



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

***Un schéma de type Volumes-Finis-Roe (VFRoe) pour
les équations de Saint-Venant 1D :
Simulation numérique des bancs-couvrants-découvrants***

Abdou W. BELLO — Aurélien GOUDJO — Côme GOUDJO — Hervé GUILLARD —
Jean-Antoine DESIDERI

N° ????

Septembre 2006

Thème NUM



*Rapport
de recherche*



Un schéma de type Volumes-Finis-Roe (VFRoe) pour les équations de Saint-Venant 1D : Simulation numérique des bancs-couvrants-découvrants

Abdou W. BELLO*, Aurélien GOUDJO* , Côme GOUDJO* , Hervé GUILLARD† , Jean-Antoine DESIDERI†

Thème NUM — Systèmes numériques
Projet Opale

Rapport de recherche n° ???? — Septembre 2006 — 24 pages

Résumé : Nous présentons dans ce rapport la résolution, par une méthode volumes finis, du système des équations de Saint-Venant avec termes sources topographiques sur des domaines 1D. Avec une idée originale de Leroux [1], le système des équations est complété par une équation triviale sur la bathymétrie. Par un changement de variable, on élabore une formulation célérité-vitesse des équations que l'on linéarise. Nous construisons ensuite un solveur de Riemann approché qui préserve la positivité de la célérité et qui assure la prise en compte des *bancs-couvrants-découvrants*. Enfin, des applications numériques sur des cas tests sont présentées.

Mots-clés : Equations de Saint-Venant, volumes finis, solveur de Riemann, schéma positif, bancs couvrants-découvrants

* Université d'Abomey-Calavi, 01 BP 526 Cotonou, Bénin

† INRIA, 2004 Route des Lucioles, BP 93, F-06902 Sophia-Antipolis cedex, France

A VFRoe scheme for 1D shallow water flows : wetting and drying simulation

Abstract: A finite-volume method for the one-dimensional shallow-water equations including topographic source terms is presented. Exploiting an original idea by Leroux [1], the system of partial-differential equations is completed by a trivial equation for the bathymetry. By applying a change of variable, the system is given a celerity-speed formulation, and linearized. As a result, an approximate Riemann solver preserving the positivity of the celerity can be constructed, permitting *wetting and drying flow* simulations to be performed. Finally, the simulation of numerical test cases is presented.

Key-words: Shallow water equations, finite volumes, Riemann solver, positivity preserving scheme, wetting and drying flows

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 4 |
| 2 | Le modèle mathématique | 5 |
| 3 | Intégration numérique | 6 |
| 3.1 | Le maillage | 6 |
| 3.2 | Un schéma de type Godunov | 6 |
| 4 | Résolution du problème de Riemann | 8 |
| 4.1 | Linéarisation du problème de Riemann | 9 |
| 4.2 | Solveur de Riemann | 10 |
| 4.3 | Solutions du problème de Riemann | 12 |
| 4.4 | Correction entropique | 13 |
| 4.4.1 | Célérité de l'état intermédiaire | 13 |
| 4.4.2 | Ecoulement sur fond plat | 14 |
| 4.4.3 | Ecoulement avec topographie | 14 |
| 4.5 | Traitement des bancs-couvrants-découvrants | 15 |
| 5 | Résultats numériques | 16 |
| 5.1 | Ecoulements noyés | 16 |
| 5.1.1 | Test1 : Ecoulement sur fond plat | 17 |
| 5.1.2 | Test2 : Ecoulement avec topographie | 18 |
| 5.1.3 | Test3 : Ecoulement avec topographie | 19 |
| 5.2 | Bancs-couvrants-découvrants | 20 |
| 5.2.1 | Test4 : Bancs-couvrants-découvrants | 21 |
| 5.2.2 | Test5 : Bancs-couvrants-découvrants | 22 |
| 6 | Conclusion | 23 |

1 Introduction

La ville de Cotonou est dans une cuvette ceinturée de plans d'eau et traversée du nord au sud par un chenal (la Lagune de Cotonou) de 4000 m de long sur 350 m de large, reliant le lac Nokoué à l'océan Atlantique (Fig.1).

Les quelques ouvrages d'assainissement dont dispose la ville sont généralement en bordure des routes et, pour la plupart, connectés au chenal. Malheureusement, ce système de drainage au lieu d'aider à l'évacuation des eaux pluviales, sert plutôt de vecteur à l'invasion de la ville par les eaux de crue du chenal.

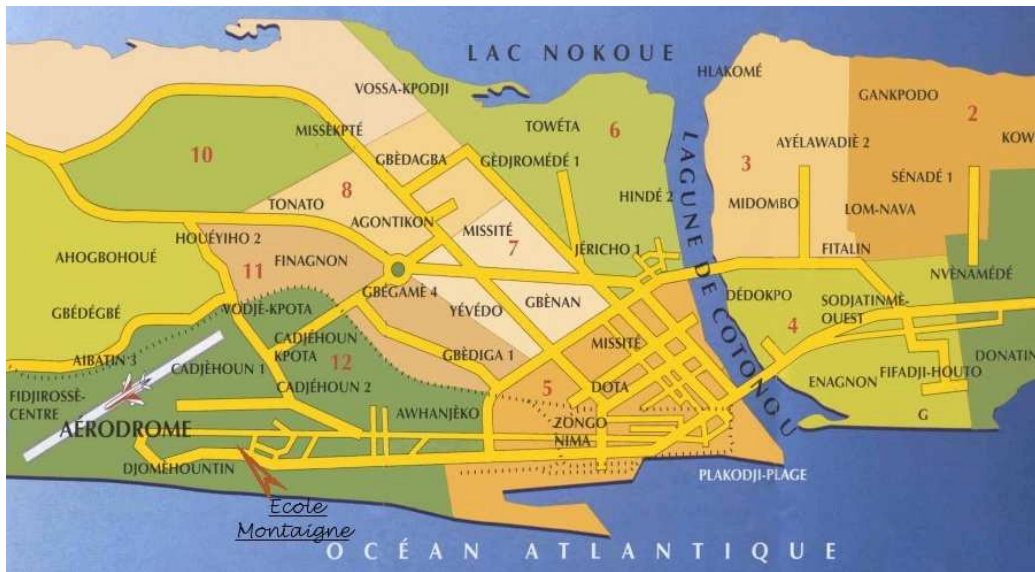


FIG. 1 – Chenal de Cotonou

Les écoulements d'un tel réseau d'adduction d'eau sont des écoulements à surface libre, en eaux peu profondes (shallow water) et sont alors régis par un système bidimensionnel des équations de Saint-Venant. Ces équations sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible en faisant l'hypothèse de pression hydrostatique, de vitesses uniformes suivant la verticale, d'un fond et d'une surface libre imperméables. On les emploie dans des domaines aussi divers que la protection de l'environnement, le calcul des marées et des ondes de tempête, la sédimentologie, la simulation des ondes de submersion, l'étude des crues, etc.

Dans ce rapport, comme première étape dans la réalisation d'une simulation numérique réaliste, nous proposons une étude du système unidimensionnel des équations de Saint-Venant avec topographie. Suivant l'idée développée dans [2, 3, 4], nous utilisons une méthode de type Volumes-Finis-Roe (VFRoe) se basant sur une formulation célérité-vitesse des

équations. Une telle formulation peut conduire à une célérité négative de l'état intermédiaire du problème de Riemann y découlant. Notre contribution est la construction d'un solveur de Riemann approché avec un choix des vitesses d'ondes garantissant la préservation de la positivité de la célérité de l'état intermédiaire.

Ensuite, grâce aux résultats de [5, 6] nous adoptons le solveur de Riemann approché afin de prendre en compte le cas des bancs-couvrants-découvrants (zones noyées/non-noyées). Le traitement de ce type de cas est essentiel en vue de la simulation numérique des problèmes d'intrusion d'eau dans la ville de Cotonou.

Enfin, pour tester la robustesse de notre schéma, dans un premier temps nous reprenons des cas-tests effectués dans [1] puis dans un second temps deux derniers cas-tests sont présentés pour tester le débordement de l'eau d'un canal (bancs-couvrants-découvrants).

2 Le modèle mathématique

En absence des forces de frottement, le système 1D des équations de Saint-Venant est donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) & = -gh \frac{\partial a}{\partial x} \end{cases}, (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad (1)$$

$u(x, t)$ est la vitesse de l'eau, $h(x, t)$ la hauteur d'eau, $a(x)$ la hauteur de la topographie du sol, $h + a$ l'élevation de la surface libre de l'eau (a et $h + a$ sont prises par rapport à un plan de référence), g l'accélération gravitationnelle.

La bathymétrie a étant indépendante du temps, on complète le système (1) par l'équation $\frac{\partial a}{\partial t} = 0$ [1] et on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right) + gh \frac{\partial a}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial a}{\partial t} & = 0 \end{cases}, (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

où $q = hu$ représente le débit d'eau.

3 Intégration numérique

Nous présentons dans cette section l'intégration des équations par utilisation des techniques de volumes finis et de solveurs de Riemann.

3.1 Le maillage

On considère un écoulement unidimensionnel sur une longueur L .

L'intervalle $[0, L]$ est subdivisé en N segments de même amplitude $\Delta x = \frac{L}{N}$. On obtient alors une suite de points $(x_j)_{j \in J = \{0, \dots, N\}}$ définis par : $x_j = j\Delta x$. On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}), j \in \{0, 1, \dots, N-1\} \\ C_j =]x_{j-\frac{1}{2}}; x_{j+\frac{1}{2}}[, j \in \{1, \dots, N-1\} \\ C_0 =]x_0; x_{\frac{1}{2}}[\\ C_N =]x_{N-\frac{1}{2}}; x_N[\end{array} \right. \quad (3)$$

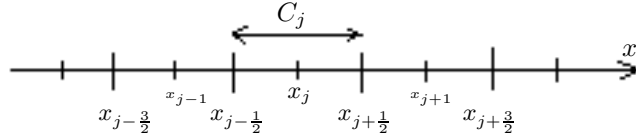


FIG. 2 – Discrétisation spatiale

Pour la discrétisation temporelle, on se donne un pas de temps Δt et une suite d'instants $t^n = n\Delta t$, $n \geq 0$.

3.2 Un schéma de type Godunov

La topographie a du problème (2) est approchée par des valeurs discrètes a_j , $j \in J$:

$$a_j \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} a(x) dx. \quad (4)$$

En posant :

$$a_{\Delta}(x) = \sum a_j \chi_j(x), \quad (5)$$

avec $\chi_j(x) = 1$ si $x \in C_j$ et $\chi_j(x) = 0$ sinon, le système (2) est approché par :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right) + gh \frac{\partial a_{\Delta}}{\partial x} & = 0, (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial a_{\Delta}}{\partial t} & = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Posons $w = \begin{pmatrix} h \\ q \\ a_{\Delta} \end{pmatrix}$. La solution w du problème (6) est approchée par des valeurs discrètes $w_j^n, j \in J, n \in \mathbb{N}$:

$$w_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} w(x, t^n) dx. \quad (7)$$

Puisque, sur chaque cellule C_j , $\frac{\partial a_{\Delta}}{\partial x} = 0$, l'intégration de (6) sur $C_j \times [t^n, t^{n+1}]$ nous donne :

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_j} \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F(w)}{\partial x} \right\} dx dt &= 0 \\ \int_{C_j} \{w(x, t^{n+1}) - w(x, t^n)\} dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \{F(w(x_{j+\frac{1}{2}}^-, t)) - F(w(x_{j-\frac{1}{2}}^+, t))\} dt &= 0 \end{aligned}$$

où $F(w) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \\ 0 \end{pmatrix}$; x^- et x^+ désignant respectivement les limites à gauche et à droite de x .

La première intégrale de cette dernière relation est approchée en utilisant (7). Il restera alors l'approximation numérique de la deuxième intégrale.

La méthode des volumes finis repose sur le fait qu'à tout instant, la solution w est constante par cellule. Ainsi, partant de la solution $w(x, t^n)$ à l'instant t^n , le calcul de $w(x_{j+\frac{1}{2}}^-, t)$

et $w(x_{j-\frac{1}{2}}^+, t)$ pour $t \in [t^n, t^{n+1}]$ est donné par la résolution du problème de Riemann suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right) + gh \frac{\partial a_\Delta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial a_\Delta}{\partial t} = 0 \\ w(x, t^n) = \begin{cases} w_L, & \text{si } x < x_{j+\frac{1}{2}} \\ w_R, & \text{si } x > x_{j+\frac{1}{2}} \end{cases} \end{array} \right. , \quad (8)$$

où $w_L = w_j^n$ et $w_R = w_{j+1}^n$.

Désignons par $w_{j+1/2}^n(x/t; w_L, w_R)$ la solution autosimilaire de (8).

On définit deux flux

$$F_{j+\frac{1}{2}}^{n,-} = F(w_{j+1/2}^n(0^-; w_L, w_R)) \text{ et } F_{j+\frac{1}{2}}^{n,+} = F(w_{j+1/2}^n(0^+; w_L, w_R))$$

correspondant à chaque côté de l'interface de $x_{j+\frac{1}{2}}$. On obtient alors le schéma numérique suivant :

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{j+\frac{1}{2}}^{n,-} - F_{j+\frac{1}{2}}^{n,+} \right) \quad (9)$$

4 Résolution du problème de Riemann

Il vient de ce qui précède que l'implémentation numérique des équations de Saint Venant réside en la résolution, à chaque interface, du problème de Riemann (8); puisque c'est cette résolution qui fournira les flux numériques à utiliser.

En posant $c = \sqrt{gh}$, à chaque interface $x = 0$ et en dehors des zones sèches, (8) est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(2c)}{\partial t} + u \frac{\partial(2c)}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial(2c)}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial a_{\Delta}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial a_{\Delta}}{\partial t} = 0 \\ w(x, 0) = \begin{cases} w_L, & \text{si } x < 0 \\ w_R, & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (10)$$

En posant $Y(w) = \begin{pmatrix} 2c \\ u \\ a_{\Delta} \end{pmatrix}$, on obtient finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial t} + A(Y) \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \\ Y(x, 0) = \begin{cases} Y_L, & \text{si } x < 0 \\ Y_R, & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\text{avec } A(Y) = \begin{pmatrix} u & c & 0 \\ c & u & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1 Linéarisation du problème de Riemann

A chaque interface, on résout le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial t} + A(\hat{Y}) \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \\ Y(x, 0) = Y_0(x) = \begin{cases} Y_L, & \text{si } x < 0 \\ Y_R, & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (12)$$

où $\hat{Y} = \hat{Y}(Y_L, Y_R)$ est un état moyen dépendant uniquement des états Y_L et Y_R ; \hat{Y} doit en plus vérifier la condition de consistance $\hat{Y}(Y^*, Y^*) = Y^*$. Un choix possible est donc :

$$\hat{Y} = \frac{Y_R + Y_L}{2} \quad (13)$$

4.2 Solveur de Riemann

$A(\hat{Y})$ admet trois valeurs propres qui sont :

$$\hat{\lambda}_0 = 0, \hat{\lambda}_1 = \hat{u} - \hat{c}, \hat{\lambda}_2 = \hat{u} + \hat{c}, \quad (14)$$

Sous l'hypothèse que $|\hat{u}| \neq \hat{c}$ et en dehors des zones sèches, les trois valeurs propres sont deux à deux distinctes et $A(\hat{Y})$ est diagonalisable.

A chaque valeur propre $\hat{\lambda}_k$, nous associons un vecteur propre à droite $r_k \in \mathbb{R}^3$:

$$A(\hat{Y})r_k = \hat{\lambda}_k r_k \quad (15)$$

et un vecteur propre à gauche ${}^t l_k$:

$${}^t l_k A(\hat{Y}) = \hat{\lambda}_k {}^t l_k \quad (16)$$

Proposition 4.1

$${}^t l_j r_k = 0, \forall j \neq k.$$

Preuve

$$\begin{aligned} {}^t l_j A = \hat{\lambda}_j {}^t l_j &\implies ({}^t l_j A) r_k = (\hat{\lambda}_j {}^t l_j) r_k \\ &\implies {}^t l_j (A r_k) = \hat{\lambda}_j {}^t l_j r_k \\ &\implies {}^t l_j (\hat{\lambda}_k r_k) = \hat{\lambda}_j {}^t l_j r_k \\ &\implies (\hat{\lambda}_k - \hat{\lambda}_j) {}^t l_j r_k = 0 \\ &\implies {}^t l_j r_k = 0, \forall j \neq k. \end{aligned}$$

□

Remarque 4.1

- ${}^t l_j r_k = l_j \cdot r_k$.
- Si r est un vecteur propre de la valeur propre $\hat{\lambda}$, alors pour tout $\alpha \neq 0$, αr est également un vecteur propre de $\hat{\lambda}$. On peut donc choisir les bases (r_0, r_1, r_2) et (l_0, l_1, l_2) telles que $l_j \cdot r_j = 1, \forall j = 0, 1, 2$.

On peut prendre :

$$\bullet r_0 = \begin{pmatrix} \frac{g(\hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1)}{2} \\ -\frac{g(\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_1)}{2} \\ \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_1 \end{pmatrix}, r_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

et

$$\bullet l_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_1} \end{pmatrix}, l_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{g}{2\hat{\lambda}_1} \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{g}{2\hat{\lambda}_2} \end{pmatrix}.$$

(12) étant strictement hyperbolique, alors (r_0, r_1, r_2) est une base de \mathbb{R}^3 .

En désignant par Y^* la solution de (12), on peut alors écrire :

$$Y^*(x, t) = \alpha_0(x, t)r_0 + \alpha_1(x, t)r_1 + \alpha_2(x, t)r_2 \text{ et}$$

$$Y_0^*(x) = \alpha_0^0(x)r_0 + \alpha_1^0(x)r_1 + \alpha_2^0(x)r_2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t} + A(\hat{Y}) \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^2 \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} r_i + (A(\hat{Y}) r_i) \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^2 \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} r_i + (\hat{\lambda}_i r_i) \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^2 \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \hat{\lambda}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \right\} r_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \hat{\lambda}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} = 0, \forall i = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.1, on a :

$$\alpha_i^0(x) = \frac{1}{r_i \cdot l_i} Y_0^*(x) \cdot l_i = Y_0^*(x) \cdot l_i = \begin{cases} \alpha_i^L = Y_L \cdot l_i, & \text{si } x < 0 \\ \alpha_i^R = Y_R \cdot l_i, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Mais pour chaque i , l'équation d'advection

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \hat{\lambda}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} = 0 \\ \alpha_i^0(x) = \begin{cases} \alpha_i^L, & \text{si } x < 0 \\ \alpha_i^R, & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (17)$$

admet pour unique solution : $\alpha_i(x, t) = \begin{cases} \alpha_i^L, & \text{si } \frac{x}{t} < \hat{\lambda}_i \\ \alpha_i^R, & \text{si } \frac{x}{t} > \hat{\lambda}_i \end{cases}$

Ainsi la solution du problème de Riemann (12) est :

$$\begin{aligned} Y^*(x, t) &= Y_L + \sum_{x/t > \hat{\lambda}_k} (\alpha_k^R - \alpha_k^L) r_k \\ &= Y_R - \sum_{x/t < \hat{\lambda}_k} (\alpha_k^R - \alpha_k^L) r_k \end{aligned}$$

4.3 Solutions du problème de Riemann

Nous présentons dans ce paragraphe les trois cas possibles de solution du problème de Riemann (12) dans le plan (x, t) . On désigne $Y^*(0^-, t)$ et $Y^*(0^+, t)$ par Y_l^* et Y_r^* respectivement.

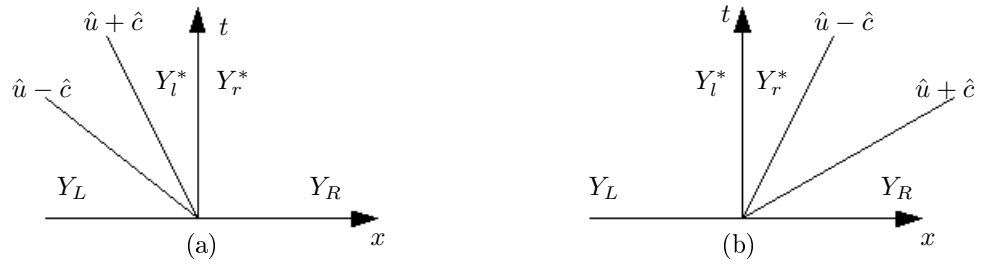


FIG. 3 – **Écoulement torrentiel**

$$(a) : \begin{cases} Y_l^* = Y_r^* - (\alpha_0^R - \alpha_0^L) r_0 \\ Y_r^* = Y_R \end{cases} ; (b) : \begin{cases} Y_l^* = Y_L \\ Y_r^* = Y_l^* + (\alpha_0^R - \alpha_0^L) r_0 \end{cases}$$

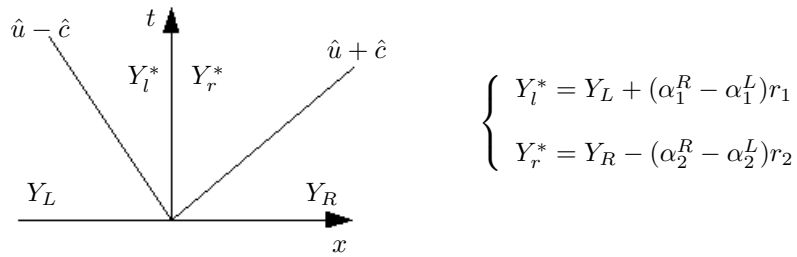


FIG. 4 – **Écoulement fluvial**

4.4 Correction entropique

Le solveur de Roe peut conduire à une célérité négative faisant ainsi exploser l'implémentation numérique.

Par exemple, prenons un écoulement sur fond plat ($a(x) \equiv 0$) avec $u_L = -\frac{3}{2}\hat{c}$, $u_R = \frac{5}{2}\hat{c}$.

On a alors ((13) et (14)) : $\hat{\lambda}_1 = -\frac{1}{2}\hat{c} < 0$; $\hat{\lambda}_2 = \frac{3}{2}\hat{c} > 0$.

L'écoulement local est donc fluvial. Déterminons la composante $2c_l^*$ de Y_l^* (voir FIG.4) :

$$\begin{aligned} 2c_l^* &= 2c_L + (\alpha_1^R - \alpha_1^L)r_1^1 \quad (\text{avec } r_1^1, \text{ première composante de } r_1) \\ &= 2c_L - \left(-\frac{1}{2}(2c_R - 2c_L) + \frac{1}{2}(u_R - u_L) \right) \\ &= 2c_L - \left(-\frac{1}{2}(2c_R - 2c_L) + \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2c_R + 2c_L}{2} \right) \\ &= -(c_R + c_L) < 0 \end{aligned}$$

4.4.1 Célérité de l'état intermédiaire

En reprenant les trois configurations de la section-4.3, on obtient :

Cas (a) :

$$\begin{cases} 2c_l^* = 2c_R - \frac{g(a_R - a_L)(\hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1)}{2\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_1} \\ 2c_r^* = 2c_R \end{cases} \quad (18)$$

Cas (b) :

$$\begin{cases} 2c_l^* = 2c_L \\ 2c_r^* = 2c_L + \frac{g(a_R - a_L)(\hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1)}{2\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_1} \end{cases} \quad (19)$$

Cas (c) :

$$\begin{cases} 2c_l^* = \frac{1}{2} \left(2(c_R + c_L) - (u_R - u_L) - \frac{g(a_R - a_L)}{\hat{\lambda}_1} \right) \\ 2c_r^* = \frac{1}{2} \left(2(c_R + c_L) - (u_R - u_L) - \frac{g(a_R - a_L)}{\hat{\lambda}_2} \right) \end{cases} \quad (20)$$

4.4.2 Ecoulement sur fond plat

Proposition 4.2 [4] *Si*

$$u_R - u_L < 2(c_R + c_L) \quad (21)$$

alors l'état intermédiaire Y^ admet une célérité positive.*

Preuve

La preuve est immédiate; en effet, ici $a_R - a_L = 0$. Par suite, la célérité de l'état intermédiaire Y^* est positive d'après 18,19 et 20. □

Si la condition (21) est violée, on pose [4] : $c_r^* = c_l^* = 0$.

4.4.3 Ecoulement avec topographie

On choisit alors d'agir sur les vitesses d'ondes $\hat{\lambda}$ de l'état intermédiaire Y^* ; on notera λ les nouvelles vitesses de Y^* qui seront utilisées dans l'implémentation numérique.

Proposition 4.3 *On suppose $u_R - u_L < 2(c_R + c_L)$; si $\hat{\lambda}_1 < 0 < \hat{\lambda}_2$, le choix*

$$\begin{cases} \lambda_1 = \hat{\lambda}_1 \\ \lambda_2 = \max\left(\hat{\lambda}_2, \frac{g(a_R - a_L)}{2(c_R + c_L) - (u_R - u_L)}\right) \end{cases}, \text{ si } a_R > a_L$$

et

$$\begin{cases} \lambda_1 = \min\left(\hat{\lambda}_1, \frac{g(a_R - a_L)}{2(c_R + c_L) - (u_R - u_L)}\right) \\ \lambda_2 = \hat{\lambda}_2 \end{cases}, \text{ si } a_R < a_L$$

permet l'obtention d'un état intermédiaire Y^ à célérité positive.*

Preuve

La preuve est immédiate d'après 20. □

Si la condition (21) est violée, on pose :

$$\begin{cases} c_l^* = -\frac{g(a_R - a_L)}{4\hat{\lambda}_1} \\ c_r^* = 0 \end{cases}, \text{ si } a_R > a_L \text{ et } \begin{cases} c_l^* = 0 \\ c_r^* = -\frac{g(a_R - a_L)}{4\hat{\lambda}_2} \end{cases}, \text{ si } a_R < a_L$$

Proposition 4.4 Si $\hat{\lambda}_2 < 0$, le choix

$$\begin{cases} \lambda_1 = \hat{\lambda}_1 \\ \lambda_2 = \min \left(\hat{\lambda}_2, -\frac{g(a_R - a_L)\hat{\lambda}_1}{4c_R\hat{\lambda}_1 - g(a_R - a_L)} \right) \end{cases}, \text{ si } a_R > a_L \text{ et } \begin{cases} \lambda_1 = \hat{\lambda}_1 \\ \lambda_2 = \hat{\lambda}_2 \end{cases}, \text{ si } a_R < a_L$$

permet l'obtention d'un état intermédiaire Y^* à célérité positive.

Preuve

La preuve est immédiate d'après 18. □

Proposition 4.5 Si $\hat{\lambda}_1 > 0$, le choix

$$\begin{cases} \lambda_1 = \hat{\lambda}_1 \\ \lambda_2 = \hat{\lambda}_2 \end{cases}, \text{ si } a_R > a_L \text{ et } \begin{cases} \lambda_1 = \max \left(\hat{\lambda}_1, -\frac{g(a_R - a_L)\hat{\lambda}_2}{4c_L\hat{\lambda}_2 - g(a_R - a_L)} \right) \\ \lambda_2 = \hat{\lambda}_2 \end{cases}, \text{ si } a_R < a_L$$

permet l'obtention d'un état intermédiaire Y^* à célérité positive.

Preuve

La preuve est immédiate d'après 19. □

4.5 Traitement des bancs-couvrants-découvrants

On se situe ici dans le cas où la hauteur de l'état w_R ou celle de w_L est nulle. Pour la détermination de l'état intermédiaire Y^* , nous utilisons les résultats de [5] basés sur une nouvelle estimation des vitesses d'onde λ_1 et λ_2 : Une onde de détente est générée du côté où la hauteur d'eau est nulle [5, 6].

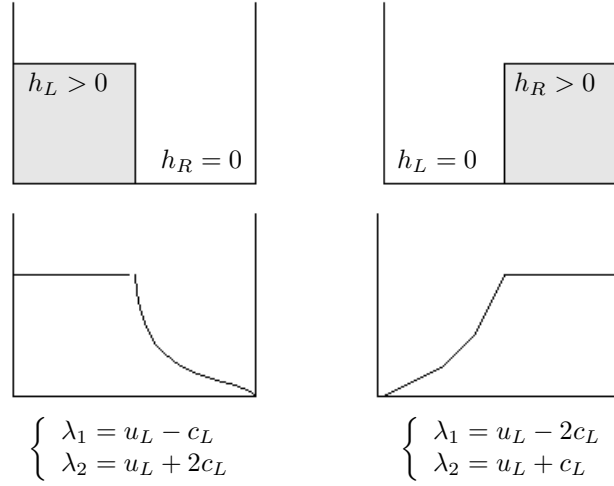


FIG. 5 – bancs-couvrants-découvrants

5 Résultats numériques

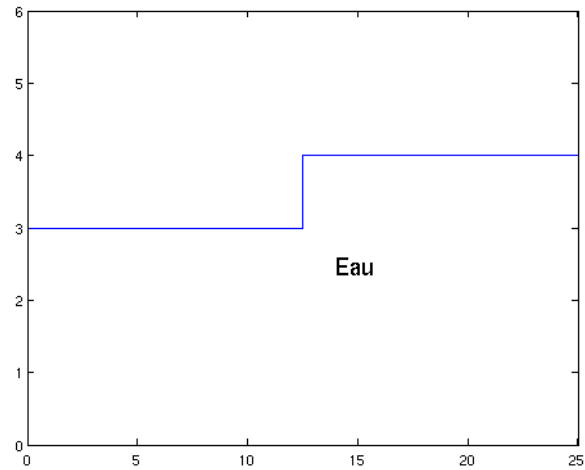
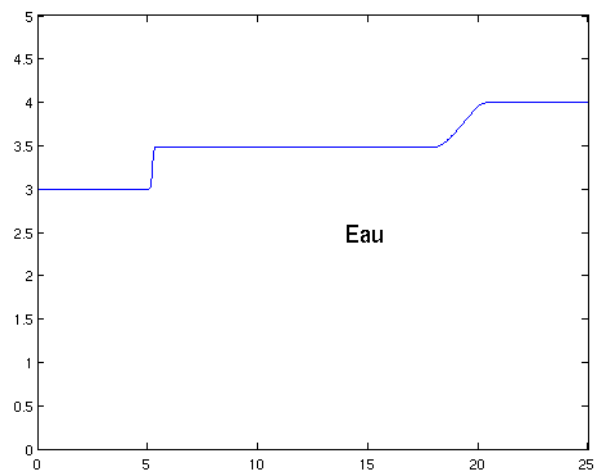
5.1 Ecoulements noyés

La longueur du domaine de calcul est $L = 25m$, le nombre de points du maillage $N = 1000$; la durée totale d'observation est $T = 1.2s$; les conditions initiales sont :

| | $0 \leq x \leq 12.5$ | $12.5 \leq x \leq 25$ |
|---------------|----------------------|-----------------------|
| $h(x, t = 0)$ | 3 | 4 |
| $u(x, t = 0)$ | 0 | 0 |

5.1.1 Test1 : Ecoulement sur fond plat

$$a(x) = 0, \forall x \in [0; 25] : CFL = 0.8.$$

FIG. 6 – Test1 ($t=0s$)FIG. 7 – Test1 ($t=1.2s$)

5.1.2 Test2 : Ecoulement avec topographie

$a(x) = 2$ sur $[0: 12.5]$ et $a(x) = 0$ sur $[12.5: 25]$: $CFL = 0.8$.

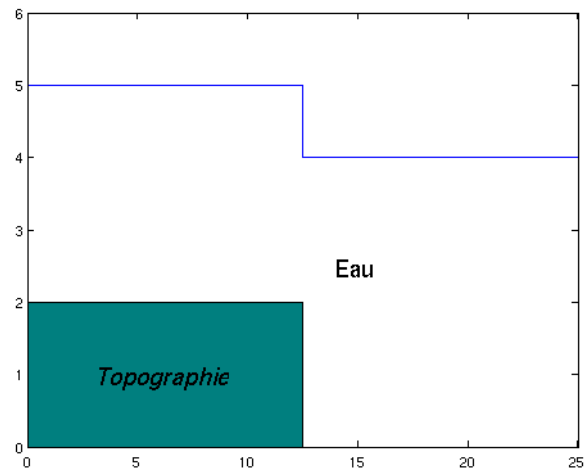


FIG. 8 – Test2 (t=0s)

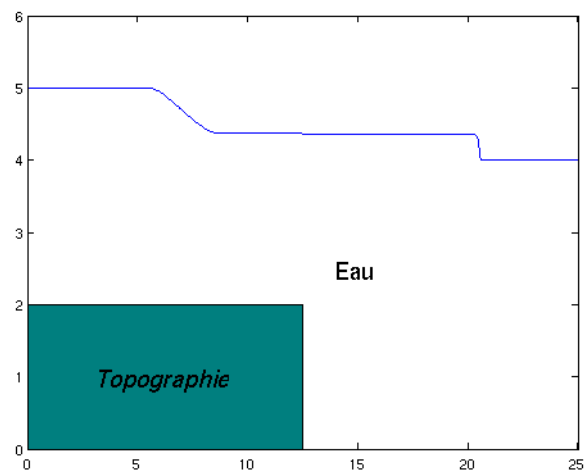
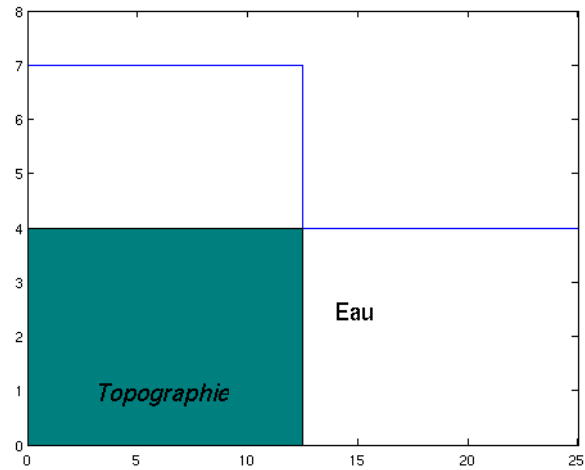
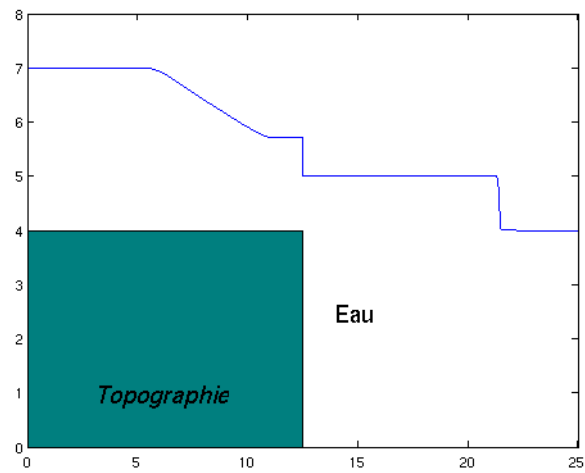


FIG. 9 – Test2 (t=1.2s)

5.1.3 Test3 : Ecoulement avec topographie $a(x) = 4$ sur $[0: 12.5]$ et $a(x) = 0$ sur $[12.5: 25]$: $CFL = 0.6$.FIG. 10 – Test3 ($t=0$ s)FIG. 11 – Test3 ($t=1.2$ s)

5.2 Bancs-couvrants-découvrants

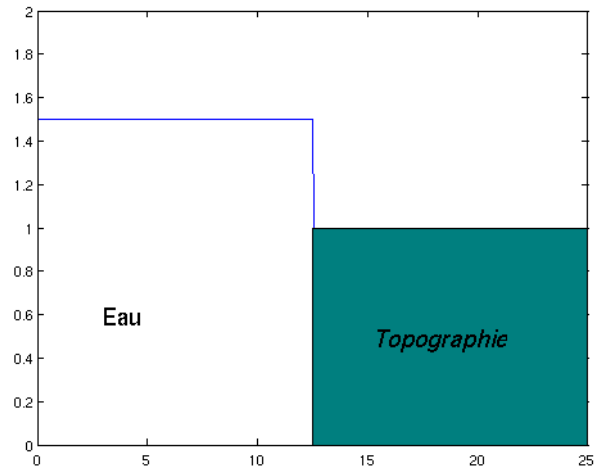
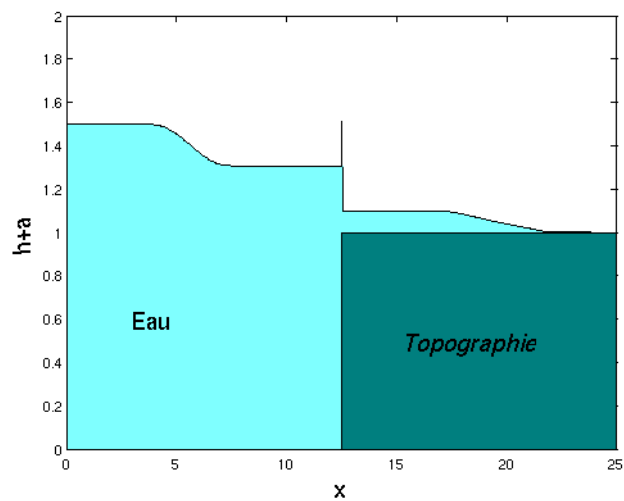
La longueur du domaine de calcul est $L = 25m$, le nombre de points de maillage $N = 500$; la durée totale d'observation est T ; les conditions initiales sont :

Test 4

| | $0 \leq x \leq 12.5$ | $12.5 \leq x \leq 25$ |
|---------------|----------------------|-----------------------|
| $h(x, t = 0)$ | 1.5 | 0 |
| $u(x, t = 0)$ | 0 | 0 |

Test 5

| | $0 \leq x \leq 7.5$ | $7.5 \leq x \leq 10.5$ | $10.5 \leq x \leq 14.5$ | $14.5 \leq x \leq 25$ |
|---------------|---------------------|------------------------|-------------------------|-----------------------|
| $h(x, t = 0)$ | 1 | $0.1 - a(x)$ | 0 | $0.1 - a(x)$ |
| $u(x, t = 0)$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

5.2.1 Test4 : Bancs-couvrants-découvrants $a(x) = 0$ sur $[0: 12.5]$ et $a(x) = 1$ sur $[12.5: 25]$: $T = 2s$: $CFL = 0.4$.FIG. 12 – Test4 ($t=0s$)FIG. 13 – Test4 ($t=2s$)

5.2.2 Test5 : Bancs-couvrants-découvrants

$a(x)$ (voir figure) : $T = 3s$: $CFL = 0.4$.

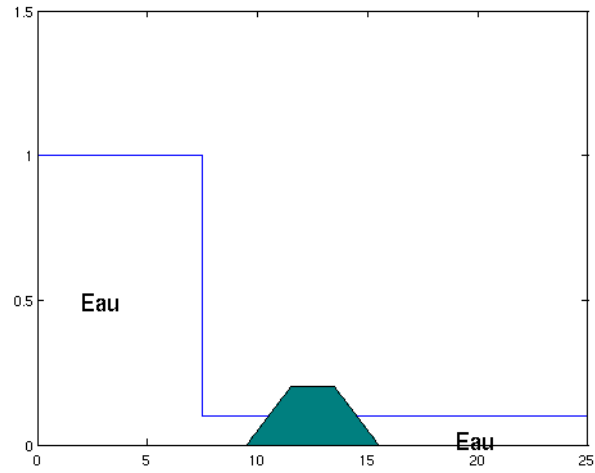


FIG. 14 – Test5 (t=0s)

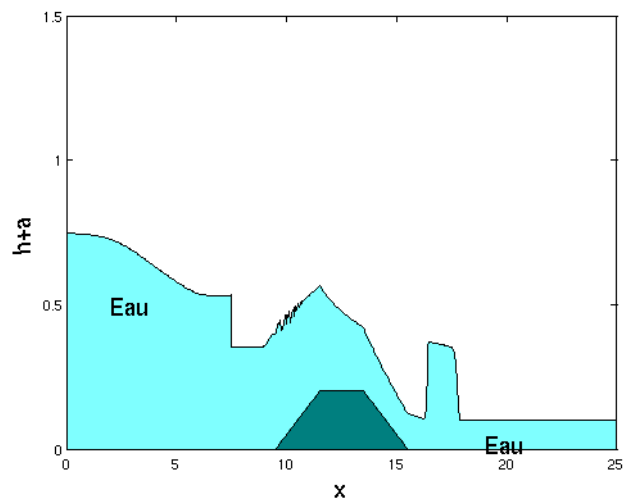


FIG. 15 – Test5 (t=3s)

6 Conclusion

Exploitant les résultats de [2, 3, 4], nous avons présenté une formulation célérité-vitesse des équations de Saint-Venant. La méthode VFRoe conduit à la résolution, par interface du maillage spatial, d'un problème de Riemann. Notre contribution a été, en agissant sur les vitesses d'ondes, la construction d'un solveur de Riemann approché garantissant la préservation de la positivité de la célérité de l'état intermédiaire dans la résolution du problème de Riemann. L'exploitation des résultats de [5, 6] nous a ensuite permis d'adapter le solveur afin de prendre en compte la simulation numérique des bancs-couvrants-découvrants.

Le solveur de Riemann approché présenté dans ce rapport permet d'effectuer des simulations numériques des équations de Saint-Venant, même en présence de hauteurs d'eau nulles (recouvrement, découvrant). La prochaine étape de notre travail consistera à l'extension à des tests bidimensionnels.

Références

- [1] Ashwin CHINNAYYA, Alain-Yves LEROUX, and Nicolas SEGUIN. A well-balanced numerical scheme for the approximation of shallow-water equations with topography : the resonance phenomenon. International Journal on Finite Volume, 1-1 :1–33, 2004.
- [2] Thierry GALLOUET, Jean-Marc HERARD, and Nicolas SEGUIN. Some approximate godunov schemes to compute shallow-water equations with topography. Computer and Fluid, 2001.
- [3] Thierry GALLOUET, Jean-Marc HERARD, and Nicolas SEGUIN. Some recent finite volume schemes to compute euler equations using real gas eos. International Journal For Numerical Methods In Fluids, 39 :1073–1138, 2002.
- [4] Thierry BUFFARD, Thierry GALLOUET, and Jean-Marc HERARD. Un schéma simple pour les équations de saint-venant. <http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/Publi/tg-art981-svt.pdf>.
- [5] David L. GEORGE. Numerical Approximation of the Nonlinear Shallow Water Equations with Topography and Dry Beds : A Godunov-Type Scheme. PhD thesis, University of Washington, 2004.
- [6] Randall J. LEVEQUE. Finite volume methods for hyperbolic problems, pages 203–252. Cambridge University Press, 2002.
- [7] Edwige GODLEWSKI and Pierre-Arnaud RAVIARD. Numerical Approximation of Hyperbolic Systemes of Conservation Laws, pages 1–98. Springer, New-York, 1996.
- [8] Hervé GUILLARD and Rémi ABGRALL. Modélisation numérique des fluides compressibles. Gauthiers-villars, 2001.
- [9] A. BERMUDEZ, A. DERVIEUX, J.-A. DESIDERI, and M.E. VAZQUEZ CENDON. Upwind schemes for the two-dimentional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes. Comput. Methods Appli. Mech. Eng., 1998.
- [10] Randall J. LEVEQUE and David L. GEORGE. Hight-resolution finite volume methods for the shallow water equations with bathymetry and dry states. <http://www.amath.washington.edu/~rjl/pubs/catalina04/catalina.pdf>, February 2006.
- [11] Olivier THUAL. Propagation des ondes de surface. articles pédagogiques, 2004.
- [12] Philippe HELLUY. Approximation des systèmes de lois de conservations hyperboliques. <http://helluy.univ-tln.fr/PHYP/phyp.pdf>.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

<http://www.inria.fr>

ISSN 0249-6399