus spécifique, pour \preceq , de \mathcal{X} dont tous les individus de D sont instance.

La fonction $\mathbf{g}_{\mathcal{D}}$ associe à une intension l'ensemble des individus de \mathcal{D} qui en vérifient toutes les propriétés. Cette définition est équivalente au *filtrage d'instances* dans un système de RCO. Nous ne présentons pas ici le mécanisme de filtrage qui est notamment détaillé dans [Ducournau *et al.*, 1998].

Supposons par exemple que $D = \{p1, p2\}$ et que $\mathcal{A} = \{\text{marié}\}$ (cf. figure 1). L'intension la plus spécifique I associée aux individus de D est déterminée par le calcul de $\mathbf{f}_{\mathcal{A}}(D)$. Les individus de D sont tous des instances de la classe *Homme*, I est donc décrite par la relation *sorte-de* de co-domaine la classe *Homme*. Les individus $p1$ et $p2$ sont décrits par la relation *marié*, I est donc décrite par la relation *marié* de cardinalité $[1 \ 1]$ et de co-domaine défini en intension par $I1 = \mathbf{f}_{\mathcal{A}-\text{marié}}(\{p5, p6\})$. L'intension $I1$ est quant à elle uniquement décrite par la relation *sorte-de* de co-domaine la classe *Femme*.

3. Tous les algorithmes peuvent être reformulés en terme des fonctions $\mathbf{f}_{\mathcal{A}}$ et $\mathbf{g}_{\mathcal{D}}$.

Lorsque les individus de \mathcal{D} sont décrits par la relation $r \in \mathcal{A}$, la construction du point de vue $\mathcal{H}_{\mathcal{D},\mathcal{A}}$ entraîne la construction en parallèle du point de vue $\mathcal{H}_{r(\mathcal{D}),\mathcal{A}-r}$ et les classes de $\mathcal{H}_{\mathcal{D},\mathcal{A}}$ sont liées par r aux classes de $\mathcal{H}_{r(\mathcal{D}),\mathcal{A}-r}$. On peut noter que dans le cas où $r(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$, une classe $C1$ de $\mathcal{H}_{r(\mathcal{D}),\mathcal{A}-r}$ peut posséder la même extension qu'une classe $C2$ de $\mathcal{H}_{\mathcal{D},\mathcal{A}}$ tout en ne possédant pas la même définition en intension ($C1$ n'est pas décrite par r). Les deux classes $C1$ et $C2$ représentent cependant les mêmes individus, $C1$ est donc remplacée par $C2$ dans $\mathcal{H}_{r(\mathcal{D}),\mathcal{A}-r}$.

4 Relations et règles d'implication

Un point de vue est utilisé pour mettre en évidence des classes qui expliquent l'organisation des données, et pour extraire des règles d'implication qui portent sur les propriétés de \mathcal{A} . La construction et l'extraction de règles des points de vue sont détaillées dans [Simon et Napoli, 1998]. Dans ce paragraphe, nous montrons, en nous appuyant sur un exemple, que les relations qui lient les données permettent de mettre en correspondance les classes d'un point de vue et qu'elles peuvent être utilisées pour extraire des règles d'implication.

Supposons que les seules informations dont nous disposons sur les données soient qu'elles concernent des personnes qui sont mariées à d'autres personnes et que ces personnes sont des hommes ou des femmes. Cette connaissance du domaine d'étude peut être modélisée par la hiérarchie conceptuelle \mathcal{H} représentée figure 1. Les données sont donc vues comme un ensemble d'instances des classes de \mathcal{H} . Supposons également, qu'elles concernent les neuf personnes $p1, \dots, p9$ de la figure 1. Elles peuvent alors être utilisées pour construire le point de vue $\mathcal{H}_{\mathcal{D},\mathcal{A}}$, représenté figure 2, où \mathcal{D} est l'ensemble des instances de *Personne* = $\{p1, \dots, p9\}$ et $\mathcal{A} = \{\text{marié}\}$ (la borne inférieure du treillis est omise dans la représentation).

Le point de vue $\mathcal{H}_{\mathcal{D},\mathcal{A}}$ est une hiérarchie conceptuelle dont les classes $C11 \dots C18$ sont calculées dynamiquement. Après la construction de $\mathcal{H}_{\mathcal{D},\mathcal{A}}$, les classes $C12$ à $C16$ sont en relation par *marié* avec les classes du point de vue $\mathcal{H}_{\text{marié}(\mathcal{D}),\mathcal{A}-\text{marié}}$. Les classes de $\mathcal{H}_{\text{marié}(\mathcal{D}),\mathcal{A}-\text{marié}}$ possèdent cependant les mêmes extensions que les classes $C12$, $C13$ et $C14$ et sont donc remplacées par celles-ci. Ainsi, la classe $C12$ a pour extension $D = \{p1, p2, p4, p5, p6, p8, p9\}$. Son intension est calculée par $f_{\mathcal{A}}(D)$ et est donc décrite par la relation *sorte-de* de co-domaine la classe *Personne* ainsi que par la relation *marié* de co-domaine décrit en intension par $f_{\mathcal{A}-\text{marié}}(\text{marié}(D))$. Comme $\text{marié}(D) = D$, le co-domaine de *marié* pour $C12$ est la classe $C12$ elle-même. Toute instance $C12$ est en relation par *marié* avec 1 ou 2 instances de $C12$.

La relation de subsomption liant les classes de $\mathcal{H}_{\mathcal{D},\mathcal{A}}$ repose sur la spécialisation des co-domaines et/ou des intervalles de cardinalité. $C12$ subsume la classe $C13$ pour laquelle le co-domaine de *marié* est la classe $C14$ ($C14 \preceq C12$) et l'intervalle de cardinalité est $[1 \ 1]$ (posséder exactement une valeur pour a est plus spécifique que d'avoir une ou deux valeurs pour a). Les classes de $\mathcal{H}_{\mathcal{D},\mathcal{A}}$ héritent les propriétés des classes qui les subsument. Par exemple, la classe $C15$ hérite le co-domaine de *marié* par la classe $C14$, c'est à dire la classe $C13$. De même la classe $C12$ hérite la relation *sorte-de* de co-domaine *Personne* de la classe $C11$.

Les instances des classes de $\mathcal{H}_{\mathcal{D},\mathcal{A}}$ sont aussi des instances des classes de \mathcal{H} . Cette correspondance qui existe entre les deux hiérarchies est exprimée par la relation *sorte-de*. On suppose en effet que la relation *sorte-de* appartient toujours implicitement à \mathcal{A} (cf. paragraphe 3). On notera que la classe $C11$ n'est pas décrite par la relation *marié*. Ceci s'explique par le fait que $p7$ et $p3$ qui sont des instances de $C11$ ne possèdent aucune valeur pour *marié*.

À partir d'un treillis de Galois, il est possible d'extraire un ensemble de règles d'implication [Duquenne, 1996; Godin et Missaoui, 1994]. Un ensemble minimal de règles peut être obtenu de la façon suivante : la conjonction des propriétés propres d'une classe C de $\mathcal{H}_{\mathcal{D},\mathcal{A}}$ implique la

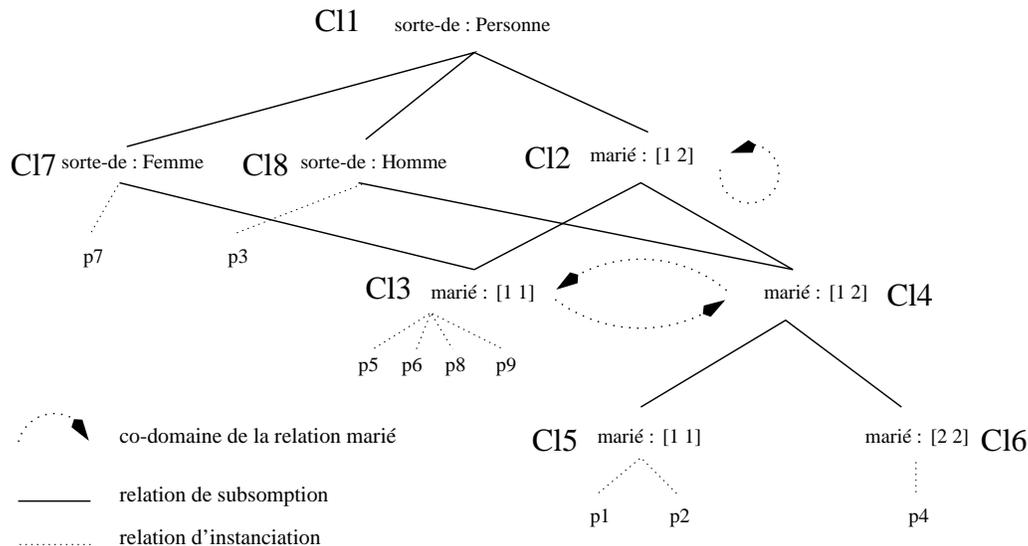


FIG. 2 – Point de vue $\mathcal{H}_{\mathcal{D},\mathcal{A}}$ où \mathcal{D} est l'ensemble des instances de *Personne* et $\mathcal{A} = \{\text{marié}\}$.

conjonction des propriétés héritées de \mathcal{C} [Godin et Missaoui, 1994; Simon et Napoli, 1998]. Une propriété de la classe \mathcal{C}_1 qui est une relation r de cardinalité $[n_1 \ n_2]$ et de co-domaine la classe \mathcal{C}_2 s'interprète comme suit :

toutes les instances de \mathcal{C}_1 sont en relation par r avec un nombre variant entre n_1 et n_2 d'instances qui possèdent les propriétés de \mathcal{C}_2 .

La classe \mathcal{C}_{14} possède une propriété propre qui est la relation *marié* de co-domaine la classe \mathcal{C}_{13} et de cardinalité $[1 \ 2]$. Elle hérite une propriété qui est la relation *sorte-de* de co-domaine la classe *Homme*. La règle d'implication générée à partir de \mathcal{C}_{14} est donc :

être marié avec 1 à 2 femmes mariées \rightarrow être un homme

De façon similaire, on extrait respectivement des classes \mathcal{C}_{13} , \mathcal{C}_{12} , \mathcal{C}_{16} et \mathcal{C}_{15} les règles :

être marié avec 1 homme marié \rightarrow être une femme

être marié entre 1 et 2 fois avec une personne mariée \rightarrow être une personne

être marié 2 fois avec une femme \rightarrow être un homme

être marié 1 fois avec une femme \rightarrow être un homme

La relation *marié* a donc permis de mettre en évidence qu'une personne mariée avec une à deux femmes est un homme et qu'une personne mariée avec un homme est une femme, ce qu'on ne savait pas a priori sur les données. Ces règles n'auraient pas pu être extraites à partir de données représentées par des propriétés booléennes. En effet, les données ne posséderaient alors que les trois propriétés : être marié, être un homme et être une femme. La règle précisant qu'une personne mariée à un homme est une femme n'aurait pu être retrouvée qu'en introduisant la propriété : être marié avec un homme, propriété que nous avons supposé ne pas connaître *a priori*.

La construction de treillis de Galois dans le cadre de données représentées par des graphes conceptuels⁴ permet aussi de manipuler des relations [Mineau et Godin, 1995; Bournaud et Ganaschia, 1996]. Cependant, ces travaux ne prennent en compte que des relations mono-valuées alors que nous traitons des relations multi-valuées. De plus, dans la mesure où les relations sont préalablement décomposées en propriétés booléennes, il n'est pas possible d'en déduire les relations correspondantes entre les classes du treillis.

4. le formalisme des graphes conceptuels est présenté dans [Sowa, 1984]

Le point de vue $\mathcal{H}_{\mathcal{D},\mathcal{A}}$ met de plus en évidence que les personnes ne sont pas toutes forcément mariées (on ne peut pas extraire la règle : personne \rightarrow marié). Les personnes peuvent cependant être des hommes ou des femmes ou des personnes mariées qui sont elles même des hommes ou des femmes. Cette organisation des classes est en cohérence avec les individus et représente une connaissance supplémentaire sur le domaine d'étude. Connaissance qui peut être exploitée afin de proposer une réorganisation de la hiérarchie \mathcal{H} pour faire « correspondre » la représentation des classes à la réalité extensionnelle. Par exemple, les classes C12 (renommée *Personne-mariée*), C13 (renommée *Femme-mariée*) et C14 (renommée *Homme-marié*) peuvent ainsi être introduite dans \mathcal{H} . De plus, le relation *marié* peut ne plus être définie au niveau de l'intension de *Personne* mais de *Personne-mariée*.

5 conclusion

Dans cet article, nous avons vu comment les données et les relations qui les lient pouvaient être représentées dans un système de RCO et comment il était possible, à partir de ces relations, d'une part de mettre correspondance les classes des points de vue construits et d'autre part d'extraire des règles d'implication. Les classes et les règles ainsi obtenues représentent des connaissances sur le domaine qui n'auraient pu être mises en évidence avec une représentation booléenne ou par des graphes conceptuels des données.

Il faut cependant s'interroger sur l'intérêt de « réifier » les relations qui seraient alors définies par un ensemble de propriétés et organisées en une hiérarchie (au même titre que les *rôles* des logiques de descriptions [Napoli, 1997]). Ainsi, un point de vue nécessiterait la construction en « parallèle » d'un point de vue sur les relations qui mettrait en correspondance les classes du point de vue sur les données.

Références

- [Barbut et Monjardet, 1970] M. Barbut et B. Monjardet. *Ordre et classification – Algèbre et combinatoire (2 tomes)*. Hachette, Paris, 1970.
- [Bournaud et Ganascia, 1996] I. Bournaud et J.G. Ganascia. Construction de hiérarchies conceptuelles pour l'organisation de connaissances. Dans *Actes du Colloque Langages et Modèles à Objets (LMO'96)*, Leysin, Suisse, rédacteur Y. Dennebouy, pages 120–133. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1996.
- [Carpineto et Romano, 1996] C. Carpineto et G. Romano. A Lattice Conceptual Clustering System and Its Application to Browsing Retrieval. *Machine Learning*, 24(2):95–122, 1996.
- [Chouvet et al., 1996] M.-P. Chouvet, F. Le Ber, J. Lieber, L. Mangelinck, A. Napoli et A. Simon. Analyse des besoins en représentation et raisonnement dans une représentation à objets — L'exemple de Y3. Dans *Actes du colloque "Langages et Modèles à Objets" (LMO'96)*, Leysin, Suisse, rédacteur Y. Dennebouy, pages 150–169, 1996.
- [Ducournau et al., 1998] rédacteurs R. Ducournau, J. Euzenat, G. Masini et A. Napoli. *Langages et modèles à objets — État des recherches et perspectives*. Collection Didactique D-019. INRIA, Le Chesnay, 1998.
- [Duquenne, 1996] V. Duquenne. On lattices approximations: Syntactic aspects. *Social Networks*, 18:189–199, 1996.
- [Ganter, 1984] B. Ganter. Two basic algorithms in Concept Analysis. Rapport technique, preprint 831, Technische Hochschule Darmstadt, 1984.

- [Godin *et al.*, 1991] R. Godin, R. Missaoui et H. Alaoui. Learning Algorithms using a Galois Lattice Structure. Dans *Third International Conference on Tools for Artificial Intelligence*, pages 22–29, 1991.
- [Godin et Missaoui, 1994] R. Godin et R. Missaoui. An incremental concept formation approach for learning from databases. *Theoretical Computer Science*, 133(2):387–419, 1994.
- [Guénoche, 1990] A. Guénoche. Construction du treillis de galois d’une relation binaire. *Math. Inf. Sci. Hum.*, (109):41–53, 1990.
- [Luxenburger, 1991] M. Luxenburger. Implications partielles dans un contexte. *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, (113):35–55, 1991.
- [Mineau et Godin, 1995] G.W. Mineau et R. Godin. Automatic Structuring of Knowledge Bases by Conceptual Clustering. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 7(5):824–829, 1995.
- [Napoli, 1997] A. Napoli. Une introduction aux logiques de descriptions. Rapport Technique 3314, INRIA, Décembre 1997.
- [Simon et Napoli, 1998] A. Simon et A. Napoli. Treillis de Galois et représentation par objets pour la fouille de données. Dans *Ingénierie des connaissances IC’98*, rédacteur Y. Toussaint, pages 71–80. Unité de recherche INRIA Lorraine, mai 1998.
- [Sowa, 1984] J. Sowa. *Conceptual Structures: Information Processing in Mind and Machine*. Addison Wesley, Massachusetts, 1984.
- [Wille, 1982] R. Wille. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts’. Dans *Ordered Sets*, pages 445–470. O. Rival, Boston: Reidel, 1982.