Conditions absorbantes d'ordre eleve pour des modeles de propagation d'onde dans des domaines rectangulaires

Francis Collino

▶ **To cite this version:**

Francis Collino. Conditions absorbantes d'ordre eleve pour des modeles de propagation d'onde dans des domaines rectangulaires. [Rapport de recherche] RR-1790, INRIA. 1992. inria-00077030

HAL Id: inria-00077030
https://inria.hal.science/inria-00077030

Submitted on 29 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNITÉ DE RECHERCHE
NRIA-ROCQUENCOURT

Rapports de Recherche

1992

25ème anniversaire

N° 1790

Programme 6
Calcul Scientifique, Modélisation et Logiciels numériques

CONDITIONS ABSORBANTES D'ORDRE ÉLEVÉ POUR DES MODÈLES DE PROPAGATION D'ONDE DANS DES DOMAINES RECTANGULAIRES

Francis COLLINO

Novembre 1992

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

★RR-1790★

Conditions absorbantes d'ordre élevé pour des modèles de propagation d'onde dans des domaines rectangulaires

High Order Absorbing Boundary Conditions for Wave Equation Models in Rectangular Domains

Francis Collino

Résumé

La résolution numérique de problèmes d'ondes en régime transitoire dans un milieu de propagation infini nécessite l'adjonction de conditions aux limites absorbantes (CLA) sur les bords du domaine de calcul. Dans ce rapport, on présente et analyse les CLA dites d'ordre élevé pour l'équation des ondes 2D puis 3D, avec ou sans terme d'amortissement, dans des boîtes de calcul rectangulaires. Concernant le problème continu, l'apport original consiste principalement à établir puis discuter l'existence de conditions de coin nécessaires à la cohérence mathématique du problème. Quant à l'aspect discrétisation, des schémas numériques sont présentés qui permettent l'utilisation des CLA d'un point de vue pratique. Leur stabilité au sens de Kreiss est établie dans le cas du demi-espace. Des exemples numériques montrent l'efficacité de la méthode.

Abstract

The numerical solution of transient wave equation models in infinite domains of propagation requires the adjunction of artificial conditions on the boundaries of the computational domain. In this report, the so-called high order absorbing boundary conditions for 2D and then 3D, with or without damping, wave equations in rectangular computational boxes are presented and analysed. The novel contribution for the continuous problem mainly consists in the construction and the analysis of corner conditions. Their existences are necessary to the mathematical setting of the problem. Discretization problems are studied and numerical schemes allowing the practical use of the high order boundary conditions are presented. The Kreiss's stability of these scheme is proved in the half space case. Numerical simulations show the efficiency of the method.

Mots clés

Conditions aux Limites Absorbantes - Conditions de coin - Equation des ondes - Stabilité au sens de Kreiss - Schémas numériques

Keywords

Absorbant Boundary Conditions - Corner conditions - Wave equation - Kreiss's Stability - Numerical schemes

Introduction

Le calcul de solutions d'équations d'ondes linéaires instationnaires en milieu non borné intéresse de nombreux domaines de la Physique, notamment ceux où existent des phénomènes de diffraction.

La recherche de solutions approchées par des méthodes numériques de type différences finies ou éléments finis impose l'introduction d'une frontière artificielle entourant le domaine d'intérêt et délimitant un domaine de calcul. Se pose alors le problème du choix de la condition à la limite que l'on impose sur le bord fictif. Ce choix est guidé par un triple impératif de qualité, de stabilité et de maniabilité. Le critère de qualité est lié à la mesure de la modification sur la solution que provoque l'existence du bord artificiel, le critère de stabilité demande à ce que le couplage entre l'équation modélisant l'onde à l'intérieur du domaine et la condition à la limite conduise à un problème mathématique bien posé. Enfin, la maniabilité est une exigence à caractère pratique: on veut que la solution numérique soit "facile" à calculer et "peu onéreuse" en temps de calcul, une fois le problème discrétisé.

Ce sujet a suscité une recherche importante ces vingt dernières années. Nous renvoyons à [13] et [17] pour un descriptif exhaustif des méthodes employées. De façon générale, ces conditions aux limites, dénommées conditions aux limites absorbantes ou C.L.A., sont construites comme des approximations à l'aide d'opérateurs différentiels de la condition transparente, ou condition exacte, qui est en général non locale en espace et en temps et qui, par conséquent, répond trés mal au critère de maniabilité.

Cette démarche a été introduite par Engquist Majda, [12] (voir aussi Bayliss-Turkel, [7], dans un contexte légèrement différent) pour l'équation des ondes acoustiques:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \tag{0.1}$$

Lorsque la frontière artificielle est une droite $x_2 = 0$ (on se place ici dans $\mathbb{R}^2$), la condition transparente s'écrit:

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right) + i\omega\sqrt{1 - \dfrac{k_1^2}{\omega^2}}\,\mathcal{F}u = 0 \ \text{ en } x_2 = 0 \\ \text{avec } \mathcal{F}(v)(k_1, x_2, \omega) = \displaystyle\int\int v(x_1, x_2, t)\, exp\, i(k_1 x_1 - \omega t)\, dx_1 dt \end{cases} \tag{0.2}$$

Engquist et Majda proposent toute une famille de conditions absorbantes basées sur les

approximations de Padé de la fonction $z \longrightarrow \sqrt{1-z}$ dont les deux plus simples sont:

$$(0.3)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 && \text{(ordre 1)} \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0 && \text{(ordre 2)} \end{aligned}$$

Comme nous le montrerons sur des essais numériques (section 1.1), ces conditions ne donnent pas toujours de solutions satisfaisantes et il convient d'augmenter l'ordre de l'approximation. On parlera de conditions d'ordre élevé. La C.L.A. est alors construite à partir de l'approximation:

$$(0.4)\qquad \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + i\omega\left(1 - \sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{k_1^2}{\omega^2 - \alpha_m k_1^2}\right)\mathcal{F}u = 0 \text{ en } x_2 = 0$$

où les $2L$ nombres positifs α_m et β_m sont choisis de telles sortes que l'on ait :

$$(0.5)\qquad \sqrt{1-z} \approx \left(1 - \sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{z}{1-\alpha_m z}\right) \text{ pour } z \in [0,1]$$

L'intérêt d'une telle approximation est qu'elle correspond (comme on peut le voir en appliquant la transformée de Fourier inverse sur (0.4)) à une équation locale en espace et en temps sur le bord $x_2 = 0$ et que, sous certaines hypothèses portant sur les coefficients α_m et β_m, elle conduit à des problèmes stables (cf. [27] et [17]). Un des points nouveau (?) de notre travail est d'avoir choisi une formulation, directement inspirée du domaine des équations paraxiales, faisant appel à L fonctions auxiliaires définies sur la frontière, et qui se prête bien à un traitement numérique, à savoir

$$(0.6)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{/(x_2=0)} - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial t} = 0 \\ \forall l = 1, ..., L,\ \dfrac{\partial^2 \varphi_l^{(2)}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(2)}}{\partial x_1^2} = 0 \text{ avec } \psi_l^{(2)} = \alpha_l \varphi_l^{(2)} + u_{/(x_2=0)} \end{cases}$$

Un tel système apparaît comme le couplage entre une équation de transport de vitesse 1 dans la direction x_2 avec L équations des ondes 1D le long de la frontière et de vitesse de propagation égale à $\sqrt{\alpha_l}$.

Un deuxième point novateur (section 1.3) est de proposer une extension de ces C.L.A. au cas de l'équation des ondes amorties ($\sigma \geq 0$):

$$(0.7)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

en écrivant en $x_2 = 0$:

$$(0.8)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{/(x_2=0)} - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial t} = 0 \\ \forall l = 1, ..., L,\ \dfrac{\partial^2 \varphi_l^{(2)}}{\partial t^2} + \sigma \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(2)}}{\partial x_1^2} = 0 \text{ avec } \psi_l^{(2)} = \alpha_l \varphi_l^{(1)} + u_{/(x_2=0)} \end{cases}$$

Ces conditions se révèlent maniables (elles sont locales en espace et en temps), de qualité ajustable (on dispose de 2L degrés de liberté) et stables. Ce dernier point fera l'objet d'un travail spécifique qui étend le résultat de Trefethen-Halpern, [27] au cas amorti.

Le chapitre 1 de ce rapport est consacré à une exposition détaillée des différents points brièvement exposés ici et traite donc du cas où la frontière artificielle borne un demi-espace. Le deuxième chapitre traite le cas où cette frontière délimite un quart d'espace, la situation étant compliquée par rapport au cas précédent par la présence d'un coin. Les C.L.A. retenues consistent à imposer à la solution cherchée u de vérifier l'équation des ondes (0.1) sur le domaine $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, de satisfaire (0.6) sur la demi-droite frontière $x_2 = 0$, $x_1 < 0$ et enfin (0.9) sur l'autre demi-droite $x_1 = 0$, $x_2 < 0$, avec

$$(0.9) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{/(x_1=0)} - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial t} = 0 \\ \forall l = 1, \ldots, L, \ \dfrac{\partial^2 \varphi_l^{(1)}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(1)}}{\partial x_2^2} = 0 \ \text{ avec } \ \psi_l^{(1)} = \alpha_l \varphi_l^{(1)} + u_{/(x_1=0)} \end{cases}$$

Le problème qui se pose alors est de déterminer les conditions de raccordement que doit satisfaire au coin $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ toute solution régulière de notre système d'équation (cf [19] pages 197-271) . Ces conditions sont cruciales pour toute implémentation numérique, car il est impossible d'évaluer au coin les dérivées secondes des fonctions auxiliaires intervenant dans les C.L.A le long de chaque bord sans l'adjonction de conditions portant, par exemple, sur les dérivées premières de ces fonctions.
Nous présenterons une démarche originale permettant de dériver très simplement ces conditions, celles-ci au nombre de 2L, s'écrivant:

$$(0.10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial x_1}(0,t) + A_l \cdot \dfrac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial t}(0,t) - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m} \cdot \frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial t}(0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial x_2}(0,t) + A_l \cdot \dfrac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial t}(0,t) - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m} \cdot \frac{\partial \psi_m^{(2)}}{\partial t}(0,t) = 0 \end{cases}$$

$$(0.11) \quad \text{avec } A_l = 1 + \sum_{m=1}^{L} \beta_m \cdot \frac{1-\alpha_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \text{ et } C_{l,m} = \frac{\beta_m}{\alpha_m} \cdot \frac{\alpha_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l}$$

On abordera également l'analyse mathématique du système composé de (0.1),(0.9),(0.6) et (0.10) en apportant des réponses partielles quant à l'existence et l'unicité des solutions. Enfin, on proposera d'étendre ces conditions au cas conducteur et au cas 3D (section 2.2 et 2.3). Ces extensions se révèlent être non triviales (elles font intervenir de nouvelles fonctions auxiliaires) et un peu lourde à mettre en œuvre dans le cas 3D.

Le chapitre 3 aborde la discrétisation de ces problèmes dans le demi-espace puis dans le quart d'espace en dimension 2 avec ou sans amortissement. Ces discrétisations sont construites à l'aide de différences finies sur une grille de calcul régulière. On montre la stabilité de ces schémas à l'aide du critère de Kreiss utilisé par Higdon ([16]). Des essais numériques concluent ce rapport et démontrent la potentialité de la méthode.

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un contrat de recherche avec le Centre d'Etudes de Gramat (DRET).

Chapitre 1

Conditions aux limites absorbantes d'ordre élevé: cas du demi-espace

On commence par motiver l'utilisation des conditions aux limites absorbantes (C.L.A.) d'ordre élevé en montrant leur efficacité sur un problème de calcul d'ondes en milieu non borné (section 1.1). Dans la section 1.2, on rappelle les définitions des C.L.A. ainsi que leurs principales propriétés et on propose une formulation sous forme de système de ces conditions. La section 1.3 est la plus originale. On y trouve une généralisation des C.L.A. aux milieux 3D et surtout aux équations d'ondes amorties 2D. Une démonstration de la stabilité de ces nouvelles conditions en milieu conducteur est donnée.

1.1 Motivation de l'étude, présentation d'un problème type

Nous commençons par illustrer sur un exemple simple les difficultés liées à la présence de bords absorbants d'ordre insuffisant. Cet exemple nous sert de motivation pour développer des conditions aux limites d'ordre élevé.

Nous considérons un domaine 2D homogène non conducteur, de vitesse de propagation égale à $c = 3.10^8 m.s^{-1}$, dans lequel est située une source électromagnétique quasi ponctuelle S. La propagation du champ électrique u est alors régie par l'équation des ondes:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ \\ u = E(t) \quad \text{sur } \partial S \\ \\ u \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{en } t = 0 \end{cases}$$

où $E(t)$ est une IEMN standart (Impulsion ElectroMagnétique d'origine Nucléaire) dont l'expression fait intervenir deux fonctions exponentielles:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} E(t) = 100.(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \\ \\ \alpha = 4.10^6\, s^{-1} \quad \text{et} \quad \beta = 476.10^6\, s^{-1} \end{cases}$$

et dont nous donnons la forme temporelle ainsi que le spectre sur les figures (1.1) et (1.2).

Afin de borner le domaine de calcul, du moins dans un premier temps dans une direction, on se propose d'approcher la solution de $(\mathcal{P})$ en résolvant un problème posé dans la bande:

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \Omega &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, -\dfrac{D}{2} \leq x_2 \leq \dfrac{D}{2}\right\} = \left]\Gamma^+, \Gamma^-\right[\\ \\ \Gamma^+ &= \left\{(x_1, +\dfrac{D}{2}); x_1 \in \mathbb{R}\right\} \\ \\ \Gamma^- &= \left\{(x_1, -\dfrac{D}{2}); x_1 \in \mathbb{R}\right\} \end{cases}$$

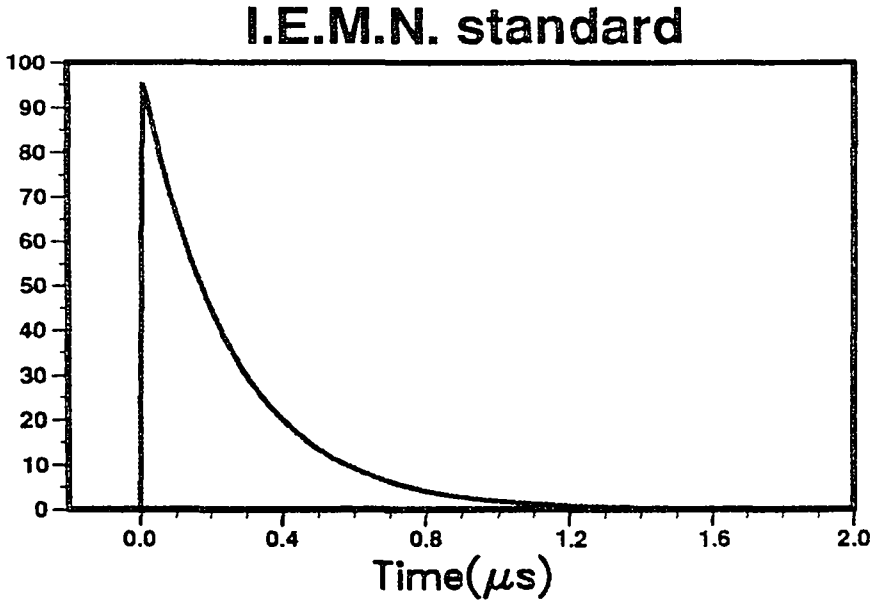


Figure 1.1 : Forme temporelle de l'IEMN standard

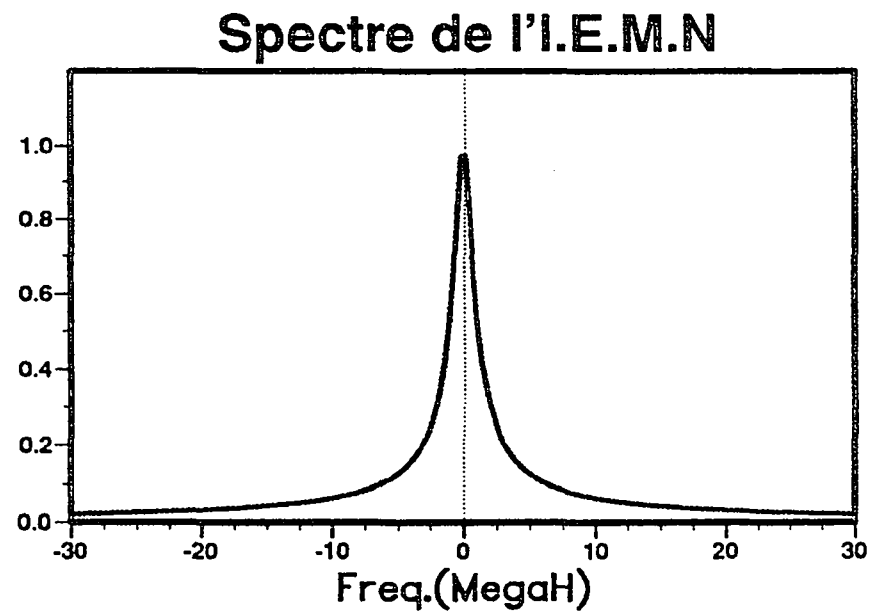


Figure 1.2 : Spectre de l'IEMN standard

Ce problème approché s'écrit:

$$(\mathcal{P}_{app}) \begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \\ u = E(t) \quad \text{sur } \partial S \\ \\ u \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ en } t = 0 \\ \\ + \text{ C.L.A. sur } \Gamma^+ \text{ et } \Gamma^- \end{cases}$$

Nous avons choisi comme conditions aux limites absorbantes sur Γ^+ et Γ^- les conditions

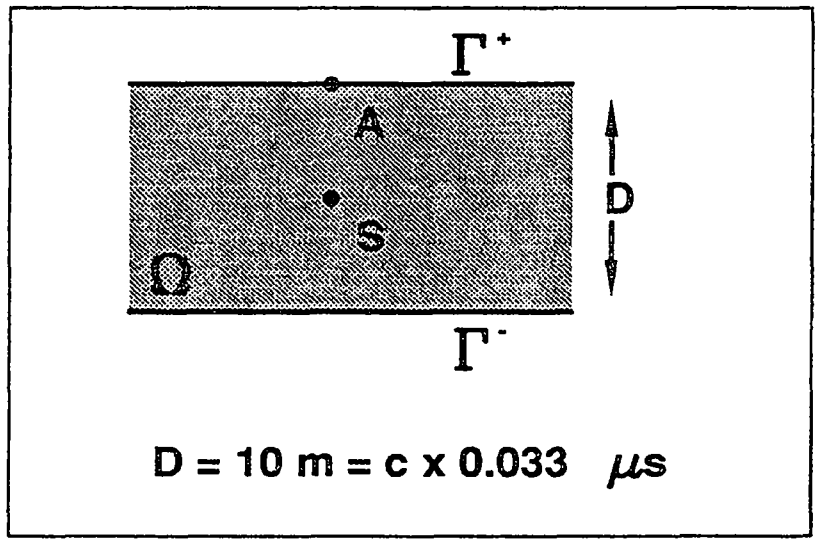


Figure 1.3 : Domaine de calcul de la solution approchée

classiques du second ordre d'Engquist Majda ([12]):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \pm \frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0 \text{ sur } \Gamma^{\pm} \tag{1.3}$$

Nous avons représenté sur la figure 1.4 les variations des solutions de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_{app})$ en fonction du temps et au point A situé à l'aplomb de la source sur Γ^+ (cf figure 1.3). On notera que la présence du bord absorbant a considérablement modifié la forme de la solution et son comportement asymptotique. Ceci est confirmé sur les figures 1.5 et 1.6 où sont représentés des instantanés de la solution de chaque problème au même instant $t = 0.15\mu$ secondes. Les différences entre solution exacte et solution approchée apparaissent clairement importantes:

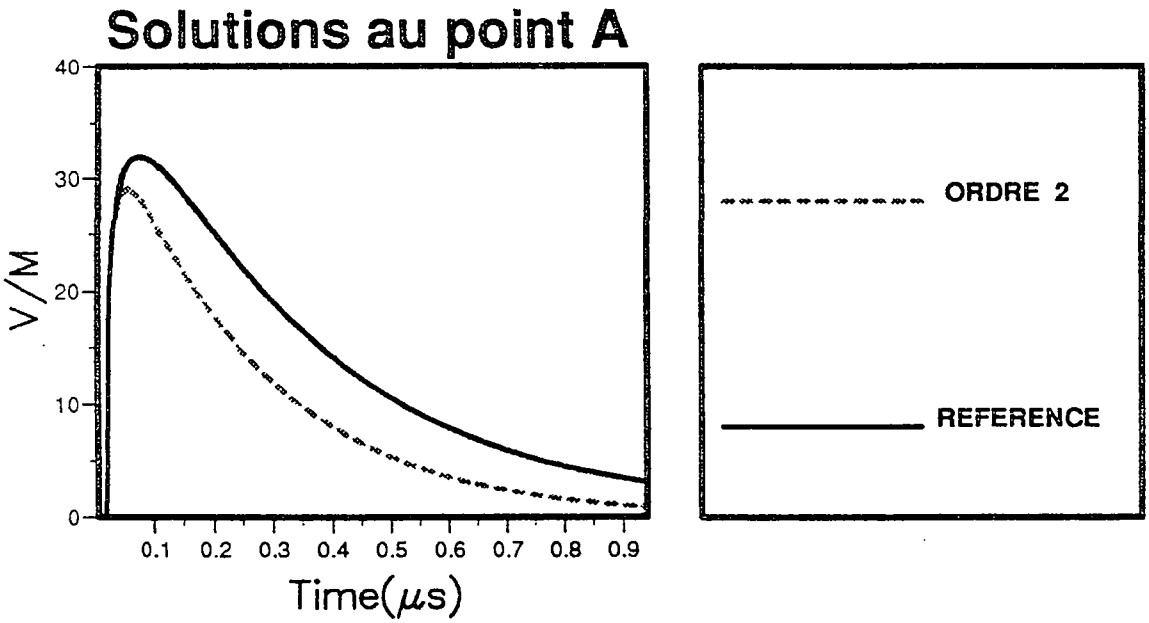


Figure 1.4 : Comparaison des solutions au point A

- Le pic du champ électrique au point source est passé de 56 Volts à 37 Volts.
- le front d'onde avant paraît plus lisse pour la solution approchée.
- La condition transparente 'gondole' le champ électrique.

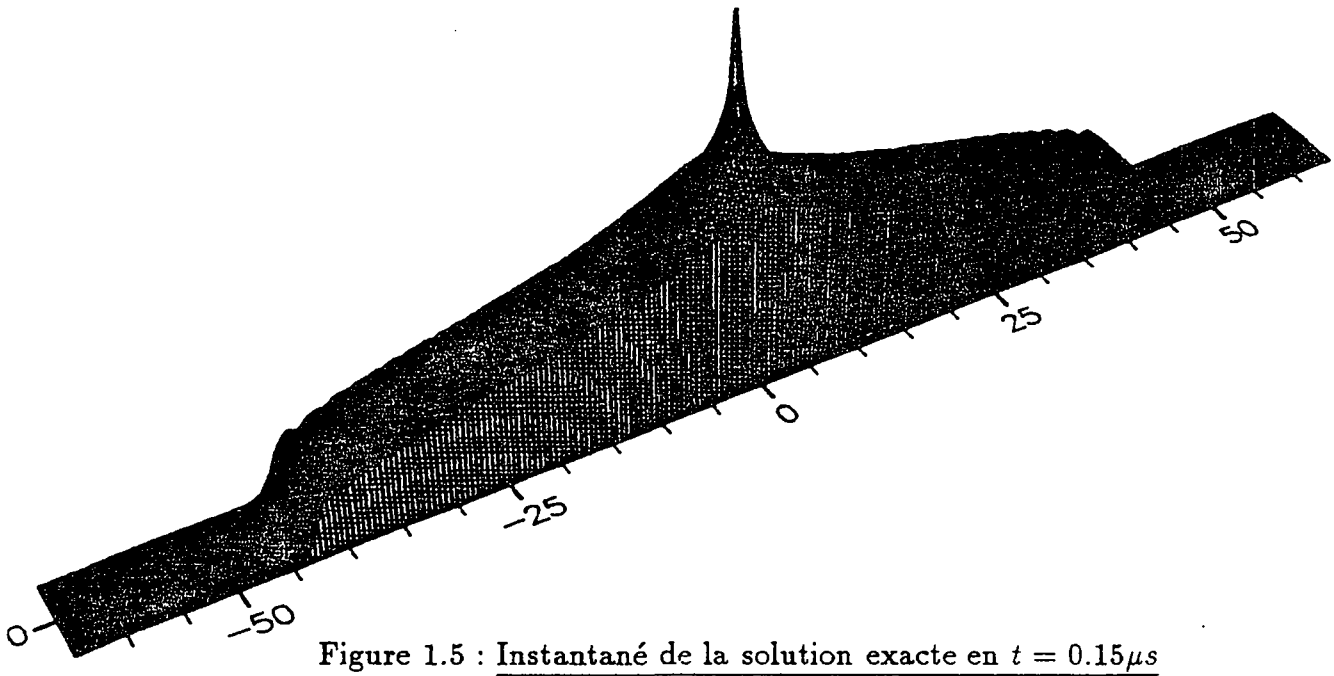


Figure 1.5 : Instantané de la solution exacte en $t = 0.15\mu s$

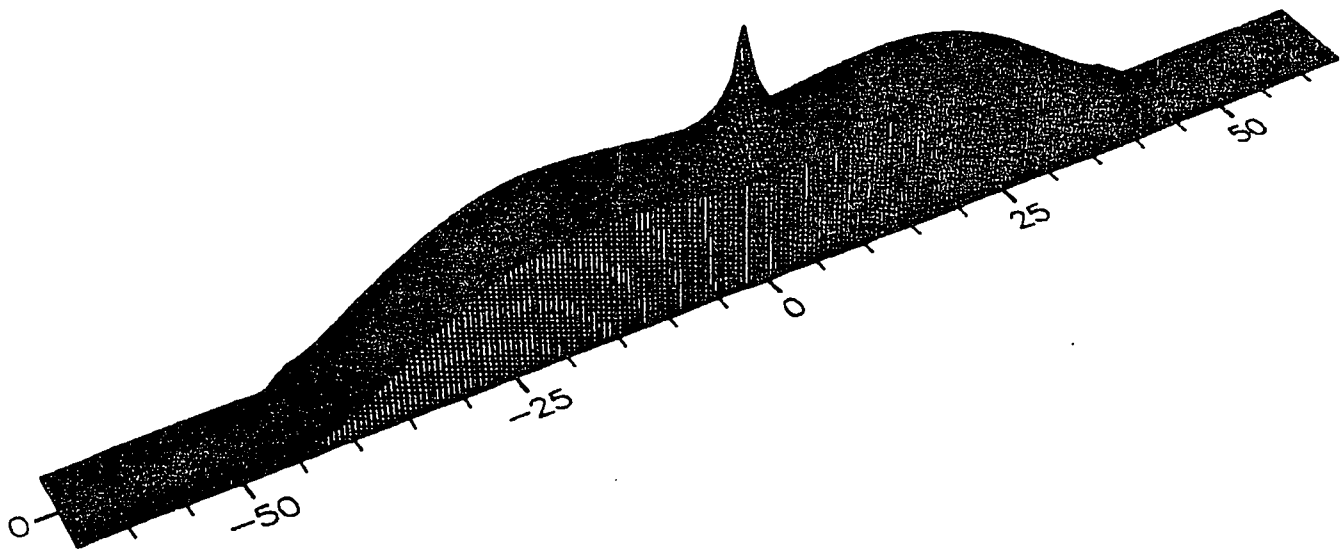


Figure 1.6 : Instantané de la solution approché (ordre 2) au même instant

Dans une seconde étape, nous avons reconsidéré le problème ($\mathcal{P}_{app}$) en substituant à la C.L.A. d'ordre 2 d'Engquist Majda les C.L.A d'ordre élevé. Ces conditions, que nous présenterons dans la section suivante, sont notamment caractérisées par un nombre entier L. La figure (1.7) montre que plus L augmente, meilleure est l'approximation. L'utilisation des C.L.A. permettent ainsi de correctement évaluer le comportement asymptotique de la solution pour les t grands.

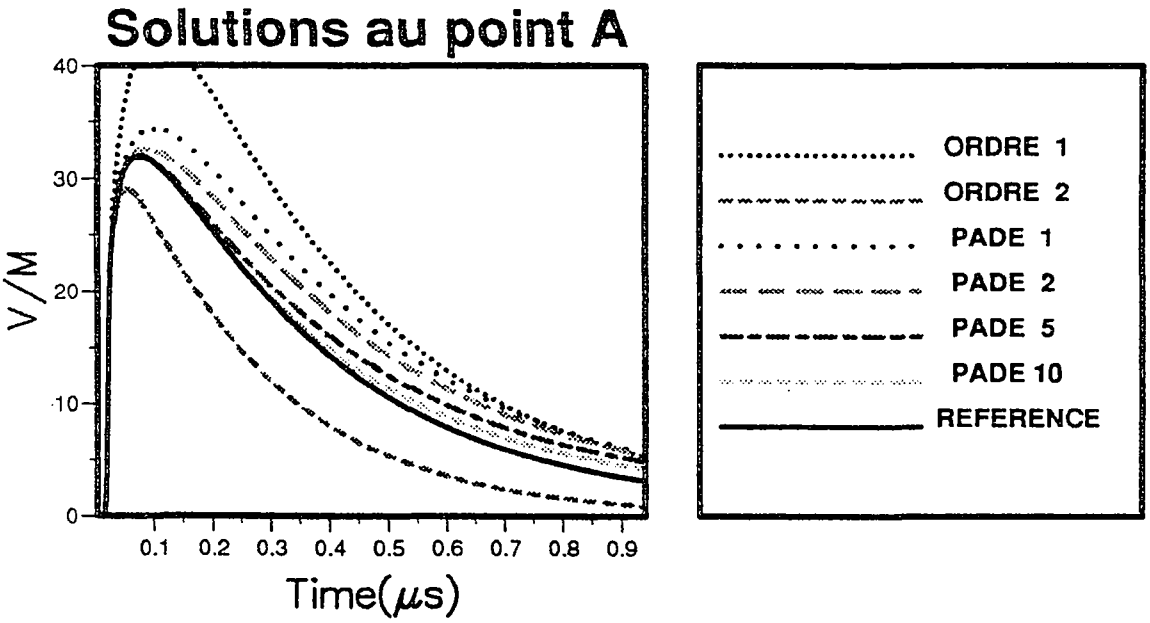


Figure 1.7 : Comparaison des solutions au point A

Les C.L.A. d'ordre élevé permettent ainsi de traiter, dans ce cas, le problème difficile des temps longs (i.e. le cas où le temps de simulation est grand en regard à la taille de la boîte de calcul). Nous renvoyons aux travaux de Barruch H. et Hanouzet B. ([6]) qui ont mentionné cette difficulté et proposé des explications quant à sa nature.

1.2 Rappels sur les conditions aux limites absorbantes

L'objectif de cette section est de présenter les conditions aux limites absorbantes (C.L.A.) qui seront au cœur de notre étude, ainsi que leurs principales propriétés. On commence par rappeler très succintement la façon de dériver la condition transparente. Celle-ci fait intervenir un opérateur non local en espace et en temps. Les conditions absorbantes sont alors construites en approchant cette condition à l'aide d'opérateurs qui sont, quant à eux, différentiels. Une seconde partie sera consacrée à la description de ces conditions. Dans une troisième partie, on rappellera les résultats mathématiques assurant la stabilité et le caractère bien posé du problème couplant l'équation des ondes dans le domaine intérieur et la C.L.A. sur le bord. Puis, on analysera l'erreur due au bord absorbant par le biais de

l'étude, classique, de la réflexion d'une onde plane incidente sur ce bord.

Remarque Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, nous travaillons avec une vitesse de propagation égale à à 1.

1.2.1 Dérivation de la condition transparente

La dérivation de cette condition est maintenant bien connue ([12]). Elle est basée sur l'utilisation de la transformée de Fourier en x_1 et t appliqué au problème $(\mathcal{P}')$:

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}^2 \\ u(t=0) = u_0 \in \mathbf{H}^1\left(\mathbf{R}^2\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 \in \mathbf{L}^2\left(\mathbf{R}^2\right) \\ \text{Support de } \ u_0 \ \text{ et de } \ u_1 \subset \{x_2 < 0\} \end{cases}$$

utilisation loisible puisque ce problème est invariant par translation en x_1, t. Plus précisément, on définit:

$$\hat{u}(k_1, x_2, \omega) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, t) \exp(\imath k_1 x_1) dx_1 \right) \exp(-i\omega t) dt$$

Les estimations d'énergie montrent (cf [11] par exemple) que la solution u de $(\mathcal{P}')$ est telle que $\dfrac{du}{dt}$ est $\mathbf{L}^\infty\left(0, T; \mathbf{L}^2(dx_1, dx_2)\right)$ et il est alors facile de montrer que $i\omega\hat{u}$ appartient à V, ensemble des fonctions analytiques et bornées en ω sur $P^- = \{\omega \in \mathbb{C}\,;\, \Im m\omega < 0\}$ à valeurs dans $\mathbf{L}^2(dk_1, dx_2)$. En outre, on a l'équation:

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx_2^2} + \left(\omega^2 - k_1^2\right)\hat{u} = -\mathcal{F}_{x_1}(u_1) - i\omega\mathcal{F}_{x_1}(u_0)$$

Choisissons δ tel que

$$\text{Supp } (u_0) \ \cup \ \text{Supp } (u_1) \subset \{x_2 < -\delta\}$$

On a alors:

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx_2^2} + \left(\omega^2 - k_1^2\right)\hat{u} = 0 \quad \forall x_2 \geq -\delta \tag{1.4}$$

Etre élément de V implique notamment ne pas croître exponentiellement en x_2. L'unique solution de (1.4) dans V est donc

$$\hat{u}(k_1, x_2, \omega) = \hat{u}(k_1, -\delta, \omega) \exp\left(-i\left(\omega^2 - k_1^2\right)^{1/2}(\delta + x_2)\right) \quad \forall x_2 \geq -\delta \tag{1.5}$$

où la détermination de la racine carrée est choisie de telle sorte que $\Im m\left(\omega^2 - k_1^2\right)^{1/2} < 0$. En dérivant l'équation obtenue par rapport à x_2, on a donc:

$$\frac{d\hat{u}}{dx_2} + i\left(\omega^2 - k_1^2\right)^{1/2}\hat{u} = 0 \quad \forall x_2 \geq -\delta \tag{1.6}$$

Et en appliquant la transformation de Fourier inverse, on obtient:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + T \cdot u = 0 \ \ \forall x_2 \geq -\delta \\ \text{avec } \widehat{T \cdot v} = i\left(\omega^2 - k_1^2\right)^{1/2} \cdot \hat{v} \end{cases} \tag{1.7}$$

Les solutions de cette équation se propagent uniquement dans le sens des x_2 positifs et modélisent la partie montante de la solution de l'équation des ondes complète ([4]). La condition transparente s'obtient en imposant la condition (1.7) reliant les traces de u et de sa dérivée normale sur le bord artificiel $x_2 = 0$. On obtient ainsi un problème posé sur $\mathbb{R}^2_- = \{(x_1, x_2), x_2 < 0\}$:

$$(\mathcal{P}'_-) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2_- \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + T \cdot u = 0 \ \text{ en } \ x_2 = 0 \\ u(t=0) = u_0 \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^2_-\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 \in \mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^2_-\right) \end{cases}$$

Il est alors facile de montrer que la solution de $(\mathcal{P}'_-)$ coïncide avec la restriction à $\mathbb{R}^2_-$ de la solution de $(\mathcal{P}')$: le bord artificiel n'induit aucune réflexion pour ce choix de condition sur $x_2 = 0$ et la condition est dite transparente.

1.2.2 Conditions approchées

Comme nous l'avons rappelé, la condition transparente fait intervenir un opérateur T non local en espace et en temps (son symbole n'est ni un polynôme ni une fraction rationnelle en (k_1, ω)). Afin d'avoir un opérateur plus maniable numériquement, on est conduit à approcher cet opérateur par un autre opérateur qui est, lui, différentiel. L'idée est ainsi d'approcher le symbole de T par des polynômes ou des fractions rationnelles. L'approximation ne peut, bien sûr, pas être uniforme sur le plan (k_1, ω) et il convient de choisir la plage de valeurs de ce couple pour laquelle on va exiger une bonne approximation. Ce choix est conduit par l'argument heuristique suivant:

Supposons que $|k_1| > \omega$, par exemple $k_1 = \omega(1+\epsilon)$, l'expression (1.5) montre que:

$$|\hat{u}(k_1, x_2, \omega)| \leq C^{ste} \exp - (\omega\epsilon(x_2 + \delta))$$

et il y a décroissance exponentielle de la solution: on est en présence d'une onde évanescente. On est donc naturellement conduit à négliger ces ondes et à ne considérer que la zone des (k_1, ω) tels que:

$$\left|\frac{k_1}{\omega}\right| < 1$$

qui correspond aux ondes propagatives.

Cet argument mériterait d'être étayé par des estimations plus précises. Nous ne le ferons pas ici. Remarquons enfin que l'argument tombe pour $\omega = 0$: les approximations considérées sont donc aussi des approximations "hautes fréquences".

1.2.3 Zoologie des approximations

Nous décrivons ici les approximations qu'il est classique de considérer et nous écrivons les C.L.A. qui leurs correspondent.
On part de l'équivalence, vraie sur $\Im m\omega < 0$:

$$\Im m\left(\omega^2 - k_1^2\right)^{1/2} < 0 \iff \left(\omega^2 - k_1^2\right)^{1/2} = \omega\left[1 - \frac{k_1^2}{\omega^2}\right]^{1/2}$$

où la racine carrée entre crochets est définie via la détermination principale du logarithme. Ainsi, on a pour les ondes propagatives :

$$\left(\omega^2 - k_1^2\right)^{1/2} = \omega\left[1 - \frac{k_1^2}{\omega^2}\right]^{1/2} = \omega\sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{avec} \qquad x = \frac{k_1}{\omega} \qquad |x| < 1$$

On définit alors l'approximation d'ordre 1

$$\sqrt{1 - x^2} \approx 1$$

qui correspond à la C.L.A. du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ en } x_2 = 0 \tag{1.8}$$

Cette condition est transparente pour les ondes dont l'incidence est normale par rapport au bord $x_2 = 0$ (i.e. indépendantes de x_1).
L'approximation d'ordre 2 s'écrit

$$\sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$$

Elle est obtenue à l'aide d'un développement de Taylor et renvoie à la condition d'Engquist Majda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0 \text{ en } x_2 = 0 \tag{1.9}$$

Afin d'améliorer ces approximations, on pourrait penser utiliser un développement de Taylor à un ordre supérieur, mais cela conduit à des problèmes mal posés([12]). Une autre idée consiste à construire des approximations par fractions rationnelles. Pour cela, on se donne $2L$ nombres réels α_l et β_l et on écrit:

$$\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{x^2}{1-\alpha_l x^2} \tag{1.10}$$

Le choix des coefficients α_l et β_l a fait l'objet d'études antérieures ([2] ,[3], [4], [10]). Citons, par exemple, les approximants de Padé: ([3]) pour lesquels

$$\begin{cases} \beta_l &= \dfrac{2}{2L+1} \sin^2\left(\dfrac{l\pi}{2L+1}\right) \\ \alpha_l &= \cos^2\left(\dfrac{l\pi}{2L+1}\right) \end{cases} \tag{1.11}$$

et qui correspond à un développement de Padé de la fonction $\sqrt{1-x^2}$ au voisinage de $x=0$. Pour cette approximation, on a:

$$\sqrt{1-x^2} - \left(1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{x^2}{1-\alpha_l x^2}\right) = O\left(x^{4L+2}\right) \tag{1.12}$$

En d'autres termes, ces approximations sont très précises au voisinage de $k_1/\omega = 0$.
On peut également choisir des coefficients qui minimisent l'écart L^2 ou L^∞ entre $\sqrt{1-x^2}$ et l'approximant (1.10). Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

Une fois l'approximation (1.10) retenue, il nous faut construire la C.L.A. correspondante. Pour ce faire, plusieurs voies sont possibles. En partant de l'équation:

$$\frac{d\hat{u}}{dx_2} + i\omega\left(1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{k_1^2}{\omega^2 - \alpha_l k_1^2}\right)\hat{u} = 0 \qquad \text{en } x_2 = 0 \tag{1.13}$$

On peut tout d'abord prémultiplier cette égalité par le symbole:

$$Q_L\left(\omega^2, k_1^2\right) = \prod_{l=1}^{L}\left(\omega^2 - \alpha_l k_1^2\right)$$

On obtient ainsi une équation polynômiale de la forme:

$$Q_L\left(\omega^2, k_1^2\right)\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} + P_L\left(\omega^2, k_1^2\right) i\omega\hat{u} = 0 \tag{1.14}$$

avec P_L, Q_L homogènes de degrés L. Une première formulation de la C.L.A. peut être obtenue en appliquant la transformation de Fourier inverse sur (1.14). u vérifie alors une équation aux dérivées partielles homogène de degré $2L+1$ et de degré 1 par rapport à x_2.

Cette formulation conduit à un problème difficile à discrétiser.
Pour la seconde formulation, on part de la remarque que modulo l'égalité:

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx_2^2} - \left(k_1^2 - \omega^2\right)\hat{u} = 0,$$

l'équation ci-dessus se factorise en:

$$\prod_{l=1}^{2L+1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\gamma_l\omega\right)\hat{u} = 0$$

où les γ_l sont des complexes, fonctions des α_l et β_l. Supposons que les γ_l soient des réels compris entre 0 et 1. La C.L.A. s'écrit alors:

$$\prod_{l=1}^{2L+1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_l\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot u = 0$$

Elle apparaît comme la composition d'opérateurs du premier ordre et est transparente pour toute onde plane dont l'angle d'incidence θ par rapport à la normale au bord est tel que $\cos\theta = \gamma_l$ pour un certain l. C'est sur cette formulation que Higdon ([17],[16],[18]) travaille.

Pour notre part, nous avons opté pour une troisième formulation qui est classique dans l'étude des équations paraxiales et qui repose sur l'utilisation de fonctions auxiliaires ([22],[3]). On introduit pour chaque $l = 1, \ldots L$ la fonction:

$$\hat{\varphi}_l(k_1,\omega) = \frac{k_1^2}{\omega^2 - \alpha_l k_1^2}\cdot\hat{u}(k_1, x_2 = 0, \omega)$$

L'équation (1.13) devient:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{u}}{dx_2} + i\omega\hat{u} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} i\omega\beta_l\hat{\varphi}_l\hat{u} = 0 \\ (\omega^2 - \alpha_l k_1^2)\hat{\varphi}_l = k_1^2\hat{u}(x_2 = 0) \end{cases}$$

En appliquant la transformation de Fourier inverse, on aboutit à la C.L.A.

$$(1.15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L}\beta_l\frac{\partial\varphi_l}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial^2\varphi_l}{\partial t^2} - \alpha_l\dfrac{\partial^2\varphi_l}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2 = 0, t) \qquad l = 1, \ldots, L \end{cases}$$

Ce système se présente sous la forme d'un couplage entre une équation de transport dans la direction perpendiculaire à la frontière artificielle $x_2 = 0$ et L équations des ondes $1D$ le long de cette même frontière et de vitesse de propagation égale à $\sqrt{\alpha_l}$. Par rapport à la C.L.A. d'ordre 1, on voit que chaque fraction introduit un terme correctif qui prend en compte la variation en x_1 de l'onde incidente sur le bord.

1.2.4 Analyse mathématique des C.L.A.: stabilité

Une fois la C.L.A. (1.15) construite, on doit s'assurer du caractère bien posé du système formé de l'équation des ondes posée à l'intérieur du demi-plan inférieur et de la C.L.A. sur la frontière de ce même domaine. Cette étude a été réalisée par Halpern L. et Trefethen L.N. qui utilisent le critère de Kreiss ([27]) ainsi que par Ha-Duong T. et Joly P. ([11]) à l'aide de techniques énergétiques. Le résultat obtenu peut s'exprimer sous la forme

Théorème 1.1 *(Halpern,L., Trefethen,L.N.)*
Le problème

$$\text{(1.16)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \textit{dans } \mathbf{R}^2_- \\ \\ + \ \textit{C.L.A. (1.15) sur } \ x_2 = 0 \\ \\ + \ \textit{conditions initiales en temps} \end{cases}$$

est fortement bien posé au sens de Kreiss si et seulement si les α_l et les β_l sont choisis tels que:

$$\text{(1.17)} \qquad \begin{cases} 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_L < 1 \\ \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{1-\alpha_m} \ < \ 1 \ ; \ \beta_l \geq 0 \end{cases}$$

Ce théorème nous impose de restreindre le choix des (α_l, β_l) à ceux vérifiant (1.17). Notons que les coefficients donnés par (1.11) satisfont (1.17): les C.L.A. correspondant au développement de Padé conduisent à des problèmes stables.

1.2.5 Analyse mathématique des C.L.A.: précision

Une fois la stabilité assurée, on s'intéresse dans un deuxième temps à l'analyse de l'erreur induite par la présence du bord absorbant. Cette analyse repose sur l'étude du coefficient de réflexion d'une onde plane incidente sur le bord absorbant. Plus précisément, on construit une solution particulière du problème (1.16) sous la forme:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, t) \ = \ \exp i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t) \\ \qquad\qquad\qquad\quad + R \exp i(k_1 x_1 - k_2 x_2 - \omega t) \end{cases}$$

avec

$$\text{(1.18)} \qquad \begin{cases} k_1^2 + k_2^2 = \omega^2 \\ k_1 = \omega \cos\theta \\ k_2 = \omega \sin\theta \end{cases}$$

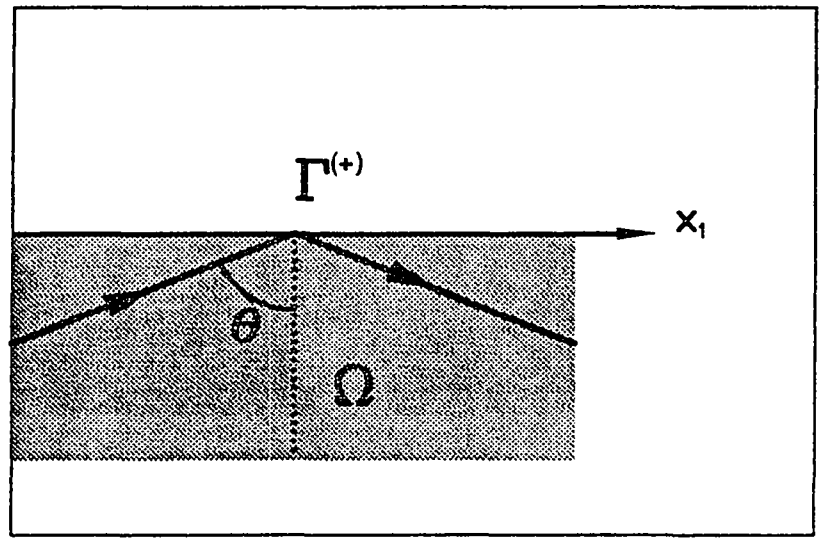


Figure 1.8 : Onde plane incidente et réfléchie

R est le coefficient de réflexion, θ l'angle d'incidence (cf figure ci-dessus).

La relation de dispersion (1.18) implique que l'équation des ondes est vérifiée dans $\mathbb{R}^2_-$. Il ne reste plus qu'à satisfaire la condition absorbante sur $x_2 = 0$. Un calcul simple montre que cette condition est satisfaite si

$$R(k_1,\omega) = \frac{(\omega^2 - k_1^2)^{1/2} - (\omega^2 - k_1^2)^{1/2}_{app}}{(\omega^2 - k_1^2)^{1/2} + (\omega^2 - k_1^2)^{1/2}_{app}}$$

$$\text{avec} \quad \left(\omega^2 - k_1^2\right)^{1/2}_{app} = \omega\left(1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{k_1^2}{\omega^2 - \alpha_l k_1^2}\right)$$

ou de manière équivalente:

$$R(\theta) = \frac{\cos\theta - \left(1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{\sin^2(\theta)}{1 - \alpha_l \sin^2\theta}\right)}{\cos\theta + \left(1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{\sin^2(\theta)}{1 - \alpha_l \sin^2\theta}\right)}$$

Sur ces formules, on voit clairement que ce coefficient est directement lié au défaut d'approximation de la racine carrée par les fractions rationnelles dans la formule (1.10). L'objectif est bien sûr d'obtenir le coefficient de réflexion le plus faible possible. Nous avons représenté sur la figure 1.9 les coefficients de réflexion correspondant aux C.L.A. d'ordre 1 et 2 ainsi qu'à celles définies à l'aide des approximants de Padé avec $L = 1, 5, 10$. On remarquera l'amélioration induite par le choix d'une approximation d'ordre élevé. Le coefficient de

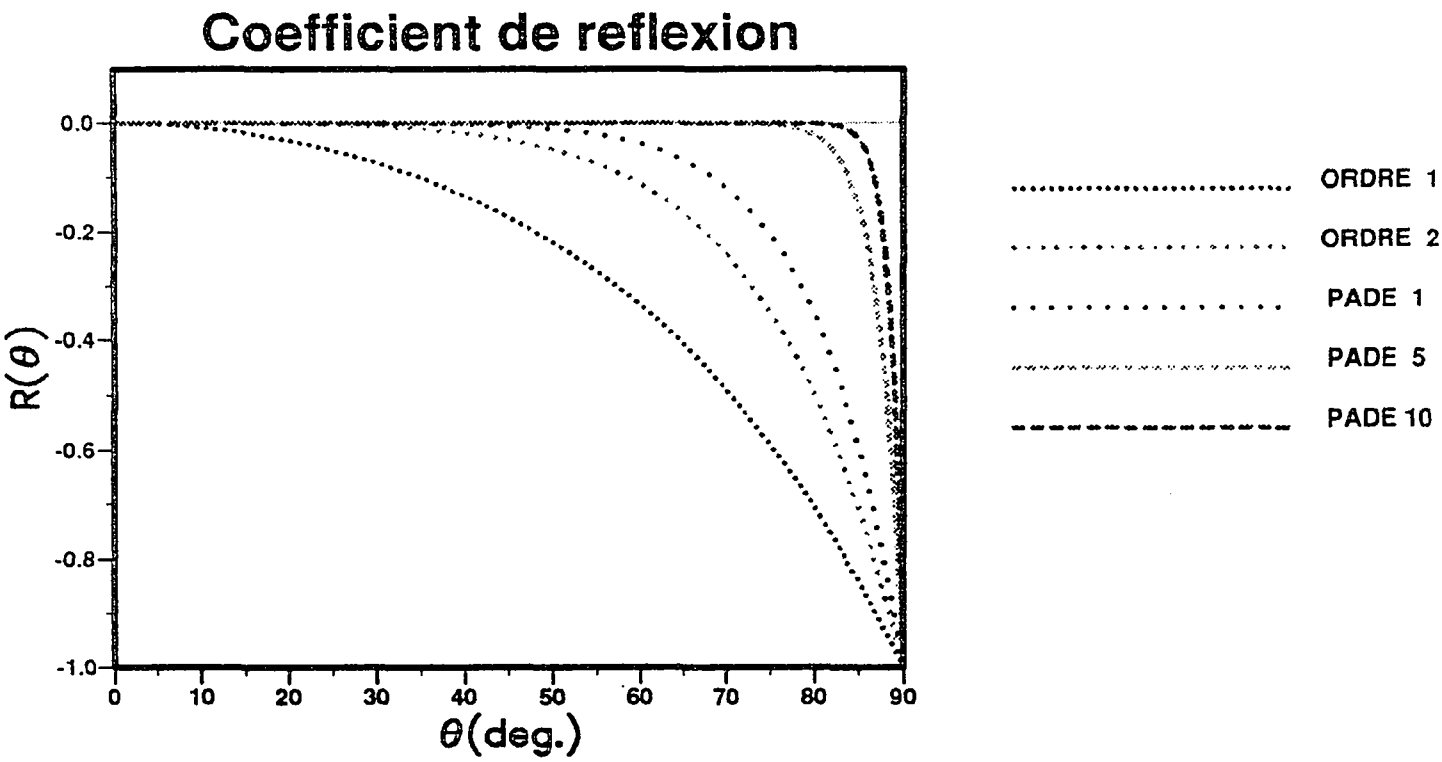


Figure 1.9 : Comparaison des coefficients de réflexion pour différentes C.L.A.

réflexion a tendance à s'aplatir (cf le comportement (1.12)) au fur et à mesure que l'ordre de l'approximation augmente et ainsi à induire un coefficient faible pour une plage d'angles de plus en plus grande.

Une idée naturelle pour choisir les coefficients (α_l, β_l) est de retenir ceux qui minimisent le coefficient de réflexion. C'est l'approche des coefficients optimisés (cf [3],[10]) On pourra prendre par exemple

$$(\alpha_l, \beta_l) = \arg\min \left(\int_0^{\pi/2} |R(\theta : \alpha_l, \beta_l)|^2 \, d\theta \right)$$

Cette minimisation a été faite par Vezinet,R. qui a calculé une solution optimale pour $L = 5$. La figure 1.10 compare les coefficients de réflexion obtenus d'une part pour ces coefficients optimaux et d'autre part pour les coefficients de Padé avec $L = 5$. On remarquera la diminution du coefficient de réflexion pour les coefficients optimisés. Curieusement, ce choix de coefficients optimisés ne donne pas de bons résultats sur le problème modèle $(\mathcal{P}_{app})$ de la section précédente. Il y a une nette détérioration par rapport aux coefficients dérivés par Padé et cela, répétons le, alors que le coefficient de réflexion est bien meilleur.

Bien que nous n'ayons pas complètement compris ce phénomène nous proposons l' explication suivante en nous basant sur un calcul analytique qui n'est pas présenté ici: c'est la présence d'un pôle imaginaire pur, $\omega = i\alpha$, de la transformée de Fourier de la source "double exponentielle" (cf 1.1) qui engendre un terme parasite, exponentiellement

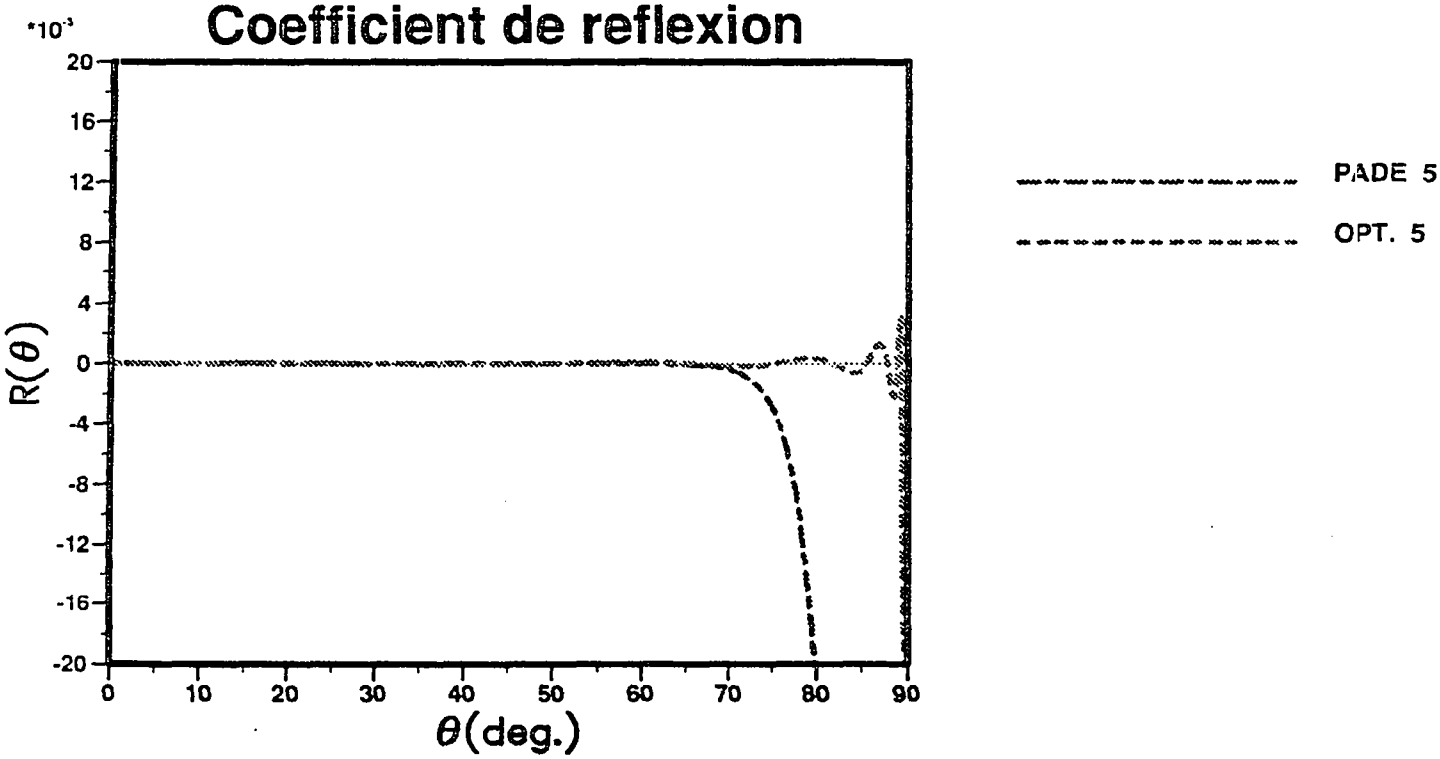


Figure 1.10 : Comparaison des coefficients de réflexion pour 5 fractions rationelles

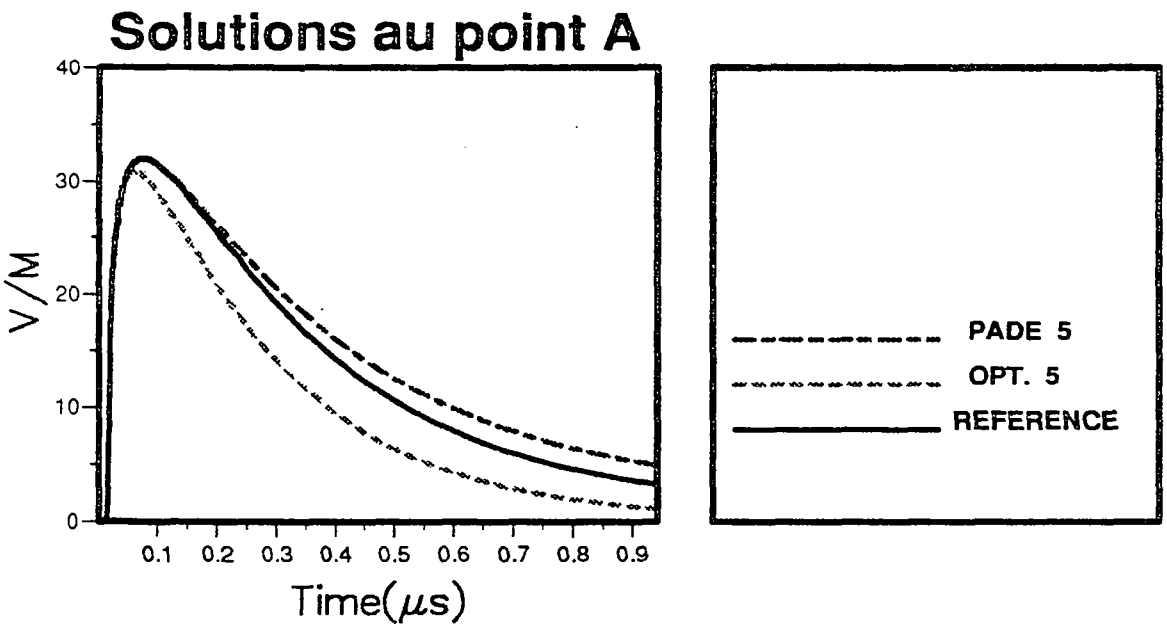


Figure 1.11 : Comparaison des solutions au point A

décroissant en temps, et qui est pondéré par le coefficient de réflexion $R(k_1, \omega = i\alpha)$. Pour l'approximant de Padé, ce coefficient est petit, au moins pour les faibles k_1, car l'approximation de la racine carrée (1.10) est valide uniformément dans le plan complexe des ω situés dans la couronne $|k_1/\omega| \leq 1$. Ce n'est évidemment pas le cas pour les coefficients optimisés pour lesquels l'approximation n'est valide que pour les ω réels. Le terme parasite n'est plus négligeable: il y a détérioration du résultat.

1.2.6 Extension à 3D

Le passage de 2 à 3 dimensions d'espace ne pose pas de difficultés particulières. A 3D, les C.L.A. sont construites à partir d'un système couplé d'une équation de transport dans la direction perpendiculaire au plan artificiel où l'on écrit la C.L.A. avec L équations des ondes $2D$. On a donc simplement substitué L équations des ondes sur le plan aux L équations des ondes $1D$ du cas précédent.

La construction des C.L.A. s'effectue de la manière suivante. On commence par montrer que la solution du problème: $(\mathcal{P}')$:

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}^3 \\ u(t=0) = u_0 \in \mathbf{H}^1\left(\mathbf{R}^3\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 \in \mathbf{L}^2\left(\mathbf{R}^3\right) \\ \text{Support de } u_0 \text{ et de } u_1 \subset \{x_2 < 0\} \end{cases}$$

est telle que

$$(1.19) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + T \cdot u = 0 \quad \forall x_2 \geq -\delta \\ \text{avec } \widehat{T \cdot v} = i\left(\omega^2 - |k|^2\right)^{1/2} \cdot \hat{v} \\ \text{et} \quad |k|^2 = k_1^2 + k_3^2 \end{cases}$$

où $\hat{v}$ est la transformée de Fourier de v en x_1, x_3 et t. On approche cette équation de la même manière que précédemment par:

$$(1.20) \qquad \frac{d\hat{u}}{dx_2} + i\omega \left(1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{|k|^2}{\omega^2 - \alpha_l |k|^2}\right) \hat{u} = 0 \qquad \text{en } x_2 = 0$$

En introduisant les L fonctions auxiliaires

$$\hat{\varphi}_l(k_1, k_3, \omega) = \frac{|k|^2}{\omega^2 - \alpha_l |k|^2} \cdot \hat{u}(k_1, x_2 = 0, k_3, \omega)$$

on aboutit aux C.L.A. sur le plan $x_2 = 0$

$$(1.21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_l}{\partial t^2} - \alpha_l \left(\dfrac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_3^2} \right) = \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right)_{/x_2=0} \qquad l = 1, \ldots, L \end{cases}$$

C'est le résultat annoncé dans le préliminaire.

1.3 Extension des C.L.A. au cas conducteur ou amorti

Nous proposons dans cette section d'étendre les C.L.A. d'ordre élevé au cas $2D$ conducteur ou amorti (adjonction d'un terme $\sigma \partial u/\partial t$ à l'équation des ondes). Par rapport à l'extension au cas 3D du paragraphe précédent, le cas conducteur est un peu plus ouvert dans le sens où il n'y a plus une seule manière de faire. Par exemple, les C.L.A. que nous proposerons ne sont pas identiques à celles qu'avaient proposées Joly P. et Vezinet R. ([20]) pour étendre au cas conducteur les C.L.A. d'ordre 2 du cas non conducteur. Ces nouvelles conditions consisteront à coupler une équation de transport dans la direction perpendiculaire à la droite artificielle avec L équations des ondes amorties $1D$ le long de cette même droite. Concernant la stabilité de ces nouvelles conditions, on montrera un résultat de stabilité forte qui étend au cas conducteur les résultats du cas non amorti énoncés dans le théorème 1.1.

1.3.1 Construction des C.L.A.

Le problème est maintenant

$$(\mathcal{P}')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \dfrac{\partial u}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}^2 \\ u(t=0) = u_0 \in \mathbf{H}^1\left(\mathbf{R}^2\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 \in \mathbf{L}^2\left(\mathbf{R}^2\right) \\ \text{Support de } u_0 \text{ et de } u_1 \subset \{x_2 < 0\} \end{cases}$$

et on a, avec les mêmes arguments que ce qui précède:

$$(1.22)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + T \cdot u = 0 \quad \forall x_2 \geq -\delta \\ \text{avec } \widehat{T \cdot v} = i \left(\omega^2 - i\sigma\omega - k_1^2 \right)^{1/2} \cdot \hat{v} \end{cases}$$

Comme nous l'avons dit, il y a plusieurs manières de faire pour approcher le symbole intervenant dans (1.22). Dans ([20]), l'approximation est construite à partir de l'égalité:

$$(1.23)\qquad \begin{cases} \left(\omega^2 - i\sigma\omega - k_1^2\right)^{1/2} &= \omega\left(1 - \dfrac{i\sigma}{\omega}\right)^{1/2} \cdot \left(1 - \dfrac{k_1^2}{\omega^2 - i\sigma\omega}\right)^{1/2} \\ &= \omega\hat{T}_\sigma(\omega) \cdot \left(1 - \dfrac{k_1^2}{\omega^2 - i\sigma\omega}\right)^{1/2} \end{cases}$$

Dans une première étape, on commence par construire une approximation de la racine carrée où k_1 apparaît et en conservant $\hat{T}_\sigma$. On obtient:

$$(1.24)\qquad \frac{d\hat{u}}{dx_2} + i\omega\hat{T}_\sigma \cdot \left(1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{k_1^2}{\omega^2 - i\sigma\omega - \alpha_l k_1^2}\right)\hat{u} = 0 \qquad \text{en } x_2 = 0$$

(Joly et Vezinet choisissent $L = 1, \alpha_l = 0, \beta_l = 1/2$, ce qui correspond à la condition du second ordre). En introduisant les L fonctions auxiliaires

$$\hat{\varphi}_l(k_1, \omega) = \frac{k_1^2}{\omega^2 - i\sigma\omega - \alpha_l k_1^2} \cdot \hat{u}(k_1, x_2 = 0, \omega)$$

on obtient par les techniques qui nous sont maintenant familières,

$$(1.25)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + T_\sigma \cdot \left(\dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial t}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_l}{\partial t^2} + \sigma\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial t} - \alpha_l \dfrac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2 = 0, t) \qquad l = 1, \ldots, L \end{cases}$$

T_σ est un opérateur de convolution en temps dont l'expression fait intervenir des fonctions de Bessel de seconde espèce

$$T_\sigma = \mathcal{F}_t^{-1}\left[1 - \frac{i\sigma}{\omega}\right]^{1/2} = \delta(t) + \frac{\sigma}{2}\left(I_0(\frac{\sigma t}{2}) + I_1(\frac{\sigma t}{2})\right)$$

Cet opérateur étant non local en temps, on construit dans une seconde étape un opérateur approché en utilisant une approximation de son symbole

$$\hat{T}_\sigma = 1 + \sum_{m=1}^{M} \frac{\sigma\gamma_m}{\sigma\delta_m + i\omega}$$

(on a de nouveau utilisé $\sqrt{1+x} \approx 1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{M} \gamma_m x/(1 + \delta_m x)$ avec $x = -i\sigma/\omega$) Le nouveau problème s'écrit dans le domaine de Fourier:

$$(1.26)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\hat{u}}{dx_2} + i\omega\left(1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{M} \frac{\gamma_m\sigma}{\sigma\delta_m + i\omega}\right) \cdot \left(\hat{u} - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \hat{\varphi}_l\right) = 0 \\ \left(\omega^2 - i\sigma\omega - \alpha_l k_1^2\right) \cdot \hat{\varphi}_l = k_1^2 \hat{u} \end{cases}$$

Ce système est un peu lourd à mettre en oeuvre lorsque L est grand car il conduit à définir des fonctions auxiliaires de fonctions auxiliaires. C'est pourquoi nous avons préféré ne pas faire la décomposition (1.23) mais de partir de:

$$\left(\omega^2 - i\sigma\omega - k_1^2\right)^{1/2} = \omega\left[1 - \left(\frac{i\sigma}{\omega} + \frac{k_1^2}{\omega^2}\right)\right]^{1/2}$$

en supposant $\dfrac{i\sigma}{\omega} + \dfrac{k_1^2}{\omega^2}$ petit, on peut faire l'approximation

$$\left(\omega^2 - i\sigma\omega - k_1^2\right)^{1/2} \approx \omega\left(1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{i\omega\sigma + k_1^2}{\omega^2 - \alpha_l(i\sigma\omega + k_1^2)}\right)$$

ce qui conduit à l'équation approchée

$$\text{(1.27)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\hat{u}}{dx_2} + i\omega\left(\hat{u} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \beta_l \hat{\varphi}_l\right) = 0 \\ \omega^2\varphi_l^2 - \alpha_l(i\sigma\omega + k_1^2)\hat{\varphi}_l = (i\sigma\omega + k_1^2)\hat{u} \end{cases}$$

ce qui se réinterprète sous la forme

$$\text{(1.28)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_l}{\partial t^2} - \alpha_l\left(\dfrac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_1^2} - \sigma\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial t}\right) = \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \sigma\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{/x_2=0} \qquad l = 1, \ldots, L \end{cases}$$

On a bien L équations des ondes amorties $1D$ couplées avec une équation de transport dans la direction x_2. Les C.L.A. (1.28) sont des conditions nouvelles. Lorsque σ est nul, elles redonnent les C.L.A. d'ordre élevé pour l'équation des ondes étudiées dans la section précédente. De plus, ces conditions généralisent au cas $2D$ les C.L.A. de Joly Vézinet pour l'équation des ondes amorties $1D$.

1.3.2 Etude de la stabilité

Nous analysons ici la stabilité des C.L.A.. Nous considérons le problème:

$$(\mathcal{P}_\sigma)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sigma\dfrac{\partial u}{\partial t}-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u=0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2_- = \{(x_1,x_2),\, x_2<0\} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u}{\partial t}-\sum_{l=1}^{L}\beta_l\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial t}=0 \quad \text{en} \quad x_2=0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_l}{\partial t^2}-\alpha_l\left(\dfrac{\partial^2\varphi_l}{\partial x_1^2}-\sigma\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial t}\right)=\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\sigma\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{/x_2=0} \qquad l=1,\ldots,L \\ u(t=0)=u_0\in \mathbf{H}^1\left(\mathbb{R}^2\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0)=u_1\in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^2\right) \\ \text{Support de } u_0 \text{ et de } u_1 \subset \{x_2\le -d\} \\ \text{Conditions initiales nulles pour les } \varphi_l \text{ en } t=0 \end{cases}$$

Le résultat que l'on va obtenir s'écrit sous la forme d'un théorème:

Théorème 1.2
Si $\sigma \ge 0$, le problème $(\mathcal{P}_\sigma)$ admet une solution unique

$$\begin{cases} u(t) & \in \mathbf{L}^1\left(0,T;\mathbf{H}^1\left(\mathbb{R}^2_-\right)\right)\cap \mathbf{W}^{1,1}\left(0,T;\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^2_-\right)\right) \\ \forall l\,,\varphi_l(t) & \in \mathbf{L}^1\left(0,T;\mathbf{H}^{-1/2}\left(\{x_2=0\}\right)\right)\cap \mathbf{W}^{1,1}\left(0,T;\mathbf{H}^{-3/2}\left(\{x_2=0\}\right)\right) \end{cases}$$

avec l'estimation

$$\int_0^T dt\left(\left\|\vec{\nabla}u(t)\right\|+\left\|\frac{du(t)}{dt}\right\|\right)\le 1.76\,T\left(\left\|\vec{\nabla}u_0\right\|+\|u_1\|\right)$$

$$\left(\|v\|\equiv\|v\|_{\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^2_-\right)}\right)$$

dés que les α_l, β_l satisfont les conditions:

(1.29)

$$\begin{cases} 0\le\alpha_1\le\alpha_2\le\ldots\le\alpha_L<1 \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{1-\alpha_m}<1 \;;\; \beta_l\ge 0 \end{cases}$$

Preuve

La preuve s'effectue en plusieurs étapes et a des liens très profonds avec l'analyse de Kreiss ([27]) dans le sens où elle utilise également la transformation de Fourier et repose sur les propriétés de l'erreur de l'approximation (1.10) considérée comme fonction d'une variable complexe. Mais elle s'en distingue par le fait que la présence du terme en $\sigma\partial u/\partial t$ fait perdre et le caractère strictement hyperbolique du problème et l'argument d'homogénéité entre variables d'espaces et de temps, arguments qui sont cruciaux dans la technique de Kreiss. On commence tout d'abord par régulariser les conditions initiales de telle sorte que les calculs suivants soient loisibles.

La solution est recherchée sous la forme

$$u = u_i + \delta u$$

u_i est l'onde incidente. C'est la restriction à $\mathbb{R}^2_-$ de la solution du problème posé dans $\mathbb{R}^2$ tout entier:

$$(\mathcal{P}_I)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \sigma\dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) u_i = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ u_i(t=0) = u_0 \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(t=0) = u_1 \\ \text{Support de } u_0 \text{ et de } u_1 \subset \{x_2 \leq -d\} \end{cases}$$

δu est l'onde réfléchie par le bord. Elle est solution du problème:

$$(\mathcal{P}_R)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} + \sigma\dfrac{\partial \delta u}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\delta u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2_- \\ \dfrac{\partial \delta u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \delta u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \beta_l \dfrac{\partial \delta\varphi_l}{\partial t} = -\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \beta_l \dfrac{\partial \varphi_{i,l}}{\partial t}\right) \quad \text{en} \quad x_2 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_{i,l}}{\partial t^2} - \alpha_l\left(\dfrac{\partial^2 \varphi_{i,l}}{\partial x_1^2} - \sigma\dfrac{\partial \varphi_{i,l}}{\partial t}\right) = \left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} - \sigma\dfrac{\partial u_i}{\partial t}\right)_{/x_2=0} \quad l = 1,\ldots,L \\ \dfrac{\partial^2 \delta\varphi_l}{\partial t^2} - \alpha_l\left(\dfrac{\partial^2 \delta\varphi_l}{\partial x_1^2} - \sigma\dfrac{\partial \delta\varphi_l}{\partial t}\right) = \left(\dfrac{\partial^2 \delta u}{\partial x_1^2} - \sigma\dfrac{\partial \delta u}{\partial t}\right)_{/x_2=0} \quad l = 1,\ldots,L \\ \delta u(t=0) = 0 \\ \dfrac{\partial \delta u}{\partial t}(t=0) = 0 \\ \text{Conditions initiales nulles pour les } \delta\varphi_l, \varphi_{i,l} \text{ en } t = 0 \end{cases}$$

δu se détermine analytiquement par le biais de la transformation de Fourier. Si l'on pose

$$\delta\tilde{u}(k_1, x_2, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta u(x_1, x_2, t) \exp ik_1 x_1 dx_1$$

alors, après élimination des fonctions auxiliaires, on montre que

$$\delta\tilde{u}(k_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{R_\sigma}(\omega_r, k_1)\hat{u}_s(k_1, x_2, \omega_r)\exp i\omega_r t d\omega_r$$

avec

$$\left|\begin{array}{l} \widehat{R_\sigma}(\omega_r, k_1) = \left|\begin{array}{ll} \lim & R_\sigma(\omega, k_1) \\ \omega \longrightarrow \omega_r & \\ \Im m\omega < 0 & \end{array}\right. \\ \\ R_\sigma(\omega, k_1) = \dfrac{(\omega^2 - i\omega\sigma - k_1^2)^{1/2} - \omega\left(1 - \sum_{l=1}^{L}\beta_l \dfrac{i\omega\sigma + k_1^2}{\omega^2 - \alpha_l(i\omega\sigma + k_1^2)}\right)}{(\omega^2 - i\omega\sigma - k_1^2)^{1/2} + \omega\left(1 - \sum_{l=1}^{L}\beta_l \dfrac{i\omega\sigma + k_1^2}{\omega^2 - \alpha_l(i\omega\sigma + k_1^2)}\right)} \\ \\ \Im m\,(\omega^2 - i\omega\sigma - k_1^2)^{1/2} < 0 \ \text{ pour } \ \Im m\omega < 0 \end{array}\right. \tag{1.30}$$

et

$$\hat{u}_s(k_1, x_2, \omega) = \hat{u}_i(k_1, -x_2, \omega) = \hat{u}_i(k_1, 0, \omega)\exp\left(-i\left(\omega^2 - i\omega\sigma - k_1^2\right)^{1/2}\cdot x_2\right)$$

$$\hat{u}_i(k_1, x_2, \omega) = \int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_i(x_1, x_2, t)\exp ik_1x_1dx_1\right)\exp -i\omega t dt$$

Ainsi, δu apparaît comme la convolution en x_1, t d'une fonction "coefficient de réflexion" caractérisant la C.L.A. du bord absorbant avec la symétrisée (ou l' image) par rapport à ce bord de l'onde incidente u_i

$$u = u_i + R_\sigma *_{(x_1,t)} \text{Sym}_{x_2=0}(u_i) \tag{1.31}$$

On ramène ainsi le problème à l'analyse des propriétés du noyau de convolution R_σ. Le lemme suivant résume un certain nombre de ces propriétés:

Lemme 1.1 ;
Si $\sigma \geq 0$ et si les α_l et β_l satisfont les conditions du théorème 1.2, alors le coefficient de réflexion défini en (1.30) vérifie:.

$$\left|\widehat{R_\sigma}(\omega, k_1)\right| \leq 1 \quad \forall k_1 \in \mathbb{R},\ \forall\omega \in \mathbb{C}, \Im m\omega < 0 \tag{1.32}$$

De plus,

$$t \longrightarrow \tilde{R}_\sigma(k_1, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{R_\sigma}(\omega_r, k_1)\exp i\omega_r t d\omega_r,$$

définit une fonction causale (i.e. nulle pour $t \leq 0$) et de carré intégrable.

Admettons pour le moment ce lemme, et montrons comment l'estimation du théorème en découle.
Fixons $\eta > 0$ et calculons

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t} \|u\|_V^2 \, dt = \int_0^\infty e^{-2\eta t} \left\{ \int_{-\infty}^0 dx_2 \int_{-\infty}^\infty dx_1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) \right\} dt$$

Utilisons Plancherel, on a

$$\forall \varphi(x_1, t) \in \mathbf{L}^2 \left(\mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_{x_1} \right),$$

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t} \left(\int_{-\infty}^\infty \varphi^2(x_1, t) dx_1 \right) dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_1}{2\pi} \left| \hat{\varphi}(k_1, \omega - i\eta) \right|^2$$

et donc, en utilisant le fait que u est causale (i.e. à support dans $\mathbf{R}^+$) puisque u_i et R_σ le sont:

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t} \|u\|_V^2 \, dt = \int_{-\infty}^0 dx_2 \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_1}{2\pi} A(k_1, x_2, \omega - i\eta)$$

$$\text{avec} \quad A = \left((|k_1|^2 + |\omega - i\eta|^2) |\hat{u}|^2 + \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} \right|^2 \right)$$

Utilisons la décomposition (1.31), il vient:

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t} \|u\|_V^2 \, dt \leq 2 \int_{-\infty}^0 dx_2 \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_1}{2\pi} B(k_1, \omega, x_2, \eta)$$

$$\text{avec} \quad B = (|k_1|^2 + |\omega - i\eta|^2) \left(|\hat{u}_i|^2 + \left| \widehat{R_\sigma} \right|^2 |\hat{u}_s|^2 \right) + \left| \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_2} \right|^2 + \left| \widehat{R_\sigma} \right|^2 \left| \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x_2} \right|^2$$

Or, d'après le lemme, $|\widehat{R_\sigma}(k_1, \omega)|$ est toujours plus petit que 1 et comme de plus u_s est la symétrique de u_i, on a

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t} \|u\|_V^2 \, dt \leq 2 \int_{-\infty}^\infty dx_2 \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_1}{2\pi} \left((|k_1|^2 + |\omega - i\eta|^2) |\hat{u}_i|^2 + \left| \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_2} \right|^2 \right)$$

soit, en réutilisant Plancherel,

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t} \|u\|_V^2 \, dt \leq 2 \int_0^\infty e^{-2\eta t} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^\infty dx_1 \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 \right) \right\} dt$$

le terme entre accolades n'est autre que l'énergie dans $\mathbf{R}^2$ de la solution u_i du problème $\mathcal{P}_I$. Cette énergie est décroissante si σ est positif et conservée si σ est nul. Dans tous les cas, elle est minorée par sa valeur en $t = 0$. D'où:

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t} \|u_i\|_V^2 \, dt \leq 2 \left(\int_0^\infty e^{-2\eta t} dt \right) \left(\left\| \vec{\nabla} u_0 \right\|^2 + \|u_1\|^2 \right)$$

Soit

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t} \|u\|_V^2 \, dt \leq \frac{1}{\eta} \left(\left\| \vec{\nabla} u_0 \right\|^2 + \|u_1\|^2 \right)$$

On en déduit facilement que $\forall \eta > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u\|_V \, dt &= \int_0^\infty e^{\eta t} 1_{[0,T]}(t) e^{-\eta t} \|u\|_V \, dt \\
&\leq \left(\int_0^\infty e^{-2\eta t} \|u\|_V^2 \, dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^T e^{2\eta t} dt \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\left(\left\| \vec{\nabla} u_0 \right\|^2 + \|u_1\|^2 \right)^{1/2}}{\sqrt{\eta}} \cdot \left(\frac{e^{2\eta T} - 1}{2\eta} \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\left\| \vec{\nabla} u_0 \right\| + \|u_1\| \right) \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x^2} \right)^{1/2} \cdot T \quad \text{avec } x = \eta T
\end{aligned}$$

On en déduit que,

$$\int_0^T \|u\|_V \, dt \leq \left(\left\| \vec{\nabla} u_0 \right\| + \|u_1\| \right) \gamma T$$

avec

$$\gamma = \inf_x \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x^2} \right)^{1/2} \equiv 1.757... < 1.76$$

C'est l'estimation du théorème.

Une fois cette estimation obtenue, on peut montrer, en travaillant sur les équations des ondes satisfaites par chaque φ_l que φ_l est nécessairement bornée à valeurs dans $\mathsf{H}^{-1/2}$ du bord tandis que sa dérivée en temps est bornée à valeurs dans $\mathsf{H}^{-3/2}$. Les résultats d'existence et d'unicité des solutions $u, \varphi_l, l = 1, ..., L$ reposent alors sur les techniques classiques d'analyse numérique (écriture du problème sous forme d'un problème d'évolution variationnel, construction d'une solution approchée et passage à la limite à l'aide des estimations). Il ne reste donc qu'à montrer le Lemme (1.1), on commence par la

Preuve de l'inégalité (1.32)

On va tout d'abord choisir une détermination analytique de la racine carrée intervenant dans (1.30). On prend

$$\left(\omega^2 - i\omega\sigma - k_1^2 \right)^{1/2} = \omega \left[1 - \frac{i\omega\sigma + k_1^2}{\omega^2} \right]^{1/2}$$

où la racine carrée entre crochets est la racine carrée classique de partie réelle positive et définie dans le plan complexe coupé des réels négatifs ou nuls. La racine n'est donc pas définie pour:

$$1 - \frac{i\omega\sigma + k_1^2}{\omega^2} \in \mathbb{R}_-$$

soit

$$\frac{\omega^2}{i\omega\sigma + k_1^2} \in [0,1]$$

Pour être compatible avec la définition (1.30), il nous faut vérifier que cette racine est bien définie dans le demi-plan des ω de partie imaginaire négative et que sa partie imaginaire est négative lorsque ω est de partie imaginaire négative.

- On doit donc d'abord montrer que:

$$\text{si } \frac{\omega^2}{i\omega\sigma + k_1^2} \in [0,1] \text{ alors } \Im m\omega \geq 0$$
$$\text{or } \frac{\omega^2}{i\omega\sigma + k_1^2} = \frac{k_1^2}{\sigma^2} \cdot \frac{z^2}{1+iz} \text{ avec } z = \frac{\omega\sigma}{k_1^2}$$

et il suffit de montrer que si $z^2/(1+iz) \in \mathbb{R}^+$ nécessairement $\Im mz \geq 0$. Un calcul simple montre que:

$$\frac{z^2}{1+iz} \in \mathbb{R}^+,\ z = a + ib \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ et } b \geq 1 \\ (b-1)^2 + a^2 = 1\ (\Rightarrow b \geq 0) \end{cases}$$

La coupure est donc située sur une portion de cercle ou une portion de demi-droite verticale qui sont placées dans le demi-plan des complexes de parties imaginaires positives ou nulles. Ces propriétés ne sont vraies que si σ est non nul. Lorsque σ est nul, la coupure est facilement déterminée égale au segment $[-|k_1|, |k_1|]$ qui est également hors du demi-plan des complexes de partie imaginaire strictement négative.

- Reste à montrer que:

$$F(\omega) = \Im m\left(\omega\left[1 - \frac{i\omega\sigma + k_1^2}{\omega^2}\right]^{1/2}\right) < 0 \text{ si } \Im m\omega < 0$$

On raisonne par l'absurde, on suppose qu'il existe un ω_0 de partie imaginaire négative tel que $F(\omega_0)$ soit positive. Considérons l'application

$$[1,\infty] \hookrightarrow \mathbb{R}$$
$$\lambda \longmapsto F(\lambda\omega_0)$$

Le chemin $[\omega_0, \omega_0 \cdot \infty]$ est situé dans le demi-plan P^- des complexes de partie imaginaire négative. Il est en particulier et d'après ce qui précède, situé dans le domaine d'analycité de la racine carrée. La fonction f est donc continue. Elle est positive en $\lambda = 1$ et comme $f(\lambda) \sim \Im m(\omega_0)\lambda$ lorsque λ tend vers l'infini, elle est négative à l'infini. Il existe donc un λ_* et un ω_* situé dans P^- tel que $F(\omega_*) = F(\lambda_*\omega_0)$ soit nul. En

élevant au carré, on en déduit que $\omega_*^2 - i\sigma\omega_* - k_1^2$ est réel positif. Mais, $(\omega_* = a + ib)$

$$\begin{aligned} & \omega_*^2 - i\sigma\omega_* - k_1^2 \in \mathbb{R}^+ \\ \Rightarrow \quad & \omega_*^2 - i\sigma\omega_* \in \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 - b^2 + 2iab - i\sigma a + \sigma b \in \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a = 0 \text{ et } b \in [0, \sigma] \\ b = \sigma/2 \text{ et } a^2 \geq \sigma^2/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Dans les deux cas, la partie imaginaire de ω_* est positive ou nulle, ce qui est une contradiction.

A l'aide de la racine carrée que l'on vient de définir, on peut écrire:

$$\begin{cases} \widehat{R_\sigma}(\omega, k_1) = F\left(\dfrac{\omega^2}{i\sigma\omega + k_1^2}\right) \\ \text{avec } F(s) = \dfrac{\left[1 - \dfrac{1}{s}\right]^{1/2} - \left(1 - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{\beta_l}{s - \alpha_l}\right)}{\left[1 - \dfrac{1}{s}\right]^{1/2} + \left(1 - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{\beta_l}{s - \alpha_l}\right)} \end{cases}$$

F(s) définit une fonction analytique sur C privé de la coupure $[0, 1]$ et des zéros éventuels de

$$D(s) = \left[1 - \frac{1}{s}\right]^{1/2} + \left(1 - \sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{s - \alpha_l}\right).$$

(Remarquez que $s = 0$ et $s = \alpha_l$ ne sont pas des singularités de F)
En fait, on va montrer que sous les hypothèses portant sur le choix des coefficients α_l, β_l, D ne s'annule pas et que par voie de conséquence F est analytique sur $\mathbb{C}/[0, 1]$.
On remarque d'abord que

$$\Im m\left(\sqrt{s} \cdot [1 - 1/s]^{1/2}\right) \quad \text{est du signe de} \quad \Im m\sqrt{s}$$

(cette propriété, vraie à l'infini, s'étend à tout le domaine de F par les mêmes arguments que ceux développés précédemment)
tandis que:

$$\Im m\left(\sqrt{s} \cdot \left[1 - \sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{s - \alpha_l}\right]\right) = \Im m\sqrt{s} \cdot \left(1 + \sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l(\alpha_l + |s|)}{|s - \alpha_l|^2}\right)$$

est également du signe de $\Im m\sqrt{s}$ dès que α_l et β_l sont choisis positifs. Les zéros éventuels de D ne peuvent donc qu'être réels.
Supposons β_l positifs et les α_l compris entre 0 et 1. Lorsque s est réel et va de $-\infty$ à 0,

$a(s) = 1 - \sum \beta_l/(s - \alpha_l)$ croît de 1 jusqu'à $1 + \sum \beta_l/\alpha_l$. Lorsque s croît de 1 à $+\infty$, $a(s)$ varie de $a(1) = 1 - \sum \beta_l/(1 - \alpha_l)$ à 1. Ainsi, la racine carrée $[1 - 1/s]^{1/2}$ étant toujours réelle positive, D ne peut s'annuler sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ que si $a(1)$ est négatif. Résumons: si, pour tout l, les β_l sont positifs et les α_l compris entre 0 et 1 et si $a(1) = 1 - \sum \beta_l/(1 - \alpha_l)$ est positif, D ne peut s'annuler sur $\mathbb{C}/[0, 1]$ et conséquemment F est analytique sur ce domaine. On peut alors appliquer le principe du maximum ([25]) à F: le maximum de $|F|$ ne peut être atteint qu'à l'infini ou sur sa coupure $[0, 1]$. Or, à l'infini,

$$F(s) \sim \frac{1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l - 1/2}{s} = \frac{C_*}{s} \quad |s| \sim \infty$$

et le maximum de F pris sur un grand cercle tend vers 0 lorsque le rayon du cercle tend vers l'infini. Parallèlement si $s_0 \in [0, 1]$, on a

$$\lim_{s \to s_0} |F(s)| = 1$$

(Remarquez que lorsque l'on franchit la coupure, F est changée en sa conjuguée, son module restant égal à 1) On a donc bien

$$|\widehat{R_\sigma}(k_1, \omega)| = \left| F\left(\frac{\omega^2}{i\sigma\omega + k_1^2}\right) \right| \leq \sup_s |F(s)| = 1$$

Preuve de la causalité

La causalité de $t \hookrightarrow \tilde{R}_\sigma(k_1, t)$ est liée à l'analycité de $\omega \hookrightarrow \widehat{R_\sigma}(k_1, \omega)$ dans le demi-plan P^- des complexes de partie imaginaire négative ainsi qu'au comportement asymptotique à l'infini de cette dernière fonction. On a

$$\begin{aligned} 2\pi \tilde{R}_\sigma(k_1, t) &= \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{+R} \widehat{R_\sigma}(k_1, \omega_r) \exp i\omega_r t d\omega_r \\ &= \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma^R} \widehat{R_\sigma}(k_1, \omega) \exp i\omega t d\omega \\ &= \lim_{R \to \infty} \int_{C_-^R} \widehat{R_\sigma}(k_1, \omega) \exp i\omega t d\omega \end{aligned}$$

où Γ^R est le chemin joignant $-R$ à R juste en dessous de l'axe réel et où C_-^R est le demi-cercle dans P^- de centre O et de rayon R (cf figure 1.12).

Or à l'infini,

$$\widehat{R_\sigma}(k_1, \omega) \sim C_* \left(\frac{i\sigma}{\omega} + \frac{k_1^2}{\omega^2}\right) \quad |\omega| \to \infty$$

$$\Rightarrow |\widehat{R_\sigma}(k_1, \omega)| \leq \frac{C'}{|\omega|}$$

et

$$|\exp i\omega t| = \exp -R \sin \theta t, \; \omega = Re^{i\theta}$$

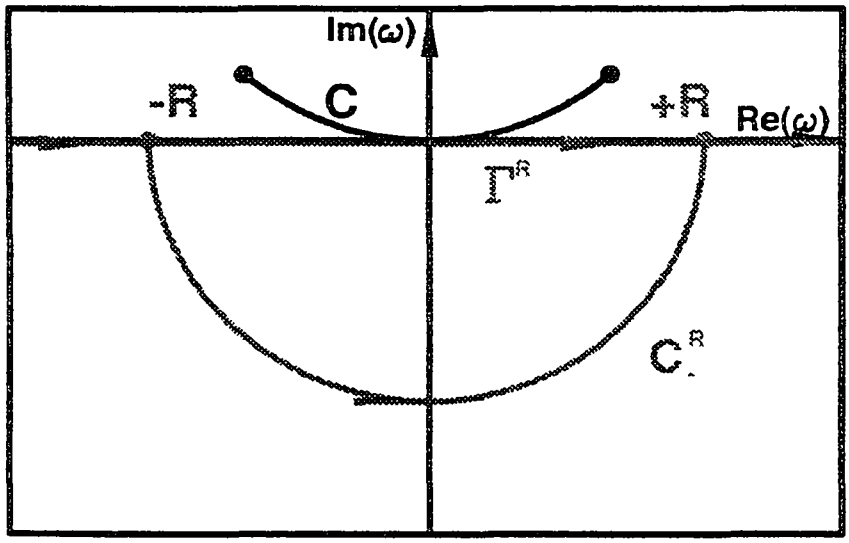


Figure 1.12 : Représentation du contour dans le plan complexe (C est la coupure de la fonction à intégrer)

$$\Rightarrow \int_{C_-^R} |\widehat{R_\sigma}(k_1,\omega)| \exp i\omega t d\omega \leq C' \int_{-\pi}^{0} \exp -R\sin\theta t d\theta \leq \frac{\pi C'}{2|t|R} \text{ si } t<0$$

$$\Rightarrow |\tilde{R}_\sigma(k_1,t)| \leq \lim_{R\to\infty} \int_{C_-^R} |\widehat{R_\sigma}(k_1,\omega)| \exp i\omega t d\omega = 0 \text{ si } t<0$$

et $\tilde{R}_\sigma$ est bien causale.

Preuve de l'intégrabilité du carré

Il est facile de vérifier

- Si $\sigma = 0$: $\omega_\tau \rightarrow \widehat{R_\sigma}(k_1,\omega_\tau)$ est continue sur R et tend vers zéro en $1/\omega_\tau^2$. Cette fonction est donc de module intégrable et sa transformée de Fourier est continue.
- Si $\sigma \neq 0$: Curieusement, le fait de mettre de l'absorption fait perdre le caractère L^1 à la fonction $\omega_\tau \rightarrow \widehat{R_\sigma}(k_1,\omega_\tau)$. Toutefois, cette fonction reste L^2 et il en est de même pour sa transformée de Fourier.

1.3.3 Compléments sur l'opérateur "coefficient de réflexion"

Pour conclure et compléter l'étude du coefficient de réflexion, indiquons les deux propriétés suivantes:

Proposition 1.1 *Si les α_l et β_l satisfont les hypothèses du théorème 1.2, la fonction $\widehat{R_\sigma}(k_1,\omega)$ définie en 1.30 est la transformée de Fourier d'une distribution tempérée R_σ*

à support dans le cône de lumière C:

$$C = \Big\{ (x,t),\ |x| \le t,\ t \ge 0 \Big\}$$

Proposition 1.2 *Si $\sigma = 0$, le noyau de convolution $R_{\sigma=0}$ est donné par:*

$$R(x,t) = 1_C(x,t)\ \frac{1}{\pi t^2} \Im m \left[\frac{dr}{ds} \left(\frac{|x|}{t} \right) \right]$$

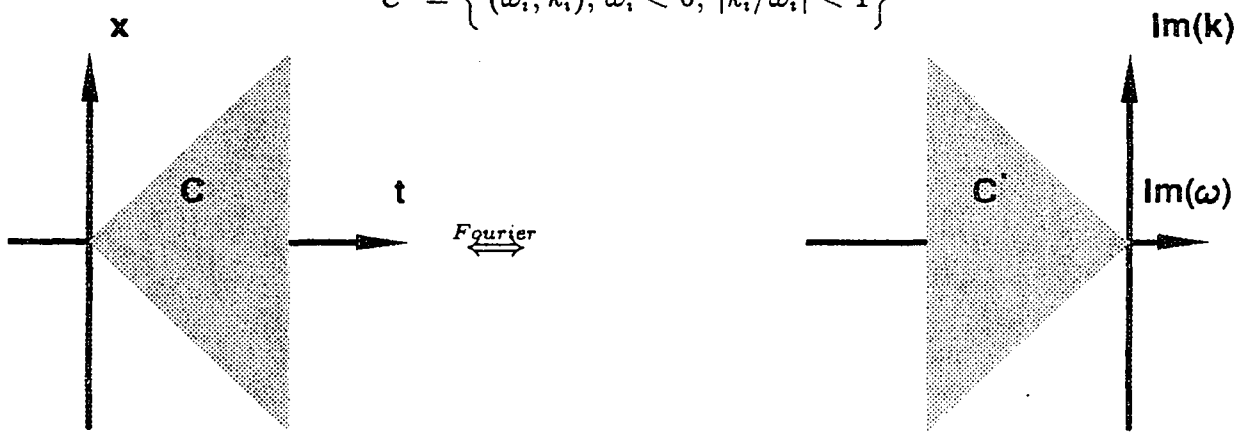
avec

$$r(s) = \frac{-i\left[\frac{1}{s^2} - 1\right]^{1/2} - \left(1 - \sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{s^2 - \alpha_l}\right)}{-i\left[\frac{1}{s^2} - 1\right]^{1/2} + \left(1 - \sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{s^2 - \alpha_l}\right)}$$

Preuve de la proposition 1.1

D'après Reed et Simon ([24]), pour que $R_\sigma(x,t)$ soit à support dans le cône de lumière il faut et il suffit que sa transformée de Fourier se prolonge en une fonction analytique, à "croissance polynômiale", sur $\{(\omega, k_1) = (\omega_r, k_r) + i(\omega_i, k_i) \in \mathbb{R}^2 + iC^*\}$ où C^* est le cône dual:

$$C^* = \Big\{ (\omega_i, k_i),\ \omega_i < 0,\ |k_i/\omega_i| < 1 \Big\}$$



$$\text{Support } T \subset C \iff \begin{cases} \hat{T} \text{ analytique sur } \mathbb{R}^2 + iC^* \\ |\hat{T}| \text{ "polynômial" sur } \mathbb{R}^2 + iC^* \end{cases}$$

Or,

$$\hat{R}_\sigma(\omega, k_1) = F\left(\frac{\omega^2}{i\sigma\omega + k_1^2} \right)$$

avec, si les α_l, β_l satisfont (1.29), F analytique et de module inférieur à l'unité sur $\mathbb{C}/[0,1]$. Il est donc suffisant de montrer que si, k_i et ω_i sont deux réels vérifiant:

$$\omega_i < 0 \ \text{ et } \ |q_i| = |k_i|/|\omega_i| < 1$$

alors, il ne peut exister k_r et ω_r réels et s dans $[0,1]$ tels que:

$$(\omega_r + i\omega_i)^2 - is\sigma(\omega_r + i\omega_i) - s(k_r + ik_i)^2 = 0$$

soit,

$$\begin{cases} \left(\omega_r^2 - \omega_i^2\right) + s\sigma\omega_i - s(k_r^2 - k_i^2) &= 0 \\ 2\omega_r\omega_i - s\sigma\omega_r - 2sk_rk_i &= 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \omega_r^2 - sk_r^2 = \omega_i^2 - s\sigma\omega_i - sk_i^2 \\ \omega_r(2\omega_i - s\sigma) - 2sk_rk_i = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} sk_r^2\left(\dfrac{\omega_r^2}{sk_r^2} - 1\right) &= \omega_i^2 - s\sigma\omega_i - sk_i^2 \\ \dfrac{\omega_r}{k_r\sqrt{s}} &= \dfrac{k_i\sqrt{s}}{(\omega_i - s\sigma/2)} \end{cases}$$

Auquel cas,

$$k_r^2 s = (\omega_i - s\sigma/2)^2 \cdot \frac{-sk_i^2 + (\omega_i^2 - s\sigma\omega_i)}{k_i^2 s - (\omega_i - s\sigma/2)^2}$$

d'où, $(k_i = q_i\omega_i)$:

$$k_r^2 s = (\omega_i - s\sigma/2)^2 \cdot \frac{-sq_i^2 + (1 - \sigma s/\omega_i)}{q_i^2 s - (1 - \sigma s/(2\omega_i))^2} \tag{1.33}$$

Or, cette équation n'a pas de solution si s est compris entre 0 et 1, ω_i de partie imaginaire négative, σ positif et q_i de module plus petit que 1 car $k_r^2 s$ est alors toujours positif tandis que le second membre de (1.33) est toujours négatif, puisque:

$$\begin{cases} sq_i^2 < 1 < 1 - \sigma s/\omega_i \\ q_i^2 s < 1 < (1 - \sigma s/(2\omega_i))^2 \end{cases}$$

Preuve de la proposition 1.2
Si $\sigma = 0$, d'après (1.30), on a:

$$\hat{R}_{\sigma=0}(k_1, \omega) = r\left(\frac{\omega}{|k_1|}\right)$$

avec

$$r(s_r) = \frac{\left[1 - \dfrac{1}{s_r^2}\right]^{1/2} - \left(1 - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{s_r^2 - \alpha_l}\right)}{\left[1 - \dfrac{1}{s_r^2}\right]^{1/2} + \left(1 - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{s_r^2 - \alpha_l}\right)}$$

et

$$\left[1-\frac{1}{s_r^2}\right]^{1/2} = \lim_{\substack{s \to s_r \\ \Im m\, s < 0}} \left[1-\frac{1}{s^2}\right]^{1/2}$$

On a,

$$\left\{\begin{array}{lll} \left[1-\frac{1}{s_r^2}\right]^{1/2} = \sqrt{1-\frac{1}{s_r^2}} & \text{si} & |s_r| \geq 1 \\ \left[1-\frac{1}{s_r^2}\right]^{1/2} = +i\sqrt{\frac{1}{s_r^2}-1} & \text{si} & -1 \leq s_r < 0 \\ \left[1-\frac{1}{s_r^2}\right]^{1/2} = -i\sqrt{\frac{1}{s_r^2}-1} & \text{si} & 0 < s_r < 0 \end{array}\right.$$

On cherche à évaluer:

$$\begin{aligned} R_{\sigma=0}(x,t) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} r\left(\frac{\omega}{|k_1|}\right)\exp i\omega t\, d\omega\right]\exp -ik_1 x dk_1 \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|k_1|\tilde{R}(|k_1|t)\exp -ik_1 x\, dk_1 \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{R}(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(s_r)\exp i\eta s_r ds_r$$

D'après le lemme précédent, on sait que $\tilde{R}$ est à support dans $\mathbb{R}^+$, il en est donc de même pour $R_{\sigma=0}(x,.)$. Maintenant, si t est positif, on peut faire le changement de variable $\xi = tk_1$:

$$R_{\sigma=0}(x,t) = \frac{1}{4\pi^2 t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\xi|\tilde{R}(|\xi|)\exp -i\xi\frac{x}{t}d\xi$$

Soit,

$$R_{\sigma=0}(x,t) = \frac{1}{4\pi^2 t^2}\int_0^{+\infty}\xi\tilde{R}(\xi)\left(\exp(-\imath\xi x/t)+\exp(+\imath\xi x/t)\, d\xi\right.$$

ou, puisque $\tilde{R}$ est causale,

$$R_{\sigma=0}(x,t) = \frac{1}{i4\pi^2 t^2}\int_{-\infty}^{+\infty} i\xi\tilde{R}(\xi)\left(\exp(-\imath\xi x/t)+\exp(+\imath\xi x/t)\right)d\xi$$

d'où:

$$R_{\sigma=0}(x,t) = \frac{1}{i2\pi t^2}\left[\frac{dr}{ds_r}(s_r = x/t)+\frac{dr}{ds_r}(s_r = -x/t)\right]$$

Deux cas sont à envisager:

- Si $x > t$, r est paire et sa dérivée est impaire d'où

$$\frac{dr}{ds_r}(s_r = x/t) = -\frac{dr}{ds_r}(s_r = -x/t) \Longrightarrow R_{\sigma=0}(x,t) = 0$$

- Si $x < t$ la partie réelle de r est paire tandis que la partie imaginaire est impaire: d'où

$$R_{\sigma=0}(x,t) = \frac{1}{\pi t^2}\left(\frac{d}{ds_r}\Im m r\right)(s_r = x/t)$$

Ce qui est le résultat annoncé. En particulier, on retrouve bien que $R_{\sigma=0}$ est à support dans le cône de lumière. Le point étonnant de ce résultat est que les valeurs du coefficient de réflexion pour les ondes propagatives (i.e. correspondantes à $|s_r| > 1$) qui nous ont servies à caractériser la précision de la C.L.A. n'interviennent plus du tout dans l'expression du noyau de convolution. C'est au contraire, les variations de ce même coefficient pour les ondes évanescentes qui apparaissent comme jouant un rôle crucial!

Chapitre 2

Détermination et étude des conditions de coins

2.1 Cas de l'équation des ondes 2D

2.1.1 Position du problème

On s'intéresse à la détermination de C.L.A. pour l'équation d'onde 2D posée dans des domaines possédant des coins droits. Le domaine typique est le quart d'espace:

$$\Omega = \Big\{ (x_1, x_2); x_1 < 0, x_2 < 0 \Big\}.$$

En utilisant le caractère local des C.L.A. dérivées dans le chapitre précédent pour le demi-espace, on est naturellement conduit à imposer ces mêmes conditions sur chacune des deux demi-droites formant la frontière de Ω

$$\begin{cases} \Gamma^{(1)} &= \Big\{ (0, x_2) \, ; x_2 < 0 \Big\} \\ \Gamma^{(2)} &= \Big\{ (x_1, 0) \, ; x_1 < 0 \Big\} \\ \partial\Omega &= \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)} \end{cases}$$

(Comme le montre la figure (2.1), on a choisi de numéroter les bords par l'indice de leur normale: la normale extérieure à $\Gamma^{(i)}$ est $\hat{x}_i$).

Le problème qui se pose alors est de connaître les équations de raccordement, si elles existent, au point C où se rencontrent les deux bords.

Ces conditions de raccordement sont cruciales pour toute implémentation numérique. En effet, on a vu précédemment que les conditions aux limites absorbantes d'ordre élevé

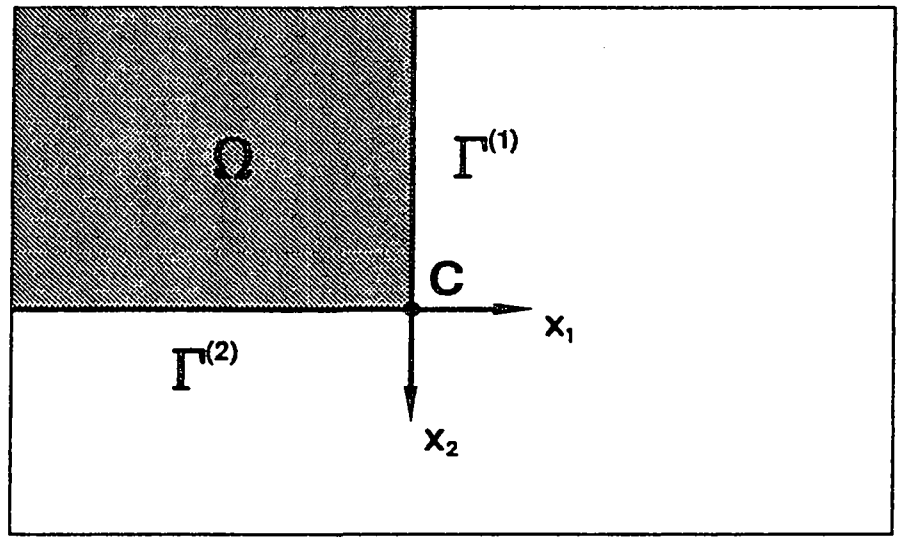


Figure 2.1 : Géométrie du problème

font intervenir L fonctions auxiliaires qui satisfont des équations des ondes 1D le long de la frontière. Ces équations sont donc d'ordre deux (i.e. font donc intervenir des dérivées secondes) par rapport à la coordonnée du point frontière. Dans le cas du quart d'espace, cette ligne frontière est interrompue au coin C et il est impossible d'évaluer numériquement cette dérivée seconde sans l'adjonction d'une condition portant, par exemple, sur la dérivée première en ce point. On verra que de telles conditions existent si on impose à la solution du problème d'être suffisamment régulière.

Précisons tout ceci en écrivant les équations du problème. On considère une fonction $u(x_1, x_2, t)$ régulière, par exemple $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega} \times [0, T])$, solution de:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1, x_2, t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}(x_1, x_2, t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2}(x_1, x_2, t) = 0 \\ \\ \text{pour tout } x_1 < 0, x_2 < 0 \qquad (i.e.\ (x_1, x_2) \text{ dans } \Omega) \end{cases}$$

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2, t) + \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x_2, t) - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial t}(x_2, t) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_l^{(1)}}{\partial t^2}(x_2, t) - \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(1)}}{\partial x_2^2}(x_2, t) = 0 \\ \\ \psi_l^{(1)}(x_2, t) = \alpha_l \varphi_l^{(1)}(x_2, t) + u(0, x_2, t) \\ \\ \text{pour tout } x_2 < 0 \quad (i.e.\ (0, x_2) \text{ sur } \Gamma^{(1)}) \text{ et pour } \ l = 1, ..., L \end{cases}$$

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,0,t)+\dfrac{\partial u}{\partial t}(x_1,0,t)-\displaystyle\sum_{m=1}^{L}\beta_m\frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial t}(x_1,t)=0 \\ \dfrac{\partial^2\varphi_l^{(2)}}{\partial t^2}(x_1,t)-\dfrac{\partial^2\psi_l^{(2)}}{\partial x_1^2}(x_1,t)=0 \\ \psi_l^{(2)}(x_1,t)=\alpha_l\varphi_l^{(2)}(x_1,t)+u(x_1,0,t) \\ \text{pour tout } x_1<0 \quad (i.e.\ (x_1,0) \text{ sur } \Gamma^{(2)}) \text{ et pour } \ l=1,...,L \end{cases}$$

et on pose la question:

Est il nécessaire d'adjoindre à ce système des conditions aux limites au point C pour obtenir existence et unicité de solutions?

Sur ce sujet, mentionnons principalement les travaux de A. Bamberger, P. Joly et J. Roberts ([5],[19]) qui ont traité de façon très détaillée le cas où la condition aux limites est la C.L.A. d'orde 2 d'Engquist Majda et qui ont explicité une condition pour le cas "45 degrés" où $L=1, \alpha_1=0.25, \beta_1=0.5$. Dans les deux cas une partie de l'analyse repose sur le fait que, si la solution est régulière, il est loisible de combiner au coin l'équation des ondes et les C.L.A. sur chacun des deux bords ainsi que toute expression obtenue par dérivation soit dans Ω soit le long des frontières.

Par exemple, pour le cas de la C.L.A. d'ordre 2, on a:

$$\forall x_1,x_2<0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2}=0 \qquad (A)$$

$$\forall x_1<0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=0 \qquad (B)$$

$$\forall x_2<0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0 \qquad (C)$$

En faisant tendre x_1 et x_2 vers 0 et en utilisant l'hypothèse de régularité, ces trois équations sont vérifiées en $(x_1,x_2)=(0,0)$. Formons la combinaison $1/2(A)-(B)-(C)$ pour faire disparaitre les dérivées secondes en espace, on obtient:

$$\frac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_1}+\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_2}=0 \quad \text{en } (x_1,x_2)=(0,0)$$

Intégrons en temps, en supposant les conditions initiales nulles au coin, il vient:

$$\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial t}(0,0,t)+\frac{\partial u}{\partial x_1}(0,0,t)+\frac{\partial u}{\partial x_2}(0,0,t)=0 \quad (D)$$

Cette condition est la condition de coin de Bamberger, Joly, Roberts; l'adjonction de (D) au système composé de (A),(B), (C) est indispensable pour obtenir l'existence et l'unicité de solutions régulières lorsque les conditions initiales en $t=0$ sont elles mêmes régulières.

Par analogie, le système formé de l'équation des ondes (2.1) et des C.L.A. (2.2) et (2.3) doit nécessiter également des conditions de compatibilité. De plus, en analysant de plus près la formulation des C.L.A., on voit que tant en ce qui concerne la construction de schémas numériques que pour l'écriture d'une formulation variationnelle, les quantités manquantes, au nombre de 2L, sont

$$\left\{ \frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x_1}(x_1 = 0, t), \frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2 = 0, t) \quad l = 1, \ldots, L \right\} \tag{2.4}$$

et où on rappelle que l'on a:

$$\begin{cases} \psi_l^{(1)}(x_2, t) = \alpha_l \varphi_l^{(1)}(x_2, t) + u(0, x_2, t) \\ \\ \psi_l^{(2)}(x_1, t) = \alpha_l \varphi_l^{(2)}(x_1, t) + u(x_1, 0, t) \end{cases} \tag{2.5}$$

Ainsi, le problème posé se ramène à:

1. Construire 2L équations du premier ordre au coin permettant de déterminer les 2L quantités (2.4). Il suffit par exemple de relier chacune de ces quantités aux valeurs de u ou de $\varphi_l^{(i)}, i = 1, 2$ ou encore aux valeurs de leurs dérivées en temps.

2. Montrer que le système formé de (2.1), (2.2) et (2.3) auquel on a adjoint les 2L équations de coin admet une solution unique avec de plus un comportement régulier pour des conditions initiales régulières.

Afin de répondre au premier point de ce programme, on peut par analogie au cas des C.L.A. d'ordre 2 essayer de travailler par compatibilité entre les équations. Cette généralisation est présentée comme "un problème algébrique non trivial" dans [19] page 205. Dans la section 2.1.2, on déterminera deux conditions par cette méthode de compatibilité. Ces deux conditions sont bien sûr insuffisantes lorsque L est supérieur à un.

Dans la section 2.1.3, sera présentée une démarche très différente permettant de dériver simplement les conditions recherchées. Elle consiste à construire une famille de solutions particulières satisfaisant l'équation des ondes et les conditions aux limites sur $\Gamma^{(1)}$ et $\Gamma^{(2)}$. Il s'agira de superpositions de quatre ondes planes indexées par un cosinus directeur ou angle d'incidence. Une fois cette famille construite, on cherchera à déterminer les conditions aux coins qui sont vérifiées pour chaque élément de la famille. Le résultat obtenu peut s'exprimer sous la forme:

Chaque élément de la famille de solutions particulières satisfait les 2L conditions de

coins:

$$(2.6)\qquad \left\{ \begin{array}{c} \forall l = 1, ..., L \\ \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x_1}(0,t) + A_l \cdot \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t}(0,t) - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m} \cdot \dfrac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial t}(0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2}(0,t) + A_l \cdot \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t}(0,t) - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m} \cdot \dfrac{\partial \psi_m^{(2)}}{\partial t}(0,t) = 0 \end{array} \right.$$

avec

$$(2.7)\qquad \left\{ \begin{array}{rcl} A_l & = & 1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \cdot \frac{\alpha_l}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \\ C_{l,m} & = & \dfrac{\beta_m}{\alpha_m} \cdot \dfrac{\alpha_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \end{array} \right.$$

La question qui se pose alors est de savoir si <u>toute</u> solution régulière satisfait ces conditions. L'espoir étant que la famille retenue soit suffisamment riche pour que par un argument de densité et de linéarité on puisse conclure par l'affirmative. Cette question reste ouverte et n'a pas reçu de réponse définitive.

Quoi qu'il en soit, si ces conditions existent au coin, ce ne peut être que celles dérivées ci-dessus (Par exemple, on montre dans la section 2.1.4 que ces conditions contiennent les deux conditions obtenues par compatibilité). C'est en ce sens que ces conditions seront retenues.

Notons enfin que, comme on le montrera dans le chapitre suivant, les conditions (2.6), avec les coefficients (2.7), permettent de déterminer entièrement une solution numérique approchée du problème du coin: une fois discrétisé, le système linéaire permettant de connaître les équivalents discrets des $2L$ quantités manquantes au coin est inversible. Là encore, on est conforté dans l'idée d'avoir trouvé de "bonnes" conditions.

Dans la section 2.1.5, on présentera un cadre fonctionnel dans lequel le problème (Equation des ondes dans Ω) + (Equations aux limites sur $\Gamma^{(1)}$ et $\Gamma^{(2)}$) + (Conditions de coin en C) peut s'énoncer et pour lequel on sait montrer, sous des hypothèses sur les coefficients α_l et β_l, un résultat d'unicité. Cette analyse répond partiellement au point 2 de notre problème puisque si la question de l'unicité est résolue, celle de l'existence de solutions et de leur régularité reste encore ouverte.

2.1.2 Dérivation d'une condition de coin par compatibilité

On présente ici les deux conditions de coin obtenues par compatibilité entre les équations satisfaites par u. Ces deux conditions ne sont évidemment pas suffisantes pour résoudre le problème du coin lorsque le nombre L de fonctions auxiliaires est supérieur à un (rappelons que nous dériverons 2L conditions dans la section suivante). Toutefois, et bien que les calculs soient un peu pénibles à suivre, il est intéressant de présenter cette démarche car

elle conduit à un résultat plus fort que celui qui sera montré par la suite. En effet, on démontre ici que toute solution régulière doit satisfaire les deux conditions de coin. Ce n'est pas le cas pour les 2L autres conditions, pour lesquelles on ne sait vérifier qu'elles sont vraies que pour une classe de solutions régulières particulières. On vérifiera dans la section 2.1.3 la consistance de ces deux résultats en montrant que les deux conditions obtenues par compatibilité sont contenues dans les 2L conditions obtenues via la famille de solutions particulières.

Nous commencons par numéroter les équations de notre problème. On rappelle que l'on a:

$$(EQ1) \quad \text{sur } \Omega \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1,x_2,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}(x_1,x_2,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2}(x_1,x_2,t) = 0$$

$$(EQ2) \quad \text{sur } \Gamma^{(1)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1}(0,x_2,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(0,x_2,t) - \sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial t}(x_2,t) = 0$$

$$(EQ3) \quad \text{sur } \Gamma^{(2)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,0,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_1,0,t) - \sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial t}(x_1,t) = 0$$

puis, pour l=1,...,L

$$(EQ4)_l \quad \text{sur } \Gamma^{(1)} \qquad \frac{\partial^2 \varphi_l^{(1)}}{\partial t^2}(x_2,t) - \alpha_l \frac{\partial^2 \varphi_l^{(1)}}{\partial x_2^2}(x_2,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2}(0,x_2,t)$$

$$(EQ5)_l \quad \text{sur } \Gamma^{(2)} \qquad \frac{\partial^2 \varphi_l^{(2)}}{\partial t^2}(x_1,t) - \alpha_l \frac{\partial^2 \varphi_l^{(2)}}{\partial x_1^2}(x_1,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}(x_1,0,t)$$

Pour trouver une condition de compatibilité au coin, on suppose que u est très régulière et, par voie de conséquence, que les $\varphi_l^{(1)}$ et $\varphi_l^{(2)}$ le sont également. Il est alors loisible d'appliquer les règles suivantes. On peut

- Dériver autant de fois que nécessaire par rapport à x_1, x_2 et t, l'équation des ondes $(EQ1)$
- Dériver les équations $(EQ2)$ et $(EQ4)_l$, l=1,...,L par rapport à x_1 et t.
- Dériver les équations $(EQ3)$ et $(EQ5)_l$, l=1,...,L par rapport à x_2 et t.
- Former des combinaisons linéaires des expressions ainsi obtenues et écrites, par passage à la limite, au coin C.
- Intégrer en temps les résultats obtenus. (On suppose que le support des conditions initiales en temps est strictement contenu dans Ω)

Ces règles peuvent être appliquées afin de construire des relations dans lesquelles n'apparaissent plus aucune dérivée en espace d'ordre supérieur ou égales à 2. Le but est donc de

combiner les relations afin de faire systématiquement disparaître les dérivées en $\partial^2/\partial x_1^2$ ou $\partial^2/\partial x_2^2$.

Par exemple, on commence par effectuer

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(EQ3) - \frac{\partial}{\partial x_2}(EQ2)$$

On obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_2} - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{\partial^2 \varphi_l^{(1)}}{\partial t \partial x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_1} - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{\partial^2 \varphi_l^{(2)}}{\partial t \partial x_1}$$

soit, après simplification et une intégration en temps.

$$-\frac{\partial u}{\partial x_2} + \sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{\partial \varphi_l^{(1)}}{\partial x_2} = -\frac{\partial u}{\partial x_1} + \sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{\partial \varphi_l^{(2)}}{\partial x_1}$$

ou, en réutilisant (EQ2) et (EQ3)

$$\sum_{l=1}^{L} \beta_l \left(\frac{\partial \varphi_l^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_l^{(2)}}{\partial t} \right) = \sum_{l=1}^{L} \beta_l \left(\frac{\partial \varphi_l^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_l^{(1)}}{\partial t} \right) \tag{2.8}$$

Cette relation est la première des deux conditions annoncées. On peut remarquer qu'elle a été construite uniquement par compatibilité entre les deux équations de transport sur les bords. En particulier le fait que u vérifie l'équation des ondes n'intervient pas ici.

Pour entrer dans le cadre du problème que nous avons posé, on peut reformuler cette condition à l'aide des fonctions auxiliaires $\psi_l^{(1)}$ et $\psi_l^{(2)}$. En utilisant (2.5) et de nouveau (EQ2) et (EQ3), on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{\alpha_l} \left(\frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t} - \gamma \frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t} \right) = 0 \\ \text{avec} \quad \gamma = 1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \end{array} \right. \tag{2.9}$$

L'obtention de la seconde condition est un peu plus difficile et utilise, quant à elle, toutes les équations du problème.

On commence par effectuer

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(EQ3) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(EQ2)$$

On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_1^2} \right) - \sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \varphi_m^{(1)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m^{(2)}}{\partial x_1^2} \right) = 0$$

scit, en utilisant l'équation des ondes $(EQ1)$ dérivée une fois en temps ainsi qu'en sommant les équations $(EQ4)_l$ et $(EQ5)_l$:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_1^2}\right) - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\left(\frac{\partial^3 \varphi_m^{(1)}}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 \varphi_m^{(2)}}{\partial t^3} - \frac{\partial}{\partial t}\Delta u\right) = 0$$

D'où (en réutilisant $(EQ1)$)

$$(2.10) \qquad \begin{cases} \left(1 + \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_1^2}\right) \\ \qquad - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\left(\frac{\partial^3 \varphi_m^{(1)}}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 \varphi_m^{(2)}}{\partial t^3}\right) \qquad = \quad 0 \end{cases}$$

Pour éliminer le terme gênant $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_1^2}\right)$, on écrit l'identité remarquable:

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_1^2}$$

d'où

$$(2.11) \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right)$$

on est donc ramené à évaluer $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right)$. Pour cela, on fait

$$\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}(EQ3) + \frac{\partial^3}{\partial x_2^3}(EQ2), \quad \text{on obtient}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right) + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2 \partial x_1^3}\right) - \sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^3 \varphi_m^{(1)}}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 \varphi_m^{(2)}}{\partial x_1^3}\right) = 0$$

puis on effectue

$$\sum_{m=1}^{L} \beta_m \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(EQ5)_m + \frac{\partial}{\partial x_2}(EQ4)_m\right), \quad \text{pour écrire}$$

$$\sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^3 \varphi_m^{(1)}}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 \varphi_m^{(2)}}{\partial x_1^3}\right) = \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \cdot \left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial x_1}\right) - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right)\right\}$$

Utilisons l'identité remarquable

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2 \partial x_1^3} = \Delta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x_1 \partial x_2}$$

Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right)+\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x_1 \partial x_2}+$$
$$+\left(\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right)-\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial x_2}+\frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial x_1}\right) \;=\; 0$$

On intègre en temps et on factorise,

$$(2.12)\qquad \begin{cases} \left(1+\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\right)\cdot\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right)+\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial t} \\ \quad +\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial x_2}+\frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial x_1}\right) \;=\; 0 \end{cases}$$

$$\text{posons}\qquad \gamma \;=\; \left(1+\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\right)$$

en combinant (2.10), (2.11) et (2.12) on obtient donc

$$\gamma\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\cdot\left(\frac{\partial^3 \varphi_m^{(1)}}{\partial t^3}+\frac{\partial^3 \varphi_m^{(2)}}{\partial t^3}\right)+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$$
$$+\frac{1}{\gamma}\cdot\left\{\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial t}-\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial x_2}+\frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial x_1}\right)\right\} \;=\; 0$$

$$\text{De plus}\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \;=\; -2\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{m=1}^{L}\beta_m\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_m^{(1)}+\varphi_m^{(2)}\right)$$

(obtenu par $(EQ2)+(EQ3)$), enfin

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(EQ3)+\frac{\partial}{\partial x_2}(EQ2)\right)\qquad \text{donne}$$

$$2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \;=\; -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\sum_{m=1}^{L}\beta_m\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial x_2}+\frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial x_1}\right)$$

ou encore,

$$2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \;=\; 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\;-\;\sum_{m=1}^{L}\beta_m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varphi_m^{(1)}+\varphi_m^{(2)}\right)+\sum_{m=1}^{L}\beta_m\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial x_2}+\frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial x_1}\right)$$

donc finalement

$$\gamma\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\cdot\left(\frac{\partial^3 \varphi_m^{(1)}}{\partial t^3}+\frac{\partial^3 \varphi_m^{(2)}}{\partial t^3}\right)-2\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+\sum_{m=1}^{L}\beta_m\cdot\left(\frac{\partial^3 \varphi_m^{(1)}}{\partial t^3}+\frac{\partial^3 \varphi_m^{(2)}}{\partial t^3}\right)$$
$$+\frac{1}{\gamma}\cdot\left\{2\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-\sum_{m=1}^{L}\beta_m\cdot\left(\frac{\partial^3 \varphi_m^{(1)}}{\partial t^3}+\frac{\partial^3 \varphi_m^{(2)}}{\partial t^3}\right)+\sum_{m=1}^{L}\left(\beta_m-2\frac{\beta_m}{\alpha_m}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial x_2}+\frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial x_1}\right)\right\}$$
$$=\;0$$

soit, après une double intégration en temps,

$$(2.13)\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & \left(\gamma+\frac{1}{\gamma}-2\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{m=1}^{L}\beta_m\cdot\left(1-\frac{1}{\alpha_m}-\frac{1}{2\gamma}\right)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_m^{(1)}}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_m^{(2)}}{\partial t}\right) \\ & & +\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{2\gamma}\cdot\left(1-\frac{2}{\alpha_m}\right)\left(\frac{\partial\varphi_m^{(1)}}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi_m^{(2)}}{\partial x_1}\right) \\ & & \text{avec } \gamma = \left(1+\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) \end{array}\right.$$

Cette équation, du premier ordre en espace et en temps, est la deuxième condition de compatibilité que nous avions annoncée. On peut également l' exprimer à l'aide des fonctions auxiliaires $\psi_l^{(1)}$ et $\psi_l^{(2)}$. Le calcul quoiqu'un peu long est élémentaire. On montre que (2.13) se réécrit:

$$(2.14)\left\{\begin{array}{l} \sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\cdot\left(1-\frac{2}{\alpha_m}\right)\left(\frac{\partial\psi_m^{(1)}}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_m^{(2)}}{\partial x_1}\right)+\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\cdot H_m\left(\frac{\partial\psi_m^{(1)}}{\partial t}+\frac{\partial\psi_m^{(2)}}{\partial t}\right) \\ \text{avec}\quad H_m=\left(1-\frac{2}{\alpha_m}\right)\left(1+\sum_{l=1}^{L}\frac{\beta_l}{\alpha_l}\right)+2\sum_{l=1}^{L}\frac{\beta_l}{\alpha_l^2} \end{array}\right.$$

On notera pour finir que u n'intervient pas dans les deux conditions de coin exprimées en $\psi_l^{(1)}$ et $\psi_l^{(2)}$. On retrouvera cette propriété pour les 2L conditions obtenues dans la section suivante.

2.1.3 Dérivation des conditions de coins à partir de solutions particulières

La famille de solutions que nous allons construire est inspirée du petit schéma ci-dessous.

Pour tout cosinus directeur $\vec{\zeta}=(\zeta_1,\zeta_2)$, avec

$$\zeta_1^2+\zeta_2^2 = 1$$

nous considérons une onde plane incidente de vecteur d'onde $\omega\vec{\zeta}$ et de pulsation ω

$$u_I(x_1,x_2,t) = \exp i\omega\left(\zeta_1 x_1+\zeta_2 x_2-t\right)$$

et nous raisonnons en supposant ζ_1 et ζ_2 positifs.

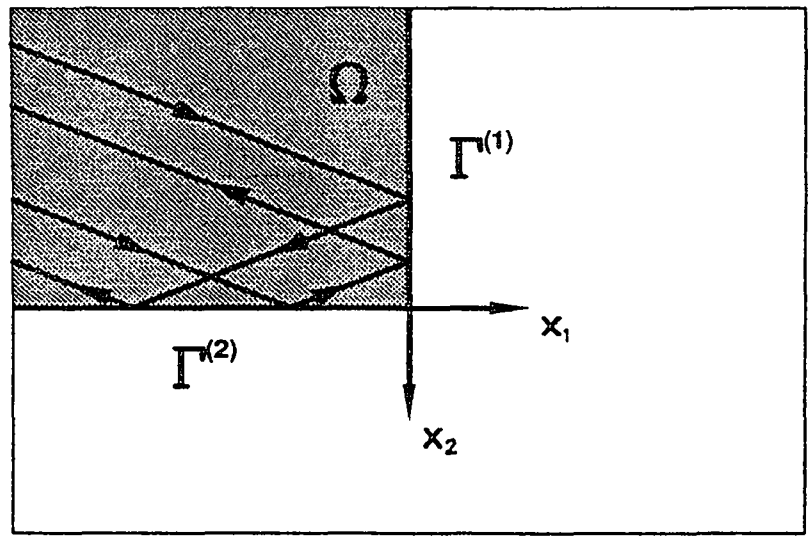


Figure 2.2 : Présentation schématique d'une solution particulière

Cette onde va, soit, d'abord rencontrer $\Gamma^{(1)}$ et se réfléchir en une onde de la forme:

$$u_R^1(x_1, x_2, t) = R_1 \exp i\omega(-\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 - t)$$

puis, rencontrer $\Gamma^{(2)}$ en donnant naissance à une seconde onde réfléchie:

$$u_R^{12}(x_1, x_2, t) = R_2 R_1 \exp i\omega(-\zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2 - t)$$

soit, c'est l'inverse, c'est à dire l'onde va d'abord rencontrer $\Gamma^{(1)}$ et générer:

$$u_R^2(x_1, x_2, t) = R_2 \exp i\omega(\zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2 - t)$$

puis redonner une seconde onde réfléchie sur $\Gamma^{(1)}$, soit

$$u_R^{21}(x_1, x_2, t) = R_1 R_2 \exp i\omega(-\zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2 - t)$$

On voit donc que quatre ondes planes suffisent à décrire le processus. Celui-ci fait intervenir les coefficients de réflexions R_1 et R_2 qui sont déterminés par la nature de la condition aux limites absorbante que l'on impose sur $\Gamma^{(1)}$ et $\Gamma^{(2)}$.

Précisons tout ceci, on cherche donc une solution sous la forme

$$(2.15) \quad \begin{cases} u(x_1, x_2, t) = & \exp i\omega(\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 - t) \\ + & R_1 \exp i\omega(-\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 - t) \\ + & R_2 \exp i\omega(+\zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2 - t) \\ + & R_1 R_2 \exp i\omega(-\zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2 - t) \end{cases}$$

avec

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 1 \tag{2.16}$$

Les fonctions auxiliaires sont recherchées proportionnelles à la trace de u sur la frontière de Ω correspondante:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} & \text{pour } l = 1, ..., L & \\ \varphi_l^{(2)}(x_1, t) & = & \Phi_l^{(2)} \cdot u(x_1, x_2 = 0, t) \\ \psi_l^{(2)}(x_1, t) & = & \Psi_l^{(2)} \cdot u(x_1, x_2 = 0, t) \\ \varphi_l^{(1)}(x_2, t) & = & \Phi_l^{(1)} \cdot u(x_1 = 0, x_2, t) \\ \psi_l^{(1)}(x_2, t) & = & \Psi_l^{(1)} \cdot u(x_2 = 0, x_1, t) \end{array} \right. \tag{2.17}$$

avec, bien entendu (cf. (2.5)):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_l \Phi_l^{(1)} + 1 & = & \Psi_l^{(1)} \\ \alpha_l \Phi_l^{(2)} + 1 & = & \Psi_l^{(2)} \end{array} \right. \tag{2.18}$$

D'après l'égalité (2.16), u vérifie évidemment l'équation des ondes (EQ1). De plus, les équations (EQ4) et (EQ5) fournissent immédiatement:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi_l^{(1)} & = & \dfrac{\zeta_2^2}{1 - \alpha_l \zeta_2^2} \\ \Phi_l^{(2)} & = & \dfrac{\zeta_1^2}{1 - \alpha_l \zeta_1^2} \end{array} \right. \tag{2.19}$$

Restent donc à satisfaire les équations (EQ2) sur $\Gamma^{(1)}$ et (EQ3) sur $\Gamma^{(2)}$. Par exemple sur $\Gamma^{(1)}$ on doit avoir:

$$i\omega\,\zeta_1\,(1 - R_1)\exp i\omega(\zeta_2 x_2 - t) + i\omega\,\zeta_1\,(R_2 - R_2 R_1)\exp i\omega(\zeta_2 x_2 - t) -$$

$$- i\omega(1 + R_1 + R_2 + R_1 R_2)\exp i\omega(\zeta_2 x_2 - t)\left(1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \Phi_l^{(1)}\right) = 0$$

équation qui sera satisfaite pour tout (x_2, t) si et seulement si

$$\frac{\zeta_1(1 - R_1)}{(1 + R_1)} = 1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \Phi_l^{(1)} \tag{2.20}$$

De même l'équation relative à $\Gamma^{(2)}$ fournit

$$\frac{\zeta_2(1-R_2)}{(1+R_2)} = 1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \Phi_l^{(2)} \tag{2.21}$$

On retrouve pour R_1 et R_2 les coefficients de réflexion associés aux conditions aux limites absorbantes à L fractions rationnelles que nous avions dérivés dans le chapitre précédent. R_1 et R_2 mesurent le défaut d'approximation de ζ_1 par $\sqrt{1-\zeta_2^2}$ et de ζ_2 par $\sqrt{1-\zeta_1^2}$.

Quoi qu'il en soit, nous avons accompli à ce stade la première étape de notre démarche à savoir construire une famille (indexée par $\omega, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_1^2+\zeta_2^2=1$) de solutions du problème posé dans le quart d'espace et constitué de (EQ1) - (EQ5).

La deuxième étape consiste à calculer au coin C la dérivée par rapport à la variable d'espace de chaque fonction auxiliaire puis de la relier aux dérivées en temps et en ce point de u ou des fonctions auxiliaires. Par exemple, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \varphi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2=0,t) & = & \Phi_l^{(1)} \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_2=0,t) \\ & = & \Phi_l^{(1)} (i\omega \exp -i\omega t)\, \zeta_2 \,(1+R_1-R_2-R_1R_2) \\ & = & \Phi_l^{(1)} \dfrac{1-R_2}{1+R_2} \zeta_2 \,\{i\omega \exp -i\omega t\,(1+R_1)(1+R_2)\} \end{array} \right. \tag{2.22}$$

Utilisons les relations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,0,t) & = & -i\omega \exp -i\omega t\,(1+R_1)(1+R_2) \\ \dfrac{\zeta_2(1-R_2)}{(1+R_2)} & = & 1 - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \beta_m \Phi_m^{(2)} \end{array} \right.$$

il vient:

$$\frac{\partial \varphi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2=0,t) = -\Phi_l^{(1)} \left(1 - \sum_{m=1}^{L} \beta_m \Phi_m^{(2)}\right) \frac{\partial u}{\partial t}(0,0,t) \tag{2.23}$$

Remarquons que:

$$\frac{\partial \varphi_l^{(i)}}{\partial t}(0,0,t) = \Phi_l^{(i)} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(0,0,t) \tag{2.24}$$

On a donc

$$\frac{\partial \varphi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2=0,t) = -\frac{\partial \varphi_l^{(1)}}{\partial t}(x_2=0,t) + \sum_{m=1}^{L} \beta_m \Phi_l^{(1)} \cdot \Phi_m^{(2)} \frac{\partial u}{\partial t}(0,0,t) \tag{2.25}$$

Le second terme est non linéaire en les $\Phi_l^{(i)}$. Pour le linéariser on va utiliser l'expression de $\Phi_l^{(1)} \cdot \Phi_m^{(2)}$ en fonction de ζ_1^2 pour effectuer une décomposition en éléments simples. On a:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi_l^{(1)} \cdot \Phi_m^{(2)} & = & \dfrac{1-\zeta_1^2}{1-\alpha_l(1-\zeta_1^2)} \cdot \dfrac{\zeta_1^2}{1-\alpha_m\zeta_1^2} \\ & = & \dfrac{\alpha_l - 1}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l\alpha_m} \cdot \dfrac{1-\zeta_1^2}{1-\alpha_l(1-\zeta_1^2)} + \dfrac{\alpha_m - 1}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l\alpha_m} \cdot \dfrac{\zeta_1^2}{1-\alpha_m\zeta_1^2} + \\ & & + \dfrac{1}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l\alpha_m} \end{array} \right.$$

d'où

$$\Phi_l^{(1)} \cdot \Phi_m^{(2)} = \frac{-1}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l\alpha_m} \left((1-\alpha_l)\Phi_l^{(1)} + (1-\alpha_m)\Phi_m^{(2)} - 1 \right)$$

et (2.25) s'écrit, en réutilisant (2.24):

$$(2.26) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2 = 0, t) \; + \; D_l \dfrac{\partial \varphi_l^{(1)}}{\partial t}(x_2 = 0, t) + \\ + \; A_l \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_1 = 0, x_2 = 0, t) \; + \; \displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m} \frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial t}(x_1 = 0, t) \; = \; 0 \end{array} \right.$$

avec

$$(2.27) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} D_l & = & 1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{1-\alpha_l}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l\alpha_m} \\ C_{l,m} & = & \beta_m \dfrac{1-\alpha_m}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l\alpha_m} \\ A_l & = & -\displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l\alpha_m} \end{array} \right.$$

C'est le résultat recherché. Lorsque l varie de 1 à L (2.26) donne L conditions de coin, la permutation des indices 1 et 2 permet d'en obtenir L autres. Ces $2L$ conditions portent sur les fonctions auxiliaires $\varphi_l^{(i)}$. On peut également donner les conditions portant sur les $\psi_l^{(i)}$. Celles-ci sont obtenues, soit en travaillant de la même manière que précédemment en calculant $\partial\psi_l^{(1)}/\partial x_2$ au coin C, soit en substituant directement dans (2.26) $\psi_l^{(i)}$ à $\varphi_l^{(i)}$ suivant

$$\psi_l^{(i)} = \frac{1}{\alpha_l} \left(\psi_l^{(i)} - u \right)$$

On obtient

$$(2.28)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2=0,t) & = & -D_l \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t}(x_2=0,t) + \\ & & + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m+\alpha_l-\alpha_l\alpha_m} \frac{\partial \psi_m^{(2)}}{\partial t}(x_2=0,t) \\ D_l & = & \left(\left(1+\displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \right) - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \cdot \frac{\alpha_l}{\alpha_m+\alpha_l-\alpha_l\alpha_m} \right) \end{array} \right.$$

ainsi qu'une relation analogue pour $\psi_l^{(2)}$.

La dérivée par rapport à x_2 de $\psi_l^{(1)}$ en C est donc uniquement couplée à sa dérivée en temps et à la famille des fonctions auxiliaires associées à l'autre bord. En particulier, u n'apparaît plus dans ces conditions !

Les relations (2.6) et (2.7) sont ainsi démontrées.

2.1.4 Consistance des deux méthodes

On vérifie la consistance des résultats obtenus précédemment en montrant que toute solution des 2L conditions de coin construites à partir de la famille de solutions particulières satisfait également les deux conditions obtenues par compatibilité. Remarquons que ce résultat n'est pas immédiat dans la mesure où les solutions particulières ne vérifient pas l'une des hypothèses qui ont été utilisées pour dériver les conditions par compatibilité (elles ne sont pas nulles à l'instant $t=0$). Cette vérification n'est donc pas uniquement destinée à s'assurer de la validité des calculs algébriques.

On se donne 2L fonctions $\psi_l^{(1)}(x_2,t)$ et $\psi_l^{(2)}(x_1,t)$ telles que

$$(2.29)\quad \left\{ \begin{array}{c} \forall l = 1,...,L \\ \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x_1}(0,t) + A_l \cdot \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t}(0,t) - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m} \cdot \frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial t}(0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2}(0,t) + A_l \cdot \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t}(0,t) - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m} \cdot \frac{\partial \psi_m^{(2)}}{\partial t}(0,t) = 0 \end{array} \right.$$

avec

$$(2.30)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} A_l & = & 1+\displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \cdot \frac{\alpha_l}{\alpha_m+\alpha_l-\alpha_m\alpha_l} \\ C_{l,m} & = & \dfrac{\beta_m}{\alpha_m} \cdot \dfrac{\alpha_m}{\alpha_m+\alpha_l-\alpha_m\alpha_l} \end{array} \right.$$

et on va successivement vérifier que $\psi_l^{(1)}$ et $\psi_l^{(2)}$ vérifient les conditions (2.9) et (2.14)

Vérification de la condition (2.9)

Par combinaison linéaire, on a

$$\sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{\alpha_l} \left(\frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2} \right) + \sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{\alpha_l} A_l \left(\frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t} \right) -$$

$$- \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_l}{\alpha_l} \cdot \frac{\beta_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \left(\frac{\partial \psi_m^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial t} \right) = 0$$

soit

$$\sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{\alpha_l} \left[\left(\frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2} \right) + C_l \cdot \left(\frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t} \right) \right] = 0$$

avec

$$C_l = A_l + \sum_{n=1}^{L} \frac{\beta_n}{\alpha_n} \cdot \frac{\alpha_l}{\alpha_n + \alpha_l - \alpha_n \alpha_l} = 1 + \sum_{n=1}^{L} \frac{\beta_n}{\alpha_n}$$

On retrouve bien la condition (2.9).

Vérification de la condition (2.14)

Par combinaison linéaire, on a

$$\sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{\alpha_l} \cdot \left(1 - \frac{2}{\alpha_l}\right) \left(\frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2} \right) + \sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{\alpha_l} \cdot \left(1 - \frac{2}{\alpha_l}\right) \cdot A_l \left(\frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t} \right) -$$

$$- \sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{\alpha_l} \cdot \left(1 - \frac{2}{\alpha_l}\right) \sum_{m=1}^{L} C_{l,m} \left(\frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_m^{(2)}}{\partial t} \right) = 0$$

soit

$$\sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{\alpha_l} \cdot \left(1 - \frac{2}{\alpha_l}\right) \left(\frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2} \right) + \sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{\alpha_l} \cdot G_l \left(\frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t} \right) = 0$$

avec

$$G_l = \left(1 - \frac{2}{\alpha_l}\right) \cdot A_l - \sum_{m=1}^{L} \frac{C_{m,l}}{\beta_l} \cdot \frac{\alpha_l \beta_m}{\alpha_m} \left(1 - \frac{2}{\alpha_m}\right)$$

ou

$$G_l = \left(1 - \frac{2}{\alpha_l}\right) \cdot \left(1 + \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \cdot \frac{\alpha_l}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \right) -$$

$$- \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \cdot \frac{\alpha_l}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \cdot \left(1 - \frac{2}{\alpha_m}\right)$$

ou encore

$$G_l = \left(1 - \frac{2}{\alpha_l}\right) \cdot \left(1 + \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) + \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \cdot \frac{\alpha_l}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \cdot \left[-1 + \frac{2}{\alpha_l} - 1 + \frac{2}{\alpha_m}\right]$$

soit, finalement

$$G_l = \left(1 - \frac{2}{\alpha_l}\right) \cdot \left(1 + \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) + 2 \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m^2}$$

et on retrouve bien (2.14)

2.1.5 Aspects mathématiques du problème

Dans cette partie, nous nous attachons à présenter un cadre fonctionnel bien adapté à notre problème. Pour ce faire, nous essayons de suivre la démarche de Bamberger, Joly, Roberts ([5],[19]). Dans un premier temps, on construit une formulation faible du problème puis, à l'aide de la transformée de Laplace, on démontre l'unicité de la solution (si elle existe!) lorsque les coefficients $\alpha_l, \beta_l, l = 1, ..., L$ satisfont une condition. Cette condition demande la positivité d'une forme quadratique construite à partir de ces coefficients. On démontre notamment que cette condition est vérifiée dès que la condition nécessaire au caractère bien posé au sens de Kreiss pour le problème du demi-plan est satisfaite (cf. théorème 1.1 du chapitre précédent).

Construction d'une formulation faible

On commence par réécrire le problème du coin en ne faisant intervenir que les fonctions auxiliaires $\psi_m^{(1)}$ et $\psi_m^{(2)}$ (donc en éliminant les fonctions $\varphi_m^{(1)}$ et $\varphi_m^{(2)}$)

On considère donc le système d'équations:

$$\begin{array}{lllll} \text{Trouver :} & u(x_1, x_2, t) & & (x_1, x_2) \in \Omega & t > 0 \\ & \psi_m^{(1)}(0, x_2) & m = 1, .., L & \in \Gamma^{(1)} & t > 0 \\ & \psi_m^{(2)}(x_1, 0) & m = 1, .., L & \in \Gamma^{(2)} & t > 0 \end{array}$$

telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1, x_2, t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}(x_1, x_2, t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2}(x_1, x_2, t) = 0 \\ \qquad \text{pour } (x_1, x_2) \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \tag{2.31}$$

$$(2.32)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(0,x_2,t)+\left(1+\displaystyle\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\right)\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x_2,t)-\displaystyle\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial t}(x_2,t)=0 \\ \text{pour } (0,x_2) \text{ sur } \Gamma^{(1)} \end{cases}$$

$$(2.33)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(1)}}{\partial t^2}(x_2,t)-\alpha_l\dfrac{\partial^2 \psi_l^{(1)}}{\partial x_2^2}(x_2,t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1=0,x_2,t) \\ \text{pour } (0,x_2) \text{ sur } \Gamma^{(1)} \text{ et pour } l=1,\ldots,L \end{cases}$$

$$(2.34)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,0,t)+\left(1+\displaystyle\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\right)\dfrac{\partial u}{\partial t}(x_1,0,t)-\displaystyle\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\frac{\partial \psi_m^{(2)}}{\partial t}(x_1,t)=0 \\ \text{pour } (x_1,0) \text{ sur } \Gamma^{(2)} \end{cases}$$

$$(2.35)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(2)}}{\partial t^2}(x_1,t)-\alpha_l\dfrac{\partial^2 \psi_l^{(2)}}{\partial x_1^2}(x_1,t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1,x_2=0,t) \\ \text{pour } (x_1,0) \text{ sur } \Gamma^{(2)} \text{ et pour } l=1,\ldots,L \end{cases}$$

$$(2.36)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2=0,t)+A_l\dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t}(x_2=0,t)-\displaystyle\sum_{m=1}^{L}C_{l,m}\frac{\partial \psi_m^{(2)}}{\partial t}(x_1=0,t)=0 \\ \text{pour } l=1,\ldots,L \end{cases}$$

$$(2.37)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x_1}(x_1=0,t)+A_l\dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t}(x_1=0,t)-\displaystyle\sum_{m=1}^{L}C_{l,m}\frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial t}(x_2=0,t)=0 \\ \text{pour } l=1,\ldots,L \end{cases}$$

Avec

$$(2.38)\qquad \begin{cases} A_l &= 1+\displaystyle\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}-\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\cdot\frac{\alpha_l}{\alpha_m+\alpha_l-\alpha_l\alpha_m} \\ C_{l,m} &= \dfrac{\beta_m}{\alpha_m+\alpha_l-\alpha_l\alpha_m} \end{cases}$$

On adjoint à ce système les conditions aux limites au temps $t=0$:

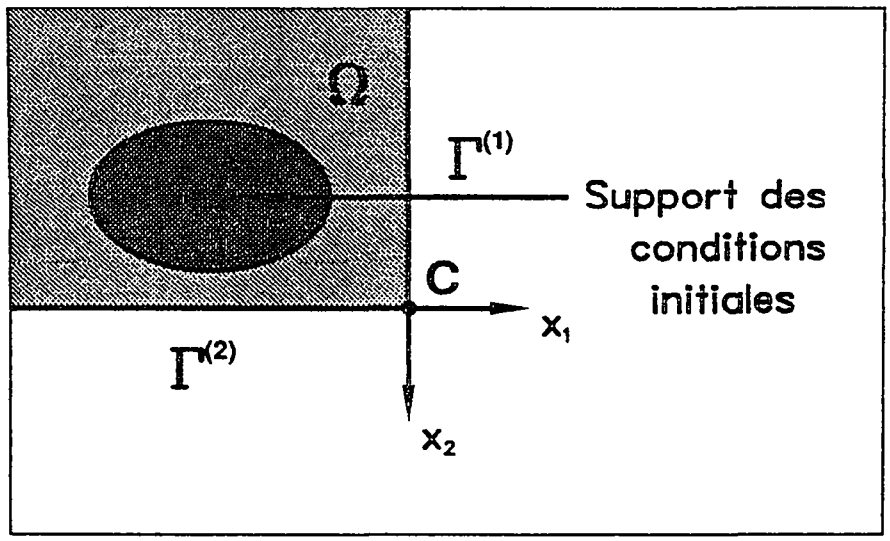


Figure 2.3 : Présentation schématique du problème

$$\text{(2.39)} \qquad \begin{cases} u(x_1, x_2, t=0) &= u_0(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, t=0) &= u_1(x_1, x_2) \\ \text{Support } u_0 \text{ et Support } u_1 \subset \Omega \end{cases}$$

$$\text{(2.40)} \qquad \begin{cases} \psi_l^{(1)}(x_2, t=0) = \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t}(x_2, t=0) = 0 \\ \psi_l^{(2)}(x_1, t=0) = \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t}(x_1, t=0) = 0 \\ \forall l = 1, .., L \end{cases}$$

Supposons que le problème (2.31)-(2.40) admette une solution

$$\left(u(x_1, x_2, t), \psi_l^{(1)}(x_2, t), \psi_l^{(2)}(x_1, t)\right)$$

telle que

1. $u \in C^2\left(\overline{\Omega^*} \times [0, +\infty[\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega} \times [0, +\infty[\right)$
2. $\forall t \geq 0, u(., t)$ est à support compact dans $\overline{\Omega}$.
3. $\psi_l^{(2)} \in C^2\left(\Gamma^{(2)} \times [0, +\infty[\right)$
4. $\psi_l^{(1)} \in C^2\left(\Gamma^{(1)} \times [0, +\infty[\right)

5. $\psi_l^{(2)}(.,t)$ est à support compact sur $\overline{\Gamma^{(2)}}$

6. $\psi_l^{(1)}(.,t)$ est à support compact sur $\overline{\Gamma^{(1)}}$

On va écrire sous ces hypothèses une formulation faible en espace. Pour cela, on considère $2L+1$ fonctions tests, soient

$$\left(v(x_1,x_2),\ \xi_l^{(1)}(x_2),\ \xi_l^{(2)}(x_1)\right)$$

supposées régulières et s'annulant à l'infini. Puis on multiplie (2.31) par v, on intègre sur Ω et on utilise (2.32) et (2.33) pour écrire, après intégration par parties:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_\Omega u(x_1,x_2,t)\,v(x_1,x_2)dx_1dx_2\right) + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2,t)\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2 + \\
&+\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2,t)\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 + \frac{d}{dt}\left\{(1+\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m})\int_{\Gamma^{(1)}} u(0,x_2,t)\,v(0,x_2)dx_2 - \right. \\
&-\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\int_{\Gamma^{(1)}}\psi_m^{(1)}(x_2,t)\,v(0,x_2)dx_2 + (1+\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m})\int_{\Gamma^{(2)}} u(x_1,0,t)\,v(x_1,0)dx_1 - \\
&\left.-\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\int_{\Gamma^{(2)}}\psi_m^{(2)}(x_1,t)\,v(x_1,0)dx_1\right\} \quad = 0
\end{aligned}$$

(2.41)

Dans une seconde étape, on multiplie (2.33) par $\xi_l^{(1)}$ puis on intègre sur $\Gamma^{(1)}$. Après intégration par parties, on utilise l'équation au coin (2.36) pour écrire:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{\Gamma^{(1)}}\psi_l^{(1)}(x_2,t)\,\xi_l^{(1)}(x_2)dx_2\right) + \alpha_l\int_{\Gamma^{(1)}}\frac{\partial\psi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2,t)\frac{\partial\xi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2)dx_2 + \\
&+\frac{d}{dt}\left(A_l\psi_l^{(1)}(0,t)\,\xi_l^{(1)}(0) - \sum_{m=1}^{L}C_{l,m}\psi_m^{(2)}(0,t)\,\xi_l^{(1)}(0)\right) \quad = \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\int_{\Gamma^{(1)}} u(0,x_2,t)\,\xi_l^{(1)}(x_2)dx_2
\end{aligned} \tag{2.42}$$

En traitant de façon similaire l'autre bord, on obtient:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{\Gamma^{(2)}}\psi_l^{(2)}(x_1,t)\,\xi_l^{(2)}(x_1)dx_1\right) + \alpha_l\int_{\Gamma^{(2)}}\frac{\partial\psi_l^{(2)}}{\partial x_1}(x_1,t)\frac{\partial\xi_l^{(2)}}{\partial x_1}(x_1)dx_1 + \\
&+\frac{d}{dt}\left(A_l\psi_l^{(2)}(0,t)\,\xi_l^{(2)}(0) - \sum_{m=1}^{L}C_{l,m}\psi_m^{(1)}(0,t)\,\xi_l^{(2)}(0)\right) \quad = \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\int_{\Gamma^{(2)}} u(x_1,0,t)\,\xi_l^{(2)}(x_1)dx_1
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Pour que cette formulation ait un sens, il nous suffit de travailler avec le cadre fonctionnel suivant:

$$\begin{aligned} v(x_1,x_2) \in H^1(\Omega) &= \left\{v \in L^2(\Omega), \vec{\nabla} v \in L^2(\Omega)\right\} \\ \xi_l^{(1)}(x_2) \in H^1\left(\Gamma^{(1)}\right) &= \left\{\xi_l^{(1)} \in L^2\left(\Gamma^{(1)}\right), \frac{\partial \xi_l^{(1)}}{\partial x_1} \in L^2\left(\Gamma^{(1)}\right)\right\} \\ \xi_l^{(2)}(x_1) \in H^1\left(\Gamma^{(2)}\right) &= \left\{\xi_l^{(2)} \in L^2\left(\Gamma^{(2)}\right), \frac{\partial \xi_l^{(2)}}{\partial x_2} \in L^2\left(\Gamma^{(2)}\right)\right\} \end{aligned}$$

(La condition $\vec{\nabla} v \in L^2(\Omega)$ implique notamment que $v(x_1,0)$ existe dans $H^{1/2}\left(\Gamma^{(2)}\right)$ et donc dans $L^2\left(\Gamma^{(2)}\right)$, ce qui donne un sens à l'intégrale sur $\Gamma^{(2)}$, et de même pour l'intégrale sur $\Gamma^{(1)}$. De plus si $\xi^{(i)} \in H^1\left(\Gamma^{(i)}\right), \xi^{(i)}$ est continue et donc $\xi^{(i)}(0)$ a bien un sens.) On pose alors:

$$\begin{aligned} \mathsf{V} &= H^1(\Omega) \times \left(H^1\left(\Gamma^{(1)}\right)\right)^L \times \left(H^1\left(\Gamma^{(2)}\right)\right)^L \\ \mathsf{H} &= L^2(\Omega) \times \left(L^2\left(\Gamma^{(1)}\right)\right)^L \times \left(L^2\left(\Gamma^{(2)}\right)\right)^L \end{aligned} \tag{2.44}$$

V est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\begin{aligned} \left\|(v, \xi_l^{(1)}, \xi_l^{(2)})\right\| &= \int_\Omega \left[|v|^2 + \left|\vec{\nabla} v\right|^2\right] dx_1 dx_2 + \\ &+ \sum_{l=1}^{L} \left(\int_{\Gamma^{(1)}} \left|\xi_l^{(1)}\right|^2 dx_2 + \int_{\Gamma^{(1)}} \left|\frac{\partial \xi_l^{(1)}}{\partial x_2}\right|^2 dx_2 \right) \\ &+ \sum_{l=1}^{L} \left(\int_{\Gamma^{(2)}} \left|\xi_l^{(2)}\right|^2 dx_1 + \int_{\Gamma^{(2)}} \left|\frac{\partial \xi_l^{(2)}}{\partial x_1}\right|^2 dx_1 \right) \end{aligned} \tag{2.45}$$

De façons analogue à [5] page 330, si H est un espace de Hilbert de norme $\|.\|_H$ et si σ est un nombre positif, on définit l'espace:

$$\mathsf{L}^1_\sigma(\mathsf{R}^+, \mathsf{H}) = \left\{v(t) : \mathsf{R}^+ \hookrightarrow \mathsf{H};\ \int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} \|v(t)\|_H \, dt < +\infty\right\}$$

Sur cet espace, on peut définir la transformée de Laplace

$$\hat{v}(p) = \int_0^{+\infty} v(t) e^{-pt} dt \ \text{ pour } \ \Re\text{éel}\, p > \sigma$$

$\hat{v}(p)$ est alors analytique à valeurs dans H sur $\Re\text{eel}\, p > \sigma$.

On donne alors la définition

Définition 2.1 *Une fonction* $V(t) = (u(.,t), \xi_l^{(1)}(.,t)\xi_l^{(2)}(.,t))$ *est une solution faible du problème (2.31)-(2.40) si et seulement si il existe un* $\sigma > 0$ *tel que*

$$(i) \qquad (V, \frac{dV}{dt}) \in \mathsf{L}^1_\sigma(\mathbb{R}^+, \mathsf{V}) \times \mathsf{L}^1_\sigma(\mathbb{R}^+, \mathsf{H})$$

$$(ii) \qquad V(t=0) = (u(x_1, x_2, , t=0), \xi_l^{(1)}(x_2, t=0), \xi_l^{(2)}(x_1, t=0))$$

$$= (u_0(x_1, x_2,), 0, ..., 0, 0, ...)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t=0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, , t=0), \frac{\partial \xi_l^{(1)}}{\partial t}(x_2, t=0), \frac{\partial \xi_l^{(2)}}{\partial t}(x_1, t=0)\right)$$

$$= (u_1(x_1, x_2,), 0, ..., 0, 0, ...)$$

avec $u_0 \in \mathsf{H}^1(\Omega)$ *et* $u_1 \in \mathsf{L}^2(\Omega)$

$$(iii) \quad \forall \left(v(x_1, x_2), \xi_l^{(1)}(x_2), \xi_l^{(2)}(x_1)\right) \in \mathsf{V}$$

(2.41),(2.42) et (2.43) sont vraies dans $\mathcal{D}'(t \in \mathbb{R}^+)$

Remarques

- Dans (i) les dérivées sont à prendre au sens des distributions à valeur dans L^2.
- Si l'on choisit v dans $\mathcal{D}(\Omega)$, il est facile de montrer que (2.41) peut être interprété comme
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^+ \times \Omega\right)$$
ce qui montre, comme $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ est continu de H^1 à valeur dans H^{-1}, que $\frac{d^2u}{dt^2}$ est élément de $\mathsf{L}^1_\sigma(\mathbb{R}^+, \mathsf{H}^{-1}(\Omega))$ et donc u est élément de $C^1\left(0, +\infty; \mathsf{H}^{-1}(\Omega)\right) \cap C^0\left(0, +\infty; \mathsf{L}^2(\Omega)\right)$, ce qui permet de donner un sens à $u(., t=0)$ et $\frac{du}{dt}(., t=0)$.
- De même si $\xi_l^{(1)}(x_2)$ est choisi dans $\mathcal{D}\left(\Gamma^{(1)}\right)$, on montre que l'on a
$$\frac{\partial^2 \psi_l^{(2)}}{\partial t^2} - \alpha_l \frac{\partial^2 \psi_l^{(2)}}{\partial x_1^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x_1=0} \text{ dans } \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^+ \times \Gamma^{(1)}\right)$$
et un raisonnement analogue montre que
$$(\psi_l^{(1)} - u) \in C^1\left(0, +\infty; \mathsf{H}^{-1}\left(\Gamma^{(1)}\right)\right) \cap C^0\left(0, +\infty; \mathsf{L}^2\left(\Gamma^{(1)}\right)\right)$$

et $(\psi_l^{(1)}-u)(t=0)$ et $\dfrac{\partial(\xi_l^{(1)}-u)}{\partial t}(t=0)$ ont bien un sens dans $\mathsf{H}^{-1}\left(\Gamma^{(1)}\right)$ et $\mathsf{L}^2\left(\Gamma^{(1)}\right)$. Comme de plus les conditions initiales sont choisies à support compact dans Ω, il est possible de montrer, en utilisant la propriété de propagation à vitesse finie des solutions de l'équation des ondes, que u et $\dfrac{du}{dt}$ sont nulles pour t suffisamment petit au voisinage de $\Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)}$. Ainsi, $\psi_l^{(1)}(t=0)$ et $\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial t}(t=0)$ ont bien un sens dans $\mathsf{H}^{-1}\left(\Gamma^{(1)}\right)$ et $\mathsf{L}^2\left(\Gamma^{(1)}\right)$.

Analyse par la transformée de Laplace

Utilisons la transformée de Laplace dans $\mathsf{L}^1_\sigma(\mathsf{R}^+,\mathsf{V})$ pour écrire le système d'équations que doit satisfaire $\hat{v}(p)$ dans V. La transformée de Laplace ramène formellement le problème (2.31)-(2.40) à:

trouver $\hat{u}(x_1,x_2;p), \hat{\psi}_l^{(1)}(x_2;p), \hat{\psi}_l^{(2)}(x_1;p)$ telles que

$$
\begin{aligned}
& p^2\hat{u} - \Delta\hat{u} = \hat{u}_1 + p\hat{u}_0 && \text{dans } \Omega \\
& p\hat{u} + \frac{\partial\hat{u}}{\partial x_i} - p\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}(\hat{\psi}_m^{(i)} - \hat{u}) = 0 && \text{sur } \Gamma^{(i)},\ (i=1,2) \\
& p^2\hat{\psi}_l^{(i)} - \alpha_l\frac{\partial^2\hat{\psi}_l^{(i)}}{\partial x_{3-i}^2} = p^2\hat{u} && \text{sur } \Gamma^{(i)},\ (i=1,2),\ (l=1,..,L) \\
& \frac{\partial\hat{\psi}_l^{(i)}}{\partial x_{3-i}^2} + pA_l\hat{\psi}_l^{(i)} - \sum_{m=1}^{L} C_{l,m}\hat{\psi}_m^{(3-i)} = 0 && \text{pour } (i=1,2),\ (l=1,..,L)^1
\end{aligned}
$$

Ou plus exactement, en utilisant la formulation faible écrite précédemment:

$$\forall v \in \mathsf{H}^1(\Omega)$$

$$
\begin{aligned}
& p^2\left(\int_\Omega \hat{u}(x_1,x_2;p)\,v(x_1,x_2)dx_1dx_2\right) + \int_\Omega \frac{\partial\hat{u}}{\partial x_1}(x_1,x_2;p)\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2 + \\
& + \int_\Omega \frac{\partial\hat{u}}{\partial x_2}(x_1,x_2;p)\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 + p\left\{(1+\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m})\int_{\Gamma^{(1)}}\hat{u}(0,x_2;p)\,v(0,x_2)dx_2 - \right. \\
& - \sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\int_{\Gamma^{(1)}}\hat{\psi}_m^{(1)}(x_2;p)\,v(0,x_2)dx_2 + (1+\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m})\int_{\Gamma^{(2)}}\hat{u}(x_1,0;p)\,v(x_1,0)dx_1 - \\
& \left. - \sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\int_{\Gamma^{(2)}}\hat{\psi}_m^{(2)}(x_1;p)\,v(x_1,0)dx_1\right\} = \left(\int_\Omega (u_1 + pu_0(x_1,x_2))\,v(x_1,x_2)dx_1dx_2\right)
\end{aligned}
$$

et

$$\text{pour } (l=1,...,L) \text{ et } \forall \xi_l^{(1)} \in \mathsf{H}^1\left(\Gamma^{(1)}\right),\ \xi_l^{(2)} \in \mathsf{H}^1\left(\Gamma^{(2)}\right)$$

$$p^2\left(\int_{\Gamma^{(1)}} \hat{\psi}_l^{(1)}(x_2;p)\,\xi_l^{(1)}(x_2)dx_2\right) + \alpha_l \int_{\Gamma^{(1)}} \frac{\partial \hat{\psi}_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2;p)\frac{\partial \xi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2)dx_2 +$$
$$+ p\left(A_l\hat{\psi}_l^{(1)}(0;p)\,\xi_l^{(1)}(0) - \sum_{m=1}^{L} C_{l,m}\hat{\psi}_m^{(2)}(0;p)\,\xi_l^{(1)}(0)\right) =$$
$$= p^2 \int_{\Gamma^{(1)}} \hat{u}(0,x_2;p)\,\xi_l^{(1)}(x_2)dx_2$$

$$p^2\left(\int_{\Gamma^{(2)}} \hat{\psi}_l^{(2)}(x_1;p)\,\xi_l^{(2)}(x_1)dx_1\right) + \alpha_l \int_{\Gamma^{(2)}} \frac{\partial \hat{\psi}_l^{(2)}}{\partial x_1}(x_1;p)\frac{\partial \xi_l^{(2)}}{\partial x_1}(x_1)dx_1 +$$
$$+ p\left(A_l\hat{\psi}_l^{(2)}(0;p)\,\xi_l^{(2)}(0) - \sum_{m=1}^{L} C_{l,m}\hat{\psi}_m^{(1)}(0;p)\,\xi_l^{(2)}(0)\right) =$$
$$= p^2 \int_{\Gamma^{(1)}} \hat{u}(x_1,0;p)\,\xi_l^{(2)}(x_1)dx_1$$

On peut rassembler ces $2L+1$ relations sous la forme plus ramassée:

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \text{Trouver } u(p) = (\hat{u}(p), \hat{\psi}_l^{(1)}(p), \hat{\psi}_l^{(2)}(p)) \\ u(p) \in \mathsf{V} \text{ telle que} \\ \forall w = (v, \xi_l^{(1)}, \xi_l^{(2)}) \in \mathsf{V} \\ A(p;u(p),w) = < L(p), w > \end{cases}$$

avec

$$< L(p), w > = \int_\Omega (pu_0 + u_1)\cdot \overline{v}$$

et

$$A(p;u(p),w) = p^2\int_\Omega \hat{u}\overline{v} + \int_\Omega \vec{\nabla}\hat{u}(p)\vec{\nabla}\overline{v} + p\int_{\Gamma^{(1)}\cup\Gamma^{(2)}} \hat{u}(p)\overline{v} +$$
$$+p\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\left\{\int_{\Gamma^{(1)}}\left(\hat{\psi}_m^{(1)}(p)-\hat{u}(p)\right)\overline{\left(\xi_m^{(1)}-v\right)}\right\} +$$
$$+p\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\left\{\int_{\Gamma^{(2)}}\left(\hat{\psi}_m^{(2)}(p)-\hat{u}(p)\right)\overline{\left(\xi_m^{(2)}-v\right)}\right\} +$$
$$+\sum_{m=1}^{L}\beta_m\left(A_m(\hat{\psi}_m^{(1)}(0,p)\overline{\xi_m^{(1)}}(0) + \hat{\psi}_m^{(2)}(0,p)\overline{\xi_m^{(2)}}(0)) -\right.$$

$$- \sum_{l=1}^{L} C_{l,m}(\hat{\psi}_m^{(2)}(0,p)\overline{\xi_m^{(1)}}(0) + \hat{\psi}_m^{(1)}(0,p)\overline{\xi_m^{(1)}}(0))\Big) +$$

$$+\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{L}\beta_m\left(\int_{\Gamma^{(1)}}\frac{\partial\hat{\psi}_m^{(1)}(p)}{\partial x_2}\overline{\frac{\partial\xi_m^{(1)}}{\partial x_2}} + \int_{\Gamma^{(2)}}\frac{\partial\hat{\psi}_m^{(2)}(p)}{\partial x_1}\overline{\frac{\partial\xi_m^{(2)}}{\partial x_1}}\right)$$

Nous avons alors le résultat suivant:

Lemme 2.1 *Si la forme quadratique*

$$(2.46)\qquad \begin{cases} Q(X_1, X_2, .., X_L, Y_1, Y_2, .., Y_L) = \\ = \sum_{m=1}^{L}\beta_m A_m(X_m^2 + Y_m^2) - \sum_{m=1}^{L}\sum_{l=1}^{L}\beta_m C_{l,m}(X_m Y_m + Y_m X_m) \end{cases}$$

est définie positive alors $A(p; u(p), w)$ est V-elliptique pour tout p réel positif.

Preuve
Si $w = \left(v, \xi_m^{(1)}, \xi_m^{(2)}, m = 1, ..., L\right)$, on peut écrire

$$A(p : w, w) = p^2\int_\Omega |v|^2 + \int_\Omega \left|\vec{\nabla}v\right|^2 + p\int_{\Gamma^{(1)}\cup\Gamma^{(2)}}|v|^2 +$$

$$+p\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\left\{\int_{\Gamma^{(1)}}\left|\xi_m^{(1)} - v\right|^2\right\} + p\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\left\{\int_{\Gamma^{(2)}}\left|\xi_m^{(2)} - v\right|^2\right\} +$$

$$+\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{L}\beta_m\left(\int_{\Gamma^{(1)}}\left|\frac{\partial\xi_m^{(1)}}{\partial x_2}\right|^2 + \int_{\Gamma^{(2)}}\left|\frac{\partial\xi_m^{(2)}}{\partial x_1}\right|^2\right) + Q(\xi_m^{(1)}, \xi_m^{(2)})$$

D'où:

$$A(p : w, w) \geq inf(p^2, 1, p, \frac{1}{p})\left(\|v\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega))} + \sum_{i=1,2}\int_{\Gamma^{(i)}}\|v\|^2 + \right.$$

$$\left.\left(+\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\int_{\Gamma^{(i)}}\left|\xi_m^{(i)} - v\right|^2 + \beta_m\int_{\Gamma^{(i)}}\left|\frac{\partial\xi_m^{(i)}}{\partial x_{3-i}}\right|^2\right)\right.$$

(On a utilisé ici la positivité de Q). On a donc

$$A(p : w, w) \geq \inf(p^2, \frac{1}{p})\cdot C(\alpha_m, \beta_m)\left(\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega))} + \sum_{i=1,2}\left\|\xi_m^{(i)}\right\|^2_{\mathbf{H}^1\left(\Gamma^{(i)}\right)}\right)$$

■

D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution unique dans V. En particulier, si u_0 et u_1 sont nulles, nous avons nécessairement $\hat{u}$ et $\hat{\psi}_m^{(i)}$ identiquement nulles pour tout p réel supérieur à σ. Ces fonctions étant analytiques en p, on en déduit qu'elles ne peuvent être que nulles sur leur domaine d'analycité. On a donc la

Proposition 2.1 *La solution de (i) ,(ii), (iii), si elle existe, est unique dès que la forme quadratique* $Q(X_1, X_2, ..X_L, Y_1, Y_2, ...Y_L)$ *définie en (2.46) est positive*

Comme nous l'avons annoncé, nous pouvons montrer que cette condition d'injectivité pour le problème de coin est vérifiée dès que la condition qui assure le caractère bien posé au sens de Kreiss (cf. théorème 1.1 de Halpern et Trefethen) est satisfaite. C'est l'objet du théorème suivant:

Théorème 2.1 *Si les conditions*

$$\text{(2.47)} \qquad \begin{cases} 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_L < 1 \\ \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{1-\alpha_m} < 1 \ ; \ \beta_l > 0 \end{cases}$$

sont satisfaites, la matrice associée à la forme quadratique Q définie en (2.46) est une M-matrice et la forme Q est positive. Dans ce cas, la solution de (i), (ii), (iii), si elle existe, est unique.

Preuve: Il suffit de constater que, les α_l étant tous de module inférieur à l'unité, les éléments extra-diagonaux de la matrice A associée à Q sont tous négatifs puisque:

$$A = \begin{bmatrix} D & C \\ C & D \end{bmatrix}$$

avec D diagonale et C vérifiant

$$C_{l,m} = -\beta_l \cdot \frac{\beta_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_l \alpha_m}.$$

De plus l'inégalité:

$$\sum_{m=1}^{L} |C_{l,m}| < D_{ll} \quad \forall l$$

sera satisfaite dès que

$$\beta_l \left(\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_l \alpha_m} \right) < \beta_l \left(1 + \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \cdot \frac{\alpha_l}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_l \alpha_m}. \right)$$

soit,

$$\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_l \alpha_m} < \frac{1}{\alpha_l} \quad \forall l$$

équation qui sera vérifiée en particulier si (les α_l étant tous strictement positifs)

$$\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_l (1-\alpha_m)} < \frac{1}{\alpha_l}$$

Supposons les conditions du lemme remplies, la matrice A a ainsi la propriété d'avoir ses éléments extra-diagonaux négatifs. De plus si l'on somme sur une même ligne ces éléments extra-diagonaux on obtient une quantité de module strictement inférieur à l'élément diagonal de cette même ligne. En d'autres termes, A est une M-matrice (cf [14] pour la définition et les propriétés des M-matrices) ce qui assure la positivité de la forme quadratique associée à Q.

■

Existence de solutions

Pour compléter l'analyse précédente, reste à établir l'existence d'une solution au problème *(i)* ,*(ii)*, *(iii)*. On pourrait bien sûr essayer d'utiliser la transformation de Laplace en tentant de montrer l'existence d'une solution au problème $(\mathcal{P})$ lorsque $p = p_r + i\omega$, $p_r > 0$ étant fixé et ω variant sur $\mathbb{R}$ et d'obtenir des estimations sur $\|\hat{v}(p_r + i\omega\|_V$ uniformes en ω, Malheureusement, ces estimations semblent difficiles à obtenir, notamment lorsque ω devient grand. Rappelons que pour le cas de l'ordre 2, Bamberger et al. avaient rencontré la même difficulté et qu'ils n'avaient réussi à obtenir l'existence d'une solutions que pour des données initiales suffisamment régulières. Leur démonstration devrait se généraliser au cas des C.L.A. d'ordre élevé. Nous avons commencé à aborder ce point difficile mais devans la taille des développements demandés, nous avons choisi de le renvoyer à un rapport spécifique ultérieur.

2.2 Généralisation à d'autres cas

2.2.1 Cas de l'équation des ondes amorties

Dans cette section, on présente les calculs qui permettent de déterminer les conditions de coin pour le cas d'un modèle d'onde 2D avec amortissement (ajout d'un terme de conduction $\sigma \partial u/\partial t, \sigma \geq 0$ à l'équation des ondes). La démarche est toujours de construire une famille de solutions particulières composées d'ondes planes puis de déterminer les conditions que satisfont ces solutions au coin. La nouveauté par rapport au cas non conducteur($\sigma = 0$) est que les 2L conditions de coin qui relient les dérivées premières en temps et en espace des fonctions auxiliaires au coin C s'écrivent par le biais de L^2 nouvelles fonctions auxiliaires, uniquement définies au coin C et donc uniquement fonction du temps, et qui vérifient des équations différentielles ordinaires du premier ordre en temps.

Détermination des conditions de coin

Nous commençons par reformuler le problème du quart d'espace en présence d'un terme de conduction σ

On cherche $u(x_1, x_2, t)$ régulière satisfaisant les équations:

$$(2.48)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1,x_2,t) + \sigma \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_1,x_2,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}(x_1,x_2,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2}(x_1,x_2,t) = 0 \\ \text{pour tout } x_1 < 0, x_2 < 0 \ \ (i.e.\ (x_1,x_2) \text{ dans } \Omega) \end{cases}$$

$$(2.49)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(0,x_2,t) + \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x_2,t) - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial t}(x_2,t) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_l^{(1)}}{\partial t^2}(x_2,t) + \sigma \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t}(x_2,t) - \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(1)}}{\partial x_2^2}(x_2,t) = 0 \\ \psi_l^{(1)}(x_2,t) = \alpha_l \varphi_l^{(1)}(x_2,t) + u(0,x_2,t) \\ \text{pour tout } x_2 < 0 \ (i.e.\ (0,x_2) \text{ sur } \Gamma^{(2)}) \text{ et pour } \ l = 1, ..., L \end{cases}$$

$$(2.50)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,0,t) + \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_1,0,t) - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial t}(x_1,t) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_l^{(2)}}{\partial t^2}(x_1,t) + \sigma \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t}(x_1,t) - \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(2)}}{\partial x_1^2}(x_1,t) = 0 \\ \psi_l^{(2)}(x_1,t) = \alpha_l \varphi_l^{(2)}(x_1,t) + u(x_1,0,t) \\ \text{pour tout } x_1 < 0 \ (i.e.\ (x_1,0) \text{ sur } \Gamma^{(2)}) \text{ et pour } \ l = 1, ..., L \end{cases}$$

Pour trouver les conditions que doit satisfaire au coin la solution, on commence par construire une famille de solutions particulières de (2.48)-(2.50) sous la forme:

$$(2.51)\quad \begin{cases} u(x_1,x_2,t) = & & \exp i\omega(\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 - t) \\ & + R_1 & \exp i\omega(-\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 - t) \\ & + R_2 & \exp i\omega(+\zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2 - t) \\ & + R_1 R_2 & \exp i\omega(-\zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2 - t) \end{cases}$$

Les fonctions auxiliaires sont recherchées proportionnelles à la trace de u sur la frontière

de Ω:

$$(2.52)\qquad \left\{ \begin{array}{rcl} & \text{pour } l = 1, ..., L & \\ \varphi_l^{(2)}(x_1, t) & = & \Phi_l^{(2)} \cdot u(x_1, x_2 = 0, t) \\ \psi_l^{(2)}(x_1, t) & = & \Psi_l^{(2)} \cdot u(x_1, x_2 = 0, t) \\ \varphi_l^{(1)}(x_2, t) & = & \Phi_l^{(1)} \cdot u(x_1 = 0, x_2, t) \\ \psi_l^{(1)}(x_2, t) & = & \Psi_l^{(1)} \cdot u(x_2 = 0, x_1, t) \end{array} \right.$$

avec, bien entendu:

$$(2.53)\qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_l \Phi_l^{(1)} + 1 & = & \Psi_l^{(1)} \\ \alpha_l \Phi_l^{(2)} + 1 & = & \Psi_l^{(2)} \end{array} \right.$$

En injectant ces dernières expressions dans les équations satisfaites par les $\varphi_l^{(2)}$ et $\varphi_l^{(1)}$, on trouve

$$(2.54)\qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \Phi_l^{(1)} & = & \dfrac{\omega^2 \zeta_2^2 - i\omega\sigma}{\omega^2 - \alpha_l(\omega^2 \zeta_2^2 - i\omega\sigma)} \\ \Psi_l^{(1)} & = & \dfrac{\omega^2}{\omega^2 - \alpha_l(\omega^2 \zeta_2^2 - i\omega\sigma)} \\ \Phi_l^{(2)} & = & \dfrac{\omega^2 \zeta_2^1 - i\omega\sigma}{\omega^2 - \alpha_l(\omega^2 \zeta_2^1 - i\omega\sigma)} \\ \Psi_l^{(2)} & = & \dfrac{\omega^2}{\omega^2 - \alpha_l(\omega^2 \zeta_2^1 - i\omega\sigma)} \end{array} \right.$$

De même l'équation dans Ω sera satisfaite si

$$\omega^2 + i\omega\sigma \;=\; \omega^2 \left(\zeta_2^2 + \zeta_1^2\right)$$

Restent à déterminer les coefficients de réflexion R_1 et R_2. Sur $\Gamma^{(1)}$, on peut écrire:

$$i\omega\,\zeta_1\,(1 - R_1) \exp\, i\omega(\zeta_2 x_2 - t) \;+\; i\omega\,\zeta_1\,(R_2 - R_2 R_1) \exp\, i\omega(\zeta_2 x_2 - t) \;-$$

$$-\; (1 + R_1 + R_2 + R_1 R_2) \exp\, i\omega(\zeta_2 x_2 - t) \left(1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \Phi_l^{(1)}\right) \;=\; 0$$

équation qui sera vérifiée si

$$(2.55)\qquad \frac{\zeta_1(1 - R_1)}{(1 + R_1)} \;=\; 1 \;-\; \sum_{l=1}^{L} \beta_l \Phi_l^{(1)}$$

De même l'équation relative à $\Gamma^{(2)}$ fournit

$$\frac{\zeta_2(1-R_2)}{(1+R_2)} = 1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \Phi_l^{(2)} \tag{2.56}$$

ou, de manière équivalente:

$$\begin{cases} \dfrac{\zeta_2(1-R_2)}{(1+R_2)} = 1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \Psi_m^{(2)} \\ \dfrac{\zeta_1(1-R_1)}{(1+R_1)} = 1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \Psi_m^{(1)} \end{cases} \tag{2.57}$$

Restent à trouver les conditions de coin. De manière analogue au cas non conducteur on forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2 = 0, t) = \Psi_l^{(1)} \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_2 = 0, t) \\ \qquad = \Psi_l^{(1)} \zeta_2 (1 + R_1 - R_2 - R_1 R_2)\, i\omega \exp -i\omega t \\ \qquad = \Psi_l^{(1)} \left(1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \Psi_m^{(2)}\right) \frac{\partial u}{\partial t}(0,0,t) \end{cases} \tag{2.58}$$

Or,

$$\Psi_m^{(1)} \cdot \Psi_l^{(2)} = \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \alpha_l(\omega^2 \zeta_1^2 - i\omega\sigma))\,(\omega^2 - \alpha_m(\omega^2 - \zeta_1^2 \omega^2))}$$

soit, en effectuant la décomposition en éléments simples:

$$\begin{cases} \Psi_m^{(1)} \cdot \Psi_l^{(2)} = \dfrac{\omega^2 \alpha_l A_{l,m}}{\omega^2 - \alpha_l(\omega^2 \zeta_1^2 - i\omega\sigma)} + \dfrac{\omega^2 \alpha_m A_{l,m}}{\omega^2 - \alpha_m(\omega^2 - \zeta_1^2 \omega^2)} \\ \qquad \text{avec} \\ \omega^2 = A_{l,m} \cdot \left((\alpha_m + \alpha_l - \alpha_l \alpha_m)\omega^2 + i\omega\sigma\omega\alpha_l\alpha_m\right) \end{cases} \tag{2.59}$$

(On remarque que les $A_{l,m}$ sont des symboles ne dépendant que de ω)

On a donc

$$\begin{cases} \zeta_1 \dfrac{1-R_1}{1+R_1} \Psi_l^{(2)} = \left(1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) \Psi_l^{(2)} - \\ - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\alpha_l}{\alpha_m} A_{l,m}(\omega) \Psi_l^{(2)} - \sum_{m=1}^{L} \beta_m A_{l,m}(\omega) \Psi_m^{(1)} \end{cases} \tag{2.60}$$

Afin de construire une fonction relative au symbole $A_{l,m}$, on définit:

$$\psi_{m,l}^{(i)} \begin{cases} m = 1, ..., L \\ l = 1, ..., L \\ i = 1, 2 \end{cases}$$

$\psi_{m,l}^{(i)}$ vérifiant:

$$\frac{\partial^2 \psi_l^{(i)}}{\partial t^2} = (\alpha_m + \alpha_l - \alpha_l \alpha_m) \frac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(i)}}{\partial t^2} + \sigma \alpha_m \alpha_l \frac{\partial \psi_{m,l}^{(i)}}{\partial t}$$

soit

$$(2.61) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi_l^{(i)}}{\partial t}(x_1 = 0, t) = (\alpha_m + \alpha_l - \alpha_l \alpha_m) \dfrac{\partial \psi_{m,l}^{(i)}}{\partial t}(t) + \sigma \alpha_m \alpha_l \psi_{m,l}^{(i)} \\ \qquad \text{pour } l = 1, ..., L, \quad m = 1, ..., L, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

En reprenant le début de notre calcul, on vérifie ainsi que la relation

$$(2.62) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x^1}(x_1 = 0, t) = -\left(1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) \frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t}(x_1 = 0, t) + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m \alpha_l}{\alpha_m} \frac{\partial \psi_{m,l}^{(2)}}{\partial t}(t) + \sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial \psi_{l,m}^{(1)}}{\partial t}(t) \end{cases}$$

est satisfaite au coin.
De même l'équation

$$(2.63) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x^2}(x_2 = 0, t) = -\left(1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) \frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t}(x_2 = 0, t) + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m \alpha_l}{\alpha_m} \frac{\partial \psi_{m,l}^{(1)}}{\partial t}(t) + \sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial \psi_{l,m}^{(2)}}{\partial t}(t) \end{cases}$$

s'obtient en permutant le rôle des indices 1 et 2.

Les conditions de coin sont finalement composées des équations (2.61), (2.62) et (2.63). Lorsque $\sigma = 0$, les nouvelles fonctions auxiliaires sont proportionnelles aux anciennes et on retrouve les conditions de coin pour l'équation des ondes 2D établies précédemment.

2.2.2 Cas de l'équation des ondes 3D

On détermine ici les conditions d'arêtes et de coin pour le problème de l'équation d'onde à trois dimensions d'espace. Si les techniques utilisées sont identiques au cas 2D (construction d'une famille de solutions particulières et écriture de relations satisfaites au coin par ces solutions) les relations obtenues apparaissent plus complexes et peut être moins facilement

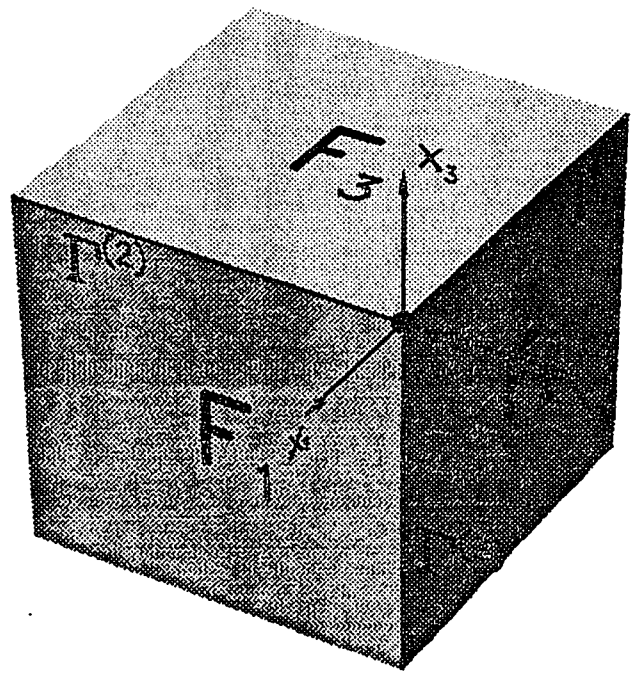


Figure 2.4 : Géométrie du problème

maniables numériquement dans le cas 3D. En effet les C.L.A. que nous dériverons font intervenir L fonctions auxiliaires sur chaque face qui satisfont des équations d'onde 2D ainsi que, pour chaque arête, $2L^2$ autres fonctions auxiliaires qui satisfont des équations des ondes 1D. Au coin où se croisent 3 arêtes, les $3 \times 2L^2$ fonctions d'arêtes sont reliées entre elles par $6\ L^2$ équations de coin.

Détermination des conditions d'arêtes et de coin

On commence par généraliser ce qui a été fait en deux dimensions et pour un quart d'espace à trois dimensions et dans un huitième d'espace. On définit

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_i < 0 \; i = 1, 2, 3\right\}$$

ainsi que les faces et les arêtes:

$$\partial\Omega = F_1 \cup F_2 \cup F_3$$

$$\Gamma^{(1)} = F_2 \cap F_3, \quad \Gamma^{(2)} = F_3 \cap F_1, \quad \Gamma^{(3)} = F_1 \cap F_2$$

Puis on écrit le système d'équations satisfait par l'inconnue u supposée régulière:

$$\text{Trouver } u \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

telle que

$$
(2.64)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_3}^2} = 0 \text{ dans } \Omega \\
\text{puis, sur chaque } F_i, \quad i = 1,2,3 : \\
\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial \varphi_m^{(i)}}{\partial t} = 0 \\
\text{et, } \forall l = 1,..,L \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi_l^{(i)}}{\partial t^2} - \Delta_T \psi_l^{(i)} = 0 \\ \psi_l^{(i)} = \alpha_l \varphi_l^{(i)} + u \end{cases}
\end{cases}
$$

où Δ_T est le Laplacien tangentiel:

$$\Delta_T = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad \text{sur} \quad F_i,\ i,j,k \text{ distincts.}$$

On admet que ce problème admet des solutions régulières et on cherche quelles sont les conditions que doivent satisfaire ces solutions:

1. sur les arêtes $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ et $\Gamma^{(3)}$,
2. au coin $C = (0,0,0) = \Gamma^{(1)} \cap \Gamma^{(2)} \cap \Gamma^{(3)}$.

Pour cela on va commencer par construire une famille de solutions particulières de (2.64). On cherchera ces solutions sous la forme:

$$
(2.65)\qquad
\begin{cases}
u(x_1,x_2,t) = & & \exp i\omega(+\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3 - t) \\
& + \quad R_1 & \exp i\omega(-\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3 - t) \\
& + \quad R_2 & \exp i\omega(+\zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3 - t) \\
& + \quad R_3 & \exp i\omega(+\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 - \zeta_3 x_3 - t) \\
& + \quad R_1 R_2 & \exp i\omega(-\zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3 - t) \\
& + \quad R_1 R_3 & \exp i\omega(-\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 - \zeta_3 x_3 - t) \\
& + \quad R_2 R_3 & \exp i\omega(+\zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2 - \zeta_3 x_3 - t) \\
& + \quad R_1 R_2 R_3 & \exp i\omega(-\zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2 - \zeta_3 x_3 - t)
\end{cases}
$$

Pour que l'équation des ondes soit satisfaite dans Ω, il faut et il suffit que:

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 1$$

Plaçons nous en $x_1 = 0$. Pour que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial t} = 0$$

avec

$$\frac{\partial^2 \varphi_l^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi_l^{(1)}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi_l^{(1)}}{\partial x_3^2} = 0 \text{ et } \psi_l^{(1)} = \alpha_l \varphi_l^{(1)} + u$$

il suffit d'imposer aux fonctions auxiliaires d' être proportionnelles à la trace de u sur la face F_1 et de vérifier:

$$\varphi_l^{(1)}(x_2, x_3) = \Phi_l^{(1)} u(0, x_2, x_3)$$

$$\text{avec } \Phi_l^{(1)} = \frac{\zeta_2^2 + \zeta_3^2}{1 - \alpha_l(\zeta_2^2 + \zeta_3^2)}$$

$$\psi_l^{(1)}(x_2, x_3) = \Psi_l^{(1)} u(0, x_2, x_3)$$

$$\text{avec } \Psi_l^{(1)} = \frac{1}{1 - \alpha_l(\zeta_2^2 + \zeta_3^2)}$$

Posons

$$A(x_2, x_3, t) = (\exp i\omega\zeta_2 x_2 + R_2 \exp -i\omega\zeta_2 x_2)(\exp i\omega\zeta_3 x_3 + R_3 \exp -i\omega\zeta_3 x_3) \exp -i\omega t$$

L'équation en $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ sera vérifiée si $\forall t$ et $\forall x_2, x_3$ négatifs:

$$A(x_2, x_3, t)\zeta_1(i\omega)(1 - R_1) = A(x_2, x_3, t)(i\omega)(1 + R_1)(1 - \sum_{m=1}^{L} \beta_m \Phi_m^{(1)})$$

d'où

$$\zeta_1 \frac{1 - R_1}{1 + R_1} = 1 - \sum_{m=1}^{L} \beta_m \Phi_m^{(1)}$$

ou, de manière équivalente:

$$\zeta_1 \frac{1 - R_1}{1 + R_1} = \left(1 + \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \Psi_m^{(1)}$$

En procédant de manière analogue sur les faces $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$, on imposera:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} - \sum_{m=1}^{L} \beta_m \dfrac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_l^{(2)}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(2)}}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(2)}}{\partial x_3^2} = 0 \ \text{ et } \ \psi_l^{(2)} = \alpha_l \varphi_l^{(2)} + u \\ \text{pour } \ x_1 < 0, x_3 < 0 \text{ et } x_2 = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u}{\partial t} - \sum_{m=1}^{L} \beta_m \dfrac{\partial \varphi_m^{(3)}}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_l^{(3)}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(3)}}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(3)}}{\partial x_2^2} = 0 \ \text{ et } \ \psi_l^{(3)} = \alpha_l \varphi_l^{(3)} + u \\ \text{pour } \ x_1 < 0, x_2 < 0 \text{ et } x_3 = 0 \end{cases}$$

ce qui fixera les valeurs des coefficients de réflexion R_2 et R_3:

$$\zeta_2 \frac{1 - R_2}{1 + R_2} = \left(1 + \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \Psi_m^{(2)}$$

$$\zeta_3 \frac{1 - R_3}{1 + R_3} = \left(1 + \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \Psi_m^{(3)}$$

On cherche à présent les conditions d'arêtes. On va, par exemple, se placer en $x_1 = 0$ et chercher à évaluer $\dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2}$ en $x_2 = 0$.

On a:

$$\frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2 = 0, x_3, t) = i\omega A \zeta_2 (1 - R_2)(1 + R_1) \Psi_l^{(1)}(\zeta_2, \zeta_3)$$

$$\text{avec } \ A \ = \ \exp i\omega t \cdot (\exp i\omega \zeta_3 x_3 + R_3 \exp -i\omega \zeta_3 x_3)$$

or:

$$\zeta_2 \frac{1 - R_2}{1 + R_2} \cdot \Psi_l^{(1)}(\zeta_2, \zeta_3) = \left(1 + \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \Psi_m^{(2)}(\zeta_1, \zeta_3)\right) \cdot \Psi_l^{(1)}(\zeta_2, \zeta_3)$$

$$= \left(1 + \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) \cdot \Psi_l^{(1)}(\zeta_2, \zeta_3) - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \Psi_m^{(2)}(\zeta_1, \zeta_3) \cdot \Psi_l^{(1)}(\zeta_2, \zeta_3)$$

On va effectuer une décomposition en éléments simples de

$$\Psi_m^{(2)}(\zeta_1, \zeta_3) \cdot \Psi_l^{(1)}(\zeta_2, \zeta_3) = \frac{1}{1 - \alpha_m(\zeta_1^2 + \zeta_3^2)} \cdot \frac{1}{1 - \alpha_l(\zeta_2^2 + \zeta_3^2)}$$

On a

$$\Psi_m^{(2)}(\zeta_1,\zeta_3)\cdot\Psi_l^{(1)}(\zeta_2,\zeta_3) == \frac{A_{l,m}(\zeta_3^2)\alpha_m}{1-\alpha_m(\zeta_1^2+\zeta_3^2)} + \frac{A_{l,m}(\zeta_3^2)\alpha_l}{1-\alpha_l(\zeta_2^2+\zeta_3^2)}$$

$$\text{avec}\quad A_{l,m}(\zeta_3^2) = \frac{1}{\alpha_l+\alpha_m-\alpha_l\alpha_m-\alpha_l\alpha_m\zeta_3^2}$$

(Utiliser $1-\alpha_m(\zeta_2^2+\zeta_3^2) = 1-\alpha_m+\alpha_m\zeta_1^2$ et faire la décomposition en considérant ζ_3 comme variable muette).
On est donc amené à définir des fonctions auxiliaires pour chaque fonction auxiliaire, soient:

$$\psi_{m,l}^{(1,3)}(x_3,t) \text{ et } \psi_{m,l}^{(2,3)}(x_3,t)$$

avec

$$\begin{aligned}
\psi_{m,l}^{(1,3)}(x_3,t) &= \Psi_{m,l}^{(1,3)}\, u(x_1=0,x_2=0,x_3,t)\\
\psi_{m,l}^{(2,3)}(x_3,t) &= \Psi_{m,l}^{(2,3)}\, u(x_1=0,x_2=0,x_3,t)\\
\Psi_{m,l}^{(1,3)} &= \frac{\alpha_l+\alpha_m-\alpha_l\alpha_m}{\alpha_l+\alpha_m-\alpha_l\alpha_m-\alpha_l\alpha_m\zeta_3^2}\cdot\Psi_l^{(3)}\\
\Psi_{m,l}^{(2,3)} &= \frac{\alpha_l+\alpha_m-\alpha_l\alpha_m}{\alpha_l+\alpha_m-\alpha_l\alpha_m-\alpha_l\alpha_m\zeta_3^2}\cdot\Psi_l^{(2)}
\end{aligned}$$

et qui satisfont des équations des ondes $1D$ le long de l'arête $x_1=0, x_2=0$:

$$\text{(2.66)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi_{m,l}^{(1,3)}}{\partial t^2} - \dfrac{\alpha_l\alpha_m}{\alpha_l+\alpha_m-\alpha_l\alpha_m}\dfrac{\partial^2\psi_{m,l}^{(1,3)}}{\partial x_3^2} = \dfrac{\partial^2\psi_l^{(1)}}{\partial t^2}(x_2=0,x_3,t)\\ \dfrac{\partial^2\psi_{m,l}^{(2,3)}}{\partial t^2} - \dfrac{\alpha_l\alpha_m}{\alpha_l+\alpha_m-\alpha_l\alpha_m}\dfrac{\partial^2\psi_{m,l}^{(2,3)}}{\partial x_3^2} = \dfrac{\partial^2\psi_l^{(2)}}{\partial t^2}(x_1=0,x_3,t) \end{cases}$$

On aura alors:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2=0,x_3,t) = -\exp i\omega t\cdot(\exp i\omega\zeta_3x_3 + R_3\exp -i\omega\zeta_3x_3)(-i\omega)(1+R_2)(1+R_1)\cdot\\ \cdot\left(\left(1+\sum_{m=1}^{L}\dfrac{\beta_m}{\alpha_m}\right)\Psi_l^{(1)} - \sum_{m=1}^{L}\dfrac{\beta_m\alpha_l/\alpha_m}{\alpha_m+\alpha_l-\alpha_m\alpha_l}\Psi_{m,l}^{(1,3)} - \sum_{m=1}^{L}\dfrac{\beta_m}{\alpha_m+\alpha_l-\alpha_m\alpha_l}\Psi_{l,m}^{(2,3)}\right) \end{cases}$$

En passant des symboles aux fonctions, on obtient:

$$\text{(2.67)}\qquad \begin{cases} \forall x_3<0\\ 0 = \dfrac{\partial\psi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2=0,x_3,t) + \left(1+\sum_{m=1}^{L}\dfrac{\beta_m}{\alpha_m}\right)\dfrac{\partial\psi_l^{(1)}}{\partial t}(x_2=0,x_3,t) -\\ -\sum_{m=1}^{L}\dfrac{\beta_m\alpha_l/\alpha_m}{\alpha_m+\alpha_l-\alpha_m\alpha_l}\dfrac{\partial\psi_{m,l}^{(1,3)}}{\partial t}(x_3,t) - \sum_{m=1}^{L}\dfrac{\beta_m}{\alpha_m+\alpha_l-\alpha_m\alpha_l}\dfrac{\partial\psi_{l,m}^{(2,3)}}{\partial t}(x_3,t) \end{cases}$$

En inversant le rôle de x_1 et x_2, on arrivera à la seconde famille de conditions:

$$(2.68)\quad \begin{cases} \forall x_3 < 0 \\ 0 = \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x_1}(x_1 = 0, x_3, t) + \left(1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t}(x_1 = 0, x_3, t) - \\ - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m \alpha_l / \alpha_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \frac{\partial \psi_{m,l}^{(2,3)}}{\partial t}(x_3, t) - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(1,3)}}{\partial t}(x_3, t) \end{cases}$$

En procédant de même pour l'arête $x_2 = 0, x_3 = 0$, on définira

$$\psi_{m,l}^{(2,1)}(x_1, t) \text{ et } \psi_{m,l}^{(3,1)}(x_1, t)$$

qui satisfont des équations des ondes $1D$

$$(2.69)\quad \begin{cases} \forall x_1 < 0 \\ \dfrac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(2,1)}}{\partial t^2} - \dfrac{\alpha_l \alpha_m}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l \alpha_m} \dfrac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(2,1)}}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(2)}}{\partial t^2}(x_1, x_3 = 0, t) \\ \dfrac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(3,1)}}{\partial t^2} - \dfrac{\alpha_l \alpha_m}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l \alpha_m} \dfrac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(3,1)}}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(3)}}{\partial t^2}(x_1, x_2 = 0, t) \end{cases}$$

Et on aura sur l'arête $x_2 = 0, x_3 = 0$

$$(2.70)\quad \begin{cases} \forall x_1 < 0 \\ 0 = \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x_3}(x_1, x_3 = 0, t) + \left(1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t}(x_1, x_3 = 0, t) - \\ - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m \alpha_l / \alpha_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \frac{\partial \psi_{m,l}^{(2,1)}}{\partial t}(x_1, t) - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(3,1)}}{\partial t}(x_1, t) \end{cases}$$

ainsi que

$$(2.71)\quad \begin{cases} \forall x_1 < 0 \\ 0 = \dfrac{\partial \psi_l^{(3)}}{\partial x_2}(x_1, x_2 = 0, t) + \left(1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) \dfrac{\partial \psi_l^{(3)}}{\partial t}(x_1, x_2 = 0, t) - \\ - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m \alpha_l / \alpha_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \frac{\partial \psi_{m,l}^{(3,1)}}{\partial t}(x_1, t) - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(2,1)}}{\partial t}(x_1, t) \end{cases}$$

Enfin, on définira:

$$\psi_{m,l}^{(1,2)}(x_2, t) \text{ et } \psi_{m,l}^{(1,2)}(x_2, t)$$

qui satisfont des équations des ondes $1D$

$$(2.72)\qquad \begin{cases} & \forall x_1 < 0 \\ \dfrac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(1,2)}}{\partial t^2} - \dfrac{\alpha_l \alpha_m}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l \alpha_m} \dfrac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(1,2)}}{\partial x_2^2} = \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(1)}}{\partial t^2}(x_1 = 0, x_2, t) \\ \dfrac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(3,2)}}{\partial t^2} - \dfrac{\alpha_l \alpha_m}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l \alpha_m} \dfrac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(3,2)}}{\partial x_2^2} = \dfrac{\partial^2 \psi_l^{(3)}}{\partial t^2}(x_2, x_3 = 0, t) \end{cases}$$

Et on aura sur l'arête $x_1 = 0, x_3 = 0$

$$(2.73)\qquad \begin{cases} & \forall x_1 < 0 \\ 0 = \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_3}(x_2, x_3 = 0, t) + \left(1 + \sum_{m=1}^{L} \dfrac{\beta_m}{\alpha_m}\right) \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t}(x_2, x_3 = 0, t) - \\ - \sum_{m=1}^{L} \dfrac{\beta_m \alpha_l / \alpha_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \dfrac{\partial \psi_{m,l}^{(1,2)}}{\partial t}(x_2, t) - \sum_{m=1}^{L} \dfrac{\beta_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \dfrac{\partial \psi_{l,m}^{(3,2)}}{\partial t}(x_2, t) \end{cases}$$

ainsi que

$$(2.74)\qquad \begin{cases} & \forall x_1 < 0 \\ 0 = \dfrac{\partial \psi_l^{(3)}}{\partial x_1}(x_1 = 0, x_2, t) + \left(1 + \sum_{m=1}^{L} \dfrac{\beta_m}{\alpha_m}\right) \dfrac{\partial \psi_l^{(3)}}{\partial t}(x_1 = 0, x_2, t) - \\ - \sum_{m=1}^{L} \dfrac{\beta_m \alpha_l / \alpha_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \dfrac{\partial \psi_{m,l}^{(3,2)}}{\partial t}(x_2, t) - \sum_{m=1}^{L} \dfrac{\beta_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \dfrac{\partial \psi_{l,m}^{(1,2)}}{\partial t}(x_2, t) \end{cases}$$

Reste à présent à définir la condition de coin en $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
Le long de chaque arête, les conditions portant sur les $\psi_l^{(i)}(0, x_j, t)$ étant du premier ordre en x_j, aucune condition n'est a priori requise pour ces fonctions.
Par contre les $\psi_{l,m}^{(i,j)}(x_j, t)$ sont du second ordre en x_i. Il est donc nécessaire de trouver des conditions de coins les concernant . Une liste exhaustive de ces fonctions permet d'en

dénombrer $6L^2$:

$$\begin{aligned}
\psi_{m,l}^{(3,2)}(x_2,t) &\overset{symbole}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\gamma_{m,l}\zeta_2^2}\cdot\frac{1}{1-\alpha_l(\zeta_1^2+\zeta_2^2)}\\
\psi_{m,l}^{(1,2)}(x_2,t) &\longrightarrow \frac{1}{1-\gamma_{m,l}\zeta_2^2}\cdot\frac{1}{1-\alpha_l(\zeta_2^2+\zeta_3^2)}\\
\psi_{m,l}^{(3,1)}(x_1,t) &\longrightarrow \frac{1}{1-\gamma_{m,l}\zeta_1^2}\cdot\frac{1}{1-\alpha_l(\zeta_1^2+\zeta_2^2)}\\
\psi_{m,l}^{(2,1)}(x_1,t) &\longrightarrow \frac{1}{1-\gamma_{m,l}\zeta_1^2}\cdot\frac{1}{1-\alpha_l(\zeta_1^2+\zeta_3^2)}\\
\psi_{m,l}^{(2,3)}(x_1,t) &\longrightarrow \frac{1}{1-\gamma_{m,l}\zeta_3^2}\cdot\frac{1}{1-\alpha_l(\zeta_1^2+\zeta_3^2)}\\
\psi_{m,l}^{(1,3)}(x_1,t) &\longrightarrow \frac{1}{1-\gamma_{m,l}\zeta_3^2}\cdot\frac{1}{1-\alpha_l(\zeta_2^2+\zeta_3^2)}
\end{aligned}$$

Le terme *symbole* signifiant la relation

$$\psi_{l,m}^{(i,j)}(x_j,t) = \Psi_{l,m}^{(i,j)}\, u\,(x_i = 0\,(i\neq j), x_j, t)$$

tandis que $\gamma_{l,m}$ est donné par l'expression:

$$\gamma_{l,m} = \frac{\alpha_l\alpha_m}{\alpha_l+\alpha_m-\alpha_l\alpha_m}$$

On prend son courage à deux mains et on commence par $\psi_{m,l}^{(1,3)}(x_3,t)$. On forme

$$\begin{aligned}
\frac{\psi_{l,m}^{(1,3)}}{\partial x_3}(x_3=0,t) &= i\omega\zeta_3(1-R_3)(1+R_2)(1+R_1)\cdot\Psi_{m,l}^{(1,3)}\\
&= i\omega(1+R_3)(1+R_2)(1+R_1)\left(\zeta_3\frac{1-R_3}{1+R_3}\cdot\right)\Psi_{m,l}^{(1,3)}\\
&= -\left(1+\sum_{n=1}^{L}\frac{\beta_n}{\alpha_n}-\sum_{n=1}^{L}\frac{\beta_n}{\alpha_n}\Psi_n^{(3)}\right)\cdot\Psi_{m,l}^{(1,3)}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}(0,0,0,t)
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\Psi_n^{(3)}\cdot\Psi_{m,l}^{(1,3)} &= \frac{1}{1-\gamma_{l,m}\zeta_3^2}\cdot\frac{1}{1-\alpha_l(\zeta_1^2+\zeta_3^2)}\cdot\frac{1}{1-\alpha_n(\zeta_1^2+\zeta_2^2)}\\
&= \frac{1}{1-\gamma_{l,m}\zeta_3^2}\cdot\frac{1}{1-\alpha_n+\alpha_n\zeta_3^2}\cdot\frac{1}{1-\alpha_l(\zeta_1^2+\zeta_3^2)}\\
&= \left(\frac{\gamma_{l,m}}{1-\gamma_{l,m}\zeta_3^2}+\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n+\alpha_n\zeta_3^2}\right)\cdot\frac{C_{l,m}^n}{1-\alpha_l(\zeta_1^2+\zeta_3^2)}\\
&\quad \text{avec } C_{l,m} = \frac{1}{\gamma_{l,m}+\alpha_n-\gamma_{l,m}\alpha_n}
\end{aligned}$$

soit,

$$\Psi_n^{(3)} \cdot \Psi_{m,l}^{(1,3)} = \frac{C_{l,m}^n}{1-\gamma_{l,m}\zeta_3^2} \cdot \frac{\gamma_{l,m}}{1-\alpha_l(\zeta_1^2+\zeta_3^2)} + \frac{C_{l,m}^n}{1-\alpha_n(\zeta_1^2+\zeta_2^2)} \cdot \frac{\alpha_n}{1-\alpha_l(\zeta_1^2+\zeta_3^2)}$$

On est presque arrivé au bout de nos peines: on utilise à nouveau la relation:

$$\frac{1}{1-\alpha_n(\zeta_1^2+\zeta_2^2)} \cdot \frac{1}{1-\alpha_l(\zeta_1^2+\zeta_3^2)} = \frac{\gamma_{l,n}}{\alpha_l} \frac{1}{1-\gamma_{l,n}\zeta_1^2} \cdot \frac{1}{1-\alpha_n(\zeta_1^2+\zeta_2^2)} + \frac{\gamma_{l,n}}{\alpha_n} \frac{1}{1-\gamma_{l,n}\zeta_1^2} \cdot \frac{1}{1-\alpha_l(\zeta_1^2+\zeta_3^2)}$$

et donc

$$\Psi_n^{(3)} \cdot \Psi_{m,l}^{(1,3)} = \frac{C_{l,m}^n}{1-\gamma_{l,m}\zeta_3^2} \cdot \frac{\gamma_{l,m}}{1-\alpha_l(\zeta_1^2+\zeta_3^2)} + \\ + \frac{C_{l,m}^n \gamma_{l,n}\alpha_n}{\alpha_l} \frac{1}{1-\gamma_{l,n}\zeta_1^2} \cdot \frac{1}{1-\alpha_n(\zeta_1^2+\zeta_2^2)} + C_{l,m}^n \gamma_{l,n} \frac{1}{1-\gamma_{l,n}\zeta_1^2} \cdot \frac{1}{1-\alpha_l(\zeta_1^2+\zeta_3^2)}$$

ou encore

$$\Psi_n^{(3)} \cdot \Psi_{m,l}^{(1,3)} = C_{l,m}^n \gamma_{l,m} \Psi_{m,l}^{(2,3)} + \frac{C_{l,m}^n \gamma_{l,n}\alpha_n}{\alpha_l} \Psi_{l,n}^{(3,1)} + C_{l,m}^n \gamma_{l,n} \Psi_{n,l}^{(2,1)}$$

On injecte cette expression dans l'équation donnant $\dfrac{\partial \psi_{m,l}^{(1,3)}}{\partial x_3}$, on trouve

$$(2.75) \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \psi_{m,l}^{(1,3)}}{\partial x_3}(x_3=0,t) + \\ + \left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{L} \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) \dfrac{\partial \psi_{m,l}^{(1,3)}}{\partial t}(x_3=0,t) - \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{L} \beta_n \frac{C_{l,m}^n \gamma_{l,m}}{\alpha_n}\right) \dfrac{\partial \psi_{m,l}^{(2,3)}}{\partial t}(x_3=0,t) - \\ - \displaystyle\sum_{n=1}^{L} \beta_n \frac{C_{l,m}^n \gamma_{l,n}}{\alpha_l} \frac{\partial \psi_{l,n}^{(3,1)}}{\partial t}(x_1=0,t) - \sum_{n=1}^{L} \beta_n \frac{C_{l,m}^n \gamma_{l,n}}{\alpha_n} \frac{\partial \psi_{n,l}^{(2,1)}}{\partial t}(x_1=0,t) \end{cases}$$

avec

$$(2.76) \quad \begin{cases} \gamma_{l,m} = \dfrac{\alpha_l \alpha_m}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l \alpha_m} \\ C_{l,m}^n = \dfrac{1}{\gamma_{l,m} + \alpha_n - \gamma_{l,m}\alpha_n} \end{cases}$$

Pour obtenir les 5 autres conditions, il suffit de réitérer le procédé, on obtient:

$$(2.77) \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \psi_{m,l}^{(2,3)}}{\partial x_3}(x_3=0,t) + \\ + \left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{L} \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) \dfrac{\partial \psi_{m,l}^{(2,3)}}{\partial t}(x_3=0,t) - \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{L} \beta_n \frac{C_{l,m}^n \gamma_{l,m}}{\alpha_n}\right) \dfrac{\partial \psi_{m,l}^{(3,2)}}{\partial t}(x_3=0,t) - \\ - \displaystyle\sum_{n=1}^{L} \beta_n \frac{C_{l,m}^n \gamma_{l,n}}{\alpha_l} \frac{\partial \psi_{l,n}^{(3,2)}}{\partial t}(x_2=0,t) - \sum_{n=1}^{L} \beta_n \frac{C_{l,m}^n \gamma_{l,n}}{\alpha_n} \frac{\partial \psi_{n,l}^{(1,2)}}{\partial t}(x_2=0,t) \end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
0 \;&=\; \frac{\partial \psi_{m,l}^{(1,2)}}{\partial x_2}(x_2=0,t) + \\
&+\left(1+\sum_{n=1}^{L}\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)\frac{\partial \psi_{m,l}^{(1,2)}}{\partial t}(x_2=0,t) \;-\; \left(\sum_{n=1}^{L}\beta_n\frac{C_{l,m}^{n}\gamma_{l,m}}{\alpha_n}\right)\frac{\partial \psi_{m,l}^{(3,2)}}{\partial t}(x_2=0,t) - \\
&\quad -\sum_{n=1}^{L}\beta_n\frac{C_{l,m}^{n}\gamma_{l,n}}{\alpha_l}\frac{\partial \psi_{l,n}^{(2,1)}}{\partial t}(x_1=0,t) - \sum_{n=1}^{L}\beta_n\frac{C_{l,m}^{n}\gamma_{l,n}}{\alpha_n}\frac{\partial \psi_{n,l}^{(3,1)}}{\partial t}(x_1=0,t)
\end{aligned}
\right. \tag{2.78}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
0 \;&=\; \frac{\partial \psi_{m,l}^{(3,2)}}{\partial x_2}(x_2=0,t) + \\
&+\left(1+\sum_{n=1}^{L}\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)\frac{\partial \psi_{m,l}^{(3,2)}}{\partial t}(x_2=0,t) \;-\; \left(\sum_{n=1}^{L}\beta_n\frac{C_{l,m}^{n}\gamma_{l,m}}{\alpha_n}\right)\frac{\partial \psi_{m,l}^{(1,2)}}{\partial t}(x_2=0,t) - \\
&\quad -\sum_{n=1}^{L}\beta_n\frac{C_{l,m}^{n}\gamma_{l,n}}{\alpha_l}\frac{\partial \psi_{l,n}^{(2,3)}}{\partial t}(x_3=0,t) - \sum_{n=1}^{L}\beta_n\frac{C_{l,m}^{n}\gamma_{l,n}}{\alpha_n}\frac{\partial \psi_{n,l}^{(1,3)}}{\partial t}(x_3=0,t)
\end{aligned}
\right. \tag{2.79}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
0 \;&=\; \frac{\partial \psi_{m,l}^{(2,1)}}{\partial x_1}(x_1=0,t) + \\
&+\left(1+\sum_{n=1}^{L}\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)\frac{\partial \psi_{m,l}^{(2,1)}}{\partial t}(x_1=0,t) \;-\; \left(\sum_{n=1}^{L}\beta_n\frac{C_{l,m}^{n}\gamma_{l,m}}{\alpha_n}\right)\frac{\partial \psi_{m,l}^{(3,1)}}{\partial t}(x_1=0,t) - \\
&\quad -\sum_{n=1}^{L}\beta_n\frac{C_{l,m}^{n}\gamma_{l,n}}{\alpha_l}\frac{\partial \psi_{l,n}^{(1,2)}}{\partial t}(x_2=0,t) - \sum_{n=1}^{L}\beta_n\frac{C_{l,m}^{n}\gamma_{l,n}}{\alpha_n}\frac{\partial \psi_{n,l}^{(3,2)}}{\partial t}(x_2=0,t)
\end{aligned}
\right. \tag{2.80}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
0 \;&=\; \frac{\partial \psi_{m,l}^{(3,1)}}{\partial x_1}(x_1=0,t) + \\
&+\left(1+\sum_{n=1}^{L}\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)\frac{\partial \psi_{m,l}^{(3,1)}}{\partial t}(x_1=0,t) \;-\; \left(\sum_{n=1}^{L}\beta_n\frac{C_{l,m}^{n}\gamma_{l,m}}{\alpha_n}\right)\frac{\partial \psi_{m,l}^{(2,1)}}{\partial t}(x_1=0,t) - \\
&\quad -\sum_{n=1}^{L}\beta_n\frac{C_{l,m}^{n}\gamma_{l,n}}{\alpha_l}\frac{\partial \psi_{l,n}^{(1,3)}}{\partial t}(x_3=0,t) - \sum_{n=1}^{L}\beta_n\frac{C_{l,m}^{n}\gamma_{l,n}}{\alpha_n}\frac{\partial \psi_{n,l}^{(2,3)}}{\partial t}(x_3=0,t)
\end{aligned}
\right. \tag{2.81}
$$

Chapitre 3

Schémas numériques pour les C.L.A.

Ce chapitre est consacré à la discrétisation de l'équation des ondes 2D avec des C.L.A. d'ordre élevé. On s'intéresse tout d'abord au cas du demi-espace. Dans la section 3.1, on propose deux schémas consistant à coupler les schémas de discrétisation de l'équation des ondes 2-2 (ordre 2 en temps et en espace) et 2-4 (ordre 2 en temps et 4 en espace) avec des schémas centrés pour les équations de bord. La section 3.2 est consacrée à l'étude de la stabilité. Le résultat majeur est que, pour les schémas proposés pour l'équation de bord, la stabilité est assurée dès que la condition de stabilité du schéma discrétisant l'équation d'onde est satisfaite. L'adjonction des C.L.A. sur le bord artificiel n'entraine donc pas de modification sur le choix des pas de discrétisation. La généralisation des deux schémas au cas du quart d'espace est réalisée dans la section 3.3. Notons que nous ne savons pas actuellement montrer la stabilité pour cette géométrie. Toutefois, les essais numériques de la section 3.4 semblent montrer que ces schémas permettent de traiter de manière efficace et stable les bords artificiels. Signalons enfin qu'une généralisation d'un des deux schémas au cas amorti 2D est proposée en annexe.

3.1 Le demi-espace: présentation des schémas

On présente deux schémas de discrétisation de l'équation des ondes 2D avec des C.L.A. d'ordre élevé sur le bord. La méthode consiste à coupler des schémas classiques de discrétisation de l'équation des ondes (schéma 2-2 ou schéma 2-4) avec un schéma d'extrapolation qui approche la C.L.A. par des différences finies centrées. La dénomination "extrapolation" a été retenue car le schéma sur le bord permet de déduire les valeurs du champ sur une ligne de la grille de calcul à partir des valeurs du champ de la ligne précédente. Signalons que le schéma 2-2 avait été déjà proposé par P.Joly et J.Roberts sur un problème analogue([23]). Il y a bien sûr bien d'autres façons de discrétiser les C.L.A. (c.f. les schémas en "barreau de chaise" de Engquist Majda [12] ceux de Higdon [16] ou encore les travaux de B.Chalindar [8]). Notre propos ici n'est pas de faire une étude exhaustive mais de proposer deux schémas

opérationnels.

3.1.1 Schéma 2-2

Le problème à discrétiser s'écrit:
Trouver $u(x_1, x_2, t), \varphi_l(x_1, t), l = 1, ..., L$ telles que:

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2_- \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \beta_l \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial t} = 0 \quad \text{en } x_2 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_l}{\partial t^2} - \alpha_l \dfrac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \quad \text{en } x_2 = 0 \quad \forall l = 1, ..., L \\ u(t=0) = u_0 \in \mathrm{H}^1\left(\mathbb{R}^2_-\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 \in \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}^2_-\right) \\ \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial t}(t=0) = \varphi_l(t=0) = 0 \quad l = 1, ..., L \end{cases}$$

Les valeurs de u sont recherchées aux nœuds d'une grille régulière de pas Δx_1 en x_1 et Δx_2 en x_2. Pour que la ligne frontière $x_2 = 0$ soit positionnée au milieu de deux lignes de nœuds de la grille de calcul, ce qui est commode pour construire un schéma centré et ne couplant que deux lignes successives[1], on est conduit à retenir la grille :

$$\left\{ y_{i,j} = (i\Delta x_1, j\Delta x_2),\ i \in 1/2 + \mathbb{Z},\ j \in 1/2 + \mathbb{Z},\ j \leq -1/2 \right\}$$

Cette grille est représentée sur la figure 3.1; on pose

$$u^n_{i,j} \approx u(y_{i,j}, n\Delta t) \quad n \in 1/2 + \mathbb{Z}$$

Les valeurs inconnues des fonctions auxiliaires sont quant à elles recherchées aux points $x_1^i = (i\Delta x_1, x_2 = 0),\ i \in 1/2 + \mathbb{Z}$. On note

$$(\varphi_l)^n_i \approx \varphi_l(x_1^i, t = n\Delta t) \quad n \in 1/2 + \mathbb{Z}$$

Ces fonctions sont donc évaluées en des points représentés par des rectangles noirs sur la figure 3.1.

Les équations sont discrétisées de la manière suivante:

[1]Si la grille n'était pas décalée, tout schéma centré ferait intervenir au moins trois lignes successives et ceci ferait tomber la démonstration de la stabilité exposée plus loin

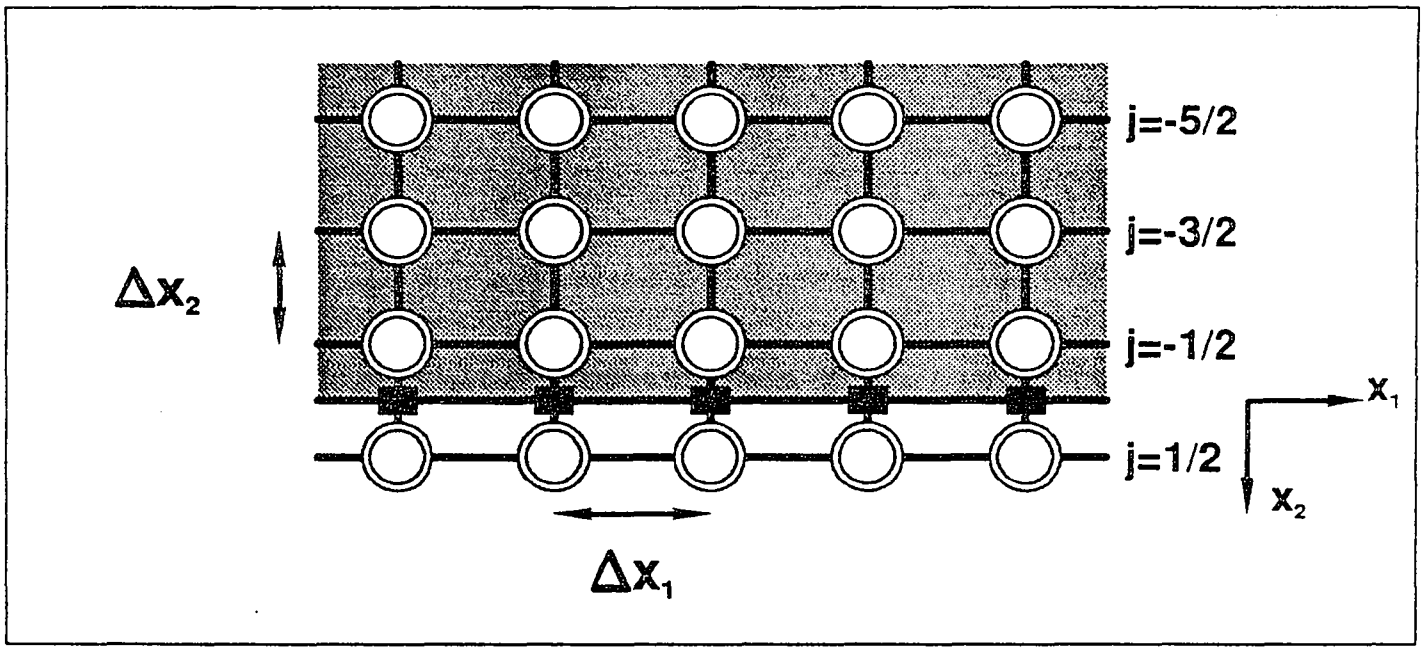


Figure 3.1 : Grille de calcul pour le schéma extrapolation 2.2

- L'équation des ondes est discrétisée selon:

$$(3.1)\begin{cases} \forall j = \cdots, -3/2, -1/2 \quad \forall i \in 1/2 + \mathbf{Z} : \\ \dfrac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} - \dfrac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x_1^2} - \dfrac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{\Delta x_2^2} = 0 \end{cases}$$

C'est le schéma classique saute-mouton (cf [1]).

- Les équations des ondes 1D vérifiées par les φ_l sont discrétisées par:

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \forall i \in 1/2 + \mathbf{Z}, \ \forall l = 1, ..., L : \\ \dfrac{(\varphi_l)_i^{n+1} - 2(\varphi_l)_i^{n} + (\varphi_l)_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \dfrac{(\psi_l)_{i-1}^{n} - 2(\psi_l)_i^{n} + (\psi_l)_{i+1}^{n}}{\Delta x_1^2} = 0 \\ (\psi_l)_i^{n} = \alpha_l (\varphi_l)_i^{n} + \dfrac{1}{2}\left(u_{i,1/2}^{n} + u_{i,-1/2}^{n}\right) \end{cases}$$

(On a moyenné les valeurs de u pour obtenir une approximation centrée de u en $x_2 = 0$, c'est à dire aux nœuds représentés par des rectangles noirs sur la figure 3.1).

- L'équation reliant u aux φ_l est discrétisée en utilisant un schéma centré sur "l'instant $n+1/2$".

$$(3.3)\begin{cases} \forall i \in 1/2+\mathbf{Z}: \\ \dfrac{(u^{n+1}_{i,-1/2}+u^{n+1}_{i,1/2})-(u^{n}_{i,-1/2}+u^{n}_{i,1/2})}{2\Delta t}+\dfrac{(u^{n+1}_{i,1/2}+u^{n}_{i,1/2})-(u^{n+1}_{i,-1/2}+u^{n}_{i,-1/2})}{2\Delta x_2} \\ -\sum_{l=1}^{L}\beta_l\dfrac{(\varphi_l)^{n+1}_i-(\varphi_l)^n_i}{\Delta t}=0 \end{cases}$$

Le schéma est initialisé en déduisant des conditions initiales à l'instant $t=0$ les valeurs des champs discrets aux deux instants $n=-1/2$ et $n=1/2$.
On pourra prendre par exemple:

$$(3.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(u^{-1/2}_{i,j}+u^{1/2}_{i,j}\right)=(u_0)_{i,j} \\ \dfrac{1}{\Delta t}\left(u^{1/2}_{i,j}-u^{-1/2}_{i,j}\right)=(u_1)_{i,j} \\ (\varphi_l)^{-1/2}_i=(\varphi_l)^{1/2}_i=0 \end{cases}$$

où $(u_0)_{i,j}$ et $(u_1)_{i,j}$ sont les "valeurs" en $y_{i,j}$ des conditions initiales u_0 et u_1 :

$$(3.5)\qquad \begin{cases} (u_k)_{i,j}=\dfrac{1}{\Delta x_1\Delta x_2}\displaystyle\int_{T_{i,j}}u_k(x_1,x_2)dx_1dx_2 \quad k=0,1 \\ T_{i,j}=y_{i,j}+\,]-\Delta x_1/2,+\Delta x_1/2[\,\times\,]-\Delta x_2/2,+\Delta x_2/2[\end{cases}$$

Ce schéma est précis à l'ordre 2 en temps et 2 en espace.

3.1.2 Schéma 2-4

On construit un schéma plus précis en utilisant une version discrétisée du Laplacien sur 9 points ([1, 9]). Le schéma pour l'équation des ondes devient

$$(3.6)\begin{cases} \forall j=\cdots,-3/2,-1/2 \quad \forall i\in 1/2+\mathbf{Z}: \\ \dfrac{u^{n+1}_{i,j}-2u^n_{i,j}+u^{n-1}_{i,j}}{\Delta t^2}-\dfrac{-u^n_{i+2,j}+16u^n_{i+1,j}-30u^n_{i,j}+16u^n_{i-1,j}-u^n_{i-2,j}}{12\Delta x_1^2}- \\ -\dfrac{-u^n_{i,j+2}+16u^n_{i,j+1}-30u^n_{i,j}+16u^n_{i,j-1}-u^n_{i,j-2}}{12\Delta x_2^2}=0 \end{cases}$$

Ce schéma est d'ordre 4 en espace et d'ordre 2 en temps. Pour que ce système d'équations soit clôt, il est nécessaire d'évaluer les deux lignes $j=1/2$ et $j=3/2$; le gain en précision se

paye ici par une ligne supplémentaire de nœuds à évaluer alors que le nombre de conditions aux limites sur le bord n'a bien évidemment pas changé. Pour déterminer ces deux lignes, on va utiliser l'argumentation suivante:
On commence par réinterpréter $(\mathcal{P}')$ comme un sous-problème du problème

$$\text{Trouver} \quad u(x_1, x_2, t) \qquad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

$$\varphi_l(x_1, x_2, t), l = 1, ..., L \quad x_1 \in \mathbf{R}\ x_2 \geq 0$$

telles que:

$$(\mathcal{P}'') \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) u = 0 & \text{dans } \mathbf{R}^2_- \ (x_2 < 0) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} = 0 & \text{dans } \mathbf{R}^2_+ \ (x_2 > 0) \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_l}{\partial t^2} - \alpha_l \dfrac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \quad \forall l = 1, ..., L & \text{dans } \mathbf{R}^2_+ \ (x_2 > 0) \\ u(t=0) = u_0 \in \mathbf{H}^1\left(\mathbf{R}^2_-\right) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 \in \mathbf{L}^2\left(\mathbf{R}^2_-\right) & \\ \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial t}(t=0) = \varphi_l(t=0) = 0 \quad l = 1, ..., L & \end{cases}$$

(On a couplé l'équation des ondes dans le demi-plan inférieur avec une équation paraxiale dans la direction x_2 dans le demi-plan supérieur).

Cette façon de voir les choses permet de justifier la stratégie consistant à calculer les deux lignes manquantes en appliquant deux fois et successivement le schéma d'extrapolation écrit précédemment. Le schéma évalue l' inconnue u aux nœuds de la grille représentés par des cercles sur la figure 3.2. Il nécessite deux lignes de fonctions auxiliaires qui sont évaluées aux nœuds symbolisés par des rectangles noirs. Il s'écrit:

$$\text{pour } j = 1/2 \ \underline{\text{puis}}\ 3/2, \ \forall i \in 1/2 + \mathbf{Z} :$$

- $$\frac{(\varphi_l)^{n+1}_{i,j-1/2} - 2(\varphi_l)^n_{i,j-1/2} + (\varphi_l)^{n-1}_{i,j-1/2}}{\Delta t^2} - \frac{(\psi_l)^n_{i+1,j-1/2} - 2(\psi_l)^n_{i,j-1/2} + (\psi_l)^n_{i-1,j-1/2}}{\Delta x_1^2} = 0$$
- $$(\psi_l)^n_{i,j-1/2} = \alpha_l (\varphi_l)^n_{i,j-1/2} + \frac{1}{2}\left(u^n_{i,j} + u^n_{i,j-1}\right)$$
- $$\frac{(u^{n+1}_{i,j-1} + u^{n+1}_{i,j}) - (u^n_{i,j-1} + u^n_{i,j})}{2\Delta t} + \frac{(u^{n+1}_{i,j} + u^n_{i,j}) - (u^{n+1}_{i,j-1} + u^n_{i,j-1})}{2\Delta x_2} - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \frac{(\varphi_l)^{n+1}_{i,j-1/2} - (\varphi_l)^n_{i,j-1/2}}{\Delta t} = 0$$

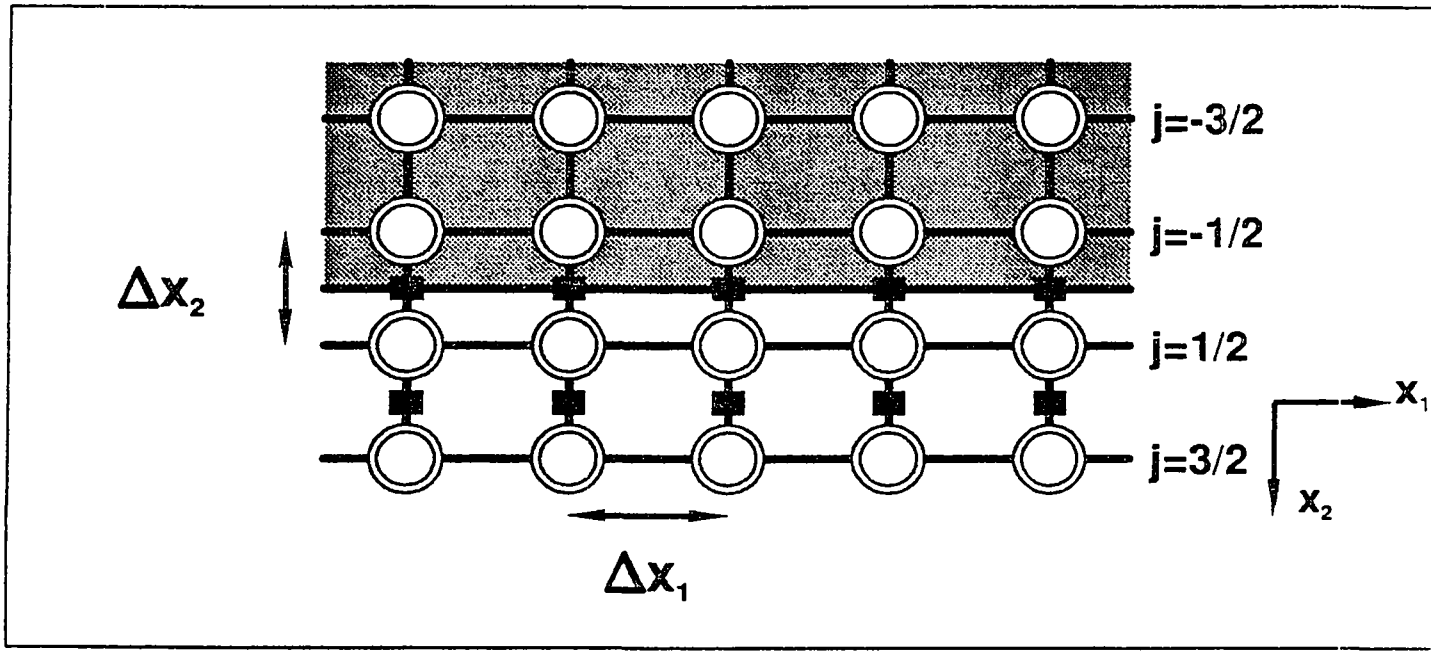


Figure 3.2 : Grille de calcul pour le schéma extrapolation 2.4

Remarques

1. Bien que nous ayons baptisé 2.4 ce schéma, l'équation au bord reste d'ordre 2. Il faudrait travailler d'avantage pour construire un schéma précis à l'ordre 4 en espace. En effet, s'il est facile d'obtenir l'ordre 4 en x_1 en utilisant l'approximation d'ordre 4 de $\partial_{x_1}^2 \psi_l^{(2)}$, il est plus difficile de construire un schéma stable d'ordre 4 en x_2.

2. Si on continue l'extrapolation sans s'arrêter à $j = 3/2$, on obtient une évaluation approchée du champs u pour les x_2 positifs. Cette remarque est importante car elle ouvre la possibilité de coupler équation des ondes et équation des ondes montantes de façon très naturelle.

3.2 Le demi-espace: étude de la stabilité

Afin d'aborder la question de la stabilité des schémas numériques, on va s'inspirer des travaux de Trefethen ([26]) et Higdon ([16] (qui ont eux-même repris des idées de Kreiss [21] et Gustafson et al. [15]) en retenant leur critère de stabilité, le critère de Kreiss. Ce critère basé sur un calcul par ondes planes a l'avantage de permettre un calcul facile et effectif. Signalons toutefois que cette démarche n'est pas tout à fait satisfaisante dans la mesure où la théorie relative à cette méthode a été écrite uniquement pour une certaine classe de

systèmes hyperboliques dans laquelle n'entre pas l'équation des ondes. Il conviendrait donc d'écrire une théorie spécifique à ce cas. Nous ne le ferons pas ici.

3.2.1 Présentation du critère de Kreiss

Dans le cas où le Schéma de Discrétisation de l'Equation des Ondes (S.D.E.O.) est posé dans l'espace tout entier, il est bien connu que sa stabilité est liée à l'absence de solutions de type onde plane

$$u_{i,j}^n = \exp \imath(k_1 i\Delta x_1 + k_2 j\Delta x_2 - \omega n\Delta t) \tag{3.7}$$

avec

$$(k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \text{et} \quad \omega \in P^+ = \left\{\omega / \Im m\omega > 0\right\} \tag{3.8}$$

En effet, pour de telles ondes on a

$$\lim_{n\Delta t \to +\infty} \left|u_{i,j}^n\right| = \lim_{n\Delta t \to +\infty} \exp(n\Im m\omega\Delta t) = +\infty$$

et ces ondes ont pour effet de faire "exploser" les solutions du problème d'évolution et ce d'autant plus vite que Δt est petit. Dans le cas du problème couplé, on impose le S.D.E.O. uniquement pour les j négatifs et on applique un schéma spécifique au bord en j =1/2,3/2,...,N+1/2, N dépendant du nombre de conditions nécessaires pour clore le système. Le fait d'avoir "oté" le demi-espace $j\Delta x_2 > 0$ va faire jouer un rôle important pour la stabilité à une nouvelle classe d'ondes planes de type (3.7), les ondes planes entrantes. Une onde plane entrante étant définie

1. Soit comme une onde harmonique solution du S.D.E.O. avec

$$k_1 \in \mathbf{R} \quad \Im m k_2 \leq 0 \quad \omega \in P^+$$

   auquel cas on écrira $(k_1, k_2, \omega) \in \Omega_{\text{ent}}$

2. Soit comme un cas limite du cas précédent

$$(k_1, k_2, \omega) \in \partial\Omega_{\text{ent}},\ \omega \in \mathbf{R}$$

Les ondes planes entrantes de type 1 sont des ondes uniformément bornées sur le demi-espace (voire évanescentes lorsque $\Im m k_2$ est strictement négative) et qui explosent exponentiellement en $n\Delta t$.
Quant aux ondes planes entrantes de type 2, elles sont bornées en temps et se subdivisent en deux familles:

- Celles pour lesquelles $\Im m k_2$ est strictement négative avec ω réel. Ces ondes sont confinées au voisinage du bord $x_2 = 0$.

- Celles associées à un triplet (ω, k_1, k_2) réel. Trefethen montre que ces ondes (celles obtenues par le processus limite ci-dessus décrit) ont leurs vitesses de groupe qui pointent vers l'intérieur du demi-espace :

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_2} \leq 0$$

Ces ondes transportent donc l'énergie du bord vers l'intérieur du demi-espace.

La théorie de Kreiss lie la stabilité à l'absence de solution du schéma (S.D.E.O + équation(s) de bord) obtenue par combinaison linéaire d'ondes planes entrantes. Elle distingue trois cas de figure

1. Aucune solution combinaison linéaire d'onde plane de type 1 ou 2 n'existe: on a alors stabilité au sens de Gustafson-Kreiss-Sundström ([15]). On parlera de G.K.S. stabilité.

2. Pas de solution combinaison d'ondes planes de type 1 mais des solutions obtenues en sommant des ondes planes de type 2. On obtient alors une instabilité douce (mild instability) se caractérisant par une croissance modérée (linéaire) de l'énergie en fonction du temps.

3. Au moins une solution combinaison linéaire d'ondes planes entrantes de type 1. Il y a alors instabilité forte et les solutions du schéma explosent exponentiellement en temps, d'autant plus vite que Δt est petit.

Nous renvoyons aux travaux de Trefethen ([26]) pour une description plus complète des phénomènes d'instabilité.
Pour ce qui concerne les deux schémas présentés précédemment, le résultat que l'on se propose de montrer est résumé dans la proposition suivante.

Proposition 3.1 *Si l'on suppose*

$$\text{(3.9)} \qquad \begin{cases} 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_L < 1 \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{1-\alpha_m} < 1 \ ; \ \beta_l > 0 \end{cases}$$

les deux schémas de discrétisation 2-2 et 2-4 sont G.K.S. stables dès que la condition de stabilité du schéma de discrétisation de l'équation des ondes, soit

$$\text{(3.10)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta x_1^2} + \dfrac{1}{\Delta x_2^2} < \dfrac{1}{\Delta t^2} & \textit{schéma 2-2} \\ \dfrac{1}{\Delta x_1^2} + \dfrac{1}{\Delta x_2^2} < \dfrac{3}{4\Delta t^2} & \textit{schéma 2-4} \end{cases}$$

est satisfaite

Si l'on remarque que le critère de Kreiss interdit notamment toute solution de type (3.8), en d'autres termes que la stabilité du S.D.E.O. dans tout l'espace doit être assurée pour espérer la stabilité du schéma pour le problème posé dans le demi-espace, le résultat ci-dessus apparaît optimal.
La preuve de cette proposition est contenue dans les deux paragraphes suivants.

3.2.2 Stabilité pour le schéma 2-2

Nous commençons par chercher une caractérisation des ondes planes entrantes satisfaisant le S.D.E.O. 2-2. Cette caractérisation nous permettra de montrer dans une seconde étape que ces solutions ne peuvent satisfaire l'équation de bord.
Une onde plane numérique, de la forme (3.7), ne peut être solution que si (k_1, k_2, ω) sont liés par la relation de dispersion numérique :

$$\frac{4}{\Delta x_1^2}\sin^2\left(\frac{k_1\Delta x_1}{2}\right)+\frac{4}{\Delta x_2^2}\sin^2\left(\frac{k_2\Delta x_2}{2}\right)=\frac{4}{\Delta t^2}\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \tag{3.11}$$

Fixons k_1 réel et ω de partie imaginaire strictement positive (i.e. ω dans P^+), il est facile de vérifier que (3.11) peut s'écrire comme une équation polynômiale de degrés 2 en l'inconnue $\exp \imath k_2\Delta x_2$. Cette équation admet une unique solution de module strictement plus grand que 1 dès que la condition de stabilité

$$\frac{1}{\Delta x_1^2}+\frac{1}{\Delta x_2^2}<\frac{1}{\Delta t^2} \tag{3.12}$$

est vérifiée. On n'a donc une seule onde plane entrante pour ω et k_1 fixés (on rappelle que $|\exp \imath k_2\Delta x_2| > 1 \Leftrightarrow \Im m k_2 < 0$).
Maintenant, regardons le cas limite. Il y a deux possibilités lorsque ω tend vers 0 dans P^+, discriminées par le signe de la quantité

$$\frac{4}{\Delta t^2}\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)-\frac{4}{\Delta x_1^2}\sin^2\left(\frac{k_1\Delta x_1}{2}\right)$$

- Soit k_2 reste de partie imaginaire strictement négative.
- Soit k_2 est réel auquel cas si

$$\begin{cases} \omega &= \omega_r+\imath\omega_i & \omega_i \downarrow 0^+ \\ k_2 &= k_r+\imath k_i & k_i \uparrow 0^- \end{cases}$$

Comme

$$\frac{4}{\Delta t^2}\sin^2\left(\frac{\omega_r\Delta t}{2}\right)\left(1+\frac{\imath\omega_i\Delta t}{\tan(\omega_r\Delta t/2)}+o(\omega_i\Delta t)\right)$$
$$=\frac{4}{\Delta x_1^2}\sin^2\left(\frac{k_1\Delta x_1}{2}\right)+\frac{4}{\Delta x_2^2}\sin^2\left(\frac{k_r\Delta x_2}{2}\right)\left(1+\frac{\imath k_i\Delta x_2}{\tan(k_r\Delta x_2/2)}+o(k_i\Delta x_2)\right)$$

nécessairement $\tan k_2\Delta x_2/2$ et $\tan \omega\Delta t/2$ sont de signe opposé.

Résumons, les ondes planes entrantes sont celles pour lesquelles

$$\text{Soit} \quad \Im m\omega > 0 \quad \Im m k_2 < 0 \quad k_1 \in \mathbb{R} \tag{3.13}$$

$$\text{Soit} \quad \omega \in \mathbb{R} \quad \Im m k_2 < 0 \quad k_1 \in \mathbb{R} \tag{3.14}$$

$$\text{Soit} \quad \omega \in \mathbb{R} \quad k_2 \in \mathbb{R} \quad \tan k_2 \frac{\Delta x_2}{2} \cdot \tan \frac{\omega \Delta t}{2} < 0 \quad k_1 \in \mathbb{R} \tag{3.15}$$

C'est la caractérisation annoncée.
Pour appliquer le critère de Kreiss, on se donne une solution onde plane de type (3.7), (ω, k_1, k_2) vérifiant (3.11) et (3.13),(3.14) ou (3.15) et on montre qu'elle ne peut satisfaire la condition de bord. Un calcul simple montre que (3.7) est solution si et seulement si :

$$\begin{cases} (\varphi_l)_i^n & = \phi_l \exp \imath(k_1 i \Delta x_1 - \omega n \Delta t) \\ \phi_l & = \dfrac{\dfrac{4}{\Delta x_1^2} \sin^2\left(\dfrac{k_1 \Delta x_1}{2}\right)}{\dfrac{4}{\Delta t^2} \sin^2\left(\dfrac{\omega \Delta t}{2}\right) - \alpha_l \dfrac{4}{\Delta x_1^2} \sin^2\left(\dfrac{k_1 \Delta x_1}{2}\right)} \\ \dfrac{2}{\Delta x_2} \tan\left(\dfrac{k_2 \Delta x_2}{2}\right) & = \dfrac{2}{\Delta t} \tan\left(\dfrac{\omega \Delta t}{2}\right) \left(1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \phi_l\right) \end{cases} \tag{3.16}$$

(3.16) n'est autre que la relation de dispersion numérique associé au schéma de discrétisation de la C.L.A. sur le bord.
Supposons ω dans P^+ et montrons tout d'abord que k_2 donné par (3.16) est de partie imaginaire strictement positive. La démonstration est la suivante (on rappelle que $\Im m z$ et $\Im m \tan z$ ont même signe).

On vérifie d'abord qu'en un point ω_0 (prendre $\omega_0 \Delta t = \imath$) de P^+, $\tan k_2 \Delta x_2$ donné par (3.16) est de partie imaginaire strictement positive si les α_l et β_l sont positifs. Cette propriété vraie en un point s'étend à tout le domaine connexe P^+ à moins qu'il n'existe un point ω^* tel que

$$\Im m \frac{2}{\Delta x_2} \tan\left(\frac{k_2 \Delta x_2}{2}\right)(\omega^*) = \Im m t_2 = 0$$

Maintenant, l'équation

$$\begin{cases} t_2 = t \cdot \left(1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \dfrac{\eta_x^2 (1 + \Delta t^2 t^2/4)}{4t^2 - \alpha_l (1 + \Delta t^2 t^2/4) \eta_x^2}\right) = T_2(t) \\ \text{avec} \quad t = \dfrac{2}{\Delta t} \tan\left(\dfrac{\omega \Delta t}{2}\right) \quad \eta_x^2 = \dfrac{4}{\Delta x_1^2} \sin^2\left(\dfrac{k_1 \Delta x_1}{2}\right) \end{cases} \tag{3.17}$$

est une équation polynômiale de degré 2L+1 en t. Elle n'a donc au plus que 2L+1 solutions dans le plan complexe. Or, une étude élémentaire des variations de la fonction $t \in \mathbb{R} \longrightarrow T_2(t)$ montre que T_2 atteint 2L+1 fois toute valeur réelle fixée si la condition suivante est satisfaite pour tout l

$$0 \leq \alpha_l \Delta t^2 / \Delta x_1^2 \leq 1$$

Cette inégalité étant vraie lorsque les α_l sont compris entre 0 et 1 et lorsque la condition de stabilité est satisfaite, toutes les solutions de (3.17) sont donc telles que t donc ω sont réelles. Cela contredit l'existence du ω^* dans P^+ mentionné plus haut.
Tout ceci démontre que le schéma au bord n'admet pas de solution entrante de type (3.13).
Pour ce qui est du cas limite, on remarque que si ω est réel, k_2 donné par (3.17) est réel. Le cas limite (3.14) est donc exclu.
Reste le cas (3.15) où (ω, k_1, k_2) sont réels avec $\tan k_2 \Delta x_2/2 \cdot \tan \omega \Delta t/2 < 0$. Pour ce dernier cas en combinant (3.11) et (3.16), on trouve

$$\frac{2}{\Delta x_2} \tan\left(\frac{k_2 \Delta x_2}{2}\right) = \frac{2}{\Delta t} \tan\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \cdot D$$

$$D = \left(1 - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \cdot \frac{\Delta x_2^2 \sin^2(k_1 \Delta x_1/2)}{\Delta x_2^2 (1-\alpha_l) \sin^2(k_1 \Delta x_1/2) + \Delta x_1^2 \sin^2(k_2 \Delta x_2/2)}\right)$$

Cette relation implique, si la condition $1 - \sum \beta_l/(1-\alpha_l) > 0$ est satisfaite, que $\tan k_2 \Delta x_2/2$ et $\tan \omega \Delta t/2$ ont même signe en contradiction avec $\tan k_2 \Delta x_2/2 \cdot \tan \omega \Delta t/2 < 0$. On a donc également aucune solution de type 2 et le schéma est G.K.S. stable.

3.2.3 Stabilité pour le schéma 2-4

La stabilité pour le schéma 2-4 s'établit de manière analogue à ce qui a été fait pour le schéma 2-2. On commence par caractériser les solutions entrantes du S.D.E.O. (3.6) puis on montre que ces solutions ne peuvent satisfaire les équations au bord.
Une onde plane

$$\begin{aligned} u_{i,j}^n &= \exp \imath(k_1 i \Delta x_1 + k_2 j \Delta x_2 - \omega n \Delta t) \\ &= r^j \exp \imath(k_1 i \Delta x_1 - \omega n \Delta t) \end{aligned} \tag{3.18}$$

est solution du schéma 2-4 si et seulement si r vérifie

$$\begin{cases} r^4 - 16r^3 + Ar^2 - 16r + 1 = 0 \\ A = 30 - 12\Delta x_2^2 \left(\dfrac{4}{\Delta t^2} \sin^2\left(\dfrac{\omega \Delta t}{2}\right) - \dfrac{(30 - 32\cos(k_1 \Delta x_1) + 2\cos(2k_1 \Delta x_1)}{12 \Delta x_1^2}\right) \end{cases} \tag{3.19}$$

Ce polynôme admet 4 racines de type $r_I, r_{II}, 1/r_I, 1/r_{II}$. La condition de stabilité impose à chacune de ces 4 racines d'être de module distinct de 1 dès que ω est choisi de partie

imaginaire strictement positive (i.e. $\omega \in P^+$). Or si

$$r = \exp \imath k_2 \Delta x_2$$

en écrivant (3.19) sous la forme

$$\text{(3.20)} \qquad \begin{cases} \dfrac{D_1^2}{\Delta x_1^2} + \dfrac{D_2^2}{\Delta x_2^2} = \dfrac{4}{\Delta t^2} \sin^2 \left(\dfrac{\omega \Delta t}{2} \right) \\ D_p^2 = \dfrac{1}{12}(30 - 32\cos(k_p \Delta x_p) + 2\cos(2k_p \Delta x_p) \quad p = 1, 2 \end{cases}$$

On montre l'implication

$$k_2 \in \mathbf{R} \Longrightarrow \omega \in \mathbf{R}$$

dès que $(0 < D_p^2 < 64/12 = 16/3)$

$$\frac{16}{3} \left(\frac{1}{\Delta x_1^2} + \frac{1}{\Delta x_2^2} \right) < \frac{4}{\Delta t^2}$$

soit

$$\text{(3.21)} \qquad \left(\frac{1}{\Delta x_1^2} + \frac{1}{\Delta x_2^2} \right) < \frac{3}{4\Delta t^2}$$

C'est la condition de stabilité ([1]).
Maintenant, supposons cette condition remplie, pour tout ω de P^+ on a alors

$$\left| \frac{1}{r_I} \right| \leq \left| \frac{1}{r_{II}} \right| < 1 < |r_{II}| \leq |r_I|$$

et les solutions entrantes ($\Im m k_2 < 0 \Rightarrow |r| > 1$) sont

- Si $r_I \neq r_{II}$

$$(u_{\text{ent}})_{i,j}^n = \left(A^I (r_I)^j + A^{II} (r_{II})^j \right) \exp \imath (k_1 i \Delta x_1 - \omega n \Delta t)$$

- Si $r_I = r_{II}$

$$(u_{\text{ent}})_{i,j}^n = \left(A^I + j A^{II} \right) (r_I)^j \exp \imath (k_1 i \Delta x_1 - \omega n \Delta t)$$

Pour le cas limite, on a deux cas

$$\text{(3.22)} \qquad \text{Soit} \quad \omega \in \mathbf{R} \quad \Im m k_2 < 0 \quad k_1 \in \mathbf{R}$$

$$\text{(3.23)} \qquad \text{Soit} \quad \omega \in \mathbf{R} \quad k_2 \in \mathbf{R} \quad \tan k_2 \frac{\Delta x_2}{2} \cdot \tan \frac{\omega \Delta t}{2} < 0 \quad k_1 \in \mathbf{R}$$

Cette dernière inégalité se démontrant à partir d'un développement limité. Si

$$\begin{cases} \omega &= \omega_r + \imath \omega_i \quad \omega_i \downarrow 0^+ \\ k_2 &= k_r + \imath k_i \quad k_i \uparrow 0^- \end{cases}$$

Alors

$$\frac{4}{\Delta t^2}\sin^2\left(\frac{\omega_r\Delta t}{2}\right)\left(1+\frac{\imath\omega_i\Delta t}{\tan(\omega_r\Delta t/2)}+o(\omega_i\Delta t)\right)$$
$$=\frac{D_1^2}{\Delta x_1^2}+\frac{D_2^2}{\Delta x_2^2}-\alpha^2\tan\left(\frac{k_r\Delta x_2}{2}\right)\imath k_i\Delta x_2+o(k_i\Delta x_2)$$

avec

$$\alpha^2=\frac{16}{12\Delta x_2^2}(4-\cos(k_r\Delta x_2))\cos^2(k_r\Delta x_2/2)$$

Cette égalité montre que si k_i et ω_i sont de signe opposé, $\tan k_r\Delta x_2/2$ et $\tan\omega_r\Delta t/2$ vont avoir la même propriété dès que ω_i et k_i sont suffisamment petit. Et cette propriété se conserve par passage à la limite.
On s'intéresse à présent à la condition de bord. Toutes les solutions entrantes sont de la forme

$$(u_{\text{ent}})_{i,j}^n=a_j\exp\imath(k_1i\Delta x_1-\omega n\Delta t)$$

et cette expression ne peut être solution des équations au bord centrées sur les deux lignes $j=0$ et $j=1$ que si

$$a_{j=1/2}=Ra_{j=-1/2}\quad a_{j=3/2}=R^2a_{j=-1/2}$$

avec

$$\text{(3.24)}\quad\begin{cases}R &= \exp\imath k_b\Delta x_2\\ \dfrac{2}{\Delta x_2}\tan\left(\dfrac{k_b\Delta x_2}{2}\right) &= \dfrac{2}{\Delta t}\tan\left(\dfrac{\omega\Delta t}{2}\right)\left(1-\displaystyle\sum_{l=1}^{L}\beta_l\phi_l\right)\\ \phi_l &= \dfrac{\dfrac{4}{\Delta x_1^2}\sin^2\left(\dfrac{k_1\Delta x_1}{2}\right)}{\dfrac{4}{\Delta t^2}\sin^2\left(\dfrac{\omega\Delta t}{2}\right)-\alpha_l\dfrac{4}{\Delta x_1^2}\sin^2\left(\dfrac{k_1\Delta x_1}{2}\right)}\end{cases}$$

Une solution entrante n'est donc envisageable que si:

- $r_I\neq r_{II}$ (premier cas)

$$\begin{cases}a_{1/2} &= \sqrt{r_I}A^I+\sqrt{r_{II}}A^{II} &= R\left(\dfrac{A^I}{\sqrt{r_I}}+\dfrac{A^{II}}{\sqrt{r_{II}}}\right) &= Ra_{-1/2}\\ a_{3/2} &= \sqrt{r_I}^3A^I+\sqrt{r_{II}}^3A^{II} &= R^2\left(\dfrac{A^I}{\sqrt{r_I}}+\dfrac{A^{II}}{\sqrt{r_{II}}}\right) &= R^2a_{-1/2}\end{cases}$$

soit

$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{R}{r_I}\right)\sqrt{r_I}A^I+\left(1-\dfrac{R}{r_{II}}\right)\sqrt{r_{II}}A^{II} &= 0\\ \left(r_I-\dfrac{R^2}{r_I}\right)\sqrt{r_I}A^I+\left(r_{II}-\dfrac{R^2}{r_{II}}\right)\sqrt{r_{II}}A^{II} &= 0\end{cases}$$

Si l'on veut une solution non triviale, on doit avoir

$$\det = \frac{1}{r_I r_{II}}(r_{II} - r_I)(r_I - R)(r_{II} - R) = 0 \tag{3.25}$$

- $r_I = r_{II}$ (deuxième cas)

$$\begin{cases} \left(A^I + \frac{1}{2}A^{II}\right)\sqrt{r_I} &= \left(A^I - \frac{1}{2}A^{II}\right)\frac{R}{\sqrt{r_I}} \\ \left(A^I + \frac{3}{2}A^{II}\right)\sqrt{r_I}^3 &= \left(A^I - \frac{1}{2}A^{II}\right)\frac{R^2}{\sqrt{r_I}} \end{cases}$$

$$\text{et } \det = \frac{1}{r_I}(r_I - R)^2 = 0 \tag{3.26}$$

Dans les deux cas, une onde entrante n'existe que si

$$R = r_I \quad \text{ou} \quad R = r_{II}$$

Or aucune de ces deux inégalités n'est possible puisque (r désignant r_I ou r_{II})

- Soit $\omega \in P^+$ auquel cas $|R| = \exp -(\Im m k_b \Delta x_2) < 1 < |r|$,
- Soit $\omega \in \mathbf{R}$ et $|r| > 1$ auquel cas $|R| = 1 \neq |r|$,
- Soit ω et $k_2 \in \mathbf{R}$ avec $\tan k_2\Delta x_2/2 \cdot \tan \omega\Delta t/2 < 0$ et on ne peut avoir $r = R$ puisque $\tan k_b\Delta x_2/2 \cdot \tan \omega\Delta t/2 > 0$.

Cette dernière inégalité se démontre de la manière suivante. Si $\exp i k_2\Delta x_2 = \exp i k_b \Delta x_2$, on a (cf. (3.20))

$$\frac{2}{\Delta x_2}\tan\left(\frac{k_b\Delta x_2}{2}\right) = \frac{2}{\Delta t}\tan\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\cdot D$$

$$D = \left(1 - \sum_{l=1}^{L}\beta_l \frac{4\sin^2(k_1\Delta x_1/2)/\Delta x_1^2}{D_1^2/\Delta x_1^2 + D_2^2/\Delta x_2^2 - 4\alpha_l \sin^2(k_1\Delta x_1/2)/\Delta x_1^2}\right)$$

Si $1 - \sum \beta_l/(1-\alpha_l) > 0$, D sera positif dès que pour tout $l = 1, ..., L$

$$\frac{4\sin^2(k_1\Delta x_1/2)/\Delta x_1^2}{D_1^2/\Delta x_1^2 + D_2^2/\Delta x_2^2 - 4\alpha_l \sin^2(k_1\Delta x_1/2)/\Delta x_1^2} \leq \frac{1}{1-\alpha_l}$$

et *a fortiori* si,

$$4\sin^2(k_1\Delta x_1/2) \leq D_1^2$$

Or cette dernière égalité est facilement vérifiée car équivalente à:

$$24(1 - \cos k_1\Delta x_1) \leq 30 - 32\cos k_1\Delta x_1 + 2(2\cos^2 k_1\Delta x_1 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq 4(1 - \cos k_1\Delta x_1)^2$$

Finalement, on n'a aucune solution entrante et le schéma est G.K.S. stable.

3.3 Le quart d'espace: présentation des schémas

On présente deux schémas de discrétisation pour l'équation des ondes posée dans le quart d'espace avec C.L.A. d'ordre élevé sur le bord et conditions de coin. Il s'agira de généraliser au quart d'espace les deux schémas construits précédemment pour le demi-espace en le complétant d'un schéma adapté aux conditions de coin.

3.3.1 Schéma 2-2

Le problème à discrétiser est composé du système formé des équations (2.31)–(2.37) et des conditions initiales (2.39) et (2.40).
De façon similaire au cas du demi-espace, l'inconnue u est évaluée sur la grille de calcul rectangulaire de pas Δx_1 en x_1 et Δx_2 en x_2 et décalée de $\Delta x_1/2, \Delta x_2/2$ par rapport à l'origine. Cette grille est définie par :

$$\left\{ y_{i,j} = (i\Delta x_1, j\Delta x_2), \quad \begin{array}{ll} i \in 1/2 + \mathbf{Z}, & i \leq -1/2 \\ j \in 1/2 + \mathbf{Z}, & j \leq -1/2 \end{array} \right\}$$

Cette grille est composée des nœuds représentés par des doubles cercles sur la figure 3.3.
On notera

$$u^n_{i,j} \approx u(y_{i,j}, n\Delta t) \quad n \in -1/2 + \mathbf{N}$$

Les valeurs inconnues des fonctions auxiliaires sont quant à elles définies en $x^i_1 = (i\Delta x_1, 0)$, $i \in 1/2 + \mathbf{Z}$, $i \leq -1/2$ pour $\varphi^{(1)}_l$ et en $x^j_2 = (0, j\Delta x_2)$, $j \in 1/2 + \mathbf{Z}$, $j \leq -1/2$ pour $\varphi^{(2)}_l$. On notera

$$(\varphi^{(1)}_l)^n_j \approx \varphi^{(1)}_l(x^j_2, t = n\Delta t)$$

$$(\varphi^{(2)}_l)^n_i \approx \varphi^{(2)}_l(x^i_1, t = n\Delta t)$$

Ces fonctions sont donc évaluées en des points représentés par des rectangles pour $\varphi^{(2)}_l$ et des triangles pour $\varphi^{(1)}_l$ sur la figure 3.3.

Les équations sont discrétisées de la manière suivante:

- L'équation des ondes est discrétisée selon:

$$(3.27)\left\{ \begin{array}{c} \forall i = \cdots, -3/2, -1/2 \quad \forall j = \cdots, -3/2, -1/2 : \\ \dfrac{u^{n+1}_{i,j} - 2u^n_{i,j} + u^{n-1}_{i,j}}{\Delta t^2} - \dfrac{u^n_{i+1,j} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i-1,j}}{\Delta x_1^2} - \dfrac{u^n_{i,j+1} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i,j-1}}{\Delta x_2^2} = 0 \end{array} \right.$$

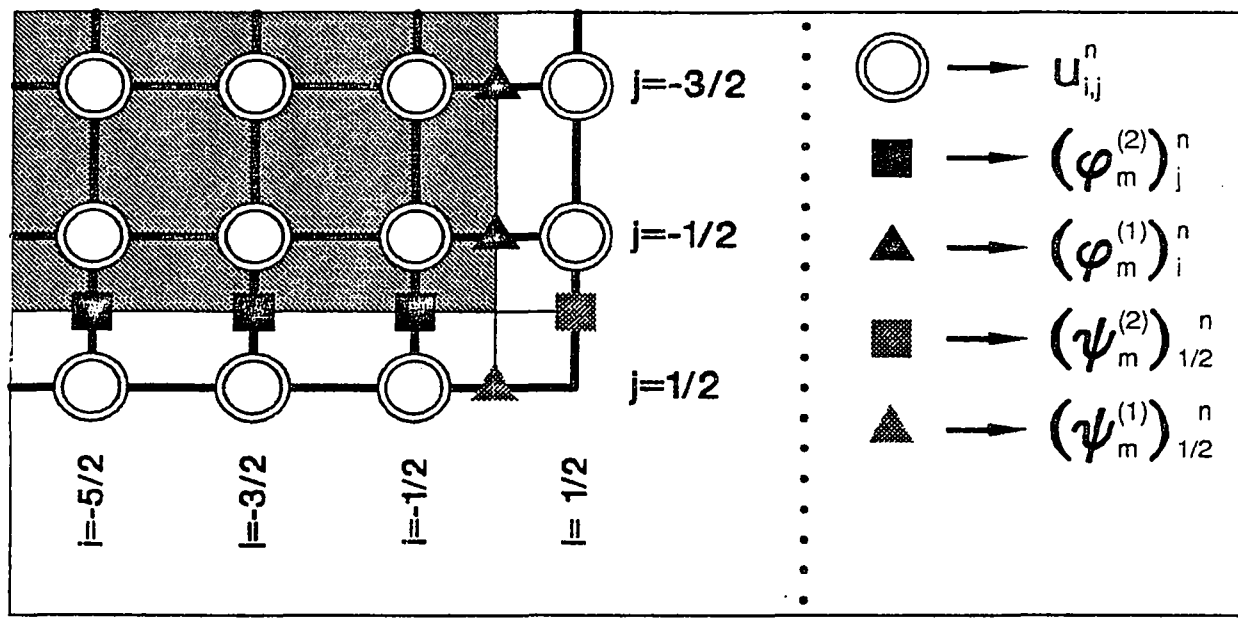


Figure 3.3 : Grille de calcul pour le schéma extrapolation 2.2

- Les équations des ondes 1D vérifiées par les fonctions auxiliaires sont discrétisées par:

$$(3.28)\begin{cases} \forall j = \cdots, -3/2, -1/2,\ \forall l = 1, ..., L : \\ \dfrac{(\varphi_l^{(1)})_j^{n+1} - 2(\varphi_l^{(1)})_j^n + (\varphi_l^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \dfrac{(\psi_l^{(1)})_{j-1}^n - 2(\psi_l^{(1)})_j^n + (\psi_l^{(1)})_{j+1}^n}{\Delta x_2^2} = 0 \\ (\psi_l^{(1)})_j^n = \alpha_l (\varphi_l^{(1)})_j^n + \dfrac{1}{2}\left(u^n_{1/2,j} + u^n_{-1/2,j}\right) \end{cases}$$

et

$$(3.29)\begin{cases} \forall i = \cdots, -3/2, -1/2,\ \forall l = 1, ..., L : \\ \dfrac{(\varphi_l^{(2)})_i^{n+1} - 2(\varphi_l^{(2)})_i^n + (\varphi_l^{(2)})_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \dfrac{(\psi_l^{(2)})_{i-1}^n - 2(\psi_l^{(2)})_i^n + (\psi_l^{(2)})_{i+1}^n}{\Delta x_1^2} = 0 \\ (\psi_l^{(2)})_i^n = \alpha_l (\varphi_l^{(2)})_i^n + \dfrac{1}{2}\left(u^n_{i,1/2} + u^n_{i,-1/2}\right) \end{cases}$$

- Les équations reliant u aux $\varphi_l^{(k)}, k = 1, 2$ sont discrétisées en utilisant un schéma

centré sur "l'instant $n+1/2$"

$$(3.30)\quad \left\{ \begin{array}{c} \forall j = ..., -3/2, -1/2 \\ \dfrac{(u^{n+1}_{-1/2,j} + u^{n+1}_{1/2,j}) - (u^{n}_{-1/2,j} + u^{n}_{1/2,j})}{2\Delta t} + \dfrac{(u^{n+1}_{1/2,j} + u^{n}_{1/2,j}) - (u^{n+1}_{-1/2,j} + u^{n}_{-1/2,j})}{2\Delta x_1} \\ - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \dfrac{(\varphi_l^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi_l^{(1)})_j^{n}}{\Delta t} = 0 \end{array} \right.$$

et

$$(3.31)\quad \left\{ \begin{array}{c} \forall i = ..., -3/2, -1/2 \\ \dfrac{(u^{n+1}_{i,-1/2} + u^{n+1}_{i,1/2}) - (u^{n}_{i,-1/2} + u^{n}_{i,1/2})}{2\Delta t} + \dfrac{(u^{n+1}_{i,1/2} + u^{n}_{i,1/2}) - (u^{n+1}_{i,-1/2} + u^{n}_{i,-1/2})}{2\Delta x_2} \\ - \sum_{l=1}^{L} \beta_l \dfrac{(\varphi_l^{(2)})_i^{n+1} - (\varphi_l^{(2)})_i^{n}}{\Delta t} = 0 \end{array} \right.$$

Le schéma est initialisé en déduisant les valeurs des champs discrets aux deux instants $n = -1/2$ (i.e. $-\Delta t/2$) et $n = 1/2$ (i.e. $+\Delta t/2$) des conditions initiales à l'instant $t = 0$.

$$(3.32)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\left(u_{i,j}^{1/2} + u_{i,j}^{-1/2}\right) = (u_0)_{i,j} \\ \dfrac{1}{\Delta t}\left(u_{i,j}^{1/2} - u_{i,j}^{-1/2}\right) = (u_1)_{i,j} \\ (\varphi_l^{(1)})_j^{-1/2} = (\varphi_l^{(1)})_j^{1/2} = 0 \quad l = 1, ..., L \\ (\varphi_l^{(2)})_i^{-1/2} = (\varphi_l^{(2)})_i^{1/2} = 0 \quad l = 1, ..., L \end{array} \right.$$

où $(u_0)_{i,j}$ et $(u_1)_{i,j}$ sont les "valeurs" en $y_{i,j}$ des conditions initiales u_0 et u_1 (cf 3.5).

Arrivé à ce point de la construction du schéma, on voit facilement que l'on peut calculer par une récurrence à trois niveaux initialisée par (3.32) toutes les inconnues à l'exception des 2L quantités :

$$(3.33)\quad \left\{ \left(\psi_l^{(1)}\right)_{j=1/2}^{n+1},\ \left(\psi_l^{(2)}\right)_{i=1/2}^{n+1},\ l = 1, ..., L \right\}$$

(ces inconnues sont symbolisées par des triangles et des rectangles grisés sur la figure 3.3). On retrouve la nécessité d'adjoindre 2L équations supplémentaires au coin du domaine.

C'est ce que fournissent les équations de coin que l'on réécrit pour mémoire:

$$(3.34)\quad \left\{ \begin{array}{c} \text{pour } l = 1, ..., L \\ \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2}(x_2 = 0, t) + A_l \dfrac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t}(x_2 = 0, t) - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m} \dfrac{\partial \psi_m^{(2)}}{\partial t}(x_1 = 0, t) = 0 \\ \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x_1}(x_1 = 0, t) + A_l \dfrac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t}(x_1 = 0, t) - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m} \dfrac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial t}(x_2 = 0, t) = 0 \end{array} \right.$$

Avec

$$(3.35)\quad \left\{ \begin{array}{lcl} A_l & = & 1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} - \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \cdot \frac{\alpha_l}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_l \alpha_m} \\ C_{l,m} & = & \dfrac{\beta_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_l \alpha_m} \end{array} \right.$$

On discrétise ce système par un schéma centré au point C et à "l'instant n+1/2" . Il vient:

Pour $l = 1, ..., L$.

- $$(3.36)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left(\psi_l^{(1)}\right)_{1/2}^{n+1} + \left(\psi_l^{(1)}\right)_{1/2}^{n} - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{-1/2}^{n+1} - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{-1/2}^{n}}{2\Delta x_2} + \\ + A_l \cdot \dfrac{\left(\psi_l^{(1)}\right)_{1/2}^{n+1} + \left(\psi_l^{(1)}\right)_{-1/2}^{n+1} - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{1/2}^{n} - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{-1/2}^{n}}{2\Delta t} + \\ - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m} \dfrac{\left(\psi_m^{(2)}\right)_{1/2}^{n+1} + \left(\psi_m^{(2)}\right)_{-1/2}^{n+1} - \left(\psi_m^{(2)}\right)_{1/2}^{n} - \left(\psi_m^{(2)}\right)_{-1/2}^{n}}{2\Delta t} = 0 \end{array} \right.$$

- $$(3.37)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left(\psi_l^{(2)}\right)_{1/2}^{n+1} + \left(\psi_l^{(2)}\right)_{1/2}^{n} - \left(\psi_l^{(2)}\right)_{-1/2}^{n+1} - \left(\psi_l^{(2)}\right)_{-1/2}^{n}}{2\Delta x_1} + \\ + A_l \cdot \dfrac{\left(\psi_l^{(2)}\right)_{1/2}^{n+1} + \left(\psi_l^{(2)}\right)_{-1/2}^{n+1} - \left(\psi_l^{(2)}\right)_{1/2}^{n} - \left(\psi_l^{(2)}\right)_{-1/2}^{n}}{2\Delta t} + \\ - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m} \dfrac{\left(\psi_m^{(1)}\right)_{1/2}^{n+1} + \left(\psi_m^{(1)}\right)_{-1/2}^{n+1} - \left(\psi_m^{(1)}\right)_{1/2}^{n} - \left(\psi_m^{(1)}\right)_{-1/2}^{n}}{2\Delta t} = 0 \end{array} \right.$$

On obtient ainsi un système linéaire de 2L équations à 2L inconnues, de la forme

$$(3.38)\quad \text{MAT} \cdot \text{V} = \text{F}$$

où

$$^tV = \left(\left(\psi_l^{(1)}\right)_{1/2}^{n+1}, l = 1, ..., L, \left(\psi_l^{(2)}\right)_{1/2}^{n+1}, l = 1, ..., L \right)$$

$$\text{et} \quad \text{MAT} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\Delta x_2}\text{Id} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\Delta x_1}\text{Id} \end{bmatrix} + \frac{1}{2\Delta t} \begin{bmatrix} \tilde{D} & \tilde{C} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix}$$

où la matrice en facteur de $1/2\Delta t$ est, à une matrice diagonale positive près, la matrice associée à la forme quadratique définie en (2.46). En utilisant les mêmes arguments que ceux employés pour le théorème (2.1), on montre que cette matrice est une M-matrice dès que les conditions (3.9) sont satisfaites. Dans ce cas, la matrice MAT est définie positive et le système linéaire (3.38) est inversible quels que soient les pas de discrétisation.

On trouvera dans l'annexe A.1 l'algorithme associé à ce schéma. De plus, nous proposons dans l'annexe A.3, une généralisation de ce schéma au cas de l'équation des ondes amorties.

3.3.2 Schéma 2-4

Comme pour le cas du demi-espace, on va commencer par réinterpréter la solution u du problème (2.31)–(2.37) comme la trace sur Ω de la solution d'un problème posé dans $\mathbb{R}^2$ qui s'écrit schématiquement :

$$\begin{aligned} \text{Trouver} \quad & u(x_1, x_2, t) && (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ & \varphi_l^{(1)}(x_1, x_2, t), l = 1, ..., L && (x_1, x_2) \in \Omega^{(1)} \\ & \varphi_l^{(2)}(x_1, x_2, t), l = 1, ..., L && (x_1, x_2) \in \Omega^{(2)} \end{aligned}$$

avec (voir figure 3.4)

$$\Omega^{(1)} = \left\{ (x_1, x_2), x_1 > 0, \ x_2 < x_1 \right\}$$

$$\Omega^{(2)} = \left\{ (x_1, x_2), x_2 > 0, \ x_1 < x_2 \right\}$$

$$\Gamma_C = \left\{ (x_1, x_2), x_1 = x_2 \right\} = \partial\Omega^{(1)} \cap \partial\Omega^{(2)}$$

telles que

- u soit solution de l'équation des ondes dans $\Omega \times [0, T]$
- u et $\varphi_l^{(1)}$, $l = 1$,..,L soient solutions de la C.L.A "étendue" à $\Omega^{(1)}$
- u et $\varphi_l^{(2)}$, $l = 1$,..,L soient solutions de la C.L.A "étendue" à $\Omega^{(2)} \times [0, T]$

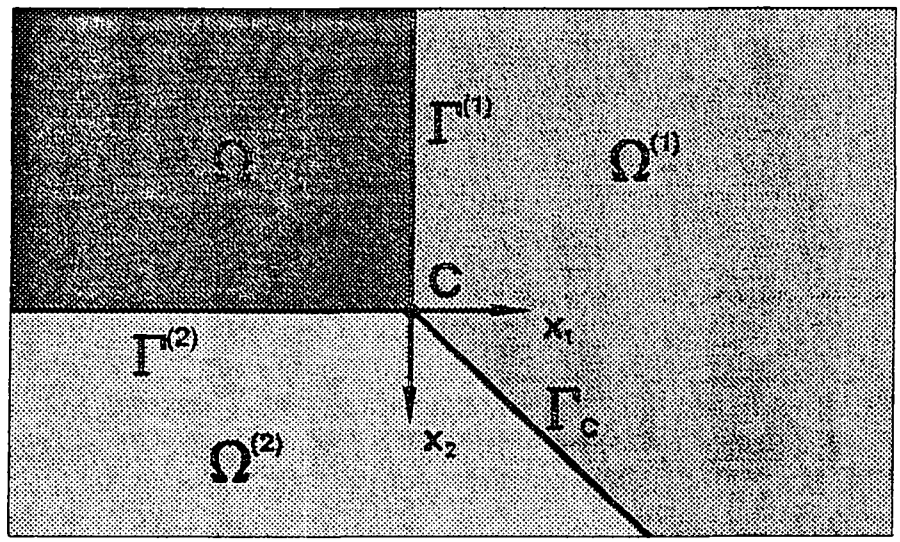


Figure 3.4 : Géométrie du nouveau problème

- $\varphi_l^{(1)}$ et $\varphi_l^{(2)}$, $l = 1,..,\mathrm{L}$ soient solutions des 2L conditions de coin "étendues" à $\Gamma_C \times [0,T]$

- u soit solution sur $\Gamma_C \times [0,T]$ de l'équation:

$$(3.39) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + 2\gamma \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \left(\frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_m^{(2)}}{\partial t} \right) = 0 \\ \gamma = \left(1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \right) \end{cases}$$

Le fait nouveau par rapport au cas du demi-espace est d'avoir choisi de prolonger non seulement les conditions de coin de C à Γ_C mais également d'avoir continué le champ u le long de Γ_C à l'aide d'une équation de transport le long de cette ligne. Cette équation est obtenue en sommant chacune des deux équations reliant, l'une u aux $\psi_m^{(2)}$ sur $\Omega^{(2)}$, l'autre u aux $\psi_m^{(1)}$ sur $\Omega^{(1)}$, et écrites par continuité sur Γ_C.
Quoi que nous ne savons pas montrer l'existence de solutions pour le problème posé sur $\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$ (les estimations d'énergie semblent difficiles à obtenir), cette démarche semble intéressante à plus d'un titre, car

1. Elle permet de justifier la construction de schémas intégrant les C.L.A. et couplant un S.D.E.O. d'ordre élevé en espace.

2. Elle permet également de coupler deux équations paraxiales propageant les ondes le long de deux directions perpendiculaires. Cela pourrait être la base d'un modèle de "1way-wave equation" moins sensible au choix de l'axe paraxial.

Développons le premier point pour le schéma 2-4. La grille de calcul est présentée sur la figure 3.5.

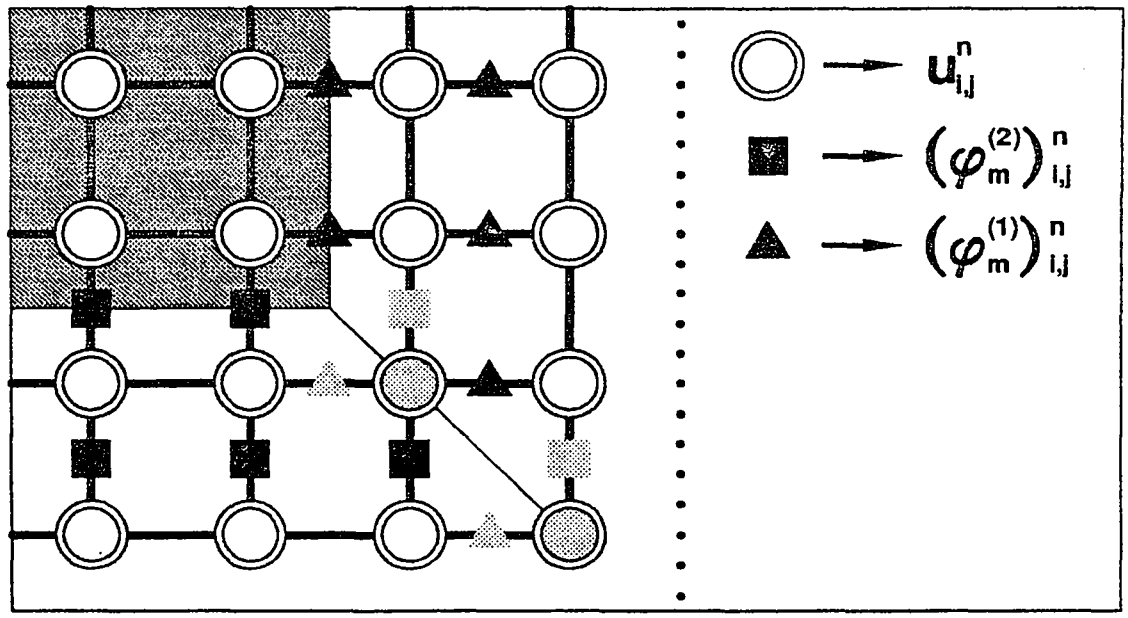


Figure 3.5 : Grille de calcul pour le schéma extrapolation 2.4

On note

$$(\varphi_l^{(1)})^n_{i,j} \approx (\varphi_l^{(1)})(i\Delta x_1, j\Delta x_2, t = n\Delta t)$$
$$\text{avec } i = 0 \text{ ou } 1,\ j \in (1/2 + \mathbb{Z}),\ j \leq i + 1/2,\ n \in (1/2 + \mathbb{N})$$

et

$$(\varphi_l^{(2)})^n_{i,j} \approx (\varphi_l^{(2)})(i\Delta x_1, j\Delta x_2, t = n\Delta t)$$
$$\text{avec } j = 0 \text{ ou } 1,\ i \in (1/2 + \mathbb{Z}),\ i \leq j + 1/2,\ n \in (1/2 + \mathbb{N})$$

Et le schéma consiste à coupler le S.D.E.O. 2-4 écrit pour $i, j = ..., -3/2, -1/2$ avec la C.L.A. discrète composée de :

Un schéma pour l'équation relative à $\Omega^{(1)}$:

$$\text{pour } i = 1/2 \text{ puis } 3/2,\ \forall j < i :$$

- $$\frac{(\varphi_l^{(1)})^{n+1}_{i-1/2,j} - 2(\varphi_l^{(1)})^n_{i-1/2,j} + (\varphi_l^{(1)})^{n-1}_{i-1/2,j}}{\Delta t^2} -$$
$$- \frac{(\psi_l^{(1)})^n_{i-1/2,j+1} - 2(\psi_l^{(1)})^n_{i,j} + (\psi_l^{(1)})^n_{i-1/2,j-1}}{\Delta x_2^2} = 0$$

- $$(\psi_l^{(1)})^n_{i-1/2,j} = \alpha_l (\varphi_l^{(1)})^n_{i-1/2,j} + \frac{1}{2}\left(u^n_{i,j} + u^n_{i-1,j}\right)$$

$$\bullet\ \frac{(u^{n+1}_{i-1,j}+u^{n+1}_{i,j})-(u^{n}_{i-1,j}+u^{n}_{i,j})}{2\Delta t}+\frac{(u^{n+1}_{i,j}+u^{n}_{i,j})-(u^{n+1}_{i-1,j}+u^{n}_{i-1,j})}{2\Delta x_1}-$$

$$-\sum_{l=1}^{L}\beta_l\frac{(\varphi_l^{(1)})^{n+1}_{i-1/2,j}-(\varphi_l^{(1)})^{n}_{i-1/2,j}}{\Delta t}=0$$

Un schéma pour l'équation relative à $\Omega^{(2)}$:

pour $j=1/2$ puis $3/2$, $\forall i<j$:

$$\bullet\ \frac{(\varphi_l^{(2)})^{n+1}_{i,j-1/2}-2(\varphi_l^{(2)})^{n}_{i,j-1/2}+(\varphi_l^{(2)})^{n-1}_{i,j-1/2}}{\Delta t^2}-$$

$$-\frac{(\psi_l^{(2)})^{n}_{i-1,j-1/2}-2(\psi_l^{(2)})^{n}_{i,j-1/2}+(\psi_l^{(2)})^{n}_{i+1,j-1/2}}{\Delta x_1^2}=0$$

$$\bullet\ (\psi_l^{(2)})^{n}_{i,j-1/2}=\alpha_l(\varphi_l^{(2)})^{n}_{i,j-1/2}+\frac{1}{2}\left(u^{n}_{i,j}+u^{n}_{i,j-1}\right)$$

$$\bullet\ \frac{(u^{n+1}_{i,j-1}+u^{n+1}_{i,j})-(u^{n}_{i,j-1}+u^{n}_{i,j})}{2\Delta t}+\frac{(u^{n+1}_{i,j}+u^{n}_{i,j})-(u^{n+1}_{i,j-1}+u^{n}_{i,j-1})}{2\Delta x_2}-$$

$$-\sum_{l=1}^{L}\beta_l\frac{(\varphi_l^{(2)})^{n+1}_{i,j-1/2}-(\varphi_l^{(2)})^{n}_{i,j-1/2}}{\Delta t}=0$$

Un schéma centré discrétisant les 2L+1 conditions le long de Γ_C :

$$(3.40)\quad \left\{\begin{array}{c}\text{Pour } (i,j)=(0,0) \text{ ou } (1,1)\\ \dfrac{\left(\psi_l^{(2)}\right)^{n+1}_{i+1/2,j}+\left(\psi_l^{(2)}\right)^{n}_{i+1/2,j}-\left(\psi_l^{(2)}\right)^{n+1}_{i-1/2,j}-\left(\psi_l^{(2)}\right)^{n}_{i-1/2,j}}{2\Delta x_1}+\\ +A_l\cdot\dfrac{\left(\psi_l^{(2)}\right)^{n+1}_{i+1/2,j}+\left(\psi_l^{(2)}\right)^{n+1}_{i-1/2,j}-\left(\psi_l^{(2)}\right)^{n}_{i+1/2,j}-\left(\psi_l^{(2)}\right)^{n}_{i-1/2,j}}{2\Delta t}-\\ -\sum_{m=1}^{L}C_{l,m}\dfrac{\left(\psi_m^{(1)}\right)^{n+1}_{i,j+1/2}+\left(\psi_m^{(1)}\right)^{n+1}_{i,j-1/2}-\left(\psi_m^{(1)}\right)^{n}_{i,j+1/2}-\left(\psi_m^{(1)}\right)^{n}_{i,j-1/2}}{2\Delta t}=0\end{array}\right.$$

$$
(3.41)\quad \left\{ \begin{array}{c}
\text{Pour } (i,j) = (0,0) \text{ ou } (1,1) \\
\dfrac{\left(\psi_l^{(1)}\right)_{i,j+1/2}^{n+1} + \left(\psi_l^{(1)}\right)_{i,j+1/2}^{n} - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{i,j-1/2}^{n+1} - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{i,j-1/2}^{n}}{2\Delta x_2} + \\
+ A_l \cdot \dfrac{\left(\psi_l^{(1)}\right)_{i,j+1/2}^{n+1} + \left(\psi_l^{(1)}\right)_{i,j-1/2}^{n+1} - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{i,j+1/2}^{n} - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{i,j-1/2}^{n}}{2\Delta t} - \\
- \sum_{m=1}^{L} C_{l,m} \dfrac{\left(\psi_m^{(2)}\right)_{i+1/2,j}^{n+1} + \left(\psi_m^{(2)}\right)_{i-1/2,j}^{n+1} - \left(\psi_m^{(2)}\right)_{i+1/2,j}^{n} - \left(\psi_m^{(2)}\right)_{i-1/2,j}^{n}}{2\Delta t} = 0
\end{array} \right.
$$

$$
(3.42)\quad \left\{ \begin{array}{c}
\text{Pour } (i,j) = (1/2,1/2) \text{ ou } (3/2,3/2) \\
\dfrac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n} - u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n} - u_{i-1,j-1}^{n+1} - u_{i-1,j-1}^{n}}{4\Delta x_2} + \\
+ \dfrac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n} - u_{i,j-1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n} - u_{i-1,j-1}^{n+1} - u_{i-1,j-1}^{n}}{4\Delta x_1} + \\
+ 2\gamma \cdot \dfrac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i-1,j-1}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n} - u_{i,j-1}^{n} - u_{i-1,j-1}^{n}}{4\Delta t} - \\
- \sum_{m=1}^{L} \dfrac{\beta_m}{\alpha_m} \left(\dfrac{\left(\psi_m^{(1)}\right)_{i-1/2,j}^{n+1} + \left(\psi_m^{(1)}\right)_{i-1/2,j-1}^{n+1} - \left(\psi_m^{(1)}\right)_{i-1/2,j}^{n} - \left(\psi_m^{(1)}\right)_{i-1/2,j-1}^{n}}{2\Delta t} + \right. \\
\left. + \dfrac{\left(\psi_m^{(2)}\right)_{i,j-1/2}^{n+1} + \left(\psi_m^{(2)}\right)_{i-1,j-1/2}^{n+1} - \left(\psi_m^{(2)}\right)_{i,j-1/2}^{n} - \left(\psi_m^{(2)}\right)_{i-1,j-1/2}^{n}}{2\Delta t} \right) = 0
\end{array} \right.
$$

Ces trois derniers systèmes d'équation permettent d'évaluer les inconnues associées aux nœuds dessinés en grisés sur la figure 3.5, à savoir :

$$
(3.43)\left\{ \left(\psi_l^{(1)}\right)_{i,j+1/2}^{n+1}, \left(\psi_l^{(2)}\right)_{i+1/2,j}^{n+1}, \; l = 1, ..., L, \; u_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}, \; (i,j) = (0,0) \text{ ou } (1,1) \right\}.
$$

L'inversibilité du système global est facilement vérifiée car (3.40) et (3.41) est un système inversible en les $\left(\psi_l^{(1)}\right)_{i,j+1/2}^{n+1}$, $\left(\psi_l^{(2)}\right)_{i+1/2,j}^{n+1}$, $l = 1, ..., L, (i,j) = (0,0)$ ou $(1,1)$ (C'est le même système que pour le schéma 2-2) et (3.42), donnant $u_{i,j}^{n+1}$, s'inverse facilement à la main dès que l'on connait les fonctions auxiliaires.
L'algorithme associé à ce schéma est présenté dans l'annexe A.2.

3.4 Simulations numériques

3.4.1 Simulations avec le signal IEMN standard

Pour ces essais, on a repris l'expérience décrite dans la section 1.1. On rappelle qu'il s'agissait de résoudre le problème de l'IEMN dans un milieu homogène et de décrire l'influence des C.L.A. sur la solution. La géométrie du problème est représentée sur la figure 3.6. Le but de ces essais est de voir l'influence sur la solution de l'ordre des C.L.A. ainsi que de la taille de la boîte de calcul. On a choisi successivement (D est la largeur et d la hauteur)

$$\begin{aligned} \text{D} &= 600m, \quad \text{d} = 10m \quad \text{(Géométrie 1)} \\ \text{D} &= 20m, \quad \text{d} = 10m \quad \text{(Géométrie 2)} \\ \text{D} &= 10m, \quad \text{d} = 10m \quad \text{(Géométrie 3)} \end{aligned}$$

Pour chaque géométrie, on a fait plusieurs simulations en imposant sur les bords de la boîte des C.L.A. d'ordre 1 puis d'ordre 2 ainsi que les C.L.A. de Padé d'ordre L avec L=1,2,5,10.

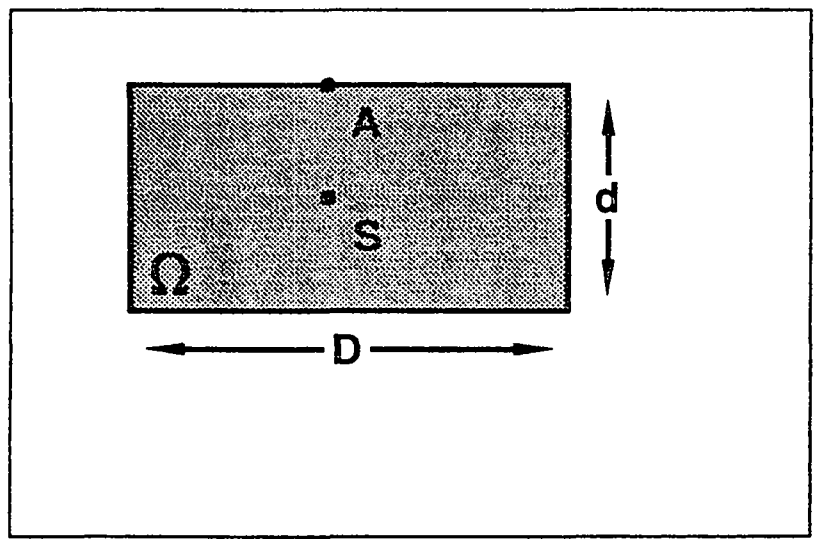


Figure 3.6 : Représentation de la boîte de calcul

Pour faire la simulation, on a retenu le schéma 2.2 avec une grille de calcul de pas

$$H = \Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.5m$$

$$c\Delta t = H/\sqrt{2}, \quad (c = 3.10^8 m.s^{-1})$$

L'excitation est imposée à chaque pas de temps et au nœud central de la grille égale à la valeur de la double exponentielle au temps $(n-1)\Delta t$. Les deux premiers instants le champ

est identiquement nul.
On s'intéresse à la solution au point A situé à l'aplomb de la source et sur un intervalle de temps de $[0, 1\mu s.]$. Cela correspond à 800 pas de temps et à des tailles de grilles de

$$603 \times 23 \quad \text{(Géométrie 1)}$$
$$43 \times 23 \quad \text{(Géométrie 2)}$$
$$23 \times 23 \quad \text{(Géométrie 3)}$$

(On a 10m. $= 20\ \Delta x_1 \longrightarrow$ 20 intervalles $\longrightarrow$ 21 nœuds intérieurs + 2 nœuds exterieurs = 23 nœuds au total).
La solution de référence est calculée sur une grille 603×603. On vérifie que pour cet essai les bords n'interviennent pas en A sur l'intervalle de temps considéré. De même, la première géométrie peut être considérée comme une bande de largeur infinie.
Les résultats de ces essais, représentés sur les figures 3.7,3.8 et 1.7 (page 11), sont les suivants

- Le schéma numérique apparaît stable. On a calculé l'énergie discrète contenue dans la boîte de calcul et vérifié sa décroissance en temps.
- Pour chacune des trois géométrie, l'ordre 1 est dans les décors, l'ordre 2 sous-estime la solution, les C.L.A. de Padé la surestime, l'erreur étant décroissante fonction de L.
- Plus la boîte est petite, plus il semble intéressant de prendre des C.L.A. d'ordre élevé.
- Pour chaque essai, il existe un instant à partir duquel la solution approchée "décroche" de la solution exacte. Et plus la C.L.A. est d'ordre élevé, plus cet occurence est tardive.

3.4.2 Simulation avec un signal à moyenne nulle

Pour illustrer l'influence de l'excitation temporelle du milieu sur la qualité des bords absorbants, on a repris la géométrie 3 correspondant à la plus petite boîte de calcul et modélisé le problème

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = G(t)\delta(\mathrm{S}) \\ G(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\exp -(\pi^2 F^2 (t - 1/F)^2)\right)\ \mathbf{1}_{[0,2/F]}(t) \quad (F = 60\ \mathrm{MgH}) \\ u \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ en } t = 0 \end{cases}$$

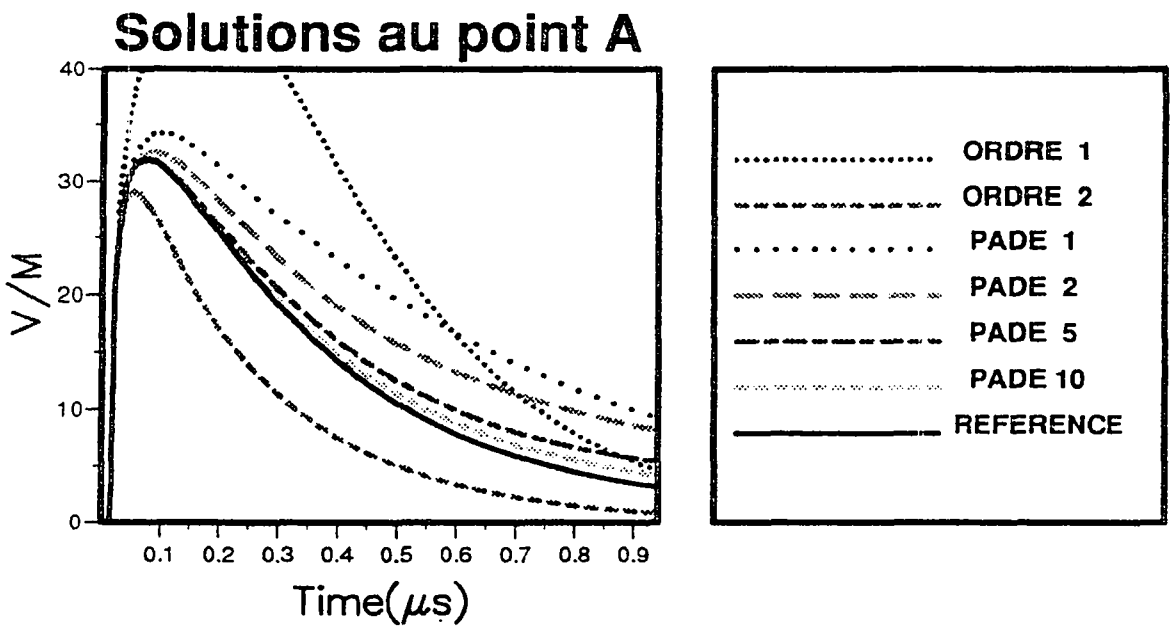


Figure 3.7 : Solution pour une boîte de 10m. × 20m. (IEMN)

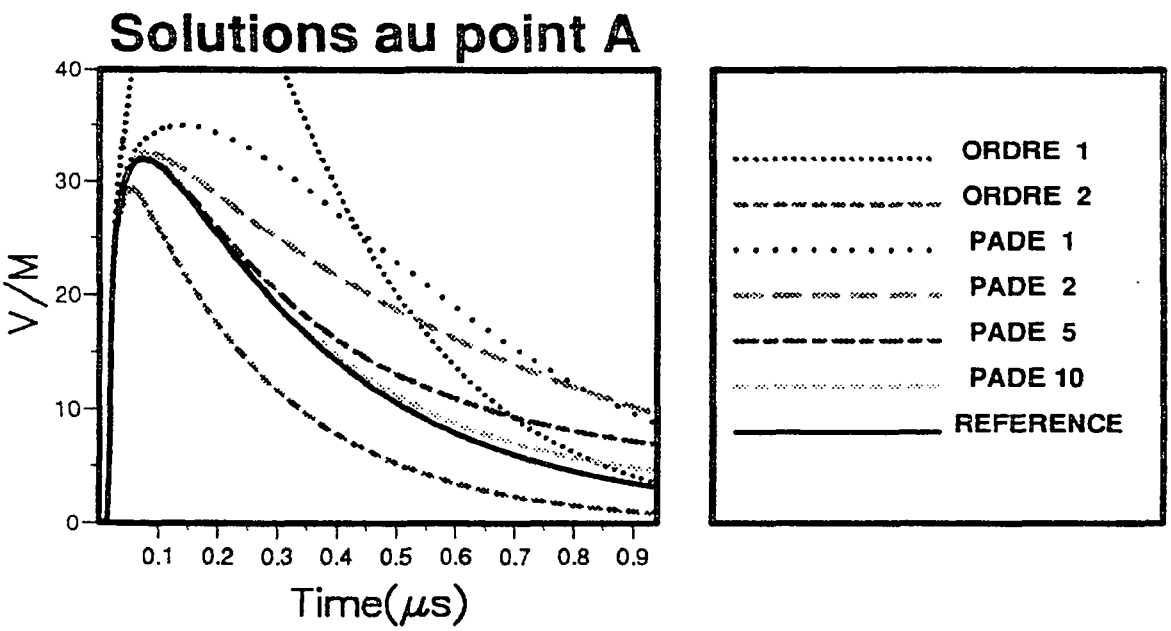


Figure 3.8 : Solution pour une boîte de 10m. × 10m. (IEMN)

G est une fonction a moyenne nulle dont le spectre est 'localisé' autour de la fréquence F.

Les solutions approchées, calculées sur la même grille que précédemment et en imposant différentes C.L.A. sur le bord sont représentées sur la figure 3.9. On peut voir que le résultat est bien meilleur que pour le cas de l'I.E.M.N. (Le cas Padé, L=5 est indistingable de la solution de référence). Les C.L.A. étant des approximations "hautes fréquences", c'est l'absence de "basses fréquences" dans le signal propagé qui explique cette amélioration. On notera toutefois que le phénomène de décrochage de la solution approchée est encore présent.

3.4.3 Diffraction d'une onde par un tube de section carrée

Pour valider les schémas présentés dans les sections précédentes, on a simulé la diffraction d'une onde électromagnétique cylindrique sur un tube conducteur de section carrée. La polarisation de l'onde étant transverse électrique suivant l'axe du cylindre, le problème est bidimensionnel et peut être modélisé par le système :

$$\text{(3.44)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma\mu_0\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \delta(S)G(t) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ u \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ en } t = 0 \end{cases}$$

On a choisi :

- Pour la source :

$$G(t) = \frac{d}{dt}\left(\exp -(\pi^2 F^2(t-1/F)^2)\right)\ 1_{\ [0,2/F]}(t) \quad (2\pi F = 4.76\ 10^6 \text{ cycles/s.})$$

$$S = \begin{pmatrix} x_1^S = 2\mathrm{L} \\ x_2^S = 2\mathrm{L} \end{pmatrix}, \quad L = c_0/F$$

- Pour la géométrie du conducteur

$$\mathrm{C} = [-\mathrm{L}/2, \mathrm{L}/2] \times [-\mathrm{L}/2, \mathrm{L}/2]$$

- Pour la loi de vitesse

$$c(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2.5\epsilon_0\mu_0}} & \text{si } x \in \mathrm{C} \\ c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} & \text{sinon} \end{cases}$$

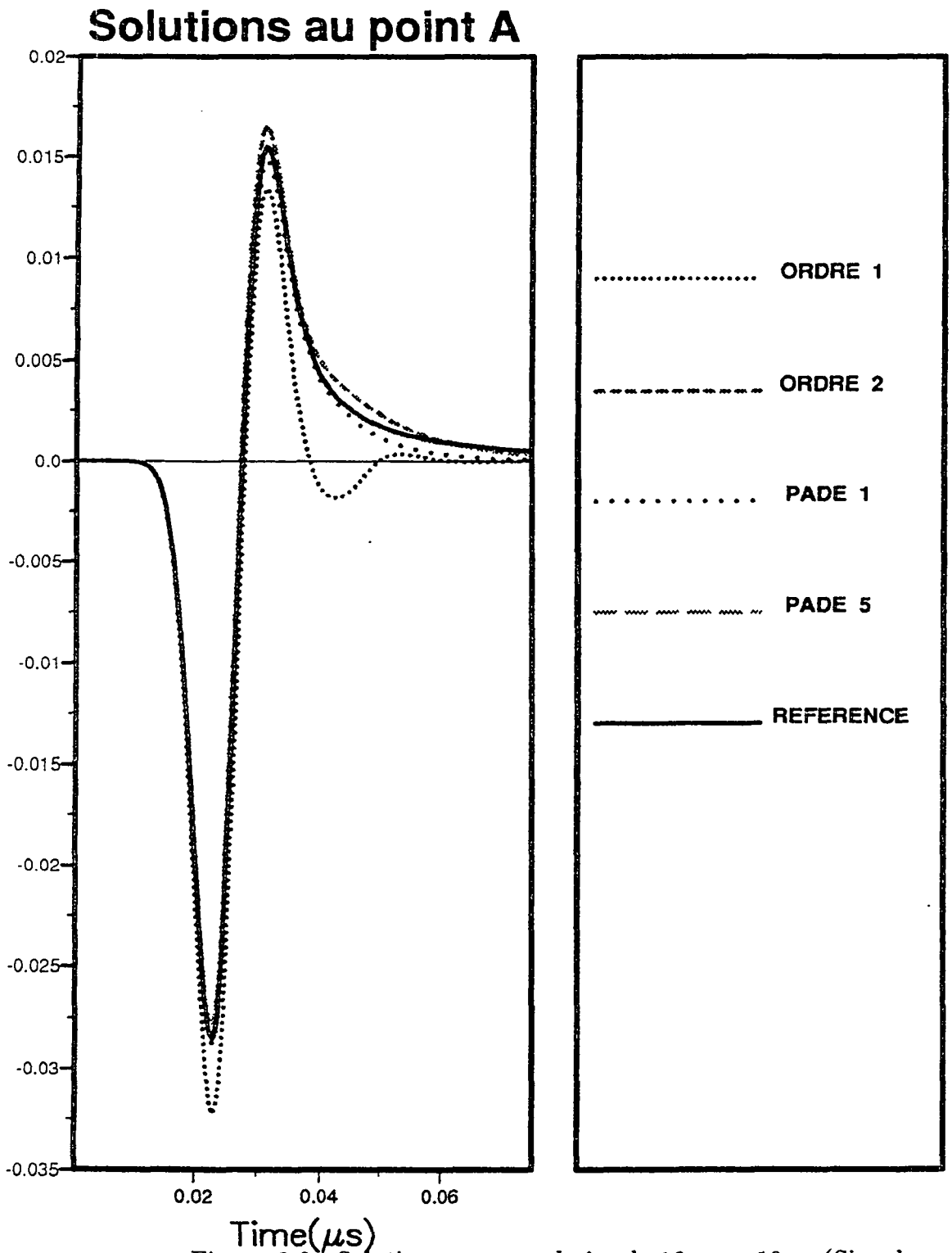


Figure 3.9 : Solution pour une boîte de 10m. × 10m. (Signal rapide)

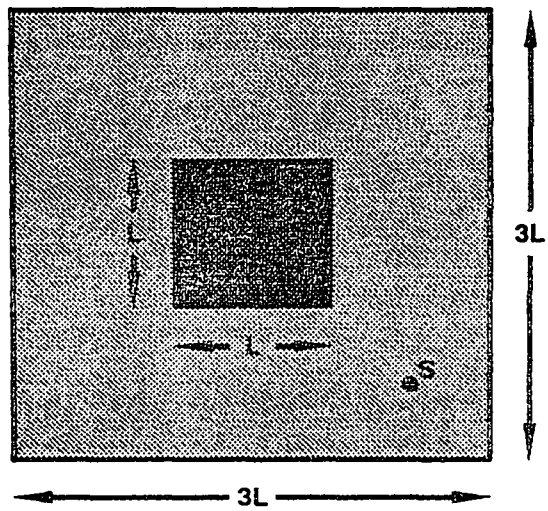


Figure 3.10 : Géométrie du problème de diffraction

- Pour la conductivité

$$\mu_0\sigma = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi F \mathrm{L}^2}} & \text{si } x \in \mathrm{C} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La conductivité du conducteur correspond donc à une épaisseur de peau de L pour la fréquence centrale de la source F. Cette épaisseur de peau est également la taille du conducteur.

La grille de calcul est une grille régulière qui maille le carré $[-D/2, D/2] \times [-D/2, D/2]$ avec

$$\mathrm{D} = 3\mathrm{L}$$

$$H = \Delta x_1 = \Delta x_2 = L/20$$

La grille intérieure possède donc 63×63 nœuds ce qui correspond à 20 points par longueur d'onde pour la fréquence F. Enfin, pour les conditions sur les bords de la boîte de calcul, on a retenu la C.L.A. de Padé avec $L = 10$ fractions rationnelles.
Dans une première simulation, on a retenu le schéma 2-2 avec un pas de temps :

$$\Delta t_{2-2} = H/\sqrt{2}$$

On a représenté sur la figure 3.11 différentes photographies de l'état vibratoire aux instants :

$$t_1 = 34 \cdot \Delta t_{2-2} \approx 1.59\mu s$$

$$t_1 = 50 \cdot \Delta t_{2-2} \approx 2.33\mu s$$

$$t_1 = 67 \cdot \Delta t_{2-2} \approx 3.13\mu s$$

$$t_1 = 100 \cdot \Delta t_{2-2} \approx 4.66\mu s$$

On observera la rencontre de l'onde circulaire avec l'obstacle, son ralentissement à l'intérieur du conducteur et la présence d'une forte intensité à l'un des coins du carré conducteur à l'instant t_4, c'est à dire au moment où l'onde paraît quitter l'obstacle.
On a représenté en bas de cette même figure, l'instant t_4 mais calculé sur une grille assez grande pour que les bords ne soient pas atteints. On observe aucune différence entre le grand modèle et la solution calculée dans la petite boîte. Mieux, si l'on compare les maxima et minima de l'onde à l'instant t_4, on trouve

- pour le grand modèle (schéma 2-2)

$$\min_{x_1,x_2} u(x_1, x_2, t_4) = -.281600\ 10^{-4}$$

$$\max_{x_1,x_2} u(x_1, x_2, t_4) = .106387\ 10^{-4}$$

- pour la simulation dans la petite boîte (schéma 2-2)

$$\min_{x_1,x_2} u(x_1, x_2, t_4) = -.281603\ 10^{-4}$$

$$\max_{x_1,x_2} u(x_1, x_2, t_4) = .106452\ 10^{-4}$$

La présence des bords n'a donc induit qu'une erreur relative de 6.10^{-4}, soit bien en deçà de l'erreur due à la dispersion du schéma.
Enfin, dans une troisième simulation, on a retenu le schéma 2-4 avec un pas de temps

$$\Delta t_{2-4} = 0.50149H$$

La figure 3.12 compare la solution obtenue au temps

$$t_4 = 141\Delta t_{2-4}$$

avec la solution calculée sur la grande grille et le schéma 2-2. De nouveau, on observe aucune différence et les maxima donnent

- pour la simulation dans la petite boîte (schéma 2-4)

$$\min_{x_1,x_2} u(x_1, x_2, t_4) = -.288209\ 10^{-4}$$

$$\max_{x_1,x_2} u(x_1, x_2, t_4) = .101382\ 10^{-4}$$

ce qui est très comparable aux résultats des tests précédents.

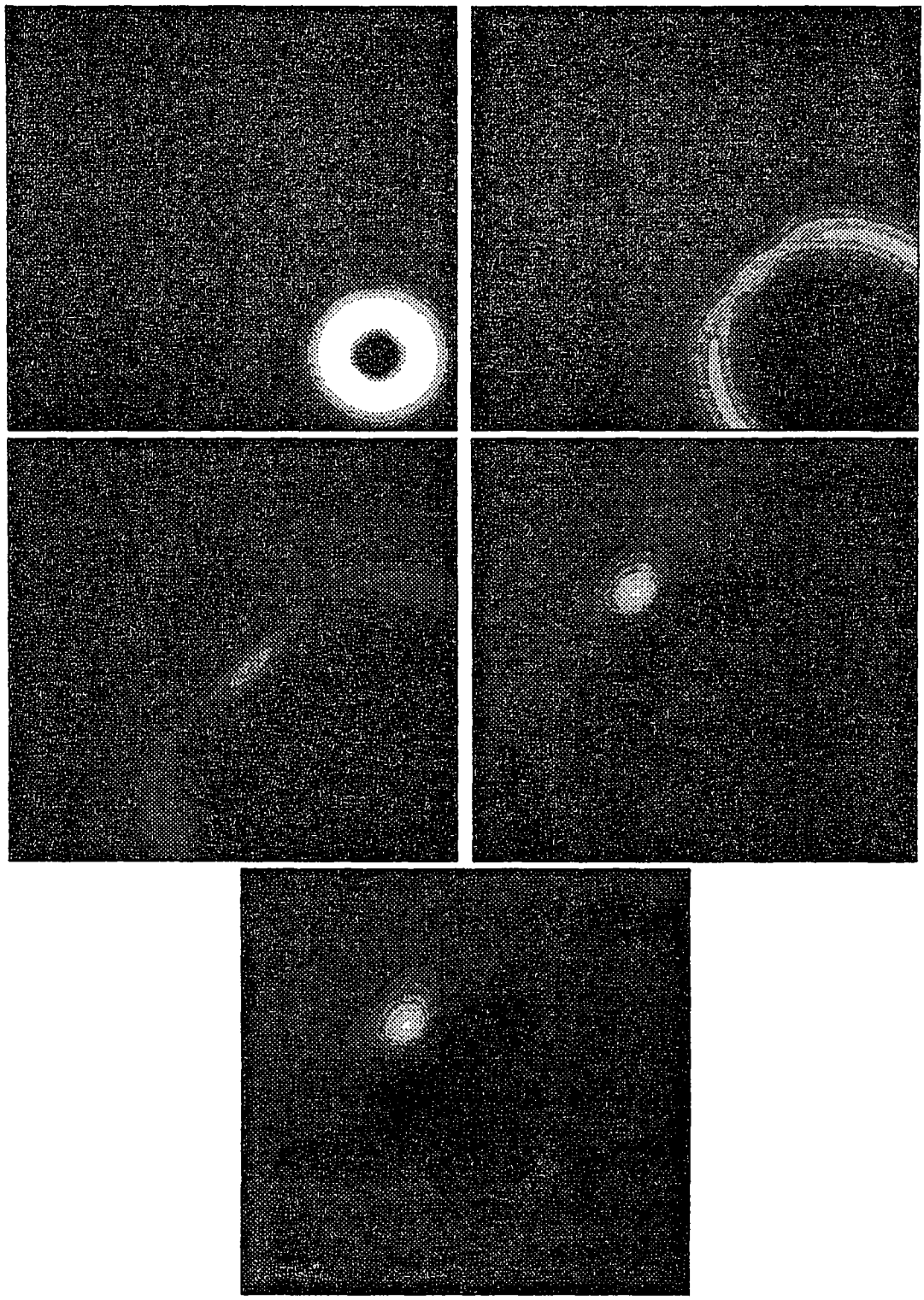


Figure 3.11 : Evolution de l'onde au cours du temps et comparaison entre les deux derniers instants

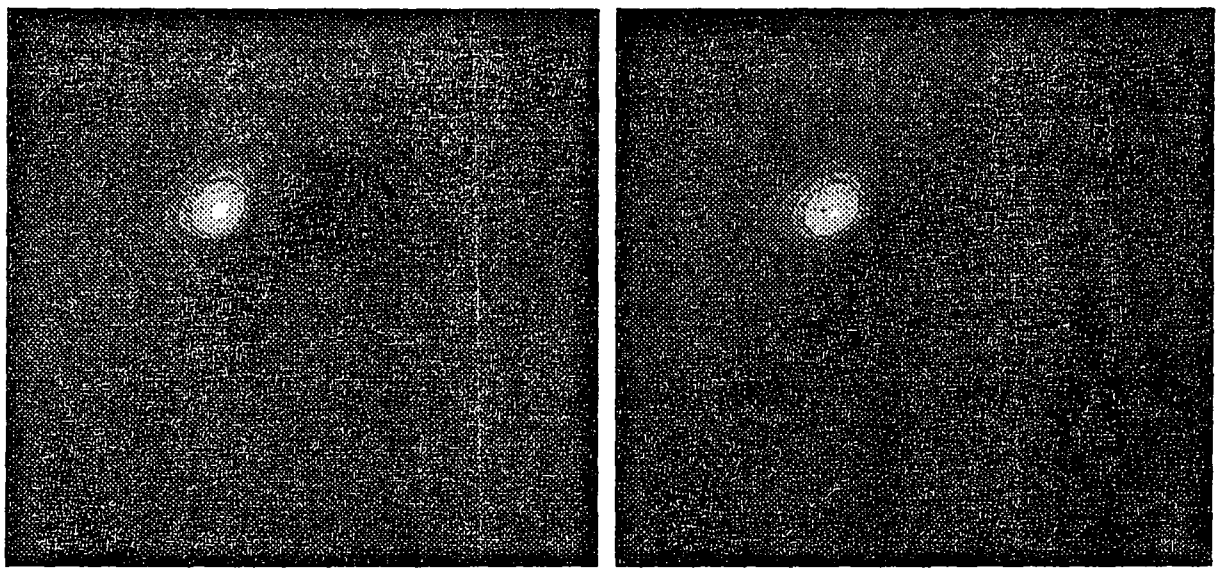


Figure 3.12 : Comparaison du schéma 2-4 dans la petite boite (*à gauche*) avec le schéma 2-2 dans la grande boite (*à droite*)

Annexe A

A.1 Algorithme pour le schéma 2-2

D'un point de vue algorithmique, le schéma se déroule de la manière suivante.

- Initialisation des inconnues aux instants $n = -1/2$ et $n = 1/2$ par (3.32)
- Faire sur n = 1/2, 3/2, ...
- Calcul de u pour les nœuds intérieurs au domaine:

$$\text{(A.1)} \qquad \begin{cases} \forall i = \cdots, -3/2, -1/2 \quad \forall j = \cdots, -3/2, -1/2 : \\ u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^{n} - u_{i,j}^{n-1} + \dfrac{\Delta t^2}{\Delta x_1^2}\left(u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}\right) + \\ \qquad + \dfrac{\Delta t^2}{\Delta x_2^2}\left(u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}\right) \end{cases}$$

- Calcul des nœuds sur le bord $\Gamma^{(2)}$

$$\text{(A.2)} \qquad \begin{cases} \forall i = \cdots, -3/2, -1/2 : \\ u_{i,1/2}^{n+1} = \dfrac{\Delta t}{\Delta t + \Delta x_2}\left(u_{i,-1/2}^{n} + u_{i,-1/2}^{n+1} - u_{i,1/2}^{n}\right) + \\ \qquad + \dfrac{\Delta x_2}{\Delta t + \Delta x_2}\left(u_{i,-1/2}^{n} - u_{i,-1/2}^{n+1} + u_{i,1/2}^{n}\right) \end{cases}$$

$$\text{(A.3)} \begin{cases} \forall l = 1, ..., L \quad \forall i = \cdots, -3/2, -1/2 : \\ (\varphi_l^{(2)})_i^{n+1} = 2(\varphi_l^{(2)})_i^{n} - (\varphi_l^{(2)})_i^{n-1} + \dfrac{\Delta t^2}{\Delta x_1^2}\left((\psi_l^{(2)})_{i-1}^{n} - 2(\psi_l^{(2)})_i^{n} + (\psi_l^{(2)})_{i+1}^{n}\right) \\ u_{i,1/2}^{n+1} = u_{i,1/2}^{n+1} + \dfrac{2\Delta x_2}{\Delta t + \Delta x_2}\beta_l\left((\varphi_l^{(2)})_i^{n+1} - (\varphi_l^{(2)})_i^{n}\right) \end{cases}$$

$$(A.4)\qquad \begin{cases} \forall l = 1, ..., L \quad \forall i = \cdots, -3/2, -1/2 : \\ (\psi_l^{(2)})_i^{n+1} = \alpha_l (\varphi_l^{(2)})_i^{n+1} + \dfrac{1}{2}\left(u_{i,1/2}^{n+1} + u_{i,-1/2}^{n+1}\right) \end{cases}$$

- Calcul des nœuds sur le bord $\Gamma^{(1)}$

$$(A.5)\qquad \begin{cases} \forall j = \cdots, -3/2, -1/2 : \\ u_{1/2,j}^{n+1} = \dfrac{\Delta t}{\Delta t + \Delta x_1}\left(u_{-1/2,j}^{n} + u_{-1/2,j}^{n+1} - u_{1/2,j}^{n}\right) + \\ \qquad + \dfrac{\Delta x_1}{\Delta t + \Delta x_1}\left(u_{-1/2,j}^{n} - u_{-1/2,j}^{n+1} + u_{1/2,j}^{n}\right) \end{cases}$$

$$(A.6)\qquad \begin{cases} \forall l = 1, ..., L \quad \forall j = \cdots, -3/2, -1/2 : \\ (\varphi_l^{(1)})_j^{n+1} = 2(\varphi_l^{(1)})_j^{n} - (\varphi_l^{(1)})_j^{n-1} + \dfrac{\Delta t^2}{\Delta x_2^2}\left((\psi_l^{(1)})_{j-1}^{n} - 2(\psi_l^{(1)})_j^{n} + (\psi_l^{(1)})_{j+1}^{n}\right) \\ u_{1/2,j}^{n+1} = u_{1/2,j}^{n+1} + \dfrac{2\Delta x_1}{\Delta t + \Delta x_1}\beta_l\left((\varphi_l^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi_l^{(1)})_j^{n}\right) \end{cases}$$

$$(A.7)\qquad \begin{cases} \forall l = 1, ..., L \quad \forall j = \cdots, -3/2, -1/2 : \\ (\psi_l^{(1)})_j^{n+1} = \alpha_l (\varphi_l^{(1)})_j^{n+1} + \dfrac{1}{2}\left(u_{1/2,j}^{n+1} + u_{-1/2,j}^{n+1}\right) \end{cases}$$

- Calcul des 2L quantités (3.33) en résolvant le système formé de (3.36) et (3.37): la formation du second membre peut s'effectuer en appliquant l'algorithme :

  - $F_l \equiv 0, \quad \forall l = 1, .., 2L$
  - Faire pour l=1,L :
    - $f_x^1 = -\dfrac{\left(\psi_l^{(1)}\right)_{1/2}^{n} - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{-1/2}^{n+1} - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{-1/2}^{n}}{2\Delta x_2}$
    - $f_t^1 = -\dfrac{\left(\psi_l^{(1)}\right)_{-1/2}^{n+1} - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{1/2}^{n} - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{-1/2}^{n}}{2\Delta t}$
    - $f_x^2 = -\dfrac{\left(\psi_l^{(2)}\right)_{1/2}^{n} - \left(\psi_l^{(2)}\right)_{-1/2}^{n+1} - \left(\psi_l^{(2)}\right)_{-1/2}^{n}}{2\Delta x_1}$
    - $f_t^2 = -\dfrac{\left(\psi_l^{(2)}\right)_{-1/2}^{n+1} - \left(\psi_l^{(2)}\right)_{1/2}^{n} - \left(\psi_l^{(2)}\right)_{-1/2}^{n}}{2\Delta t}$
    - $F_l = F_l + f_x^1 + A_l f_t^1$

* $F_{L+l} = F_{L+l} + f_x^2 + A_l f_t^2$
* Faire pour m=1,L :
  · $F_m = F_m + C_{m,l} \cdot f_t^2$
  · $F_{L+m} = F_{L+m} + C_{m,l} \cdot f_t^1$
* Fin faire

– Fin faire

– On inverse le système 2L × 2L MAT V = F

– On récupère les fonctions auxiliaires :

$$\left(\psi_l^{(1)}\right)_{1/2}^{n+1} = V_l$$

$$\left(\psi_l^{(2)}\right)_{1/2}^{n+1} = V_{L+l}$$

La matrice MAT n'ayant pas de propriété particulière, on utilisera la méthode de Gauss pour inverser le sytème MAT.V = F. La décomposition LU de la matrice étant réalisée une fois pour toute, cela se ramène à une descente remontée à chaque pas de temps n.

- Fin faire sur n

A.2 Algorithme pour le schéma 2-4

Le déroulement du schéma 2-4, très analogue à celui du schéma 2-2, est le suivant.

- Initialisation des inconnues aux instants $n = -1/2$ et $n = 1/2$ par (3.32)
- Calcul de u pour les nœuds intérieurs au domaine:

$$\left\{\begin{array}{l} \forall i = \cdots, -3/2, -1/2 \quad \forall j = \cdots, -3/2, -1/2 : \\ u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + \dfrac{\Delta t^2}{12\Delta x_1^2}\left(-u_{i+2,j}^n + 16u_{i+1,j}^n - 30u_{i,j}^n + 16u_{i-1,j}^n - u_{i-2,j}^n\right) + \\ \qquad + \dfrac{\Delta t^2}{12\Delta x_2^2}\left(-u_{i,j+2}^n + 16u_{i,j+1}^n - 30u_{i,j}^n + 16u_{i,j-1}^n - u_{i,j-2}^n\right) \end{array}\right. \quad \text{(A.8)}$$

- Puis pour $k = 0$ ou 1 (k désigne l'indice du numéro de ligne du bord)

- Calcul des nœuds sur le bord $\Gamma^{(2)}$

$$\text{(A.9)} \qquad \begin{cases} \forall i = \cdots, -3/2, -1/2, -1/2 + k : \\ u^{n+1}_{i,k+1/2} = \dfrac{\Delta t}{\Delta t + \Delta x_2} \left(u^n_{i,k-1/2} + u^{n+1}_{i,k-1/2} - u^n_{i,k+1/2} \right) + \\ + \dfrac{\Delta x_2}{\Delta t + \Delta x_2} \left(u^n_{i,k-1/2} - u^{n+1}_{i,k-1/2} + u^n_{i,k+1/2} \right) \end{cases}$$

$$\text{(A.10)} \qquad \begin{cases} \forall l = 1, ..., L \quad \forall i = \cdots, -3/2, -1/2 + k : \\ (\varphi^{(2)}_l)^{n+1}_{i,k} = 2(\varphi^{(2)}_l)^n_{i,k} - (\varphi^{(2)}_l)^{n-1}_{i,k} + \\ + \dfrac{\Delta t^2}{\Delta x_1^2} \left((\psi^{(2)}_l)^n_{i-1,k} - 2(\psi^{(2)}_l)^n_{i,k} + (\psi^{(2)}_l)^n_{i+1,k} \right) \\ u^{n+1}_{i,k+1/2} = u^{n+1}_{i,k+1/2} + \dfrac{2\Delta x_2}{\Delta t + \Delta x_2} \beta_l \left((\varphi^{(2)}_l)^{n+1}_{i,k} - (\varphi^{(2)}_l)^n_{i,k} \right) \end{cases}$$

$$\text{(A.11)} \qquad \begin{cases} \forall l = 1, ..., L \quad \forall i = \cdots, -3/2, -1/2, -1/2 + k : \\ (\psi^{(2)}_l)^{n+1}_{i,k} = \alpha_l (\varphi^{(2)}_l)^{n+1}_{i,k} + \dfrac{1}{2} \left(u^{n+1}_{i,k+1/2} + u^{n+1}_{i,k-1/2} \right) \end{cases}$$

- Calcul des nœuds sur le bord $\Gamma^{(1)}$

$$\text{(A.12)} \qquad \begin{cases} \forall j = \cdots, -3/2, -1/2, -1/2 + k : \\ u^{n+1}_{k+1/2,j} = \dfrac{\Delta t}{\Delta t + \Delta x_1} \left(u^n_{k-1/2,j} + u^{n+1}_{k-1/2,j} - u^n_{k+1/2,j} \right) + \\ + \dfrac{\Delta x_1}{\Delta t + \Delta x_1} \left(u^n_{k-1/2,j} - u^{n+1}_{k-1/2,j} + u^n_{k+1/2,j} \right) \end{cases}$$

$$\text{(A.13)} \qquad \begin{cases} \forall l = 1, ..., L \quad \forall j = \cdots, -3/2, -1/2, -1/2 + k : \\ (\varphi^{(1)}_l)^{n+1}_{k,j} = 2(\varphi^{(1)}_l)^n_{k,j} - (\varphi^{(1)}_l)^{n-1}_{k,j} + \\ + \dfrac{\Delta t^2}{\Delta x_2^2} \left((\psi^{(1)}_l)^n_{k,j-1} - 2(\psi^{(1)}_l)^n_{k,j} + (\psi^{(1)}_l)^n_{l,j+1} \right) \\ u^{n+1}_{k+1/2,j} = u^{n+1}_{k+1/2,j} + \dfrac{2\Delta x_1}{\Delta t + \Delta x_1} \beta_l \left((\varphi^{(1)}_l)^{n+1}_{k,j} - (\varphi^{(1)}_l)^n_{k,j} \right) \end{cases}$$

$$\text{(A.14)} \qquad \begin{cases} \forall l = 1, ..., L \quad \forall j = \cdots, -3/2, -1/2, -1/2 + k : \\ (\psi^{(1)}_l)^{n+1}_{k,j} = \alpha_l (\varphi^{(1)}_l)^{n+1}_{k,j} + \dfrac{1}{2} \left(u^{n+1}_{k+1/2,j} + u^{n+1}_{k-1/2,j} \right) \end{cases}$$

- Calcul de (2L+1) quantités (3.43) en résolvant le système formé de (3.40), (3.41) puis (3.42): la formation du second membre peut s'effectuer en appliquant l'algorithme :

  - $F_l \equiv 0, \quad \forall l = 1, .., 2L$

  - Faire pour l=1,L :

    * $f_x^1 = -\dfrac{\left(\psi_l^{(1)}\right)_{k,k+1/2}^n - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{k,k-1/2}^{n+1} - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{k,k-1/2}^n}{2\Delta x_2}$

    * $f_t^1 = -\dfrac{\left(\psi_l^{(1)}\right)_{k,k-1/2}^{n+1} - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{k,k+1/2}^n - \left(\psi_l^{(1)}\right)_{k,k-1/2}^n}{2\Delta t}$

    * $f_x^2 = -\dfrac{\left(\psi_l^{(2)}\right)_{k+1/2,k}^n - \left(\psi_l^{(2)}\right)_{k-1/2,k}^{n+1} - \left(\psi_l^{(2)}\right)_{k-1/2,k}^n}{2\Delta x_1}$

    * $f_t^2 = -\dfrac{\left(\psi_l^{(2)}\right)_{k-1/2,k}^{n+1} - \left(\psi_l^{(2)}\right)_{k+1/2,k}^n - \left(\psi_l^{(2)}\right)_{k-1/2,k}^n}{2\Delta t}$

    * $F_l = F_l + f_x^1 + A_l f_t^1$

    * $F_{L+l} = F_{L+l} + f_x^2 + A_l f_t^2$

    * Faire pour m=1,L :

      · $F_m = F_m + C_{m,l} \cdot f_t^2$

      · $F_{L+m} = F_{L+m} + C_{m,l} \cdot f_t^1$

    * Fin faire

  - Fin faire

  - On inverse le système 2L × 2L MAT V = F

  - On récupère les fonctions auxiliaires :

$$\left(\psi_l^{(1)}\right)_{k,k+1/2}^{n+1} = V_l$$

$$\left(\psi_l^{(2)}\right)_{k+1/2,k}^{n+1} = V_{L+l}$$

- On calcule $u^{n+1}_{k+1/2,k+1/2} = u^{n+1}_{p,p}$ via $(p = k + 1/2\ )$

$$f = \frac{u^n_{p,p} + u^{n+1}_{p,p-1} + u^n_{p,p-1} - u^{n+1}_{p-1,p} - u^n_{p-1,p} - u^{n+1}_{p-1,p-1} - u^n_{p-1,p-1}}{4\Delta x_2} +$$

$$+ \frac{u^n_{p,p} + u^{n+1}_{p-1,p} + u^n_{p-1,p} - u^{n+1}_{p,p-1} - u^n_{p,p-1} - u^{n+1}_{p-1,p-1} - u^n_{p-1,p-1}}{4\Delta x_1} +$$

$$+ 2\gamma \cdot \frac{u^{n+1}_{p-1,p} + u^{n+1}_{p,p-1} + u^{n+1}_{p-1,p-1} - u^n_{p-1,p} - u^n_{p-1,p} - u^n_{p,p-1} - u^n_{p-1,p-1}}{4\Delta t} +$$

$$- \sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \left(\frac{\left(\psi^{(1)}_m\right)^{n+1}_{p-1/2,p} + \left(\psi^{(1)}_m\right)^{n+1}_{p-1/2,p-1} - \left(\psi^{(1)}_m\right)^{n}_{p-1/2,p} - \left(\psi^{(1)}_m\right)^{n}_{p-1/2,p-1}}{2\Delta t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\psi^{(2)}_m\right)^{n+1}_{p,p-1/2} + \left(\psi^{(2)}_m\right)^{n+1}_{p-1,p-1/2} - \left(\psi^{(2)}_m\right)^{n}_{p,p-1/2} - \left(\psi^{(2)}_m\right)^{n}_{p-1,p-1/2}}{2\Delta t} \right)$$

-

$$u^{n+1}_{k+1/2,k+1/2} = -\frac{f}{\frac{1}{\Delta x_1} + \frac{1}{\Delta x_2} + \frac{2\gamma}{\Delta t}}$$

- Fin faire (sur k=0,1)
- Fin faire (sur n=1/2,3/2,.....)

A.3 Généralisation du schéma 2-2 au cas amorti

On donne ici les éléments pour généraliser le schéma 2-2 au cas amorti ($\sigma \neq 0$). Le problème continu est constitué de l' équation (2.48) dans Ω, des C.L.A. (2.49) et (2.50) sur les bords ainsi que que des conditions de coin (2.61),(2.62) et (2.63). La grille de calcul et les notations sont identiques à celles du cas non amorti ($\sigma = 0$).

La différence avec le cas non amorti réside en la présence de termes supplémentaires comme $\sigma \partial u/\partial t$ ou $\partial \psi_l^{(k)}/\partial t$. On a choisi de discrétiser ces termes de façon centrée à l'instant n et à l'aide des deux instants $n-1$ et $n+1$.

L'équation des ondes amorties est ainsi discrétisée selon :

$$\text{(A.15)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \forall i = \cdots, -3/2, -1/2 \quad \forall j = \cdots, -3/2, -1/2 : \\ \dfrac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} + \sigma \cdot \dfrac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} - \\ - \dfrac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x_1^2} - \dfrac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{\Delta x_2^2} = 0 \end{array} \right.$$

Sur $\Gamma^{(2)}$ on écrit pour $i = ..., -3/2, -1/2$

$$\text{(A.16)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{u_{i,+}^{n+1} + u_{i,-}^{n+1} - u_{i,+}^{n} - u_{i,-}^{n}}{2\Delta t} + \dfrac{u_{i,+}^{n+1} + u_{i,+}^{n} - u_{i,-}^{n+1} - u_{i,-}^{n}}{2\Delta x_2} - \\ - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \beta_m \dfrac{\left(\varphi_m^{(2)}\right)_i^{n+1} - \left(\varphi_m^{(2)}\right)_i^{n}}{\Delta t} = 0 \end{array} \right.$$

où on a noté

$$\text{(A.17)} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{i,+}^{n} & = & u_{i,1/2}^{n} \\ u_{i,-}^{n} & = & u_{i,-1/2}^{n} \end{array} \right.$$

avec, pour $l = 1, ..., L$ et $i = ..., -5/2, -3/2$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\left(\left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n+1} - 2\left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n} + \left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n-1}\right)}{\Delta t^2} + \\
+ \sigma \dfrac{\left(\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n+1} + \frac{1}{2}\left(u_{i,+}^{n+1} + u_{i,-}^{n+1}\right)\right) - \left(\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n-1} + \frac{1}{2}\left(u_{i,+}^{n-1} + u_{i,-}^{n-1}\right)\right)}{2\Delta t} - \\
- \left\{ \dfrac{\left(\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_{i+1}^{n} + \frac{1}{2}\left(u_{i+1,+}^{n} + u_{i+1,-}^{n}\right)\right) - 2\left(\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n} + \frac{1}{2}\left(u_{i,+}^{n} + u_{i,-}^{n}\right)\right) + }{\Delta x_1^2} \right. \\
\left. \dfrac{+ \left(\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_{i-1}^{n} + \frac{1}{2}\left(u_{i-1,+}^{n} + u_{i-1,-}^{n}\right)\right)}{\Delta x_1^2} \right\} \\
= 0
\end{cases}
\tag{A.18}
$$

Le noeud $i = -1/2$ s'écrivant :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\left(\left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n+1} - 2\left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n} + \left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n-1}\right)}{\Delta t^2} + \\
+ \sigma \dfrac{\left(\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n+1} + \frac{1}{2}\left(u_{i,+}^{n+1} + u_{i,-}^{n+1}\right)\right) - \left(\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n-1} + \frac{1}{2}\left(u_{i,+}^{n-1} + u_{i,-}^{n-1}\right)\right)}{2\Delta t} - \\
- \left\{ \dfrac{\left(\psi_l^{(2)}\right)_{1/2}^{n} - 2\left(\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n} + \frac{1}{2}\left(u_{i,+}^{n} + u_{i,-}^{n}\right)\right) + }{\Delta x_1^2} \right. \\
\left. \dfrac{+ \left(\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_{i-1}^{n} + \frac{1}{2}\left(u_{i-1,+}^{n} + u_{i-1,-}^{n}\right)\right)}{\Delta x_1^2} \right\} \\
= 0
\end{cases}
\tag{A.19}
$$

($\left(\psi_l^{(2)}\right)_{1/2}^{n}$ ayant été fourni à l'étape n par le schéma relatif au coin que nous verrons plus loin)

La résolution peut par exemple s'effectuer via la substitution

$$
\left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n+1} = F_i^l - \frac{1}{\dfrac{1}{\Delta t^2} + \dfrac{\alpha_l \sigma}{2\Delta t}} \cdot \frac{\sigma}{4\Delta t} u_{i,+}^{n+1} \tag{A.20}
$$

avec pour $i = ..., -5/2, -3/2$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_i^l = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\Delta t^2} + \dfrac{\alpha_l \sigma}{2\Delta t}} \cdot \Bigg\{ \\ \\ \dfrac{2}{\Delta t^2} \left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^n - \left(\dfrac{1}{\Delta t^2} - \dfrac{\sigma \alpha_l}{2\Delta t}\right) \left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n-1} - \dfrac{\sigma}{4\Delta t} \Big(\quad + u_{i,-}^{n+1} - u_{i,+}^{n-1} - u_{i,-}^{n-1} \Big) + \\ \\ + \left(\dfrac{\left(\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_{i+1}^n + \dfrac{1}{2}\left(u_{i+1,+}^n + u_{i+1,-}^n\right)\right) - 2\left(\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^n + \dfrac{1}{2}\left(u_{i,+}^n + u_{i,-}^n\right)\right) + }{\Delta x_1^2} \right. \\ \\ \left. \dfrac{+ \left(\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_{i-1}^n + \dfrac{1}{2}\left(u_{i-1,+}^n + u_{i-1,-}^n\right)\right)}{\Delta x_1^2} \right) \quad \Bigg\} \end{array} \right. \tag{A.21}$$

tandis que pour $i = -1/2$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_i^l = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\Delta t^2} + \dfrac{\alpha_l \sigma}{2\Delta t}} \cdot \Bigg\{ \\ \\ \dfrac{2}{\Delta t^2} \left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^n - \left(\dfrac{1}{\Delta t^2} - \dfrac{\sigma \alpha_l}{2\Delta t}\right) \left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n-1} - \dfrac{\sigma}{4\Delta t} \Big(\quad + u_{i,-}^{n+1} - u_{i,+}^{n-1} - u_{i,-}^{n-1} \Big) + \\ \\ + \left(\dfrac{\left(\psi_l^{(2)}\right)_{1/2}^n - 2\left(\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^n + \dfrac{1}{2}\left(u_{i,+}^n + u_{i,-}^n\right)\right) + }{\Delta x_1^2} \right. \\ \\ \left. \dfrac{+ \left(\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_{i-1}^n + \dfrac{1}{2}\left(u_{i-1,+}^n + u_{i-1,-}^n\right)\right)}{\Delta x_1^2} \right) \quad \Bigg\} \end{array} \right. \tag{A.22}$$

$u_{i,+}^{n+1}$ s'obtient alors via :

$$\left\{ \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{1}{2\Delta x_2} + \sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{\frac{\sigma}{4\Delta t}}{\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{\alpha_m \sigma}{2\Delta t}} \right) u_{i,+}^{n+1} = \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{1}{2\Delta x_2} \right) \left(u_{i,+}^{n} - u_{i,-}^{n+1} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{1}{2\Delta x_2} \right) u_{i,-}^{n-1} + \sum_{m=1}^{L} \beta_m \frac{F_i^m - \left(\varphi_m^{(2)} \right)_i^n}{\Delta t} \right. \tag{A.23}$$

L'équation (A.20) permet alors le calcul de $\left(\varphi_l^{(2)}\right)_i^{n+1}$ pour tout $i = ..., -3/2, -1/2$.

Le schéma relatif à la discrétisation des équations sur $\Gamma^{(1)}$ s'obtient en permutant le rôle de x_1 et x_2. Ce schéma fait intervenir les fonctions $\left(\psi_l^{(1)}\right)_{1/2}^n, l = 1, ..., L$

Restent donc à évaluer les fonctions $\left(\psi_l^{(1)}\right)_{1/2}^{n+1}$ et $\left(\psi_l^{(2)}\right)_{1/2}^{n+1}$. Pour cela, on discrétise les équations de coin sur le maillage ci-dessous

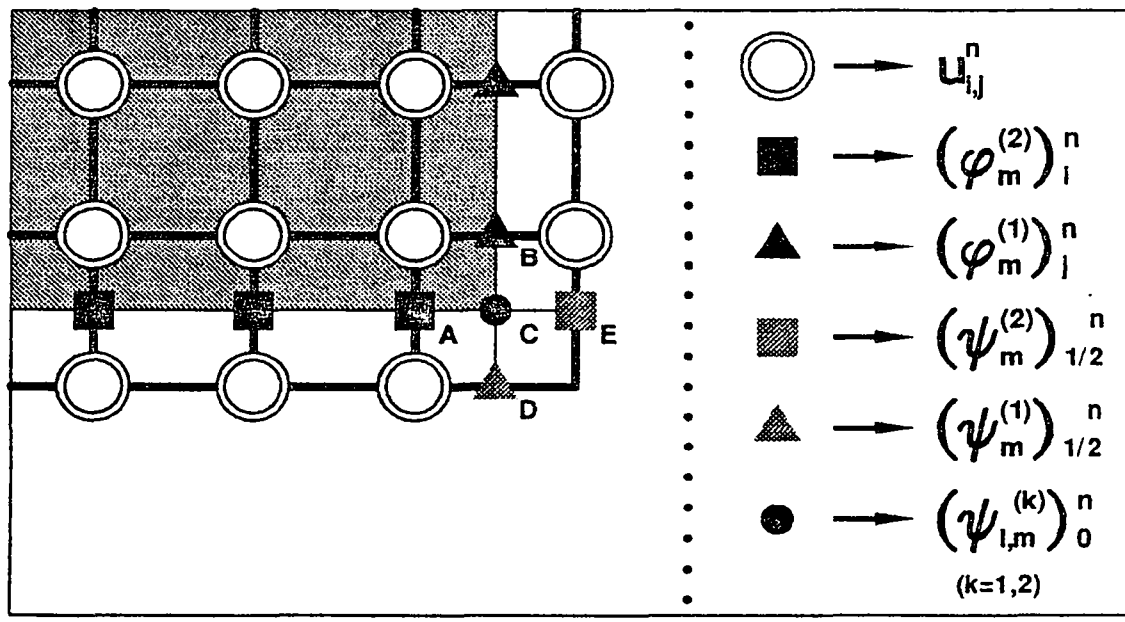


Figure A.1 : Le maillage pour le coin

On a ainsi :

$$
\text{(A.24)}\quad
\begin{cases}
\left(\psi_l^{(2)}\right)_{1/2}^n &= \psi_l^{(2)}(E)^n \\
\left(\psi_l^{(1)}\right)_{1/2}^n &= \psi_l^{(1)}(D)^n \\
\alpha_l \left(\varphi_l^{(2)}\right)_{i=-1/2}^n + \dfrac{1}{2}\left(u^n_{-1/2,1/2} + u^n_{-1/2,-1/2}\right) &= \psi_l^{(2)}(A)^n \\
\alpha_l \left(\varphi_l^{(1)}\right)_{j=-1/2}^n + \dfrac{1}{2}\left(u^n_{1/2,-1/2} + u^n_{-1/2,-1/2}\right) &= \psi_l^{(1)}(B)^n
\end{cases}
$$

Les équation donnant $\psi_{l,m}^{(2)}$ et $\psi_{l,m}^{(1)}$ sont alors discrétisées par

$$
\text{(A.25)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\psi_l^{(2)}(E)^{n+1} + \psi_l^{(2)}(A)^{n+1} - \psi_l^{(2)}(E)^n - \psi_l^{(2)}(A)^n}{2\Delta t} = \\
(\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l\alpha_m)\dfrac{\psi_{l,m}^{(2)}(C)^{n+1} - \psi_{l,m}^{(2)}(C)^n}{\Delta t} + \sigma\alpha_m\alpha_l\dfrac{\psi_{l,m}^{(2)}(C)^{n+1} + \psi_{l,m}^{(2)}(C)^n}{2} \\
\dfrac{\psi_l^{(1)}(D)^{n+1} + \psi_l^{(1)}(B)^{n+1} - \psi_l^{(1)}(D)^n - \psi_l^{(1)}(B)^n}{2\Delta t} = \\
(\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l\alpha_m)\dfrac{\psi_{l,m}^{(1)}(C)^{n+1} - \psi_{l,m}^{(1)}(C)^n}{\Delta t} + \sigma\alpha_m\alpha_l\dfrac{\psi_{l,m}^{(1)}(C)^{n+1} + \psi_{l,m}^{(1)}(C)^n}{2}
\end{cases}
$$

D'où l'on déduit:

$$
\text{(A.26)}\quad
\begin{cases}
\psi_{l,m}^{(2)}(C)^{n+1} = G_{l,m}^{(2)} + \dfrac{\dfrac{1}{2\Delta t}}{\dfrac{(\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l\alpha_m)}{\Delta t} + \dfrac{\sigma\alpha_l\alpha_m}{2}}\psi_l^{(2)}(E)^{n+1} \\
\psi_{l,m}^{(1)}(C)^{n+1} = G_{l,m}^{(1)} + \dfrac{\dfrac{1}{2\Delta t}}{\dfrac{(\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l\alpha_m)}{\Delta t} + \dfrac{\sigma\alpha_l\alpha_m}{2}}\psi_l^{(2)}(D)^{n+1}
\end{cases}
$$

avec

$$\left\{ G_{l,m}^{(2)} = \frac{1}{\dfrac{(\alpha_l+\alpha_m-\alpha_l\alpha_m)}{\Delta t}+\dfrac{\sigma\alpha_l\alpha_m}{2}} \left\{ \left(\frac{(\alpha_l+\alpha_m-\alpha_l\alpha_m)}{\Delta t} - \frac{\sigma\alpha_l\alpha_m}{2} \right) \psi_{l,m}^{(2)}(C)^n \right.\right. \tag{A.27}$$

$$\left.\left. + \frac{\left(\psi_l^{(2)}(A)^{n+1} - \psi_l^{(2)}(E)^n - \psi_l^{(2)}(A)^n\right)}{2\Delta t} \right\} \right.$$

et

$$\left\{ G_{l,m}^{(1)} = \frac{1}{\dfrac{(\alpha_l+\alpha_m-\alpha_l\alpha_m)}{\Delta t}+\dfrac{\sigma\alpha_l\alpha_m}{2}} \left\{ \left(\frac{(\alpha_l+\alpha_m-\alpha_l\alpha_m)}{\Delta t} - \frac{\sigma\alpha_l\alpha_m}{2} \right) \psi_{l,m}^{(1)}(C)^n \right.\right. \tag{A.28}$$

$$\left.\left. + \frac{\left(\psi_l^{(1)}(B)^{n+1} - \psi_l^{(1)}(D)^n - \psi_l^{(1)}(B)^n\right)}{2\Delta t} \right\} \right.$$

On utilise alors les équations donnant $\partial_{x_1}\psi_l^{(2)}(C,t)$ et $\partial_{x_2}\psi_l^{(1)}(C,t)$ qui s'écrivent après discrétisation.

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\psi_l^{(2)}(E)^{n+1} + \psi_l^{(2)}(E)^n - \psi_l^{(2)}(A)^{n+1} - \psi_l^{(2)}(A)^n}{2\Delta x_1} + \\ & + \left(1+\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\right)\left(\frac{\psi_l^{(2)}(E)^{n+1} + \psi_l^{(2)}(A)^{n+1} - \psi_l^{(2)}(E)^n - \psi_l^{(2)}(A)^n}{2\Delta t}\right) - \\ & - \sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m\alpha_l}{\alpha_m}\left(\frac{\psi_{m,l}^{(2)}(C)^{n+1} - \psi_{m,l}^{(2)}(C)^n}{\Delta t}\right) - \\ & - \sum_{m=1}^{L}\beta_m\left(\frac{\psi_{l,m}^{(1)}(C)^{n+1} - \psi_{l,m}^{(1)}(C)^n}{\Delta t}\right) = 0 \end{aligned} \right. \tag{A.29}$$

et,

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\psi_l^{(1)}(D)^{n+1} + \psi_l^{(1)}(D)^n - \psi_l^{(1)}(B)^{n+1} - \psi_l^{(1)}(B)^n}{2\Delta x_2} + \\ & + \left(1+\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\right)\left(\frac{\psi_l^{(1)}(D)^{n+1} + \psi_l^{(1)}(B)^{n+1} - \psi_l^{(1)}(D)^n - \psi_l^{(1)}(B)^n}{2\Delta t}\right) - \\ & - \sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m\alpha_l}{\alpha_m}\left(\frac{\psi_{m,l}^{(1)}(C)^{n+1} - \psi_{m,l}^{(1)}(C)^n}{\Delta t}\right) - \\ & - \sum_{m=1}^{L}\beta_m\left(\frac{\psi_{l,m}^{(2)}(C)^{n+1} - \psi_{l,m}^{(2)}(C)^n}{\Delta t}\right) = 0 \end{aligned} \right. \tag{A.30}$$

On utilise alors les formules (A.28) et (A.27) pour éliminer les quantités relatives aux $\psi_{m,l}^{(1)}(C)^{n+1}$ et $\psi_{m,l}^{(2)}(C)^{n+1}$. On obtient ainsi un sytème linéaire de dimension $2L$ dont les inconnues sont $\psi_l^{(1)}(C)^{n+1}$ et $\psi_l^{(2)}(C)^{n+1}$ avec $l = 1, ..., L$ et dont la matrice est la même que dans le cas non amorti. Une fois le système inversé, on peut récupérer les valeurs à l'instant $n+1$ des fonctions auxiliaires $\psi_{l,m}^{(k)}$.

Bibliographie

[1] R. M. ALFORD, R. KELLY, and D. M. BOORE. Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, 6:834–842, 1974.

[2] A. BAMBERGER, B. ENGQUIST, L. HALPERN, and P. JOLY. Construction et analyse d'approximations paraxiales en milieu hétérogène. part 1: Approximation parabolique. Technical Report 114, C.M.A.P Ecole Polytechnique, Octobre 1984.

[3] A. BAMBERGER, B. ENGQUIST, L. HALPERN, and P. JOLY. Construction et analyse d'approximations paraxiales en milieu hétérogène. part 2: Approximation d'ordre supérieur. Technical Report 128, C.M.A.P Ecole Polytechnique, Mars 1985.

[4] A. BAMBERGER, B. ENGQUIST, L. HALPERN, and P. JOLY. Parabolic wave equation approximations in heterogeneous media. *SIAM J: Appl. Math.*, pages 129–154, 1988.

[5] A. BAMBERGER, P. JOLY, and J.E. ROBERTS. Second order absorbing boundary conditions for the wave equation: a solution for the corner problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(2):323–352, Avril 1990.

[6] H. BARUCQ and B. HANOUZET. Stabilisation et conditions aux limites absorbantes. In *Compte-rendu du XXIV^{eme} Congrés National d'Analyse Numérique (Vittel)*, pages 14–15, Mai 1992.

[7] A. BAYLISS and E. TURKEY. Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33:707–725, 1980.

[8] B. CHALINDAR. *Conditions aux limites absorbantes appliqués à des problèmes hyperboliques intervenant en sismique.* PhD thesis, Université de Saint Etienne, 1988.

[9] G. COHEN and P. JOLY. Fourth order schemes for the acoustic equation. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engin.*, 80:397–407, 1990.

[10] F. COLLINO. *Analyse numérique de modèles de propagation d'ondes. Application à la migration et à l'inversion des données sismiques.* PhD thesis, Université Paris IX, 1987.

[26] L. TREFETHEN. Instability of difference models for hyperbolic initial boundary value problems. *Comm. on Pure and Applied Math.*, 37:329–367, 1984.

[27] L. TREFETHEN and L. HALPERN. Well posedness of one way equations and absorbing boundary conditions. *Math. Comp.*, 47:437–459, 1986.

[11] T. HA DUONG and P. JOLY. On the stability analysis of boundary conditions for the wave equation by energy methods. part 1: The homogeneous case. Technical Report 1306, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, Octobre 1990.

[12] B. ENGQUIST and A. MAJDA. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139):629–651, Juillet 1977.

[13] D. GIVOLI. Non reflecting boundary conditions. *Jour. Comp. Phys*, 94(1), Mai 1991.

[14] G. H. GOLUB and G. A. MEURANT. *Résolution numérique des grands systèmes linéaires.* 49. Collection de la Direction de Recherches d'Electricité de France, 1983.

[15] B. GUSTAFSON, H.O. KREISS, and A. SUNDSTROM. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems.ii. *Math. Comp.*, 26(119):649–686, Juillet 1972.

[16] R.L. HIGDON. Absorbing boundary conditions for difference approximation s to the multi-dimensional wave equation. *Math. Comp.*, 47(176):437–459, 1977.

[17] R.L. HIGDON. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *SIAM review*, 28, 1977.

[18] R.L. HIGDON. Absorbing boundary conditions for elastic waves. *Geophysics*, 56(2):231–241, 1991.

[19] P. JOLY. *Analyse numérique et mathématique de problèmes liés a la propagation d'ondes acoustiques, élastiques et électromagnétiques.* PhD thesis, Université Paris IX, 1987.

[20] P. JOLY and R. VEZINET. Conditions aux limites absorbantes pour les équations de maxwell en milieu conducteur. Technical report, I.N.R.I.A., à paraître.

[21] H.O. KREISS. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems.i. *Math. Comp.*, 22:703–714, 1968.

[22] E.L. LINDMANN. Free-space boundary conditions for the time dependant wave equation. *Jour.Comp. Phys.*, 18, 1975.

[23] J. E. ROBERTS P. JOLY. Approximation of the surface impedance for a stratified medium. In J.B. Bednar and al., editors, *Geophysical Inversion*, pages 245–276. SIAM, 1992.

[24] M. REED and B. SIMON. *Methods of modern mathematical physics, 2: Fourier analysis, self-adjointness*, volume 2, pages 15–27. Acad. Press, 1975.

[25] W. RUDIN. *Analyse réelle et complexe*, page 206. Masson, 1980.

Table des matières

0 Introduction 1

1 Conditions aux limites absorbantes d'ordre élevé: cas du demi-espace 5
1.1 Motivation de l'étude, présentation d'un problème type 6
1.2 Rappels sur les conditions aux limites absorbantes 11
1.2.1 Dérivation de la condition transparente 12
1.2.2 Conditions approchées 13
1.2.3 Zoologie des approximations 14
1.2.4 Analyse mathématique des C.L.A.: stabilité 17
1.2.5 Analyse mathématique des C.L.A.: précision 17
1.2.6 Extension à 3D 21
1.3 Extension des C.L.A. au cas conducteur ou amorti 22
1.3.1 Construction des C.L.A. 22
1.3.2 Etude de la stabilité 25
1.3.3 Compléments sur l'opérateur "coefficient de réflexion" 33

2 Détermination et étude des conditions de coins 39
2.1 Cas de l'équation des ondes 2D 39
2.1.1 Position du problème 39
2.1.2 Dérivation d'une condition de coin par compatibilité 43
2.1.3 Dérivation des conditions de coins à partir de solutions particulières 48
2.1.4 Consistance des deux méthodes 53
2.1.5 Aspects mathématiques du problème 55
2.2 Généralisation à d'autres cas 65
2.2.1 Cas de l'équation des ondes amorties 65
2.2.2 Cas de l'équation des ondes 3D 69

3 Schémas numériques pour les C.L.A. 81
3.1 Le demi-espace: présentation des schémas 81
3.1.1 Schéma 2-2 82
3.1.2 Schéma 2-4 84
3.2 Le demi-espace: étude de la stabilité 86

3.2.1 Présentation du critère de Kreiss 87
3.2.2 Stabilité pour le schéma 2-2 89
3.2.3 Stabilité pour le schéma 2-4 91
3.3 Le quart d'espace: présentation des schémas 95
3.3.1 Schéma 2-2 95
3.3.2 Schéma 2-4 99
3.4 Simulations numériques 104
3.4.1 Simulations avec le signal IEMN standard 104
3.4.2 Simulation avec un signal à moyenne nulle 105
3.4.3 Diffraction d'une onde par un tube de section carrée 107

A 113
A.1 Algorithme pour le schéma 2-2 113
A.2 Algorithme pour le schéma 2-4 115
A.3 Généralisation du schéma 2-2 au cas amorti 119

ISSN 0249 - 6399