



HAL
open science

Transferts Terre-Lune en poussée faible par contrôle feedback. La mission Smart-1

Alex Bombrun, Jonathan Chetboun, Jean-Baptiste Pomet

► **To cite this version:**

Alex Bombrun, Jonathan Chetboun, Jean-Baptiste Pomet. Transferts Terre-Lune en poussée faible par contrôle feedback. La mission Smart-1. [Rapport de recherche] RR-5955, INRIA. 2006, pp.27. inria-00087927v2

HAL Id: inria-00087927

<https://inria.hal.science/inria-00087927v2>

Submitted on 1 Aug 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Transferts Terre-Lune en poussée faible
par contrôle feedback. La mission Smart-1.*

Alex Bombrun — Jonathan Chetboun — Jean-Baptiste Pomet

N° 5955

1^{er} août 2006

Thème NUM

*R*apport
de recherche

Transferts Terre-Lune en poussée faible par contrôle feedback. La mission Smart-1.

Alex Bombrun , Jonathan Chetboun , Jean-Baptiste Pomet

Thème NUM — Systèmes numériques
Projet Apics

Rapport de recherche n° 5955 — 1^{er} août 2006 — 27 pages

Résumé : L’objet de ce rapport est l’étude des transferts Terre-Lune en faible poussée, à l’aide de contrôles *en boucle fermée*. On utilise des idées de contrôles développées pour le transfert entre orbites terrestres, basées sur des fonctions de Lyapunov simples (voir par exemple la thèse du premier auteur, à soutenir en 2006), pour des situations où l’attraction d’un autre corps que la Terre (la Lune) intervient. On a pris comme prototype la mission Smart-1, une sonde de l’Agence Spatiale Européenne équipée d’une propulsion hélio-électrique, qui effectua un transfert Terre-Lune entre septembre 2003 et février 2005. La propulsion est dite à “poussée faible” : la masse de carburant nécessaire pour effectuer le transfert est bien plus faible que si on avait utilisé une fusée chimique classique mais le temps de poussée est considérablement plus long (quelques jours pour les missions Apollo, des centaines pour Smart-1). Ce rapport décrit comment reproduire la trajectoire de cette mission à l’aide de contrôles en boucle fermée “simples”. Le mouvement libre du satellite relève du problème restreint des trois corps, que nous présentons brièvement et, ainsi qu’un algorithme d’intégration “symplectique” qui préserve l’intégrale première, nécessaire pour des simulations numériques précises; comme l’objectif est de placer le satellite en orbite autour de la Lune, nous décrivons aussi la recherche de telles orbites périodiques.

Afin de prendre en compte la poussée du satellite, nous introduisons un modèle contrôlé du problème restreint des trois corps. Nous présentons notre stratégie de transferts Terre-Lune à l’aide de feedback basés sur les intégrales premières du problème à deux corps. On introduit en particulier, pour économiser du carburant, un contrôle hybride adaptatif qui décide des arrêts moteurs. L’efficacité (remarquable) de ces contrôles est validée essentiellement par nos simulations mais incite à une théorie plus poussée.

Mots-clés : problème à 3 corps, poussée faible, transfert Terre Lune, Smart-1, contrôle en boucle fermée, capture

Ce rapport rend essentiellement compte de la première partie du stage “long” (un an) effectué par J. Chetboun à l’INRIA dans le cadre de sa scolarité à l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

Low thrust Earth to Moon transfers by feedback. The Smart-1 mission

Abstract: The subject of this report is the study of low thrust Earth-Moon orbital transfers using *feedback*. The main motivation of this work is to reproduce the trajectory of the Smart-1 mission, spacecraft of the European Space Agency, with simple feedback laws. This spacecraft, equipped with an electrical engine, achieved an Earth-Moon transfer between September 2003 and February 2005. The singularity of this transfer stand out in its engine denoted “low thrust”. Indeed the mass needed to achieve the transfer is infinitely smaller than we have made used of a classical chemical thrust. But, at the contrary, the transfer time is much longer, only few days for the Apollo missions while the Smart-1 spacecraft needed hundreds.

We modeled the motion of a satellite under the gravitational effects of two bodies with the restricted 3-body problem. We present here its dynamical equations and some basics properties. Motivated by the necessity of accurate simulations, we expose an algorithm of numerical integration that preserves the first integral of the motion. And since the objective is to put the spacecraft in orbit around the moon, we look for periodic orbits of the 3-body motion.

In order to take in account the thrust, we introduce the restricted controlled 3-body system. We present our strategy to achieve orbital transfers from the Earth to the Moon, using simple feedback laws based on first integrals of the 2-body motion. In particular we introduce an adaptive hybrid control to spare propellant. Finally we exposed our simulations: outstandingly this control laws continue to be efficient.

Key-words: 3-body problem, low thrust, Earth to Moon transfer, Smart-1, feedback, capture

Table des matières

1	Le problème restreint des trois corps	5
1.1	Les équations du problème	5
1.2	Intégrale de Jacobi et région de Hill	6
1.3	Points d'équilibre	7
2	Un algorithme d'intégration numérique conservatif	8
2.1	L'algorithme prédiction-correction du second ordre	9
2.2	Intégration conservative et application au problème restreint des trois corps .	9
2.3	Recherche d'orbites périodiques autour de la Lune	10
3	Le problème restreint des trois corps contrôlé	11
3.1	Quelques rappels sur le problème de Kepler contrôlé	11
3.2	Les équations du problème contrôlé	14
3.3	Une remarque sur la stabilisation du point de Lagrange	14
4	Le transfert Terre-Lune	15
4.1	Les feedback de type Lyapunov	15
4.2	Une stratégie de transfert par le point de Lagrange L2	18
4.3	Maximisation de la masse	19
5	Simulation numérique du cas Smart-1	21
6	Conclusion	26

1 Le problème restreint des trois corps

Le problème des N corps est un problème célèbre : il s'agit d'étudier le mouvement de N points massiques soumis à l'influence de leurs attractions gravitationnelles ??? mutuelles. Ce problème est d'un grand intérêt d'un point de vue pratique (étude du système solaire, du système Terre-Lune, etc...).

Pour $N = 2$, on parle du problème de Kepler. Grâce à un nombre suffisant d'intégrales premières, ce problème est soluble analytiquement : toutes les trajectoires sont des ellipses, des paraboles ou des hyperboles dans un repère attaché à l'un des deux corps. Le cas $N = 3$ est d'une plus grande difficulté. Au lieu de considérer le problème des trois corps en toute généralité, nous nous intéressons dans ce rapport à un cas particulier, le problème restreint des trois corps plan, qui est défini par les trois hypothèses suivantes :

- Le troisième corps M_3 n'influence pas les corps M_1 et M_2 , dont le mouvement est donné comme une solution du problème de Kepler. Ceci revient à prendre nulle la masse de M_3 dans les équations du mouvement de M_1 et M_2 ; l'accélération de M_3 ne dépend pas de la masse de M_3 . Cette approximation est pertinente lorsqu'on considère la masse d'un satellite (quelques centaines de kilogrammes) en regard de la masse de la Terre (5.97×10^{24} kg) et de celle de la Lune (7.3×10^{22} kg).
- Un mouvement particulier est choisi pour M_1 et M_2 : ces deux corps décrivent un mouvement circulaire autour de leur centre de masse. A titre d'exemple, l'orbite de la Lune autour de la Terre possède une excentricité de 0.0549, ce qui est assez proche d'une orbite circulaire.
- Le mouvement de M_3 est placé dans le plan orbital contenant M_1 et M_2 .

Le problème restreint des trois corps est d'un intérêt important car il représente une première approximation utile de beaucoup de problèmes réels. C'est aussi le cas particulier le plus simple non intégrable du problème des N corps.

1.1 Les équations du problème

Le problème est ramené à un problème sans dimensions de la manière suivante :

- La somme des masses de M_1 et M_2 est prise comme unité. On appelle ces masses $1 - \mu$ et μ respectivement.
- L'unité de longueur est la distance constante entre M_1 et M_2 . Le rayon de leurs orbites autour du centre de masse est donc μ et $1 - \mu$ respectivement.
- On choisit l'unité de temps telle que la constante universelle de la gravitation $G = 1$. Il résulte de ces choix que la vitesse angulaire de M_1 et de M_2 est aussi égale à 1.

Il est pratique d'utiliser un système d'axes (x, y) qui tourne avec M_1 et M_2 dans le sens trigonométrique, l'axe x pointant vers M_2 . Dans ce système, M_1 et M_2 ont des coordonnées fixes, $(-\mu, 0)$ et $(1 - \mu, 0)$ respectivement. Le mouvement de M_3 a lieu dans le plan (x, y) . Les équations du mouvement dans ce système de coordonnées sont (pour cette section, la source principale est l'ouvrage [1] ; s'y référer pour plus de détails quant à l'obtention des

équations qui suivent) :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y \end{cases} \quad (1)$$

où :

$$\begin{aligned} \Omega(x, y) &= \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \\ \rho_1 &= \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2} \\ \rho_2 &= \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2} \end{aligned} \quad (2)$$

La notation Ω_x (respectivement Ω_y) désigne la dérivée partielle du potentiel Ω par rapport à la variable x (respectivement y).

Plus précisément, le système (1) s'écrit :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y} + x - (1 - \mu)\frac{x + \mu}{\rho_1^3} - \mu\frac{x - 1 + \mu}{\rho_2^3} \\ \ddot{y} = -2\dot{x} + y - (1 - \mu)\frac{y}{\rho_1^3} - \mu\frac{y}{\rho_2^3} \end{cases} \quad (3)$$

On peut se ramener à un système Hamiltonien à deux degrés de liberté en posant :

$$\begin{aligned} q_1 &= x, \quad q_2 = y, \quad p_1 = \dot{x} - y, \quad p_2 = \dot{y} + x, \\ H(q_1, q_2, p_1, p_2) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 - \frac{1 - \mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2} \end{aligned} \quad (4)$$

Le système (3) devient :

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} \end{cases} \quad (5)$$

1.2 Intégrale de Jacobi et région de Hill

Il est bien connu (et facile de vérifier) que $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ est constant le long des solutions de (5). Donc le système (1) possède l'intégrale première :

$$\mathcal{H}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = H(x, y, \dot{x} - y, \dot{y} + x) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \Omega(x, y) \quad (6)$$

Autrement dit, toute solution est telle que :

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \Omega(x, y) = h \quad (7)$$

où h est une constante.

Dans la littérature, on définit l'intégrale de Jacobi C comme :

$$C = -2h \tag{8}$$

Aucune autre intégrale première n'est connue.

Pour h fixé, la position (x, y) reste dans la région de Hill :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \Omega(x, y) + h \geq 0\} \tag{9}$$

La figure 1 montre comment change la topologie de la région de Hill lorsque la constante de Jacobi varie. Cette figure a été réalisée pour une valeur de $\mu = 0.012153$ qui correspond au cas du système Terre-Lune.

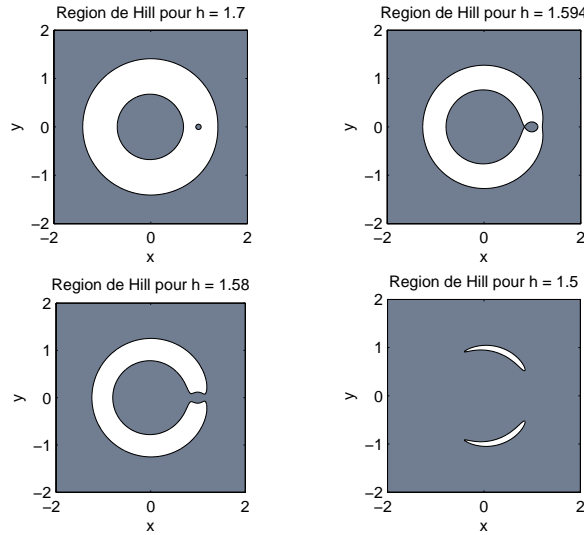


FIG. 1 – Région de Hill en fonction de h pour $\mu = 0.012153$. La région où le mouvement est autorisé est grisée.

1.3 Points d'équilibre

Les points d'équilibre du problème restreint des trois corps (que l'on appelle aussi points de Lagrange) correspondent aux points critiques du potentiel $\Omega(x, y)$. En effet, $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} =$

$\ddot{y} = 0$ implique $\Omega_x = \Omega_y = 0$. Les équations $\Omega_x = 0$ et $\Omega_y = 0$ s'écrivent :

$$x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{\rho_2^3} = 0 \quad (10)$$

et :

$$y \left(1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} \right) = 0 \quad (11)$$

Pour $\rho_1 = \rho_2 = 1$, les équations (10) et (11) sont vérifiées. On obtient ainsi les deux solutions équilatérales ou triangulaires $x = \frac{1}{2} - \mu$ et $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pour $y = 0$, les points critiques sont les trois solutions de l'équation (10). On les appelle les solutions colinéaires. Pour le système Terre-Lune, $\mu \approx 0.012153$ et les abscisses des solutions colinéaires sont $x_1 \approx -1.0051$, $x_2 \approx 0.8369$ et $x_3 \approx 1.1557$.

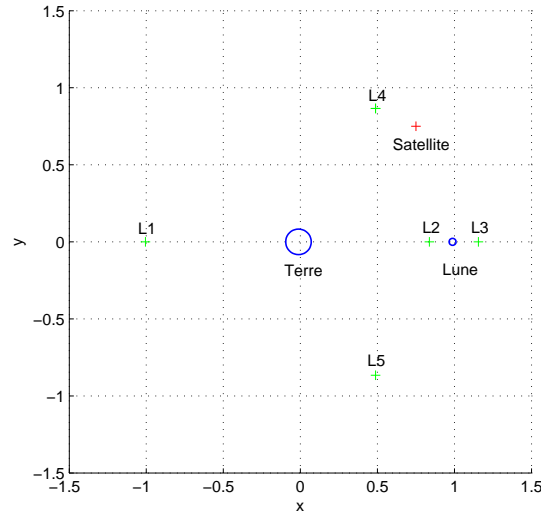


FIG. 2 – Le système Terre-Lune-Satellite dans le repère tournant

2 Un algorithme d'intégration numérique conservatif

Les intégrateurs numériques classiques (comme l'intégrateur numérique ode45 du logiciel Matlab, basé sur une formule de Runge-Kutta (4,5)), ne conservent pas la valeur de l'intégrale de Jacobi le long des trajectoires. Il a donc été nécessaire d'utiliser un intégrateur numérique conservatif pour le problème restreint des trois corps. Cette partie du rapport est un résumé des idées exposées dans [2].

2.1 L'algorithme prédiction-correction du second ordre

On utilise un intégrateur numérique du type prédiction-correction du second ordre. Pour l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (12)$$

cet l'algorithme s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x_0 + \tau f(x_0, t) \\ x(t + \tau) &= x_0 + \frac{\tau}{2} [f(x_0, t) + f(\tilde{x}, t + \tau)] \end{aligned} \quad (13)$$

où τ est le pas d'intégration.

2.2 Intégration conservative et application au problème restreint des trois corps

L'astuce principale est d'opérer un changement de variables pour que la quantité conservée soit une fonction linéaire des nouvelles variables. En effet, les fonctions linéaires sont conservées lors d'une intégration numérique par un algorithme de type prédiction-correction du second ordre.

On rappelle les équations du mouvement pour le problème sous forme Hamiltonienne :

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 + q_2 \\ \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2 - q_1 \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = p_2 - (1 - \mu) \frac{q_1 + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{q_1 - 1 + \mu}{\rho_2^3} \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -p_1 - (1 - \mu) \frac{q_2}{\rho_1^3} - \mu \frac{q_2}{\rho_2^3} \end{cases} \quad (14)$$

Le Hamiltonien peut être écrit comme :

$$H = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - \frac{1 - \mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2} \quad (15)$$

Étape de prédiction :

$$\tilde{q}_i = q_i + \dot{q}_i \tau, \quad \tilde{p}_i = p_i + \dot{p}_i \tau \quad (16)$$

Changement de variables :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2} q_1^2 \\ \xi_2 &= \frac{1}{2} q_2^2 \\ \xi_3 &= \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 - \frac{1 - \mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2} \\ \xi_4 &= \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (17)$$

Le Hamiltonien s'exprime comme fonction linéaire des nouvelles variables :

$$H = -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 \quad (18)$$

On dérive les ξ_i par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= q_1 \dot{q}_1 \\ \dot{\xi}_2 &= q_2 \dot{q}_2 \\ \dot{\xi}_4 &= \dot{q}_2 \dot{q}_2 = \dot{q}_2 (\dot{p}_2 - \dot{q}_1) \\ \dot{\xi}_3 &= \dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_4 \end{aligned} \quad (19)$$

Étape de correction :

$$\xi_i(t + \tau) = \xi_i + \frac{\tau}{2} (\dot{\xi}_i + \ddot{\xi}_i) \quad (20)$$

Retour aux variables de départ :

$$\begin{aligned} q_1 &= \operatorname{sgn}(\tilde{q}_1) \sqrt{2\xi_1} \\ q_2 &= \operatorname{sgn}(\tilde{q}_2) \sqrt{2\xi_2} \\ p_1 &= -q_2 + \operatorname{sgn}(\tilde{p}_1 + \tilde{q}_2) \sqrt{2\xi_3 + \frac{2(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2}} \\ p_2 &= -q_1 + \operatorname{sgn}(\tilde{p}_2 - \tilde{q}_1) \sqrt{2\xi_4} \end{aligned} \quad (21)$$

2.3 Recherche d'orbites périodiques autour de la Lune

Cette partie est basée sur les idées de [3].

On choisit une valeur particulière de C (d'où l'importance d'utiliser un intégrateur conservatif), et on définit une surface d'intersection par :

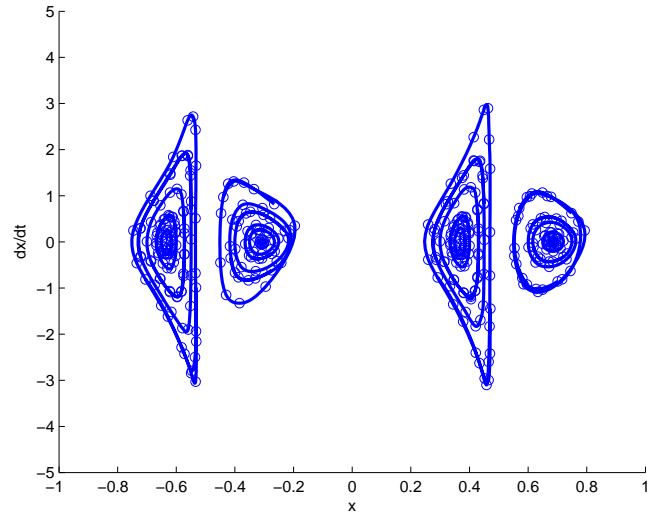
$$y = 0, \quad \dot{y} > 0 \quad (22)$$

Les coordonnées sur cette surface sont x et \dot{x} . Les orbites périodiques du problème restreint des trois corps sont les points fixes de l'intersection des trajectoires avec cette surface.

Un premier résultat est obtenu pour $\mu = \frac{1}{2}$ (cas de deux masses égales) et $C = 4.5$ en figure 3. On identifie quatre points fixes qui correspondent à quatre orbites périodiques.

Le résultat pour $\mu = 0.012153$ (cas Terre-Lune) et $C = 3$ est donné en figure 4. On identifie un point fixe côté Lune qui correspond à l'orbite de la figure 5.

On trouve ainsi plusieurs autres orbites. Quelques unes sont données dans le tableau ci-dessous.


 FIG. 3 – $\mu = \frac{1}{2}$, $C = 4.5$

x_0	\dot{y}_0	C	demi grand axe	excentricité
0.885	0.4699	3	0.1062	0.1462
0.947	0.5904	3.2	0.0414	0.0138
1.047	0.4138	3.2	0.0633	0.0730
1.012	0.6765	3.5	0.0235	0.0236
1	0.9758	4	0.0118	0.0230

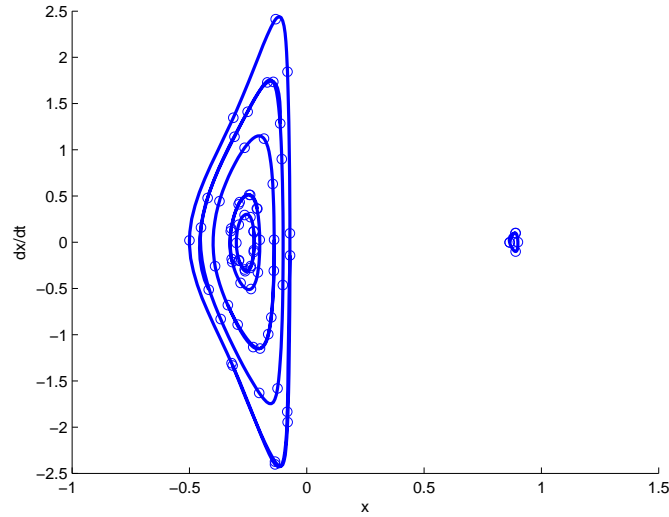
3 Le problème restreint des trois corps contrôlé

3.1 Quelques rappels sur le problème de Kepler contrôlé

Les équations du problème de Kepler contrôlé sont :

$$\begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = -\mu \frac{r}{\|r\|^3} + \frac{F}{m} \end{cases} \quad (23)$$

où (r, v) est l'état du système (position et vitesse du satellite), μ la constante gravitationnelle induite par la masse du corps central (masse de la Terre par exemple), m la masse du satellite et F le contrôle (force qui correspond à la poussée du moteur). On a la contrainte

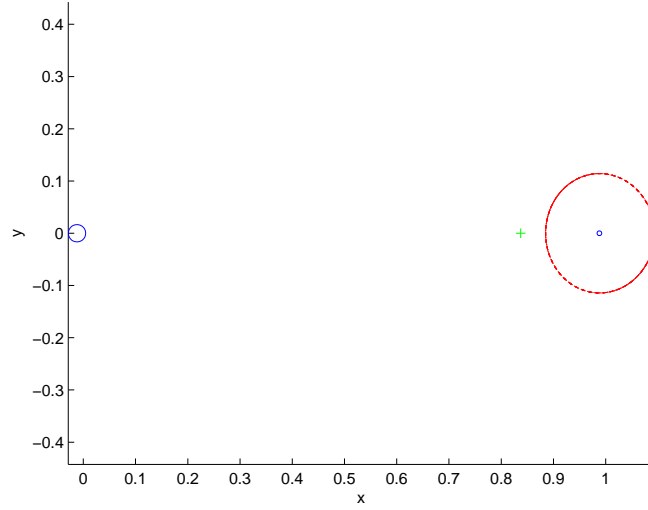
FIG. 4 – $\mu = 0.012153$, $C = 3$

$\|F\| \leq F_{max}$ (pour un satellite à poussée faible, la borne F_{max} est "petite") et la masse du satellite décroît avec le temps suivant la dynamique :

$$\dot{m} = -\frac{\|F\|}{v_e} \quad (24)$$

où v_e est la vitesse d'éjection des gaz.

Le système non contrôlé possède cinq intégrales premières (que l'on note c, e_x, e_y, h_x, h_y et qui correspondent aux paramètres de l'orbite). Le problème de Kepler contrôlé peut s'écrire dans ces nouvelles coordonnées auxquelles on ajoute la longitude L et où la force F est


 FIG. 5 – Orbite autour de la Lune pour $C = 3$

décomposée dans le repère mobile QSW [5] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{c} = \frac{c^2}{\mu Z} F_S \\ \dot{e}_x = \frac{c}{\mu} \left(\sin LF_Q + \frac{A}{Z} F_S - \frac{e_y}{Z} Y F_W \right) \\ \dot{e}_y = \frac{c}{\mu} \left(-\cos LF_Q + \frac{B}{Z} F_S + \frac{e_x}{Z} Y F_W \right) \\ \dot{h}_x = \frac{c}{\mu} \frac{X}{2Z} \cos LF_W \\ \dot{h}_y = \frac{c}{\mu} \frac{X}{2Z} \sin LF_W \\ \dot{L} = \frac{\mu^2}{c^3} Z^2 + \frac{c}{\mu} \frac{Y}{Z} F_W \end{array} \right. \quad (25)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L \\ A = e_x + (1 + Z) \cos L \\ B = e_y + (1 + Z) \sin L \\ X = 1 + h_x^2 + h_y^2 \\ Y = h_x \sin L - h_y \cos L \end{array} \right. \quad (26)$$

Pour le problème de Kepler contrôlé, nous utilisons les intégrales premières pour construire une fonction de Lyapunov V_k qui stabilise globalement une orbite cible :

$$V_k = (e_x - e_{xc})^2 + k_1(e_y - e_{yc})^2 + k_2\left(\frac{c}{c_c} - 1\right)^2 + k_3(h_x - h_{xc})^2 + k_4(h_y - h_{yc})^2 \quad (27)$$

Comme les fonctions de Lyapunov V_k sont elles-mêmes des intégrales premières du mouvement, il existe pour chacune d'entre elles un feedback robuste stabilisant, c'est à dire qui permet d'avoir $\dot{V}_k \leq 0$. Un des objectifs de la thèse d'Alex Bombrun est de mettre en évidence le fait qu'un feedback de type Lyapunov peut être performant pour le problème de transfert d'orbite en temps minimum.

3.2 Les équations du problème contrôlé

A partir de maintenant, on considère le problème restreint des trois corps contrôlé. On introduit les équations du problème contrôlé en reprenant les équations du problème sans contrôle (3) et en y ajoutant une accélération perturbatrice, sur la base des équations du problème de Kepler contrôlé (23) :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y} + x - (1-\mu)\frac{x+\mu}{\rho_1^3} - \mu\frac{x-1+\mu}{\rho_2^3} + u_x \\ \ddot{y} = -2\dot{x} + y - (1-\mu)\frac{y}{\rho_1^3} - \mu\frac{y}{\rho_2^3} + u_y \end{cases} \quad (28)$$

Le contrôle (u_x, u_y) représente l'accélération qui correspond à la poussée du moteur et est exprimé dans les coordonnées du repère tournant.

3.3 Une remarque sur la stabilisation du point de Lagrange

Le point de Lagrange L_2 (entre la Terre et la Lune) est un point d'équilibre (dans le repère tournant) du système sans contrôle. On présente ici une étude assez académique de la stabilisation de ce point d'équilibre : la stabilisation n'est a priori que locale, basée sur le linéarisé, et l'on fait des simulations où l'on ne se soucie pas d'obtenir de "petits" contrôles, c'est-à-dire qu'elles ne concernent pas le cas d'un satellite à poussée faible (sauf bien sûr dans un petit voisinage de L_2 où les contrôles linéaires sont naturellement petits). Cette section est par ailleurs déconnectée de la suite du rapport.

Soit (a, b) un point d'équilibre. On écrit :

$$x = a + \xi, \quad y = b + \eta \quad (29)$$

où ξ et η sont les coordonnées relatives au point d'équilibre. Le point de Lagrange est celui où l'attraction de la Terre et de la Lune se compensent. Pour le point de Lagrange L_2 que nous considérons, on a $a = 0$ et $b = 0.836892$. On fait un développement de Ω au voisinage de (a, b) :

$$\Omega = \Omega(a, b) + \Omega_x(a, b)\xi + \Omega_y(a, b)\eta + \frac{1}{2}\Omega_{xx}(a, b)\xi^2 + \Omega_{xy}(a, b)\xi\eta + \frac{1}{2}\Omega_{yy}(a, b)\eta^2 + O(3) \quad (30)$$

Les équations du mouvement linéarisées sont donc :

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \Omega_{xx}(a, b)\xi + \Omega_{xy}(a, b)\eta + u_x + O(2) \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \Omega_{xy}(a, b)\xi + \Omega_{yy}(a, b)\eta + u_y + O(2) \end{aligned} \quad (31)$$

qui peuvent se mettre sous la forme :

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (32)$$

avec :

$$X = (\xi \quad \eta \quad \dot{\xi} \quad \dot{\eta})^t \quad \text{et} \quad u = (u_x \quad u_y)^t \quad (33)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{xx}(a, b) & \Omega_{xy}(a, b) & 0 & 2 \\ \Omega_{xy}(a, b) & \Omega_{yy}(a, b) & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Pour le cas du système Terre-Lune, où $\mu = 0.012153$, et pour le point de Lagrange L_2 , la matrice A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 11.29391 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4.14696 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Les valeurs propres de la matrice A sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2.931837 \\ \lambda_2 &= -2.931837 \\ \lambda_3 &= 2.334248i \\ \lambda_4 &= -2.334248i \end{aligned} \quad (36)$$

La valeur propre λ_1 étant strictement positive, le point de Lagrange L_2 est instable.

On pose $u = Kx$. On choisit la matrice K de telle sorte que les valeurs propres de $A+BK$ soient à parties réelles négatives. On utilise pour cela une méthode de placement des pôles. La figure 6 montre un exemple de stabilisation du point de Lagrange.

4 Le transfert Terre-Lune

4.1 Les feedback de type Lyapunov

Pour une trajectoire du satellite autour de la Terre (ou de la Lune), nous pouvons calculer les paramètres de l'orbite associée. Il faut tout d'abord revenir aux coordonnées dans le repère fixe centré sur l'astre considéré. Par exemple, pour la Lune :

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} x - 1 + \mu \\ y \end{pmatrix} \quad (37)$$

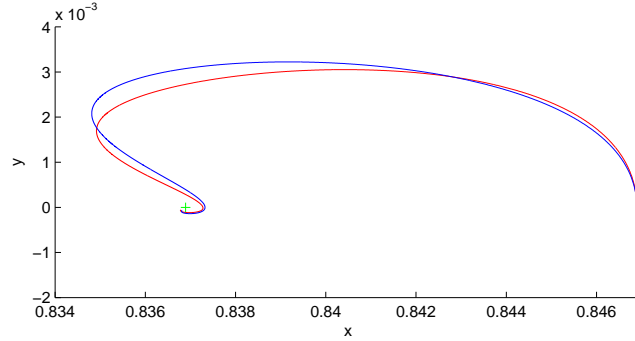


FIG. 6 – Stabilisation du point de Lagrange. En bleu la trajectoire du linéarisé, en rouge celle du système non linéarisé.

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{y}} \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + ie^{it} \begin{pmatrix} x-1+\mu \\ y \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} \dot{x}-y \\ \dot{y}+x-1+\mu \end{pmatrix} \quad (38)$$

où on mélange les notations vectorielles et complexes, c'est à dire que e^{it} est une rotation du plan.

On peut maintenant calculer l'énergie et le moment cinétique :

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}-y)^2 + \frac{1}{2}(\dot{y}+x-1+\mu)^2 - \frac{\mu}{\rho_2} \quad (39)$$

$$C = \det \begin{pmatrix} x-1+\mu & \dot{x}-y \\ y & \dot{y}+x-1+\mu \end{pmatrix} \quad (40)$$

Enfin, le demi grand axe et l'excentricité de l'orbite sont donnés par :

$$a = -\frac{\mu}{2E} \quad (41)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{C^2}{\mu a}} \quad (42)$$

A partir d'une position et d'une vitesse initiales, l'objectif est de stabiliser une cible à l'aide d'un contrôle feedback, caractérisée par une demi grand axe a_{cible} et une excentricité e_{cible} . Un demi grand axe et une excentricité donnés ne permettent pas de définir une orbite unique (sauf si $e_{cible} = 0$), mais seulement une famille d'orbites, obtenue par rotation de l'axe de l'ellipse. On définit alors une fonction de Lyapunov V_k , du même type que pour le problème de Kepler contrôlé :

$$V_k = k_a(a - a_{cible})^2 + k_e(e - e_{cible})^2 \quad (43)$$

où k_a et k_e sont deux réels.

La fonction de Lyapunov V_k est nulle sur la cible. On veut donc la faire décroître le long de la trajectoire. Pour cela, calculons \dot{V}_k :

$$\dot{V}_k = 2\dot{a}(a - a_{cible}) + 2\dot{e}(e - e_{cible}) \quad (44)$$

Or :

$$\dot{a} = \frac{\mu\dot{E}}{2E^2} \quad (45)$$

$$\dot{e} = \frac{C^2\dot{a} - 2C\dot{C}a}{2\mu a^2 e} \quad (46)$$

Et :

$$\begin{aligned} \dot{E} &= (\dot{x} - y)(\dot{y} + x - (1 - \mu)\frac{x + \mu}{\rho_1^3} - \mu\frac{x - 1 + \mu}{\rho_2^3} + u_x) \\ &+ (\dot{y} + x - 1 + \mu)(-\dot{x} + y - (1 - \mu)\frac{y}{\rho_1^3} - \mu\frac{y}{\rho_2^3} + u_y) \\ &+ \mu\frac{(x - 1 + \mu)\dot{x} + y\dot{y}}{\rho_2^3} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \dot{C} &= \dot{x}(\dot{y} + x - 1 + \mu) \\ &+ (x - 1 + \mu)(-\dot{x} + y - (1 - \mu)\frac{y}{\rho_1^3} - \mu\frac{y}{\rho_2^3} + u_y) \\ &- \dot{y}(\dot{x} - y) \\ &- y(\dot{y} + x - (1 - \mu)\frac{x + \mu}{\rho_1^3} - \mu\frac{x - 1 + \mu}{\rho_2^3} + u_x) \end{aligned} \quad (48)$$

On peut maintenant écrire :

$$\dot{V}_k = A + \alpha u_x + \beta u_y \quad (49)$$

avec :

$$A = k_a \frac{\mu(a - a_{cible})}{E^2} B_1 + k_e \frac{4E(e - e_{cible})}{\mu^2 e} \left(\frac{C^2}{2E} B_1 + C B_2 \right) \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= (\dot{x} - y)(\dot{y} + x - (1 - \mu)\frac{x + \mu}{\rho_1^3} - \mu\frac{x - 1 + \mu}{\rho_2^3}) \\
&+ (\dot{y} + x - 1 + \mu)(-\dot{x} + y - (1 - \mu)\frac{y}{\rho_1^3} - \mu\frac{y}{\rho_2^3}) \\
&+ \mu\frac{(x - 1 + \mu)\dot{x} + y\dot{y}}{\rho_2^3}
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \dot{x}(\dot{y} + x - 1 + \mu) \\
&+ (x - 1 + \mu)(-\dot{x} + y - (1 - \mu)\frac{y}{\rho_1^3} - \mu\frac{y}{\rho_2^3}) \\
&- \dot{y}(\dot{x} - y) \\
&- y(\dot{y} + x - (1 - \mu)\frac{x + \mu}{\rho_1^3} - \mu\frac{x - 1 + \mu}{\rho_2^3})
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\alpha = k_a \frac{\mu(a - a_{cible})}{E^2} (\dot{x} - y) + k_e \frac{4E(e - e_{cible})}{\mu^2 e} \left(\frac{C^2}{2E} (\dot{x} - y) - Cy \right) \tag{53}$$

$$\beta = k_a \frac{\mu(a - a_{cible})}{E^2} (\dot{y} + x - 1 + \mu) + k_e \frac{4E(e - e_{cible})}{\mu^2 e} \left(\frac{C^2}{2E} (\dot{y} + x - 1 + \mu) + C(x - 1 + \mu) \right) \tag{54}$$

Le but est de rendre \dot{V}_k le plus petit possible, idéalement négatif. Pour cela, on prend :

$$u_x = -\frac{\epsilon}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \alpha \tag{55}$$

$$u_y = -\frac{\epsilon}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \beta \tag{56}$$

avec ϵ la norme du contrôle, qui représente l'accélération fournie par le moteur.

Pour le problème de Kepler, à contrôle nul, le demi grand axe et l'excentricité sont des intégrales premières du mouvement. On a donc $A = 0$ dans l'expression de \dot{V}_k . Dans le problème restreint des trois corps, A résulte de la perturbation due au troisième corps. Comme nous le verrons par la suite le terme A est compensé par $\alpha u_x + \beta u_y$ le long des trajectoires. Autour de la Terre par exemple, le terme A est même nul en moyenne. C'est ce comportement qui explique pourquoi nous arrivons à réaliser des transferts d'orbites entre la Terre et la Lune. L'appellation fonction de Lyapunov pour V_k est quelque peu abusive car nous ne justifions pas le fait que $\dot{V}_k \leq 0$ le long des trajectoires, ce qui est tout de même vérifié en moyenne par nos simulations numériques.

4.2 Une stratégie de transfert par le point de Lagrange L2

L'idée principale de notre transfert est d'effectuer un « rendez-vous » avec le point de Lagrange L2. Ce point tourne sur un cercle de rayon r_2 ayant la Terre pour centre, mais il ne

suit pas une orbite Keplerienne puisqu'il tourne à la vitesse de la Lune et non à celle donnée par la loi des aires, d'où les guillemets autour du mot rendez-vous. Notre but est d'amener le satellite d'une orbite Keplerienne basse autour de la Terre à une orbite (Keplerienne) dont l'apogée est le point de Lagrange $L2$ entre la Terre et la Lune avec une vitesse à l'apogée identique à celle du point $L2$. Bien sûr, autour du point de Lagrange, l'influence de la Lune est trop importante pour qu'il soit licite de considérer les orbites Kepleriennes terrestres comme de vraies trajectoires, mais on a vu (section 3.3) que nous pouvons stabiliser ce point. On peut donc envisager qu'avec une vitesse relative par rapport à celui-ci faible nous pourrions basculer sur une orbite lunaire. Cette exigence sur la localisation de l'apogée ainsi que sur la vitesse en ce point définit les valeurs du demi grand axe et de l'excentricité de l'orbite cible et donc de notre fonction de Lyapunov.

Pour effectuer ce rendez-vous il est nécessaire de synchroniser notre loi de transfert de telle manière que le satellite soit proche du point de Lagrange quand il atteint l'orbite cible. La solution la plus simple pour synchroniser consiste à attendre un peu sur une orbite intermédiaire ; c'est une méthode de tir simple qui n'est pas un feedback mais une commande en boucle ouverte.

On part ainsi d'une orbite géostationnaire avec les conditions initiales $x_0 = 0.0976$ et $y_0 = 2.8792$. On vise une première orbite intermédiaire caractérisée par $a_{cible} = 0.3785$ et $e_{cible} = 0.1608$ (valeurs à mi-chemin de notre orbite cible). On arrive sur cette orbite au bout d'un temps $T = 17.45$. On laisse passer un temps $\tau = 0.25$ à contrôle nul sur cette orbite, afin de réaliser la synchronisation. On vise donc comme orbite cible celle caractérisée par $a_{cible} = 0.6373$ et $e_{cible} = 0.3215$. On arrive sur cette orbite cible au bout d'un temps $T = 20.286$. A cet instant, le satellite se trouve à proximité du point de Lagrange entre la Terre et la Lune. On bascule alors vers un contrôle stabilisant l'orbite cible circulaire $a_{cible} = 0.0414$ et $e_{cible} = 0$ autour de la Lune. La trajectoire obtenue est représentée sur la figure 7. Ce transfert a été réalisé avec les paramètres suivants : $k_a = 1000$, $k_e = 1$ et $\epsilon = 0.08$ qui est du même ordre de grandeur que la poussée d'un satellite à moteur électro-ionique (satellite dit à poussée faible).

Les figures 8 et 9 comparent la valeur de A à celle de $\alpha u_x + \beta u_y$ au cours du transfert Terre-Lune, jusqu'au passage au point de Lagrange. On constate que A est nul en moyenne. Les figure 10 et 11 illustrent quant à elles le fait que la fonction de Lyapunov V_k décroît et que $\dot{V}_k \leq 0$ en moyenne le long des trajectoires.

4.3 Maximisation de la masse

On rappelle que la masse de carburant consommé lors d'un transfert est donnée par la loi :

$$\dot{m} = -\frac{m_0 \|u\|}{v_e} \quad (57)$$

où m_0 est la masse initiale du satellite, u est le contrôle (accélération fournie par le moteur) et v_e une constante proportionnelle à la vitesse d'éjection des gaz. Le terme $m_0 \|u\|$ représente

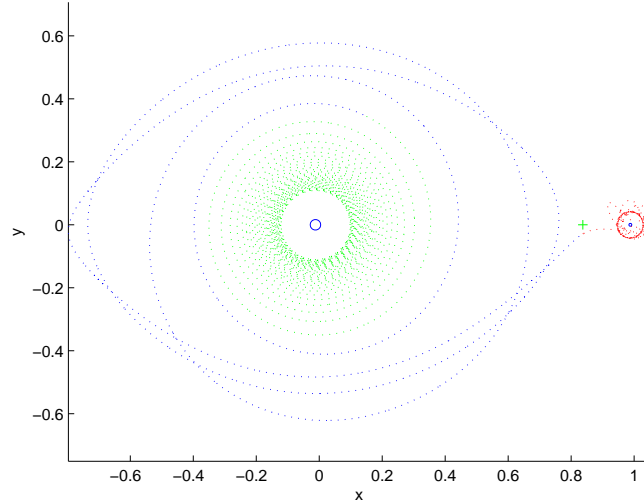


FIG. 7 – Un transfert Terre-Lune

une force, tout comme le terme $\|F\|$ de la formule (24). Nous avons fait l'approximation que l'accélération est constante. Dans la réalité, c'est la force du moteur $\|F\|$ qui est constante, tandis que l'accélération $\|u\| = \frac{\|F\|}{m}$ augmente à mesure que le satellite perd en masse de carburant.

Le contrôle feedback que nous avons choisi est tel que la dérivée de la fonction de Lyapunov s'écrit :

$$\dot{V}_k = A - \epsilon \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (58)$$

avec $\|u\| = \epsilon$.

Une stratégie pour économiser de la masse de carburant consisterait à pousser seulement lorsque la quantité $n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ est "grande". Dans le cas d'un transfert Terre-Lune, on est amené à effectuer un grand nombre de révolutions autour de la Terre (voir figure 7). Au cours de ces révolutions, la valeur de n oscille, une oscillation correspondant à une révolution autour de la Terre (voir figure 12). Nous sommes donc intéressés à pousser autour du maximum de n sur chaque oscillation.

En pratique, on met au point un contrôle adaptatif comme suit : à chaque révolution, on calcule le maximum M et le minimum m de la fonction n . On estime les valeurs du maximum M_k et du minimum m_k de la k -ième révolution à partir des valeurs calculées aux

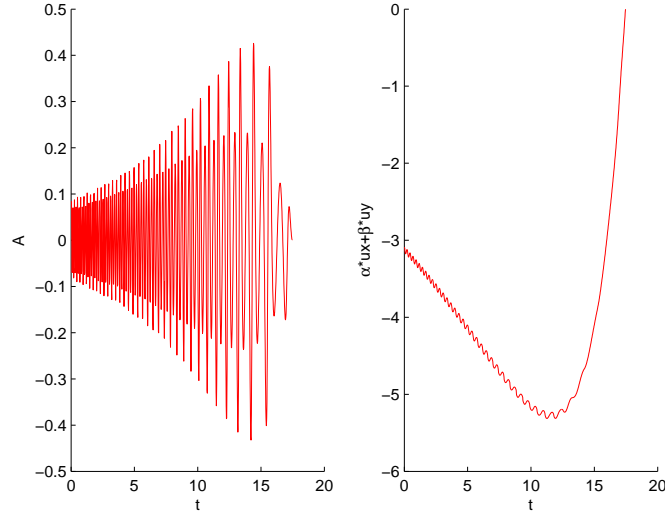


FIG. 8 – Comparaison de A et $\alpha u_x + \beta u_y$ le long de la trajectoire en vert de la figure 7

deux révolutions précédentes par les formules : $M_k \approx 2M_{k-1} - M_{k-2}$ et $m_k \approx 2m_{k-1} - m_{k-2}$. On dispose également de l'amplitude de l'oscillation de n , $a_k = M_k - m_k$. On choisit donc de pousser uniquement lorsque la valeur courante de n est supérieure à un certain pourcentage p de l'amplitude, c'est à dire lorsque $n > M_k - pa_k$.

5 Simulation numérique du cas Smart-1

Smart-1 est un satellite de l'Agence Spatiale Européenne dont l'un des objectifs est de démontrer qu'une propulsion "hélio-électrique" peut être utilisée pour les futures missions interplanétaires. Le satellite Smart-1 a été lancé par Ariane 5 sur une orbite GTO le 27 septembre 2003. Le 11 novembre 2004, le satellite était capturé par la Lune. L'arrivée sur l'orbite finale autour de la Lune a eu lieu le 27 février 2005. L'objectif de cette étude est de simuler la mission Smart-1 à l'aide de contrôles par feedback. Nous avons choisi de nous concentrer sur la période allant du 4 février 2004 au 4 décembre 2004.

Nous avons choisi de découper cette période en 4 phases. En effet, à la lecture de [4], on peut constater que la trajectoire suivie par Smart-1 correspond tout d'abord à une augmentation simultanée du demi grand axe et de l'excentricité des orbites autour de la Terre (phase 1). Dans un second temps, le demi grand axe continue d'augmenter tandis que l'excentricité commence à diminuer (phase 2). Enfin l'excentricité diminue brutalement, le demi grand

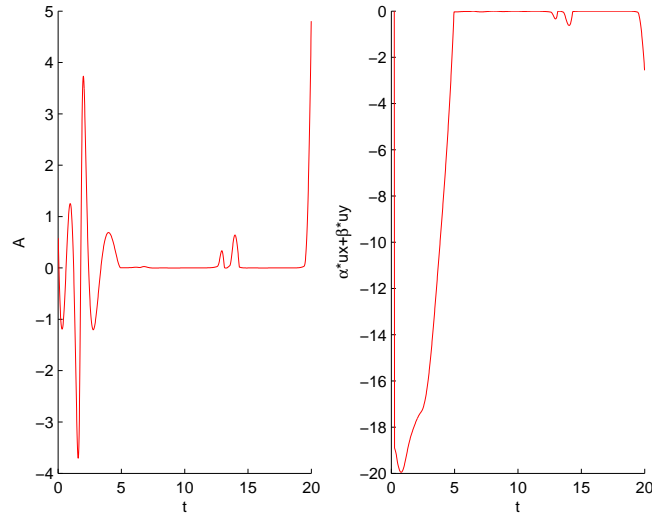


FIG. 9 – Comparaison de A et $\alpha u_x + \beta u_y$ le long de la trajectoire en bleu de la figure 7

axe poursuivant son augmentation (phase 3), pour aboutir à la capture par la Lune (phase 4).

Au 4 février 2004, le satellite est sur une orbite autour de la Terre de demi grand axe $a = 43280$ km (0.1126 en unités normalisées) et d'excentricité $e = 0.5219$. Le demi grand axe et l'excentricité augmentent jusqu'au 25 août 2004 pour atteindre les valeurs $a = 139308$ km (0.3624 en unités normalisées) et $e = 0.7287$ (phase 1). Au 1er octobre 2004, le satellite est sur une orbite de paramètres $a = 181296$ km (0.4716 en unités normalisées) et $e = 0.6141$ (phase 2). Le 26 octobre, ces valeurs sont devenues $a = 242466$ km (0.6308 en unités normalisées) et $e = 0.2588$ (phase 3). Enfin le 4 décembre 2004, Smart-1 est sur une orbite autour de la Lune de paramètres $a = 13084$ km (0.0340 en unités normalisées) et $e = 0.5831$ (phase 4). Les valeurs de a et e données dans ce paragraphe ont été recueillies dans les rapports de mission Smart-1, consultables sur le site internet de l'ESA ¹.

Afin de simuler la phase 1, nous prenons $x_0 = 0.1592$ et $y_0 = 1.4888$ comme conditions initiales, $a_{cible} = 0.3624$ et $e_{cible} = 0.7287$ comme paramètres de l'orbite cible et $k_a = 13$ et $k_e = 1$ pour coefficients de la fonction de Lyapunov. On choisit d'économiser la masse de carburant en arrêtant de pousser lorsque n est inférieur à 75 % de l'amplitude (on prend $p = 0.75$).

¹<http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=10>

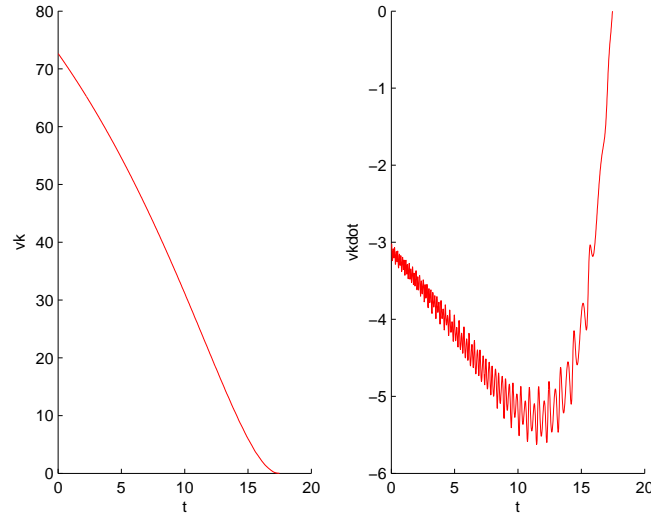


FIG. 10 – Fonction de Lyapunov V_k et sa dérivée \dot{V}_k le long de la trajectoire en vert de la figure 7

Pour la phase 2, on choisit $a_{cible} = 0.4716$ et $e_{cible} = 0.6141$ comme paramètres de l'orbite cible et $k_a = 2$ et $k_e = 1$ pour coefficients de la fonction de Lyapunov. L'économie de masse est réalisée de la même manière que précédemment.

Pour la phase 3, on choisit $a_{cible} = 0.6308$ et $e_{cible} = 0.2588$ comme paramètres de l'orbite cible et $k_a = 2$ et $k_e = 1$ pour coefficients de la fonction de Lyapunov. On ne pousse pas pendant une durée $\tau_1 = 0.9$ afin de réaliser la synchronisation, et on arrête de pousser au bout d'un temps $\tau_2 = 4$ afin d'économiser de la masse (à cet instant, le satellite a assez de vitesse pour atteindre le point de Lagrange sans contrôle).

Enfin, en ce qui concerne la phase 4, on choisit $a_{cible} = 0.0340$ et $e_{cible} = 0.5831$ comme paramètres de l'orbite cible autour de la Lune et $k_a = 50$ et $k_e = 1$ pour coefficients de la fonction de Lyapunov. On choisit de ne pas économiser de carburant (aucune consommation en carburant n'étant donnée par les rapports de l'ESA sur cette période).

La trajectoire qui résulte de cette simulation est donnée en figure 13. Pour ces simulations, on a pris $m = 350$ kg (masse du satellite), $\epsilon = 0.07659e - 2$ (accélération correspondant à une poussée de 73 mN) et $v_e = 16.4$ km/s. Ces données correspondent aux caractéristiques du satellite Smart-1. Le tableau ci-dessous donne un comparatif des temps de transfert et des consommations de carburant au cours des quatre phases.

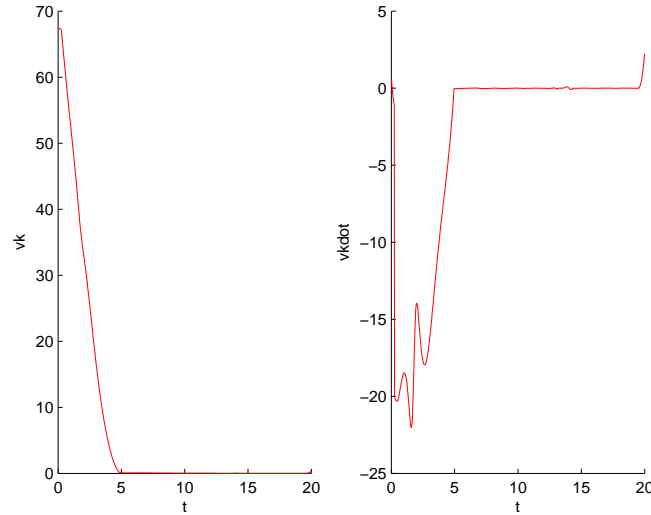


FIG. 11 – Fonction de Lyapunov V_k et sa dérivée \dot{V}_k le long de la trajectoire en bleu de la figure 7

Phase	ΔT Smart-1 / feedback	Δm Smart-1 / feedback
1	203 jours / 147 jours	21.9 kg / 21.1 kg
2	37 jours / 22 jours	5.0 kg / 5.3 kg
3	26 jours / 19 jours	4.8 kg / 5.2 kg
4	39 jours / 20 jours	- / 7.6 kg

La consommation en carburant totale de Smart-1 au cours des phases 1 à 3 est de 31.7 kg, à comparer aux 31.6 kg de notre simulation à l'aide de contrôles feedback. Néanmoins, il est à noter que notre simulation concerne le cas plan et que nous ne prenons donc pas en compte les variations d'inclinaison des orbites. Pour information, l'inclinaison des orbites de Smart-1 passe de 6.94 degrés au 25 août 2004 à 20.59 degrés au 26 octobre 2004. L'orbite de la Lune, et donc l'orbite du point de Lagrange l_2 , possède quant à elle une inclinaison variable, due à la précession de la Terre, comprise entre 18.28 et 28.58 degrés par rapport au plan de l'équateur. Il faudrait donc a priori consommer une masse supplémentaire de carburant non négligeable pour corriger cette différence d'inclinaison. Néanmoins l'analyse des données de la mission Smart-1 laisse penser que la correction d'inclinaison s'effectue grâce à la gravitation lunaire. En effet l'inclinaison varie beaucoup quand la sonde entre en résonance avec la Lune.

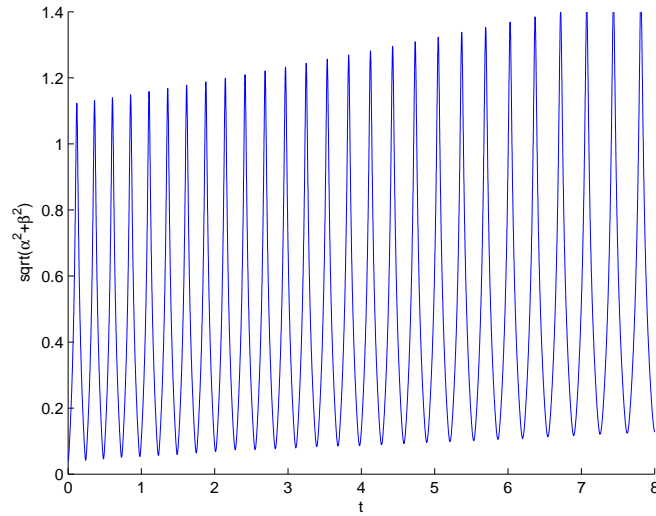


FIG. 12 – Exemple de valeur de $n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ lorsque le satellite tourne autour de la Terre

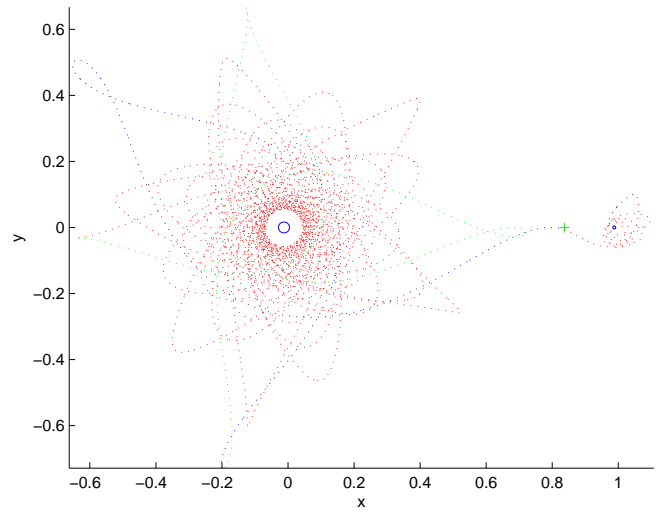


FIG. 13 – Trajectoire de Smart-1

6 Conclusion

Le résultat principal du travail présenté dans ce rapport a été la simulation de la mission Smart-1 à l'aide de contrôles feedback. La consommation en carburant ainsi que le temps de transfert entre la Terre et la Lune de notre simulation sont comparables à ceux de la mission de l'ESA. Le présent travail pourrait être poursuivi par la simulation plus complète des problèmes de transfert Terre-Lune à l'aide d'un modèle tridimensionnel.

Ce résultat soulève des questions quant à la possibilité de stabiliser globalement une orbite cible pour le problème restreint des trois corps à l'aide de feedback de type Lyapunov. En effet, nous n'avons pas apporté d'explication théorique sur le fait que les feedbacks basés sur les intégrales premières du mouvement Keplerien conservent des propriétés stabilisatrices pour le problème à 3-corps contrôlé. De plus nous avons introduit des idées pour synchroniser et minimiser la consommation de carburant qui mériteraient une plus ample discussion.

Références

- [1] V.G. Szebehely : *Theory of Orbits : the Restricted Problem of Three Bodies*, Academic Press, New York, 1967
- [2] O. Kotovych, J.C. Bowman : *An Exactly Conservative Integrator for the n-Body Problem*, J. Phys. A : Math. Gen., 2002 35, 7849-7863
- [3] M. Hénon : *Numerical Exploration of Hamiltonian Systems*, Course 2 in Les Houches, Session XXXVI, 1981 - Comportement Chaotique des Systèmes Déterministes/Chaotic Behaviour of Deterministic Systems, North-Holland, 1983
- [4] J. Schoenmaekers : *Post-Launch Optimisation of the Smart-1 Low Thrust Trajectory to the Moon*
- [5] J.-P. Carrou : *Mécanique Spatiale Tome 1*, CNES, 1995
- [6] B. d'Andréa-Novet, M. Cohen de Lara : *Commande Linéaire des Systèmes Dynamiques*, Ecole des Mines de Paris, 2002



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399