



HAL
open science

Perturbation des équations d'équilibre d'un plasma confiné : comportement de la frontière libre, étude des branches de solutions

Alain Dervieux

► **To cite this version:**

Alain Dervieux. Perturbation des équations d'équilibre d'un plasma confiné : comportement de la frontière libre, étude des branches de solutions. [Rapport de recherche] RR-0018, INRIA. 1980. inria-00076543

HAL Id: inria-00076543

<https://inria.hal.science/inria-00076543>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

Rapports de Recherche

N° 18

**PERTURBATION
DES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE
D'UN PLASMA CONFINÉ :
COMPORTEMENT
DE LA FRONTIÈRE LIBRE,
ÉTUDE
DES BRANCHES DE SOLUTIONS**

Alain DERVIEUX

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105 78150 Le Chesnay
France
Tél. 954 90 20

Mai 1980

PERTURBATION DES EQUATIONS D'EQUILIBRE D'UN
PLASMA CONFINE : COMPORTEMENT DE LA FRONTIERE
LIBRE, ETUDE DES BRANCHES DE SOLUTIONS

Alain DERVIEUX

INRIA
B.P. 105, 78150 Le Chesnay
France

RESUME

Ce travail est formé principalement de deux parties : d'une part on donne quelques compléments sur les méthodes d'étude de la variation de la solution d'un problème elliptique en fonction du domaine géométrique ; d'autre part on montre comment ces méthodes permettent l'étude locale d'un problème à interface libre issu de la physique des plasmas.

SUMMARY

This work contains two parts : firstly, we give some results concerning domain variation techniques for elliptic problems ; secondly we show how these techniques fairly apply to the local study of a free-interface problem who arises in plasma physics.

INTRODUCTION

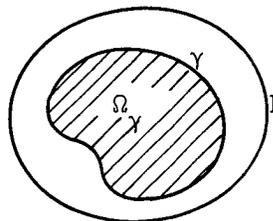
Ce rapport ⁽¹⁾ est le premier d'une série de trois sur la perturbation des Problèmes à Frontière Libre (P.F.L.). Ces travaux utilisent une même méthode dont l'idée principale est de prendre pour inconnue la frontière libre du problème.

A cet effet, il est nécessaire de disposer d'outils aptes à l'étude des variations de cette frontière. Nous présentons donc une première partie consacrée à l'élaboration de tels outils qui sont en l'occurrence des techniques d'étude de la variation de la solution d'un problème aux limites lorsque la frontière est perturbée.

La seconde partie utilise ces outils pour étudier un P.F.L. issu de la physique des plasmas qui peut être décrit de la manière suivante :

Dans un domaine Ω de frontière Γ on cherche une "frontière" γ et une fonction u définie sur Ω telle que (λ est une constante positive donnée)

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} u \in H^2(\Omega) \\ \Delta u = -\lambda u \text{ dans } \Omega_\gamma \text{ limité par } \gamma \text{ (Figure)} \\ \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \Omega_\gamma \\ u = 1 \text{ sur } \Gamma \\ u = 0 \text{ sur } \gamma. \end{array} \right.$$



Le but de ce travail est d'étudier la correspondance

$$(*) \quad (\lambda, \Gamma) \rightarrow (\gamma, u).$$

Nous montrons l'existence et la régularité locales de la correspondance (*); nous exhibons ses dérivées premières, ce qui permet d'écrire des conditions nécessaires d'optimalité pour un problème de contrôle optimal dans lequel la frontière libre est observée.

Une troisième partie est consacrée à quelques remarques sur les branches de bifurcation du problème précédent.

(1) La majeure partie de ce travail a fait l'objet d'un exposé au séminaire d'Analyse Numérique d'Orsay en janvier 1978.

Bien qu'entrepris indépendamment, ce travail est très similaire du point de vue méthodologie à celui de J. SIJBRAND [1]; toutefois, le problème à frontière libre est posé ici de manière sensiblement différente et nous pensons avoir mis en évidence certains points de vue intéressants (Contrôle Optimal, régularité, branches de solutions).

Citons aussi une étude du même type effectuée par B. NICOLAENKO, R. TEMAM [1] annoncée dans R. TEMAM [3].

En ce qui concerne le point de vue bifurcation, on trouvera une approche différente dans M. SERMANGE [2].

Le plan est le suivant :

1. Quelques techniques en calcul des variations par rapport au domaine
 - 1.1. Repérage d'un domaine étoilé dans le plan
 - 1.1.1. Définition du repérage. Propriétés des espaces $C^{\lambda+\alpha}$
 - 1.1.2. Existence de difféomorphismes
 - 1.1.3. Dérivabilité du problème de Dirichlet transporté (variations intérieures)
 - 1.1.4. Dérivabilité du problème de Dirichlet initial
 - 1.2. Repérage d'un domaine simplement connexe du plan
 - 1.2.1. Définition. Réduction à un domaine étoilé
 - 1.2.2. Définition d'un repérage dans la géométrie initiale
 - 1.3. Un contexte plus général
2. Sur la perturbation de la forme d'équilibre d'un plasma confiné
 - 2.1. Formulation du problème
 - 2.2. Dépendance du problème de Dirichlet par rapport au support d'un coefficient
 - 2.2.1. Position du problème
 - 2.2.2. Régularité de l'application U
 - 2.2.3. Première application : régularité de la frontière libre
 - 2.3. Dépendance par rapport aux données de la solution du problème initial
 - 2.3.1. Dépendance de la frontière libre
 - 2.3.2. Dépendance de la solution u
 - 2.3.3. Application au Contrôle Optimal
3. Etude des branches de solutions

CONCLUSION

1. QUELQUES TECHNIQUES EN CALCUL DES VARIATIONS
PAR RAPPORT AU DOMAINE

Ce paragraphe est destiné à familiariser le lecteur avec un certain nombre de techniques classiques ou dérivées de B. PALMERIO, A. DERVIEUX [1,2], que nous développons ici afin de les utiliser dans les paragraphes suivants ainsi que dans les rapports qui feront suite à celui-ci.

Le problème de la variation de la solution d'un problème aux limites par rapport au domaine géométrique n'est pas nouveau : les premiers travaux sur ce sujet semblent remonter à J. HADAMARD [1]. Citons comme contribution importante la méthode des variations intérieures de P.R. GARABEDIAN, M. SCHIFFER (cf. P.R. GARABEDIAN [1]).

Pour des travaux récents on pourra se référer à J. CEA et Al.[1], D. CHENAIS [1], A.M. MICHELETTI [1], F. MURAT, J. SIMON [1,2,3], O. PIRONNEAU [1], B. ROUSSELET [1], J.P. ZOLESIO [1].

Nous commencerons dans le paragraphe 1.1 par étudier en détail le cas de domaines limités par des courbes paramétrées en coordonnées polaires (domaines étoilés). Nous ferons par la suite très souvent référence à ce contexte qui est nettement plus "parlant", autant du point de vue de la simplicité des démonstrations que du point de vue de la clarté de l'énoncé des résultats.

Dans le paragraphe 1.2., on étend les méthodes du paragraphe 1.1. à des ouverts simplement connexes; on montre d'une part comment on se ramène au contexte étoilé et d'autre part on introduit un autre type de repérage.

Ce second type de repérage est repris et développé dans le paragraphe 1.3 dans un cadre plus général.

Les paragraphes 1.1. et 1.3. sont plus spécialement destinés à l'étude qui constitue la deuxième partie de ce rapport. Le paragraphe 1.2., qui prend logiquement place dans la première partie, n'est utilisé que dans les rapports qui feront suite à celui-ci et peut donc être sauté en première lecture.

Pour alléger l'exposé on a mis en annexe les calculs techniques qui ne nous semblent pas utiles à la compréhension des points principaux.

1.1. REPERAGE D'UN DOMAINE ETOILE DANS LE PLAN

1.1.1. Définition du repérage. Propriétés des espaces $C^{\ell+\alpha}$

On note \mathbf{T} le tore de dimension 1

$$\mathbf{T} = \mathbb{R}/2\pi \mathbb{Z}$$

Définition 1.1. - Nous dirons qu'un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 est étoilé de classe $C^{\ell+\alpha}$ ($\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 2$, $\alpha \in]0, 1[$) si il existe un élément γ de $C^{\ell+\alpha}(\mathbf{T})$ ⁽¹⁾ tel que

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \theta \in \mathbf{T}, \quad \gamma(\theta) > 0 \\ \Omega = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } r < \gamma(\theta)\} \end{array} \right.$$

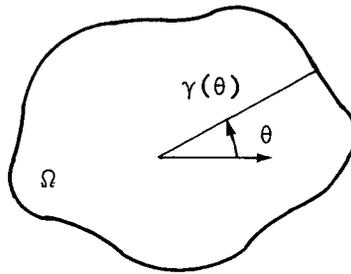


Fig. 1

Définition 1.2. - Une courbe dans \mathbb{R}^2 est une frontière étoilée de classe $C^{\ell+\alpha}$ si elle est la frontière d'un ouvert étoilé de classe $C^{\ell+\alpha}$.

Proposition 1.1. - Soit Ω un ouvert étoilé de \mathbb{R}^2 de classe $C^{\ell+\alpha}$ et B un disque ouvert le contenant; alors il existe un opérateur de prolongement linéaire continu de $C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega})$ dans $C^{\ell+\alpha}(\mathbb{R}^2)$; la proposition est vraie aussi pour le complémentaire de Ω .

(1) Pour un domaine fermé borné E de \mathbb{R}^N , pour $\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0, 1[$, $C^{\ell+\alpha}(E)$ désignera l'ensemble des fonctions dont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à ℓ sont continues et bornées et dont la dérivée ℓ -ième est Höldérienne de coefficient α ; $C^{\ell+\alpha}(E)$ sera muni de la norme

$$\|f\|_{C^{\ell+\alpha}(E)} = \max_{\substack{|\beta| \leq \ell \\ x \in E}} |D^\beta f(x)| + \sup_{\substack{x, y \in E \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^\alpha} \right|.$$

Démonstration - Pour le demi-espace : le prolongement par réflexions classique (cf. par exemple J.L. LIONS [1] p. 45) convient trivialement pour $\alpha = 0$; pour $\alpha > 0$, on remarque que (en notant \mathfrak{P} l'opérateur de prolongement par réflexions) :

$$\frac{|D^\ell u(x) - D^\ell \mathfrak{P}u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{|D^\ell u(x) - D^\ell u(z)|}{|x - z|^\alpha} + \frac{|D^\ell \mathfrak{P}u(z) - D^\ell \mathfrak{P}u(y)|}{|z - y|^\alpha}$$

dès que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x, y, z \text{ différents deux à deux} \\ z \in \partial\Omega \\ \text{Max} (|x - z|, |y - z|) < |x - y|. \end{array} \right.$$

Pour le cas général : nous nous ramenons au demi-espace par cartes locales en utilisant le lemme suivant (classique et trivial).

Lemme 1.1. - Supposons que $\ell \geq 1$; Soit B une boule de \mathbb{R}^2 et T une fonction vectorielle vérifiant

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} T \in [C^{\ell+\alpha}(\bar{B})]^2 \\ T \text{ est une bijection de } \bar{B} \text{ dans } \bar{B} \text{ et} \\ T^{-1} \in [C^{\ell+\alpha}(\bar{B})]^2 \end{array} \right.$$

alors $\varphi \mapsto \varphi \circ T$ est un automorphisme de $C^{\ell+\alpha}(\bar{B})$. ■

Définition 1.3. - Les fonctions T vérifiant (1.2) seront appelées simplement difféomorphismes de classe $C^{\ell+\alpha}$.

1.1.2. Existence de difféomorphismes

Notation :

Nous noterons désormais Ω_γ un ouvert étoilé de classe $C^{\ell+\alpha}$ admettant γ comme repérage au sens de (1.1). Nous confondrons par la suite la frontière $\partial\Omega_\gamma$ et son repérage γ .

Proposition 1.2. - A tout couple $(\Omega_\gamma, \Omega_{\gamma^*})$ d'ouverts étoilés de classe $C^{\ell+\alpha}$ on sait faire correspondre un difféomorphisme $T(\gamma, \gamma^*)$ de classe $C^{\ell+\alpha}$ tel que

$$T(\gamma, \gamma^*) (\Omega_\gamma) = \Omega_{\gamma^*}$$

et tel que T et T^{-1} dépendent analytiquement de γ et γ^* pour les normes suivantes

$$C^{\ell+\alpha}(\mathbb{T}) \times C^{\ell+\alpha}(\mathbb{T}) \rightarrow [C^{\ell+\alpha}(\bar{B})]^2$$

pour toute boule fermée \bar{B} de \mathbb{R}^2 .

Démonstration - Posons (en coordonnées polaires)

$$(1.3) \quad T(\gamma, \gamma^*) (r, \theta) = (r [1 - \varphi(r) + \varphi(r) \frac{\gamma^*(\theta)}{\gamma(\theta)}], \theta)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad , \quad \varphi(x) \geq 0 \\ \varphi(x) = 0 \quad \forall x < \varepsilon \quad ; \quad \varphi(x) = 1 \quad \forall x > 2\varepsilon \\ \varphi'(x) > 0, \quad \forall x \quad \varepsilon < x < 2\varepsilon \end{array} \right.$$

d'où la régularité de T ; celle de T^{-1} provient de

$$T^{-1}(\gamma, \gamma^*) = T(\gamma^*, \gamma). \quad \blacksquare$$

On démontrerait de manière analogue la proposition suivante :

Proposition 1.3. - Considérons n ouverts Ω_{γ_i} (resp. $\Omega_{\gamma_i^*}$) étoilés de classe $C^{\ell+\alpha}$ emboîtés de la manière suivante (voir Fig. 2)

$$\gamma_i > \gamma_{i-1} \quad (\text{resp. } \gamma_i^* > \gamma_{i-1}^*)$$

alors on sait faire correspondre un difféomorphisme $T(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*)$

tel que $T(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*) (\Omega_{\gamma_i}) = \Omega_{\gamma_i^*}$

et qui dépend analytiquement de $(\gamma_1, \dots, \gamma_n^*)$ pour les normes

$$[C^{\ell+\alpha}(\mathbb{T})]^{2n} \rightarrow [C^{\ell+\alpha}(\bar{B})]^2$$

pour toute boule fermée \bar{B} de \mathbb{R}^2 . \blacksquare

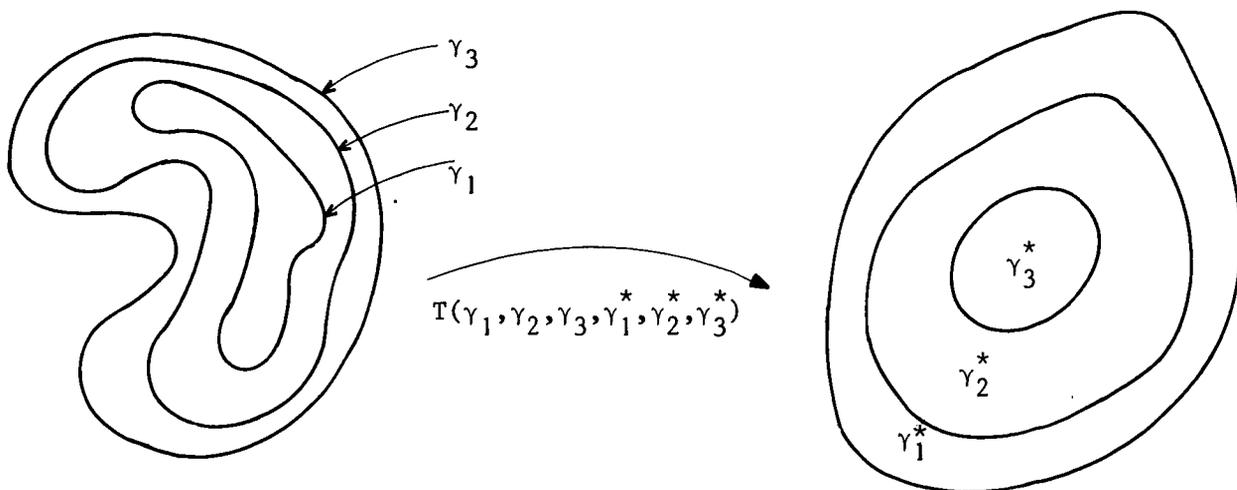


Fig. 2

1.1.3. Dérivabilité du problème de Dirichlet transporté (variations intérieures)

Soit f une fonction de $C^{\ell+\alpha}(\mathbb{R}^2)$; à tout élément γ partout strictement positif de $C^{\ell+\alpha}(\mathbb{T})$ nous savons faire correspondre un domaine Ω_γ défini par (1.1) et la solution $z_D(\gamma)$ du problème de Dirichlet pour l'opérateur de Laplace dans le domaine Ω_γ :

$$(1.4) \quad \begin{cases} \Delta z_D(\gamma) = f & \text{dans } \Omega_\gamma \\ z_D(\gamma) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\gamma \equiv \gamma. \end{cases}$$

Nous nous proposons d'étudier la dérivabilité de $z_D(\gamma)$ par rapport à γ . Si - grâce au repérage - la frontière γ est dans un espace de Banach fixe, par contre $z_D(\gamma)$ est a priori dans l'espace $C^{\ell+\alpha}(\Omega_\gamma)$ qui dépend de γ ! On conçoit donc qu'il y a des difficultés à traiter ce problème tel quel, et nous allons étudier d'abord la dérivabilité de la fonction transportée en espace fixe $\tilde{z}_D(\gamma)$ définie par

$$(1.5) \quad \tilde{z}_D(\gamma) = z_D(\gamma) \circ T(\gamma_0, \gamma)$$

où T est défini comme dans la proposition 1.2 (Fig. 3), et où γ_0 est une frontière fixée - en général la frontière au voisinage de laquelle nous étudierons la dérivabilité.

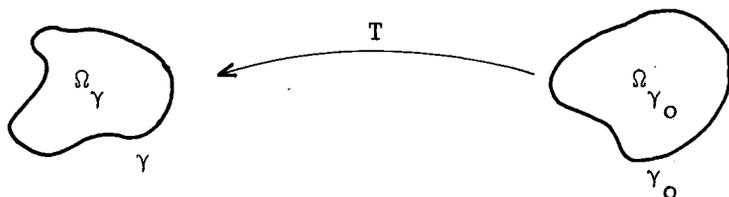


Fig. 3

Proposition 1.4. (Dérivabilité) - Supposons que f soit une fonction de $C^{\ell-2+k+\alpha}(\mathbb{R}^2)$ (k entier ≥ 1); alors au voisinage de tout élément γ_0 de $C^{\ell+\alpha}(\mathbb{T})$ partout strictement positif, l'application

$$\gamma \mapsto \tilde{z}_D(\gamma) \quad \text{défini par (1.5)}$$

est de classe C^k pour les normes

$$C^{\ell+\alpha}(\mathbb{T}) \rightarrow C^{\ell+\alpha}(\Omega_{\gamma_0}).$$

Démonstration - La fonction $\tilde{z}_D(\gamma)$ vérifie une équation transportée de l'équation (1.4) dont $z_D(\gamma)$ est solution et qui s'écrit (en posant $T = T(\gamma_0, \gamma)$)

$$(1.6) \quad \begin{cases} \text{div} [|\det DT| \cdot DT^{-1} \cdot DT^{-1*} \cdot \text{grad } \tilde{z}_D(\gamma)] = |\det DT| \cdot f \circ T & \text{dans } \Omega_{\gamma_0} \\ \tilde{z}_D(\gamma) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{\gamma_0}. \end{cases}$$

Dans ce système les coefficients (toutes dérivations effectuées) dépendent de manière C^∞ de γ pour les normes $C^{\ell+\alpha}(\mathbb{T}) \rightarrow C^{\ell-2+\alpha}(\overline{\Omega_{\gamma_0}})$ à travers $T(\gamma_0, \gamma)$ et $T^{-1}(\gamma_0, \gamma)$ lorsque γ varie dans un voisinage de γ_0 (Proposition 1.2).

Considérons le second membre : si f est un élément de $C^{\ell-2+k+\alpha}(\mathbb{R}^2)$, alors l'application $\gamma \mapsto f \circ T(\gamma_0, \gamma)$ est de classe C^k pour les normes

$C^{\ell+\alpha}(\mathbb{T}) \rightarrow C^{\ell-2+\alpha}(\Omega_{\gamma_0})$: c'est une propriété de dérivabilité de l'application $(T, f) \rightarrow f \circ T$ qui fait l'objet du lemme suivant démontré en Annexe 2.

Lemme 1.2. - Soit T_0 un difféomorphisme de classe $C^{\ell+\alpha}$ et φ_0 une fonction de $C^{\ell+k+\alpha}(\mathbb{R}^2)$; pour couple de boules B, B_1 de \mathbb{R}^2 il existe une boule B_2 de \mathbb{R}^2 et un voisinage \mathcal{W} de (T_0, φ_0) dans $[C^{\ell+\alpha}(\bar{B}_2)]^2 \times C^{\ell+k+\alpha}(\bar{B})$ tels que l'application

$$(1.7) \quad (T, \varphi) \mapsto \varphi \circ T$$

est de classe C^k dans \mathcal{W} pour les normes suivantes

$$[C^{\ell+\alpha}(\bar{B}_2)]^2 \times C^{\ell+k+\alpha}(\bar{B}) \rightarrow C^{\ell+\alpha}(\bar{B}_1) \quad \blacksquare$$

Nous savons d'autre part (c'est une conséquence des estimations de SCHAUDER, cf. AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [1]) que le système (1.6) définit un isomorphisme de $C^{\ell+\alpha}(\Omega_{\gamma_0})$ dans $C^{\ell-2+\alpha}(\Omega_{\gamma_0}) \times C^{\ell+\alpha}(\partial\Omega_{\gamma_0})$. Nous pouvons donc appliquer le théorème des fonctions implicites classique (cf. par exemple J. DIEUDONNE [1] p. 275) et en déduire la conclusion de la proposition. \blacksquare

Remarque 1.1. - Il est évident que le résultat de la Proposition 1.4. est optimal du point de vue des indices des espaces.

Remarque 1.2. -

(i) On obtient facilement un résultat analogue pour le cas d'un opérateur à coefficients variables : il suffit que les coefficients soient dans $C^{\ell-2+k+\alpha}(\mathbb{R}^2)$ pour avoir une conclusion identique (utilisation du Lemme 1.2).

(ii) On montre de manière identique la dérivabilité de

$$(f, \gamma) \mapsto \tilde{z}_D(\gamma)$$

qui est de classe C^k pour les normes

$$C^{\ell-2+k+\alpha}(\bar{B}) \times C^{\ell+\alpha}(\mathbb{T}) \rightarrow C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}_{\gamma_0})$$

(B boule de \mathbb{R}^2 assez grande).

Remarque 1.3. - (Différentiabilité par rapport au difféomorphisme)

Intéressons-nous à la régularité de l'application

$$T \mapsto \tilde{z}_D(T) \text{ solution de (1.6);}$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites à l'application

$$(T_1, T_2) \mapsto T_1 \circ T_2 - I_d$$

(utilisation du Lemme 1.2), on montre que l'application

$$T \rightarrow T^{-1}$$

est de classe C^1 au voisinage de T_0 pour les normes

$$[C^{\ell+1+\alpha}(\bar{B}_2)]^2 \rightarrow [C^{\ell+\alpha}(\bar{B}_1)]^2 .$$

Nous en déduisons, par un raisonnement analogue à la démonstration de la proposition précédente, la dérivabilité de l'application :

$$T \mapsto \tilde{z}_D(T)$$

qui est C^1 au voisinage de T_0 pour les normes

$$[C^{\ell+1+\alpha}(\bar{B}_2)]^2 \rightarrow C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}_{\gamma_0}) . \quad (1) \quad \blacksquare$$

Nous ne donnons pas ici l'expression de la dérivée de $\tilde{z}_D(\gamma)$ pour les deux raisons suivantes : cette expression est compliquée (voir B. PALMERIO, A. DERVIEUX [2]) et d'autre part nous ne nous en servons pas ! En fait, cette dérivabilité démontrée, nous allons en déduire celle de $z_D(\gamma)$ en un certain sens et ne plus nous servir de $\tilde{z}_D(\gamma)$.

1.1.4. Dérivabilité du problème de Dirichlet initial

Proposition 1.5. - Plaçons-nous sous les hypothèses de la Proposition 1.4 mais avec de plus

$$\ell \geq k$$

alors pour tout élément γ_0 de $C^{\ell+\alpha}(\mathbb{T})$, partout strictement positif, il existe un prolongement $\bar{z}_D(\gamma)$ dans \mathbb{R}^2 de $z_D(\gamma)$ vérifiant

- (i) $\bar{z}_D(\gamma)|_{\Omega_\gamma} \equiv z_D(\gamma)$
- ii) pour toute boule B de \mathbb{R}^2

$$\gamma \mapsto \bar{z}_D(\gamma)$$

est de classe C^k au voisinage de γ_0 pour les normes

$$C^{\ell+\alpha}(\mathbb{T}) \rightarrow C^{\ell-k+\alpha}(\bar{B}) .$$

Démonstration - La Proposition 1.1. appliquée dans Ω_{γ_0} nous garantit l'existence d'un prolongement $\mathfrak{P}\tilde{z}_D(\gamma)$ dans \mathbb{R}^2 de $\tilde{z}_D(\gamma)$, de classe C^k par rapport à γ pour les normes

$$C^{\ell+\alpha}(\mathbb{T}) \rightarrow C^{\ell+\alpha}(\bar{B}) ;$$

posons

$$(1.8) \quad \bar{z}_D(\gamma) = [\mathfrak{P}\tilde{z}_D(\gamma) \circ T(\gamma, \gamma_0)]$$

(1) Ce résultat n'est pas optimal du point de vue suivant : $\tilde{z}_D(T) \in C^{\ell+1+\alpha}(\bar{\Omega}_{\gamma_0})$.

Voir F. MURAT-J. SIMON [3] pour une métrique faisant intervenir T et T^{-1} .

(comparer avec (1.5)); une nouvelle utilisation du Lemme 1.2 conduit à la conclusion de la Proposition 1.5. \blacksquare

Remarque 1.4. - Nous verrons dans le Paragraphe 1.1.5. (Remarque 1.6) que ce résultat est lui aussi optimal (cf. Remarque 1.1).

Remarque 1.5. - On complète la Remarque 1.3 : on montrerait de la même façon que l'application :

$$T \rightarrow \bar{z}_D(T) = [\mathcal{P} \tilde{z}_D(T)] \circ T^{-1}$$

est de classe C^1 pour les normes

$$[C^{\ell+1+\alpha}(\bar{B}_2)]^2 \mapsto C^{\ell-1+\alpha}(\bar{B}).$$

1.1.5. Formule de Hadamard

Proposition 1.6. - Plaçons-nous sous les hypothèses des Propositions 1.4 et 1.5; soient $\delta\gamma$ un accroissement de la frontière et Z la restriction à Ω_γ de la différentielle

$$\frac{d\bar{z}_D}{d\gamma} \cdot \delta\gamma ; \text{ alors } Z \text{ vérifie}$$

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta Z = 0 \text{ dans } \Omega_\gamma \\ Z = - \frac{\partial z_D(\gamma)}{\partial r} \cdot \delta\gamma \text{ sur } \partial\Omega_\gamma \end{array} \right.$$

Démonstration - Nous utilisons la Proposition 1.5 qui nous permet de dériver par rapport à γ l'égalité suivante

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \\ \int_{\Omega_\gamma} [\Delta \bar{z}_D(\gamma) - f] \varphi_1 \, dx + \int_\gamma \bar{z}_D(\gamma) \varphi_2 \, d\sigma = 0. \end{array} \right.$$

Tous calculs faits (soit directement, soit en appliquant les formules des lemmes de mécanique énoncés en Annexe 1 en prenant $V = r =$ vecteur radial unitaire) on obtient :

$$(1.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \\ \int_{\Omega_\gamma} \varphi_1 \Delta \left(\frac{d\bar{z}_D}{d\gamma}(\gamma) \cdot \delta\gamma \right) \, dx + \int_\gamma \varphi_2 \frac{d\bar{z}_D}{d\gamma}(\gamma) \cdot \delta\gamma \, d\sigma \\ = \int_\gamma \varphi_2 \frac{\partial z_D(\gamma)}{\partial r} \delta\gamma \, d\sigma \end{array} \right.$$

d'où (1.9). \blacksquare

Remarque 1.6. - Le système (1.9) prouve que la Proposition 1.5 est un résultat optimal (la dérivée de z_D par rapport à γ a la régularité du gradient de z_D).

1.2. REPERAGE D'UN DOMAINE SIMPLEMENT CONNEXE DU PLAN

1.2.1. Définition - Réduction à un contexte étoilé

Nous pouvons affaiblir l'hypothèse d'étoilement de l'ouvert Ω en la remplaçant par la suivante :

(1.12) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Hypothèse sur le domaine } \Omega : \text{ Nous supposons que } \Omega \text{ est borné locale-} \\ \text{ment, d'un seul côté de sa frontière } \partial\Omega, \text{ laquelle est une variété} \\ \text{de classe } C^{\ell+\alpha} \text{ de dimension 1; nous supposons aussi qu'il existe} \\ \text{un difféomorphisme } \Xi \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \text{ de classe } C^\infty \text{ tel que } \Xi(\Omega) \text{ est} \\ \text{étoilé}^{(1)} \end{array} \right.$

Définition 1.4. - Nous dirons que Ω est simplement connexe de classe $C^{\ell+\alpha}$ si l'hypothèse (1.12) est vérifiée.

Méthode : Par transport dans $\Xi(\Omega)$ nous nous retrouvons dans le contexte précédent - avec des coefficients variables mais de classe C^∞ ; nous appliquons la Remarque 1.2. et tous les résultats précédents sont encore valables. Grâce au contexte étoilé nous savons construire une famille de difféomorphismes $T_1(\gamma)$ dépendant de manière C^∞ du paramétrage γ (défini dans le contexte étoilé) qui permettent de faire varier l'ouvert Ω ; il est possible alors d'utiliser les lemmes de mécanique (Annexe 1) pour dériver la fonction z_D par rapport à ces difféomorphismes dans le contexte initial (non étoilé). Cependant, il est plus intéressant de définir les variations de $\partial\Omega$ directement dans le contexte non étoilé initial : c'est le but du Paragraphe 1.2.2.

1.2.2. Définition d'un repérage dans la géométrie initiale

Nous nous proposons d'étendre le repérage du Paragraphe 1.1. en définissant des perturbations du domaine au voisinage de sa frontière. Un tel repérage ne sera plus global mais seulement défini localement c'est-à-dire pour des domaines assez proches d'un domaine Ω fixé à l'avance. Nous avons d'abord besoin du résultat suivant :

Proposition 1.7. - Si Ω est un ouvert simplement connexe de classe $C^{\ell+\alpha}$ ($\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 2$, $\alpha \in]0,1[$), alors il existe un ouvert Ω_∞ et un champ de vecteur V défini sur $\partial\Omega_\infty$ tels que

(1.13) (i) $V \in [C^\infty(\partial\Omega_\infty)]^2$
 (ii) $\forall X \in \partial\Omega_\infty$, $V(X)$ n'est pas tangent à $\partial\Omega_\infty$, c'est-à-dire en notant $n_\infty(X)$ le vecteur normal à $\partial\Omega_\infty$ en X , unitaire et dirigé vers l'extérieur de Ω_∞

(1.14) $\langle V(X), n_\infty(X) \rangle \neq 0$

(iii) $\exists \epsilon$ tel que $\forall t \in]-\epsilon, \epsilon[$, $\forall X_1, X_2 \in \partial\Omega_\infty$, $X_1 \neq X_2$ on a

(1) Il en résulte que Ω est simplement connexe.

$$(1.15) \quad X_1 + t_1 V(X_1) \neq X_2 + t_2 V(X_2)$$

(iv) Il existe un élément γ_0 de $C^{\ell+\alpha}(\partial\Omega_\infty)$ unique vérifiant

$$(1.16) \quad |\gamma_0|_{L^\infty(\partial\Omega_\infty)} < \varepsilon$$

tel que $\partial\Omega$ se paramètre ainsi

$$(1.17) \quad \partial\Omega = \{X = X_\infty + \gamma_0(X_\infty) V(X_\infty) \text{ avec } X_\infty \in \partial\Omega_\infty\}$$

(v) V n'est jamais tangent à $\partial\Omega$, c'est-à-dire que si nous notons $n(X)$ le vecteur normal à $\partial\Omega$ en X unitaire et dirigé vers l'extérieur de Ω , on a pour tout point X_∞ de $\partial\Omega_\infty$

$$(1.18) \quad \langle V(X_\infty), n[X_\infty + \gamma_0(X_\infty) V(X_\infty)] \rangle \neq 0.$$

□

Idée de la démonstration. Considérons un ouvert Ω_∞ de classe C^∞ suffisamment proche de Ω pour la topologie de la convergence dans $C^{\ell+\alpha}$ des fonctions dont les frontières $\partial\Omega$ et $\partial\Omega_\infty$ sont localement graphes⁽¹⁾. Soit n_∞ le champ de vecteur défini sur $\partial\Omega_\infty$, normal à cette frontière, unitaire et dirigé vers l'extérieur de Ω_∞ (supposé borné); alors n_∞ et Ω_∞ vérifient les conclusions de la proposition.

▣

Sous les conditions de la proposition précédente nous pouvons introduire le repérage suivant : pour tout élément γ assez petit de $C^{\ell+\alpha}(\partial\Omega_\infty)$, la frontière perturbée aura pour expression

$$(1.19) \quad \partial\Omega_\gamma = \{X = X_\infty + (\gamma_0 + \gamma)(X_\infty) V(X_\infty); X_\infty \in \partial\Omega_\infty\}$$

Remarque 1.7. - C'est $\partial\Omega_\infty$ qui constitue ici le support du repérage, bien que le voisinage considéré soit un voisinage de $\partial\Omega_{\gamma_0}$.

▣

Ce repérage est en fait équivalent à celui décrit en 1.2.1, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.8. - Soit $(\Omega, \Omega_\infty, V)$ un triplet conforme à la Proposition 1.7, alors il existe un difféomorphisme Ξ de classe C^∞ et un voisinage \mathcal{U} de $\partial\Omega_\infty$ tels que

$$(i) \quad \mathcal{U} = \{X = X_\infty + t V(X_\infty); X_\infty \in \partial\Omega_\infty, t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\} \quad \varepsilon > 0$$

$$(ii) \quad \partial\Omega \subset \mathcal{U} \text{ et } \Xi(\Omega), \Xi(\Omega_\infty) \text{ sont étoilés,}$$

$$(iii) \quad \forall X_\infty \in \partial\Omega_\infty, \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[,$$

$$\Xi(X_\infty + t V(X_\infty)) = \Xi(X_\infty) + t \vec{r}$$

où \vec{r} est le vecteur radial unitaire issu de $\Xi(X_\infty)$.

(1) Au sens de J. NECAS [1].

Démonstration - D'après la Remarque 1.7, l'ouvert Ω_∞ est difféomorphe (C^∞) à un ouvert étoilé et donc (vu sa régularité - voir la Proposition 1.2) difféomorphe (C^∞) du disque unité D de \mathbb{R}^2 ; Soit Ξ_0 un difféomorphisme de classe C^∞ tel que

$$\Xi_0(\Omega_\infty) = D.$$

Le paramétrage canonique de ∂D sur $[0, 2\pi]$ induit un paramétrage sur $\partial\Omega_\infty$ via Ξ_0

$$\partial\Omega_\infty = \{X_\infty = \Xi_0^{-1}(\cos \theta, \sin \theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Dans une première étape, on construit le difféomorphisme Ξ entre les couronnes

$$\Delta_1 = \{X_\infty + t V(X_\infty) ; X_\infty \in \partial\Omega_\infty, t \in]-\epsilon, \epsilon[\},$$

$$\Delta_2 = \{\Xi_0(X_\infty) + t \vec{r} ; X_\infty \in \partial\Omega_\infty, t \in]-\epsilon, \epsilon[\}.$$

Pour cela on pose :

$$\begin{aligned} \Xi^{-1}((1+t) \cos \theta, (1+t) \sin \theta) &= \Xi_0^{-1}(\cos \theta, \sin \theta) \\ &\quad + t V[\Xi_0^{-1}(\cos \theta, \sin \theta)] \end{aligned}$$

alors Ξ est un difféomorphisme de classe C^∞ entre Δ_1 et Δ_2 .

Dans la seconde étape, on prolonge Ξ à l'extérieur de la couronne Δ_1 ; cela est facilité par le fait que nous pouvons nous ramener à deux contextes étoilés via le difféomorphisme Ξ_0 .

Raisonnons donc entre deux contextes étoilés : les couronnes Δ_1 et Δ_2 sont limitées par des frontières étoilées (Définition 1.2) que nous notons γ_1^{int} , γ_1^{ext} , γ_2^{int} , γ_2^{ext} (cf. Fig. 3); N_i est la composante connexe non bornée du complémentaire de Δ_i , B_i est la composante connexe bornée.

Voyons par exemple comment on prolonge Ξ dans B_1 : nous savons (Proposition 1.2) construire un difféomorphisme de classe C^∞ entre B_1 et B_2 ; il faut ensuite s'assurer de la continuité de la bijection obtenue en recollant convenablement au niveau de γ_1^{int} ; à cet effet on se ramène facilement (par transport) au cas où γ_1^{int} est un cercle; puis nous utilisons un difféomorphisme du type suivant (en coordonnées polaires)

$$\Xi_2 : (r, \theta) \mapsto (r, \theta \varphi(r) + [1 - \varphi(r)] \alpha(\theta))$$

où φ est une fonction régulière telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(r) = 0 \text{ dans un voisinage } r_1 - \epsilon < r < r_1 + \epsilon \text{ où } r_1 \text{ est le rayon} \\ \text{de } \gamma_1^{\text{int}}, \\ \varphi(r) = 1 \text{ pour } r < r_1 - \epsilon', r > r_1 + \epsilon' \text{ avec } \epsilon' > \epsilon \\ \varphi'(r) \leq 0 \text{ si } r \leq r_1 \\ \varphi'(r) \geq 0 \text{ si } r \geq r_1 \end{array} \right.$$

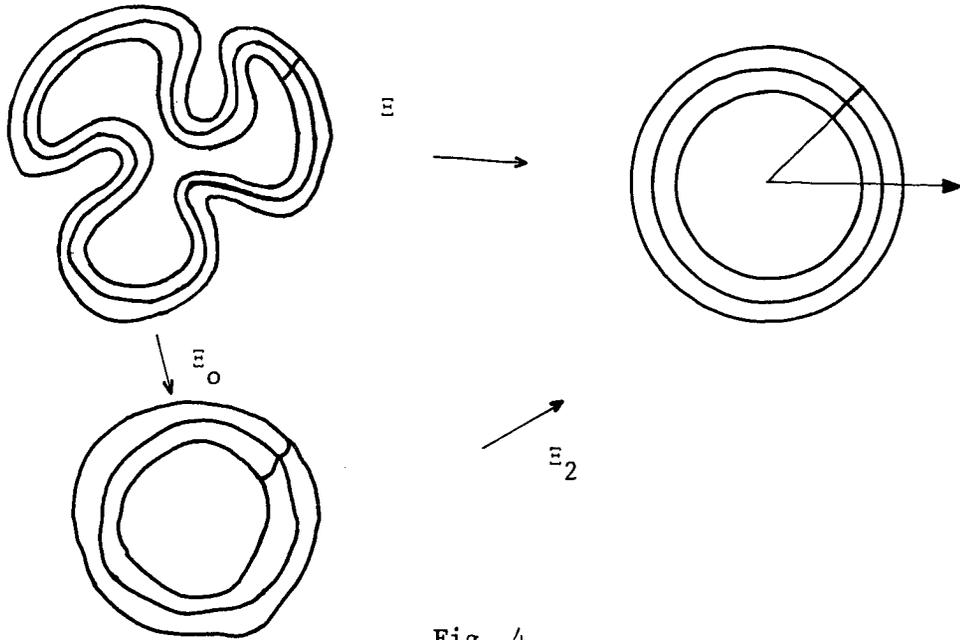


Fig. 4

et où $\theta \rightarrow \alpha(\theta)$ est la "déformation en θ " nécessaire au recollement.

Le difféomorphisme obtenu est de classe $W^{1,\infty}$ (i.e. Lipschitzien) ainsi que son inverse et C^∞ sauf dans un petit voisinage des frontières γ_1 ; il suffit donc de le régulariser en ce voisinage pour obtenir un difféomorphisme vérifiant les conditions de la Proposition 1.8. ■

Conséquences - Si nous utilisons le difféomorphisme E défini dans la proposition précédente pour transporter le domaine Ω dans un domaine étoilé, alors l'accroissement en repérage polaire est identique à l'accroissement pour le repérage défini en (1.19).

En particulier, si nous considérons, pour γ assez petit, les ouverts bornés Ω_γ de frontières $\partial\Omega_\gamma$ définies par (1.19), alors il existe des difféomorphismes T_γ tels que $T_\gamma(\Omega_\gamma) = \Omega_{\gamma_0}$ et qui dépendent de manière C^∞ de γ pour les normes

$$C^{\ell+\alpha}(\partial\Omega_\infty) \rightarrow [C^{\ell+\alpha}(\bar{B})]^2$$

(B est une boule de \mathbb{R}^2)

ce qui permet d'utiliser pour le calcul des gradients les lemmes de mécanique de l'annexe 1; nous en déduisons l'analogue de la Proposition 1.6 :

Proposition 1.9. - Soit Ω_∞ un ouvert simplement connexe de classe C^∞ ; à tout élément γ de $C^{\ell+\alpha}(\partial\Omega_\infty)$ on fait correspondre l'ouvert Ω_γ borné de frontière

$$\partial\Omega_\gamma = \{X = X_\infty + \gamma(X_\infty) V(X_\infty), X_\infty \in \partial\Omega_\infty\}$$

Soit f un élément de $C^{\ell-2+k+\alpha}(\mathbb{R}^2)$ avec $k \geq 1$; on note $z_D(\gamma)$ la solution du problème de Dirichlet dans Ω_γ avec f pour deuxième membre; alors

- (i) il existe un difféomorphisme T_γ de classe $C^{\ell+\alpha}$ envoyant Ω_∞ dans Ω_γ et un transporté $\tilde{z}_D(\gamma) = z_D(\gamma) \circ T_\gamma$ tel que \tilde{z}_D est de classe C^k par rapport à γ pour les normes :

$$C^{\ell+\alpha}(\partial\Omega_\infty) \rightarrow C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}_\infty)$$

- (ii) pour $\ell - k \geq 0$, il existe un prolongement $\bar{z}_D(\gamma)$ de $z_D(\gamma)$ tel que \bar{z}_D est de classe C^k par rapport à γ pour les normes

$$C^{\ell+\alpha}(\partial\Omega_\infty) \rightarrow C^{\ell-k+\alpha}(\mathbb{R}^2)$$

et la dérivée de \bar{z}_D est une solution du système

$$(1.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \left(\frac{\partial \bar{z}_D}{\partial \gamma}(\gamma) \cdot \delta \gamma \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\gamma \\ \left(\frac{\partial \bar{z}_D}{\partial \gamma}(\gamma) \cdot \delta \gamma \right) = \langle \text{grad } z_D(\gamma), \nu \rangle \delta \gamma \quad \text{sur } \partial\Omega_\gamma. \end{array} \right.$$

1.3. UN CONTEXTE PLUS GENERAL

Donnons-nous deux domaines bornés réguliers \mathcal{O} et Ω , $\bar{\Omega} \subset \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$.

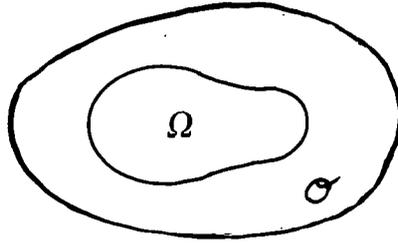


Fig. 6

Nous repérerons le domaine variable au voisinage et à partir du domaine Ω supposé fixé et de classe $C^{\ell+\alpha}$: pour cela on se donne sur $\partial\Omega$ un champ de vecteurs V

$$V : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$$

unitaire ($\|V(x)\| = 1 \quad \forall x \in \partial\Omega$) et "transverse" au sens suivant ⁽¹⁾.

$$(1.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un réel } \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que pour tout } x \in \partial\Omega, \\ \langle V, n \rangle > \varepsilon_0 \end{array} \right.$$

où n est le vecteur normal à $\partial\Omega$, unitaire et dirigé vers l'extérieur de Ω .

Le champ de vecteur V est supposé lui aussi de classe $C^{\ell+\alpha}$.

Remarque 1.8. - Pour un ouvert Ω de classe $C^{\ell+\alpha}$ seulement, le choix $V \equiv n$ semble donner a priori un champ de vecteur de classe $C^{\ell-1+\alpha}$ seulement. \blacksquare

Lemme 1.3. Il existe un réel ε_1 strictement positif tel que pour tout couple
(x, y) de points de $\partial\Omega$ tel que $x \neq y$, les segments

$$x + \theta \varepsilon_1 V(x) \quad \theta \in [-1, +1]$$

$$x + \theta \varepsilon_1 V(y) \quad \theta \in [-1, +1]$$

sont disjoints.

Nous remarquerons simplement que si un tel ε_1 n'existe pas, cela entraîne que la courbure des courbes intersections avec un plan orthogonal n_2 est pas bornée, ce qui contredit le fait que $\partial\Omega$ est une variété globalement C^2 .

\blacksquare

(1) La plupart des auteurs choisissent $V = n$ (vecteur normal); pour des précisions sur ce cas voir par exemple C. GUILLOPE [1] (p. 30 et seq.)

Posons :

$$(1.22) \quad G_{ad} = \left\{ \gamma \in C^{\ell+\alpha}(\partial\Omega), |\gamma| < \frac{\varepsilon_1}{2} \right\};$$

pour tout élément γ de G_{ad} , la frontière correspondante est définie par

$$(1.23) \quad \partial\Omega_\gamma = \{x + \gamma(x) V(x), x \in \partial\Omega\}$$

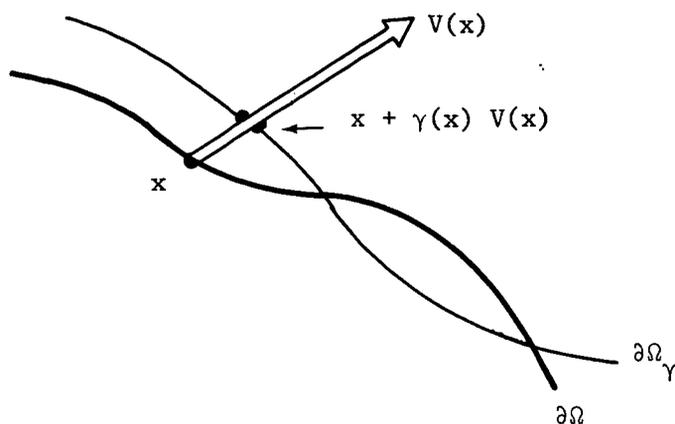


Fig. 7

La courbe $\partial\Omega_\gamma$ est de classe $C^{\ell+\alpha}$: nous allons construire un difféomorphisme T_γ de D dans D qui transformera $\partial\Omega$ en $\partial\Omega_\gamma$ et qui sera de classe $C^{\ell+\alpha}$ ainsi que son inverse :

Proposition 1.10. - A tout élément γ de G_{ad} on peut faire correspondre un difféomorphisme T_γ , appartenant à $[C^{\ell+\alpha}(\bar{D})]^N$ ainsi que son inverse, vérifiant $T_\gamma(\partial\Omega) = \partial\Omega_\gamma$, de telle sorte que l'application

$$(1.24) \quad \gamma \mapsto (T_\gamma, T_\gamma^{-1})$$

soit analytique de G_{ad} dans $[C^{\ell+\alpha}(\bar{D})]^{2N}$.

Démonstration : Soit φ une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant

$$(1.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \text{ supp } \varphi \subset]-1, +1[\\ |\varphi'|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 2 \quad \varphi(0) = 1. \end{array} \right.$$

On construit d'abord T_γ et T_γ^{-1} dans la "bande"

$$B_1 = \{x + \theta \varepsilon_1 V(x), \theta \in]-1, +1[\}$$

où θ est défini comme dans le Lemme 1.3; pour tout point $y = x + \theta \varepsilon_1 V(x)$ de B_1 on pose

$$(1.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_\gamma(y) = x + \left[\theta + \frac{1}{\varepsilon_1} \gamma(x) \varphi(\theta) \right] \varepsilon_1 V(x) \\ T_\gamma^{-1}(y) = x + \left[\theta - \frac{1}{\varepsilon_1} \gamma(x) \varphi(\theta) \right] \varepsilon_1 V(x). \end{array} \right.$$

Par construction, T_γ et T_γ^{-1} sont des bijections réciproques l'une de l'autre de B_1 dans B_1 : en effet, pour x fixé, et pour tout réel θ dans $[-1, +1]$, on a

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\theta \pm \frac{1}{\varepsilon_1} \gamma(x) \varphi(\theta) \right) \right| > 0$$

car

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \gamma(x) \varphi(\theta) \right) \right| \leq \text{Max}_{\partial \Omega} |\gamma(x)| \frac{1}{\varepsilon_1} |\varphi'| \quad L^\infty(\mathbb{R})$$

$$\leq \frac{\varepsilon_1}{2} \times \frac{1}{\varepsilon_1} \times 2 < 1$$

et donc

$$\theta \rightarrow \left(\theta \pm \frac{\gamma(x)}{\varepsilon_1} \varphi(\theta) \right)$$

est une bijection de $[-1, +1]$ dans $[-1, +1]$.

Compte tenu du lemme 1, nous en déduisons que T_γ et T_γ^{-1} sont des bijections de B_1 dans B_1 .

Pour montrer que T_γ (et T_γ^{-1}) est de classe $C^{\ell+\alpha}$, il suffit de voir que $y = x + \theta \varepsilon_1 V(x) \rightarrow (x, \theta)$ est un difféomorphisme de classe $C^{\ell+\alpha}$; on prouve cette dernière assertion en appliquant le théorème des fonctions implicites à l'application

$$E : (y, x, \theta) \mapsto y - x - \theta \varepsilon_1 V(x) \quad (1).$$

Enfin, si nous posons

$$(1.27) \quad \forall y \in \mathcal{O} \setminus \bar{B}_1, T_\gamma(y) = T_\gamma^{-1}(y) = y,$$

alors T_γ et T_γ^{-1} sont des bijections de classe $C^{\ell+\alpha}$ de \mathcal{O} dans \mathcal{O} .

L'analyticité des applications $\gamma \mapsto T_\gamma$ et $\gamma \mapsto T_\gamma^{-1}$ découle trivialement des formules (1.26) et (1.27).

▣

Conséquences : On tire de la proposition précédente des résultats analogues à ceux des Propositions 1.6 et 1.9.

▣

Remarque 1.9 - On notera enfin que chacun des repérages introduits met le domaine repéré en relation biunivoque avec la fonction qui le représente (ce qui n'est pas le cas lorsque plusieurs difféomorphismes sont susceptibles de représenter un même domaine). Ceci nous permettra par la suite, lorsque le domaine est inconnu de remplacer sa recherche par celle de la fonction correspondante.

▣

(1) F. MURAT, communication personnelle; par cette méthode on démontre en même temps le Lemme 1.3.

2. SUR LA PERTURBATION DE LA FORME D'EQUILIBRE
D'UN PLASMA CONFINE

2.1. FORMULATION DU PROBLEME

Les données sont les suivantes :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^N \text{ de classe } C^{\ell+\alpha} \text{ (} \ell \in \mathbb{N}, \ell \geq 4, \alpha \in]0,1[) \\ \lambda, I \text{ sont des réels strictement positifs } \underline{\text{donnés}} \end{array} \right.$$

Nous nous intéressons au problème non linéaire suivant introduit par R. TEMAM [1,2]:

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u^* = -\lambda(u^*)^- \text{ dans } \mathcal{O} \\ u^*|_{\Gamma} = c \text{ (constante inconnue) avec } \Gamma = \partial \mathcal{O} \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\sigma = I \text{ (n : vecteur normal unitaire)} \end{array} \right.$$

Ce problème est issu d'un modèle décrivant l'équilibre d'un plasma confiné dans un tokamak : la fonction u mesure un flux magnétique, le sous-domaine

$$\Omega_p = \{x \in \mathcal{O}; u^*(x) < 0\}$$

est occupé par le plasma tandis que son complémentaire est vide.

Par une multiplication par une constante nous pouvons nous ramener, pour $\lambda > \lambda_1$, première valeur propre du problème de Dirichlet sur Ω au problème suivant :

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = -\lambda u^- \text{ dans } \mathcal{O} \\ u|_{\Gamma} = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{(on a } u^* = u \frac{I}{\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma} \text{ ; } u = \frac{u^*}{u(\Gamma)} = \frac{u^*}{c} \text{) .}$$

On note

$$\gamma = \partial \Omega_p ;$$

R. TEMAM (voir [1] et [2]) a montré les résultats d'existence et de régularité suivants :

Théorème 2.1. - Pour $N \geq 1$ quelconque, et sous l'hypothèse (2.1), il existe une solution u^* (resp. u) dans $C^{2+\alpha}(\bar{\mathcal{O}})$ au Problème (2.2) (resp. (2.3)); soit P un point de γ tel que $\text{grad } u(P) \neq 0$, alors γ est une variété de classe $C^{2+\alpha}$ (de dimension $N-1$) au voisinage de P .

En ce qui concerne la frontière libre γ on a aussi le résultat suivant (cf. D. KINDERLEHRER, J. SPRUCK [1]).

Théorème 2.2. - On se place dans \mathbb{R}^2 ; soit λ_1 la première valeur propre du problème de Dirichlet dans \mathcal{O} ; alors

- (i) Pour tout $\lambda > \lambda_1$, il existe une solution \bar{u} telle que la frontière libre γ est globalement de classe $C^{2+\alpha(1)}$.
- (ii) De plus, le domaine Ω_p correspondant à la solution \bar{u} est un domaine de Jordan.

Nous étudierons la perturbation d'équilibres u vérifiant les conditions suivantes :

$$(2.4) \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } \text{grad } u(P) \neq 0 \text{ pour tout point } P \text{ de } \gamma, \\ \text{(ii) le système suivant est bien posé (c'est-à-dire que } \lambda \text{ n'est pas valeur propre)} \\ \left[\begin{array}{l} \Delta \varphi = -\lambda \chi_{\Omega_p} \varphi \text{ dans } \mathcal{O}^{(2)} \\ \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \\ \text{(iii) } \Omega_p \text{ est simplement connexe (et donc, d'après (i) et le Théorème 2.1, de classe } C^{2+\alpha} \text{ au sens de la Définition 1.4 du Paragraphe 1.2.1).} \end{array} \right.$$

Sous les hypothèses (2.4), la solution u de (2.3) est aussi une solution du problème à frontière libre suivant :⁽³⁾

$$(2.5) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver une courbe } \gamma \text{ et une fonction } u \text{ telles que} \\ \Delta u = -\lambda u \text{ dans le domaine } \Omega_\gamma \text{ entouré par } \gamma, \\ \Delta u = 0 \text{ dans } \mathcal{O}' \setminus \Omega_\gamma \\ u \text{ est continue ainsi que ses dérivées premières à travers } \gamma, \\ u = 0 \text{ sur } \gamma, \\ u = 1 \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Les inconnues u et γ dépendent des données λ et Γ ; c'est cette dépendance que nous nous proposons d'étudier. A cet effet, nous devons d'abord faire une étude analogue à celle du Paragraphe 1 : c'est l'objet du Paragraphe 2.2.

(1) Il s'agit des solutions variationnelles au sens de R. TEMAM [2] et de H. BERESTYCKI, H. BREZIS [1].

(2) χ_{Ω_p} : fonction caractéristique de Ω_p .

(3) Nous préciserons plus loin dans quelle mesure on peut parler d'équivalence entre les problèmes (2.5) et (2.3).

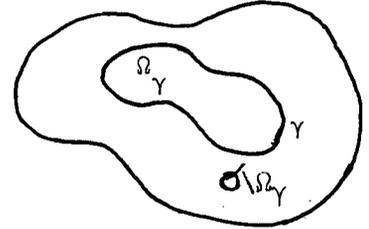
2.2. DEPENDANCE DU PROBLEME DE DIRICHLET PAR RAPPORT AU SUPPORT D'UN COEFFICIENT

2.2.1. Formulation du problème

Soit \mathcal{O} un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de classe $C^{\ell+\alpha}$ ($\ell \in \mathbb{N}, \ell \geq 2, \alpha \in]0, 1[$), et Ω_γ un ouvert de classe $C^{\ell+\alpha}$ inclus dans \mathcal{O} , de frontière $\gamma \subset \mathcal{O}$ (destinée à varier); on note $U(\gamma)$ la solution du système suivant :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \Delta U(\gamma) + \lambda \chi_{\Omega_\gamma} U(\gamma) = 0 \\ U(\gamma) = 1 \text{ sur } \Gamma = \partial \mathcal{O} \end{cases}$$

Fig. 8



où χ_{Ω_γ} désigne la fonction caractéristique de Ω_γ , et on fait l'hypothèse suivante

$$(2.7) \quad \lambda \text{ n'est pas une valeur propre du système homogène correspondant à (2.6).}$$

Nous nous proposons d'étudier l'application

$$U : \gamma \mapsto U(\gamma).$$

Nous utiliserons à cet effet le repérage du Paragraphe 1.3 : nous nous plaçons au voisinage d'une frontière γ_0 , et l'on utilisera (par abus de notation) indifféremment la notation γ pour désigner la frontière de Ω_γ et l'accroissement qui la représente⁽¹⁾.

2.2.2. Régularité de l'application U

Le coefficient $\lambda \chi_{\Omega_\gamma}$ de l'équation (2.6) étant discontinu, il en résultera des discontinuités des dérivées secondes $\frac{\partial^2 U(\gamma)}{\partial x_i \partial x_j}$ le long de γ . Pour faire une étude dans $C^{\ell+\alpha}$, nous sommes donc conduits à introduire les restrictions de $U(\gamma)$:

$$(2.8) \quad \begin{cases} U_1(\gamma) = U(\gamma)|_{\Omega_\gamma} \\ U_2(\gamma) = U(\gamma)|_{\mathcal{O} \setminus \Omega_\gamma} \end{cases}$$

Ces fonctions n'ont pas un domaine fixe (quand γ varie) : on est amené, en suivant la démarche de la première partie de ce travail, à introduire des fonctions

\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 transportées sur des domaines fixes

$$(2.9) \quad \begin{cases} \tilde{U}_1(\gamma) = U_1(\gamma) \circ T_\gamma \in C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}_{\gamma_0}) \\ \tilde{U}_2(\gamma) = U_2(\gamma) \circ T_\gamma \in C^{\ell+\alpha}(\bar{\mathcal{O}} \setminus \bar{\Omega}_{\gamma_0}) \end{cases}$$

(1) γ_0 correspond donc à un accroissement nul.

où T_γ est un difféomorphisme de classe $C^{\ell+\alpha}$ ainsi que son inverse construit comme dans le Paragraphe 1.3.

On construit ensuite à partir des \tilde{U}_i des prolongements $\bar{U}_1(\gamma)$, $\bar{U}_2(\gamma)$ de $U_1(\gamma)$ et $U_2(\gamma)$.

Les résultats dont nous aurons besoin par la suite sont résumés dans la proposition suivante.

Proposition 2.1 - On se place sous les hypothèses et notations (2.5) à (2.9).

i) L'application

$$(2.10) \quad \gamma \mapsto (\tilde{U}_1(\gamma), \tilde{U}_2(\gamma))$$

est de classe C^∞ de $C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ dans $C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}_{\gamma_0}) \times C^{\ell+\alpha}(\bar{\mathcal{O}} \setminus \Omega_{\gamma_0})$ au voisinage de γ_0

ii) L'application

$$(2.11) \quad \gamma \mapsto (\bar{U}_1(\gamma), \bar{U}_2(\gamma))$$

est de classe C^1 de $C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ dans $[C^{\ell-1+\alpha}(\bar{\mathcal{O}})]^2$ au voisinage de γ_0 ; ses dérivées premières sont des solutions du système suivant :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Delta + \lambda) \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \gamma} \cdot \delta \gamma = 0 \quad \text{dans } \Omega_\gamma \\ \Delta \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \gamma} \cdot \delta \gamma = 0 \quad \text{dans } \bar{\mathcal{O}} \setminus \bar{\Omega}_\gamma \\ \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \gamma} \cdot \delta \gamma - \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \gamma} \cdot \delta \gamma = 0 \quad \text{sur } \gamma \\ \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \gamma} \cdot \delta \gamma - \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \gamma} \cdot \delta \gamma = \lambda \bar{U}_1 \langle \bar{n}, \bar{V} \rangle \delta \gamma \quad \text{sur } \gamma \\ \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \gamma} \cdot \delta \gamma = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

où \bar{n} est le vecteur normal à γ dirigé vers l'extérieur de Ω_γ et \bar{V} le vecteur définissant la variation de la frontière (cf. § 1.3).

Corollaire 2.1. Si de plus on a

$$(2.13) \quad U_1(\gamma_0)|_{\gamma_0} = U_2(\gamma_0)|_{\gamma_0} = 0$$

alors \bar{U}_1 et \bar{U}_2 sont stationnaires en γ_0 au sens suivant :

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{U}_1(\gamma_0)}{\partial \gamma} |_{\Omega_{\gamma_0}} \equiv 0 \\ \frac{\partial \bar{U}_2(\gamma_0)}{\partial \gamma} |_{\bar{\mathcal{O}} \setminus \bar{\Omega}_{\gamma_0}} \equiv 0. \end{array} \right.$$

Démonstration de la Proposition 2.1. - La partie (i) se démontre comme la Proposition 1.4, mutatis mutandis, en particulier, on utilise le lemme suivant :

Lemme 2.1 - Considérons l'opérateur suivant :

$$(2.15) \quad A(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} (\Delta + \lambda) u_1|_{\Omega_Y} \\ \Delta u_2|_{\bar{\sigma} \setminus \bar{\Omega}_Y} \\ (u_1 - u_2)|_{\Gamma} \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n}\right)|_{\Gamma} \\ u_2|_{\Gamma} \end{pmatrix}$$

L'opérateur A est un isomorphisme du produit cartésien

$$\begin{aligned} & C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}_Y) \times C^{\ell+\alpha}(\bar{\sigma} \setminus \bar{\Omega}_Y) \text{ dans} \\ & C^{\ell-2+\alpha}(\bar{\Omega}_Y) \times C^{\ell-2+\alpha}(\bar{\sigma} \setminus \bar{\Omega}_Y) \times C^{\ell+\alpha}(\Gamma) \times C^{\ell-1+\alpha}(\Gamma) \times C^{\ell+\alpha}(\Gamma). \end{aligned}$$

Idée de la démonstration : L'opérateur A définit un système aux dérivées partielles qui peut se ramener localement (par réflexion par rapport à l'interface γ) à un système posé dans un seul domaine vérifiant la condition complémentaire de AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [2]. Nous en déduisons des estimations de Schauder qui, jointes à l'existence et l'unicité qui découlent de (2.6), donnent la conclusion du lemme.

□

La partie (ii) se démontre comme la Proposition 1.5 en ce qui concerne le résultat de dérivabilité; pour établir (2.12), introduisons l'application suivante :

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \Phi(\gamma, z_1, z_2; \varphi) &= \int_{\Omega_Y} \varphi_1 (\Delta + \lambda) z_1 \, dx + \int_{\bar{\sigma} \setminus \bar{\Omega}_Y} \varphi_2 \Delta z_2 \, dx \\ &+ \int_{\gamma} \left\{ \varphi_3 (z_1 - z_2) + \varphi_4 \left(\frac{\partial z_1}{\partial n} - \frac{\partial z_2}{\partial n} \right) \right\} d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_5 (z_2 - 1) \, d\sigma ; \end{aligned}$$

de l'identité

$$(2.17) \quad \begin{cases} \Phi(\gamma, \bar{u}_1(\gamma), \bar{u}_2(\gamma); \varphi) = 0 \\ \forall \varphi \in [C^\infty(\bar{\sigma})]^5, \forall \gamma \text{ dans un voisinage de } \gamma_0 \end{cases}$$

nous déduisons par dérivation par rapport à γ , et en utilisant les lemmes de mécanique de l'Annexe I :

$$(2.18) \quad \begin{cases} \int_{\Omega_Y} \varphi_1 (\Delta + \lambda) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \gamma} \cdot \delta \gamma \, dx + \int_{\bar{\sigma} \setminus \bar{\Omega}_Y} \varphi_2 \Delta \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \gamma} \cdot \delta \gamma \, dx \\ + \int_{\gamma} \left(\varphi_3 + \varphi_4 \frac{\partial}{\partial n} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \gamma} \cdot \delta \gamma - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \gamma} \cdot \delta \gamma \right) d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_5 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \gamma} \cdot \delta \gamma \, d\sigma \\ = - \int_{\gamma} \left\{ \varphi_1 (\Delta + \lambda) \bar{u}_1 + \varphi_2 \Delta \bar{u}_2 + \langle n, \nabla [\varphi_3 (\bar{u}_1 - \bar{u}_2)] \rangle \right. \\ \left. + H \varphi_3 (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) + \langle \nabla \varphi_4, \nabla (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \rangle + \varphi_4 \Delta (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \right\} \langle n, \nu \rangle d\sigma \end{cases}$$

où H désigne la courbure de γ , positive là où Ω_Y est convexe.

Or on a

$$(\Delta + \lambda) \bar{U}_1|_\gamma = \Delta \bar{U}_2|_\gamma = 0$$

et

$$\nabla(\bar{U}_1 - \bar{U}_2)|_\gamma = 0$$

$$\bar{U}_1 - \bar{U}_2|_\gamma = 0 ;$$

Le second membre de (2.18) se réduit donc à

$$\lambda \int_\gamma \varphi_4 \bar{U}_1 \langle n, V \rangle \delta\gamma \, d\sigma$$

d'où (2.12) (le Corollaire 2.1 est trivial). □

2.3. PREMIERE APPLICATION : REGULARITE DE LA FRONTIERE LIBRE

Introduisons l'application suivante

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi : \mathcal{V} \rightarrow C^{\ell+\alpha}(\gamma_0) \\ \gamma \mapsto \tilde{U}_1(\gamma)|_{\gamma_0} ; \end{array} \right.$$

où \mathcal{V} est un voisinage de 0 dans $C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ (ce qui est une manière, rappelons-le, de se placer au voisinage de γ_0).

Proposition 2.2. (i) sous les hypothèses de la Proposition 2.1, l'application Ψ est définie par (2.19) est de classe C^∞ pour les normes

$$C^{\ell+\alpha}(\gamma_0) \rightarrow C^{\ell+\alpha}(\gamma_0).$$

(ii) Sous les hypothèses du Corollaire 2.1 on a

$$(2.20) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}(\gamma_0) \cdot \delta\gamma = \langle V, \nabla U_1(\gamma_0) \rangle|_{\gamma_0} \delta\gamma.$$

Corollaire 2.2. La frontière libre γ_0 est une variété de classe C^∞ .

Remarque 2.1. Le résultat du corollaire n'est pas nouveau : il est moins fort que celui de D. KINDERLEHRER et J. SPRUCK [1] mais la démonstration donnée ici est particulièrement simple. □

Démonstration : Le point (i) est une conséquence directe de la Proposition 2.1 (point(i)).

Pour établir (ii), il est possible d'utiliser des formules de Stokes comme dans P.R. GARABEDIAN [1]. Nous allons plutôt donner une démonstration qui mettra bien en évidence l'importance de la propriété de stationnarité établie dans le Corollaire 2.1. A cet effet, il faut exprimer l'application Ψ en fonction du

du prolongement \bar{U} . Cela est possible si l'on remarque que (dans un certain sens)

$$(2.21) \quad \tilde{U}(\gamma)|_{\gamma_0} = \bar{U}(\gamma)|_{\gamma}.$$

Pour préciser (2.17) nous utilisons le repérage : à tout point x de γ_0 on fait correspondre (cf. Paragraphe 1.3)

$$(2.22) \quad \bar{U}(\gamma)|_{\gamma}(x) = \bar{U}(x + \gamma(x) V(x)).$$

Nous pouvons alors écrire (2.21) sous la forme suivante :

$$(2.23) \quad \tilde{U}(\gamma)|_{\gamma_0} = \bar{U}(\gamma)|_{\gamma}(x) \quad \forall x \in \gamma_0.$$

Il est maintenant possible de décomposer la dérivation de Ψ comme suit :

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}(\gamma) &= \frac{d}{d\gamma} [\bar{U}(\gamma)|_{\gamma}] \\ &= \frac{d\bar{U}(\gamma)}{d\gamma} |_{\gamma} + \frac{d}{d\gamma} [\varphi |_{\gamma}] \varphi = \bar{U}(\gamma) \end{aligned}$$

D'après la propriété de stationnarité le premier terme de cette somme est nul pour $\gamma = \gamma_0$ et le deuxième terme donne (cf. le Paragraphe 4.2 de l'Annexe 2).

$$(2.25) \quad \frac{d\Psi}{d\gamma}(0) \cdot \delta\gamma = \langle \text{grad } \bar{U}(\gamma_0), V \rangle |_{\gamma_0} \delta\gamma$$

Montrons maintenant le point (iii) : De (i) ^{γ_0} et de (ii) nous déduisons

$$(2.26) \quad \langle \text{grad } U_i(\gamma_0), V \rangle |_{\gamma_0} \in C^{\ell+\alpha}(\gamma_0) \text{ pour } i = 1, 2$$

Cette propriété étant vraie pour tout champ de vecteur régulier "transverse" à γ_0 (cf. Paragraphe 1.3) nous en déduisons :

$$(2.27) \quad \text{grad } U_i(\gamma_0) |_{\gamma_0} \in C^{\ell+\alpha}(\gamma_0) \text{ pour } i = 1, 2$$

Utilisant les théorèmes classiques de régularité locale pour le problème de Dirichlet nous en tirons :

$$(2.28) \quad \text{grad } U_i(\gamma_0) \in C^{\ell+\alpha} \text{ au voisinage de } \gamma_0 ; \text{ et par conséquent}$$

$$(2.29) \quad U_i(\gamma_0) \in C^{\ell+1+\alpha} \text{ au voisinage de } \gamma_0.$$

La frontière libre étant une isovaleur de U_1 , et compte tenu de l'hypothèse (1.4) (i), l'application du théorème des fonctions implicites donne pour γ_0 la régularité suivante :

$$(2.30) \quad \gamma_0 \text{ est de classe } C^{3+\alpha}$$

Nous allons réitérer ce procédé en notant qu'il peut être utilisé localement :

Considérons en effet un point P de γ_0 dans un voisinage $\mathcal{V}(P)$ duquel γ_0 est de classe $C^{3+\alpha}$ et faisons varier γ autour de γ_0 à l'aide d'un champ de vecteur V régulier. Il est aisé de constater par un calcul explicite que la dérivée de \tilde{U}_1 par rapport à γ est de classe $C^{3+\alpha}$ dans $\mathcal{V}(P)$; il en est donc de même pour la dérivée de Ψ , et par conséquent, en passant par les étapes (2.25) à (2.30) on en déduit la régularité $C^{4+\alpha}$ de γ_0 dans $\mathcal{V}(P)$. La régularité C^∞ de γ_0 suit par récurrence.

□

Remarque 2.2. La méthode précédente s'applique aussi au cas suivant :

$$\Delta u = f(\bar{u}) ; \quad f \text{ assez régulière, } f(0) = 0. \quad \square$$

Remarque 2.3. Nous avons donc utilisé la formule de Hadamard pour établir (de manière assez rapide) un résultat de régularité; on trouvera un deuxième exemple de ce type d'application dans B. PALMERIO, A. DERVIEUX [3] où on établit l'existence d'une trace généralisée à l'aide de la formule de Hadamard. \square

2.4. DÉPENDANCE PAR RAPPORT AUX DONNÉES DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE FRONTIÈRE LIBRE

2.4.1. Dépendance de la frontière libre

Les données du problème (2.5) susceptibles de varier sont d'une part la frontière Γ qui délimite la cavité désormais notée \mathcal{O}_Γ (au lieu de \mathcal{O}) supposée contenue dans une boule (fixe) B et d'autre part le paramètre λ ; soit $\gamma(\lambda, \Gamma)$ la frontière libre du problème (2.5) pour les données λ et Γ ; on se propose d'étudier l'application

$$(\lambda, \Gamma) \mapsto \gamma(\lambda, \Gamma)$$

Proposition 2.3. Plaçons-nous au voisinage d'une solution (λ_0, Γ_0) du système (2.3)(2.5) correspondant à des données (λ_0, Γ_0) ; nous supposons vérifiées les hypothèses (2.4); alors l'application

$$(2.31) \quad (\lambda, \Gamma) \mapsto \gamma(\lambda, \Gamma) \text{ solution de (2.5)} \quad (1)$$

est définie, localement unique en tant que fonction continue, et de classe C^∞ d'un voisinage $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ dans $\mathbb{R} \times C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ de (λ_0, Γ_0) à image dans $C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$.

Proposition 2.4. - Sous les hypothèses de la Proposition 2.3, les dérivées de l'application (2.31) s'expriment ainsi :

$$(2.32) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \cdot \delta \lambda = \frac{-1}{\langle \text{grad } u, V \rangle |_\gamma} Z_\lambda |_\gamma ; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \Gamma} \cdot \delta \Gamma = \frac{-1}{\langle \text{grad } u, V \rangle |_\gamma} Z_\Gamma |_\gamma$$

où V est un champ de vecteur unitaire avec lequel γ est paramétrée et avec

$$(2.33) \quad \begin{cases} \Delta Z_\lambda + \lambda \chi_{\Omega_\gamma} Z_\lambda = \bar{u} \times \delta \lambda & \text{dans } \mathcal{O}_\Gamma \\ Z_\lambda |_\Gamma = 0 \end{cases}$$

$$(2.34) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \Gamma} \cdot \delta \Gamma = \frac{1}{\langle \text{grad } u, V \rangle |_\gamma} Z_\Gamma$$

avec

(1) On verra au Paragraphe 2.4.2 que les résultats énoncés ici s'appliquent aussi à la solution de (2.3).

$$(2.35) \quad \begin{cases} \Delta Z_\Gamma + \lambda \chi_{\Omega_\Gamma} Z_\Gamma = 0 & \text{dans } \mathcal{O}_\Gamma \\ Z_\Gamma|_\Gamma = - \langle \text{grad } u, W \rangle|_\Gamma \delta\Gamma \end{cases}$$

où W est un champ de vecteur unitaire avec lequel on paramètre Γ .

Démonstration de la Proposition 2.3 : Introduisons les données λ et Γ en arguments dans les applications $U, \tilde{U}_1, \bar{U}_1$ (prolongements dans $C^{\ell+\alpha}(\bar{B})$) et Ψ : pour $(\lambda, \Gamma, \gamma)$ au voisinage de $(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0)$ on a les applications :

$$(2.36) \quad U : (\lambda, \Gamma, \gamma) \mapsto U(\gamma, \Gamma, \gamma) \text{ solution du système (2.1);}$$

$$(2.37) \quad \Psi : (\gamma, \Gamma, \gamma) \mapsto \Psi(\lambda, \Gamma, \gamma) = \tilde{U}_1(\lambda, \Gamma, \gamma)|_{\gamma_0}$$

(comparer avec (2.15)).

Alors les applications $U, \tilde{U}_1, \bar{U}_1, \Psi$ vérifient par rapport à $(\lambda, \Gamma, \gamma)$ des propriétés de régularités analogues à celles qui sont énoncées dans les Propositions 2.1 et 2.2(i) (les démonstrations sont analogues) :

Lemme 2.2 (i) L'application

$$(\lambda, \Gamma, \gamma) \mapsto (\tilde{U}_1(\lambda, \Gamma, \gamma), \tilde{U}_2(\lambda, \Gamma, \gamma))$$

est de classe C^∞ de $\mathbb{R} \times C^{\ell+\alpha}(\Gamma_0) \times C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ dans $C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}_{\gamma_0}) \times C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}_{\gamma_0} \setminus \Omega_{\gamma_0})$ au voisinage de $(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0)$.

(ii) L'application

$$(\lambda, \Gamma, \gamma) \mapsto (\bar{U}_1(\lambda, \Gamma, \gamma), \bar{U}_2(\lambda, \Gamma, \gamma))$$

est de classe C^1 de $\mathbb{R} \times C^{\ell+\alpha}(\Gamma_0) \times C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ dans $[C^{\ell-1+\alpha}(\bar{B})]^2$ au voisinage de $(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0)$

(iii) L'application

$$(\lambda, \Gamma, \gamma) \mapsto \Psi(\lambda, \Gamma, \gamma)$$

est de classe C^∞ de $\mathbb{R} \times C^{\ell+\alpha}(\Gamma_0) \times C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ dans $C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ au voisinage de $(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0)$. \square

L'application Ψ décrit le problème à frontière libre suivant, trivialement équivalent à (2.5) lorsque γ est régulière :

$$(2.38) \quad \begin{cases} \Delta u = - \lambda \chi_{\Omega_\gamma} u & \text{dans } \mathcal{O}_\Gamma \\ u|_\Gamma = 1 \\ u|_\gamma = 0 ; \end{cases}$$

en effet, on a l'équivalence

$$(2.39) \quad \Psi(\lambda, \Gamma, \gamma) = 0 \iff \gamma \text{ est une solution de (2.38)}$$

$$\iff \gamma \text{ est une solution de (2.5).}$$

Pour étudier localement la première équation de (2.39), nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites à l'application Ψ ; cela est possible d'après le Lemme 2.2 et le lemme suivant

Lemme 2.3. La dérivée partielle $\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0)$ est un isomorphisme de $C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ dans lui-même.

Démonstration : Nous avons, d'après la Proposition 2.2.

$$(2.30) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0) \cdot \delta \gamma = \langle V, \nabla U_1(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0) \rangle \Big|_{\gamma_0} \times \delta \gamma$$

Cette application linéaire tangente est donc la multiplication par la fonction $\langle V, \nabla U_1(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0) \rangle \Big|_{\gamma_0}$; or le champ de vecteur V est choisi suffisamment régulier, γ_0 est C^∞ d'après la Proposition 2.2 et donc, d'après les résultats classiques sur les systèmes elliptiques, il en est de même pour la trace $\nabla U_1(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0) \Big|_{\gamma_0}$. D'où le Lemme 2.3. \square

Le théorème des fonctions implicites nous permet de conclure sur l'existence, l'unicité, la régularité locales de l'application $(\lambda, \Gamma) \rightarrow \gamma(\lambda, \Gamma)$; ses dérivées premières en (λ_0, Γ_0) s'expriment ainsi :

$$(2.31) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} = - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \right]^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}$$

$$(2.32) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \Gamma} \cdot \delta \Gamma = - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \right]^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \Gamma} \cdot \delta \Gamma$$

Démonstration de la Proposition 2.4 : Il nous reste donc, d'après (2.31) (2.32)

à calculer les dérivées $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0)$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial \Gamma}(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0)$; nous avons

$$(2.33) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0) = \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \lambda}(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0) \Big|_{\gamma_0}$$

$$(2.34) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \Gamma}(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0) \cdot \delta \Gamma = \left[\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \Gamma}(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0) \cdot \delta \Gamma \right] \Big|_{\gamma_0}$$

Pour calculer les deuxièmes termes de ces égalités, il est loisible d'utiliser à nouveau la fonction Φ définie en (2.16), en ajoutant λ et Γ en arguments; écrivons les calculs de la deuxième dérivation :

$$\begin{aligned} & \forall \varphi \in [C^{\ell+\alpha}(\bar{B})]^5 \\ & \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0, U_1, U_2, \varphi) \cdot \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \Gamma} \cdot \delta \Gamma \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0, U_1, U_2, \varphi) \cdot \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \Gamma} \cdot \delta \Gamma \\ & = - \frac{\partial \Phi}{\partial \Gamma}(\lambda_0, \Gamma_0, \gamma_0, U_1, U_2, \varphi) \cdot \delta \Gamma \end{aligned}$$

ce qui donne, en calculant les dérivées :

$$\begin{aligned}
(2.35) \quad & \int_{\Omega_{\gamma_0}} \varphi_1 (\Delta + \lambda_0) \left[\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \Gamma} \cdot \delta \Gamma \right] dx \\
& + \int_{\Gamma_0 \setminus \bar{\Omega}_{\gamma_0}} \varphi_2 \Delta \left[\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \Gamma} \cdot \delta \Gamma \right] dx \\
& + \int_{\partial \Omega_{\gamma_0}} \left[\varphi_3 + \varphi_4 \frac{\partial}{\partial n} \right] \left[\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \Gamma} \cdot \delta \Gamma - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \Gamma} \cdot \delta \Gamma \right] d\sigma \\
& + \int_{\Gamma_0} \varphi_5 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \Gamma} \cdot \delta \Gamma \quad d\sigma = \\
& = - \int_{\Gamma_0} \varphi_2 \Delta U_1 \langle n, W \rangle \delta \Gamma \quad d\sigma \\
& \quad - \int_{\Gamma_0} \{ \langle \text{grad} [(U_1 - 1) \varphi_5], n \rangle + H \varphi_5 (U_1 - 1) \} \langle n, W \rangle \delta \Gamma \quad d\sigma \\
& = 0 - \int_{\Gamma_0} \langle \text{grad} (U_1 - 1), n \rangle \varphi_5 \langle n, W \rangle \quad d\sigma
\end{aligned}$$

d'où - sachant que la dérivée tangentielle de U_1 est nulle sur Γ_0 - les relations (2.34) (2.35). □

Remarque 2.4. - Il est intéressant de noter que l'on a utilisé dans le Lemme 2.3 le résultat de régularité supplémentaire établi dans la Proposition 2.2, résultat faute duquel l'application linéaire tangente $\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}$ aurait fait perdre un degré de dérivation, ce qui n'aurait pas permis d'utiliser le théorème des fonctions implicites classique.

Remarque 2.5. - Il est classique de dire que la condition supplémentaire $u|_{\gamma} = 0$, qui surdéterminerait le P.F.L. si γ était connue, permet précisément de "trouver" γ ; nous voyons maintenant que les calculs précédents apportent une signification rigoureuse à une telle assertion, et en particulier une justification à la remarque suivant laquelle la condition surdéterminante doit avoir la même "dimension" que la frontière inconnue. □

Remarque 2.6. - Nous avons montré, grâce à un théorème de régularité que le théorème des fonctions implicites classique peut s'appliquer à ce problème. Cela n'est plus le cas pour une autre formulation du problème physique où le paramètre λ est inconnu, et où l'utilisation d'un théorème des fonctions implicites généralisé du type NASH-MOSER semble nécessaire (voir C. GUILLOPPE [1], en particulier page 67).

2.4.2. Dépendance de la solution

Proposition 2.5. - Plaçons-nous sous les hypothèses de la Proposition 2.3.

La solution u (resp. u^*) du problème (2.3) (resp. (2.2)) admet un prolongement \bar{u} de classe C^1 par rapport à (λ, Γ) au voisinage de (λ_0, Γ_0) pour les normes suivantes

$$(2.36) \quad \bar{u} : \mathbb{R} \times C^{2+\alpha}(\gamma_0) \rightarrow C^{1+\alpha}(\bar{B})$$

Les dérivées de u ont pour expression

$$(2.37) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \lambda}(\lambda, \Gamma) \cdot \delta \lambda = Z_\lambda \quad \text{défini en (2.33)}$$

$$(2.38) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \Gamma}(\lambda, \Gamma) \cdot \delta \Gamma = Z_\Gamma \quad \text{défini en (2.35)}$$

Remarque 2.7 : Les dérivées de u^* se calculent par dérivation du produit

$$\bar{u}^*(\lambda, \Gamma) = \frac{1}{J_0(\lambda, \Gamma)} \bar{u}(\lambda, \Gamma)$$

avec

$$(2.39) \quad J_0(\lambda, \Gamma) = \int_\Gamma \frac{\partial \bar{u}(\lambda, \Gamma)}{\partial n} d\sigma ;$$

Les dérivées de J_0 sont données par :

$$(2.40) \quad \frac{\partial J_0}{\partial \lambda}(\lambda, \Gamma) = \int_{\Omega_\gamma} p \bar{u}(\lambda, \Gamma) dx dy$$

$$(2.41) \quad \frac{\partial J_0}{\partial \lambda}(\lambda, \Gamma) = \int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial \bar{u}(\lambda, \Gamma)}{\partial n} d\sigma$$

où p est l'état adjoint, solution du système suivant

$$(2.42) \quad \begin{cases} \Delta p + \lambda \chi_{\Omega_\gamma} & p = 0 \text{ dans } \Omega \\ p|_\Gamma & = 1 . \end{cases}$$

Les résultats de la Proposition 2.5 peuvent être raffinés de la manière suivante :

Proposition 2.6. - La solution u (resp. u^*) du problème (2.3) (resp. 2.2) a des restrictions

$$u_1 = u|_{\mathcal{O}_\Gamma \setminus \bar{\Omega}_\gamma}, u_2 = u|_{\Omega_\gamma}$$

(resp. $u_1^* = \dots, u_2^* = \dots$)

dérivables au sens suivant : il existe des prolongements $\bar{u}_1(\lambda, \Gamma), \bar{u}_2(\lambda, \Gamma)$ t.q.

$$\bar{u}_1|_{\mathcal{O}_\Gamma \setminus \bar{\Omega}_\gamma} = u_1, \bar{u}_2|_{\Omega_\gamma} = u_2,$$

les applications

$$(\lambda, \Gamma) \mapsto \bar{u}_i(\lambda, \Gamma) \quad (i = 1, 2)$$

étant dérivables dans $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ (cf. Proposition 2.3) pour les normes :

$$\mathbb{R} \times C^{\ell+\alpha}(\gamma_0) \rightarrow C^{\ell-1+\alpha}(\bar{B}) .$$

□

Remarque 2.8 : Les dérivées premières de ces applications sont reliées à celles de \bar{u} (Proposition 2.5) de la manière suivante :

$$(2.43) \quad \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \Gamma} (\lambda, \Gamma) \cdot \delta \Gamma = \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \Gamma} (\lambda, \Gamma) \cdot \delta \Gamma & \text{sur } \mathcal{O}_\Gamma \setminus \bar{\Omega}_\gamma \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \Gamma} (\lambda, \Gamma) \cdot \delta \Gamma & \text{sur } \Omega_\gamma \end{cases}$$

(même remarque en λ).

□

Démonstration des Propositions 2.5 et 2.6

Etape 1 : Nous montrons les résultats de la Proposition 2.6 pour les solutions du Problème (2.5)

Posons (cf. la démonstration de la Proposition 2.3)

$$\bar{u}_i(\lambda, \Gamma) = \bar{U}_i[\lambda, \Gamma, \gamma(\lambda, \Gamma)]$$

D'après la Proposition 2.3, l'application

$$(\lambda, \Gamma) \mapsto \gamma(\lambda, \Gamma)$$

est C^1 pour les normes

$$\mathbb{R} \times C^{\ell+\alpha}(\gamma_0) \rightarrow C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$$

et d'autre part (Proposition 2.1), l'application ($i = 1, 2$)

$$(\lambda, \Gamma, \gamma) \mapsto \bar{U}_i(\lambda, \Gamma, \gamma)$$

est C^1 pour les normes

$$\mathbb{R} \times [C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)]^2 \rightarrow C^{\ell-1+\alpha}(\mathbb{R}^2)$$

d'où les dérivabilités des \bar{u}_i .

Par dérivations composées nous avons (cf. le Lemme 2.2)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \lambda} (\lambda, \Gamma) \cdot \delta \lambda = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \lambda} (\lambda, \Gamma, \gamma(\lambda, \Gamma)) \cdot \delta \lambda + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \gamma} (\lambda, \Gamma, \gamma(\lambda, \Gamma)) \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} (\lambda, \Gamma) \cdot \delta \lambda$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \Gamma} (\lambda, \Gamma) \cdot \delta \Gamma = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \Gamma} (\lambda, \Gamma, \gamma(\lambda, \Gamma)) \cdot \delta \Gamma + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \gamma} (\lambda, \Gamma, \gamma(\lambda, \Gamma)) \frac{\partial \gamma}{\partial \Gamma} (\lambda, \Gamma) \cdot \delta \Gamma$$

ce qui aboutit à (2.37) et (2.38), compte tenu de la stationnarité des \bar{U}_i par rapport à γ (Corollaire 2.1).

Pour en déduire la dérivabilité des \bar{u}_i^* nous remarquons seulement que l'application J est de classe C^1 pour les normes $\mathbb{R} \times C^{2+\alpha}(\gamma_0) \rightarrow \mathbb{R}$, ses dérivées premières s'exprimant ainsi :

$$(2.44) \quad \frac{\partial J}{\partial \lambda} (\lambda, \Gamma) \cdot \delta \lambda = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \lambda} (\lambda, \Gamma) \cdot \delta \lambda \right] d\sigma$$

$$(2.45) \quad \frac{\partial J}{\partial \Gamma} (\lambda, \Gamma) \cdot \delta \Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \Gamma} (\lambda, \Gamma) \cdot \delta \Gamma \right] d\sigma + R$$

avec

$$R = \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left[\int_{\Gamma} 1 \times \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \right] \varphi = \bar{U}_1 \cdot \delta \Gamma$$

Appliquons le lemme de mécanique n° 2 (Annexe 1); R s'écrit

$$R = \int_{\Gamma} \{ \langle \text{grad } 1, \text{grad } \bar{U}_1 \rangle + 1 \Delta \bar{U}_1 \} \langle n, W \rangle \delta \Gamma \quad d\sigma = 0.$$

Pour le calcul pratique, on introduit l'état adjoint (p_1, p_2) , solution du système suivant :

$$\left[\int_{\mathcal{O}} (\Delta \psi + \lambda \chi_{\Omega_Y} \psi) p_1 \, dx \, dy + \int_{\Gamma} \psi p_2 \, d\sigma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial n} \, d\sigma \right. \\ \left. \forall \Gamma \psi \in C^\infty(\bar{\mathcal{O}}_\Gamma) \right]$$

qui s'interprète ainsi :

$$\left[\begin{array}{l} \Delta p_1 + \lambda \chi_{\Omega_Y} p_1 = 0 \text{ dans } \mathcal{O} \\ p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{\partial p_1}{\partial n} \text{ sur } \Gamma \end{array} \right]$$

d'où, compte tenu de (2.44) (2.45), les dérivées (2.40) et (2.41).

Etape 2 : Montrons la Proposition 2.5 pour les solutions du problème (2.5).

Nous utilisons le transporté \tilde{U}_i défini comme plus haut (démonstration de la Proposition 2.3); l'application

$$\tilde{U}_i : (\lambda, \Gamma, \gamma) \mapsto \tilde{U}_i(\lambda, \Gamma, \gamma)$$

est continûment dérivable pour les normes

$$\mathbb{R} \times C^{\ell+\alpha}(\Gamma_0) \times C^{\ell+\alpha}(\gamma_0) \rightarrow C^{\ell+\alpha}(\bar{\mathcal{O}}_{\Gamma_0} \setminus \Omega_{\gamma_0}) \quad \text{pour } i = 1 \\ (\text{resp. } C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}_{\gamma_0}) \text{ pour } i = 2).$$

Posons

$$\tilde{u}(\lambda, \Gamma) = \begin{cases} \tilde{U}_1[\lambda, \Gamma, \gamma(\lambda, \Gamma)] & \text{dans } \bar{\mathcal{O}}_{\Gamma_0} \setminus \Omega_{\gamma_0} \\ \tilde{U}_2[\lambda, \Gamma, \gamma(\lambda, \Gamma)] & \text{dans } \bar{\Omega}_{\gamma_0} \end{cases}$$

alors l'application $\tilde{u} : (\lambda, \Gamma) \mapsto \tilde{u}(\lambda, \Gamma)$ est de classe C^1 pour les normes :

$$\mathbb{R} \times C^{2+\alpha}(\gamma_0) \rightarrow C^{2+\alpha}(\Omega_{\gamma_0})$$

d'où, par prolongement et retransport (Paragraphe 1), la dérivabilité (C^1) de l'application

$$\bar{u} : (\lambda, \Gamma) \mapsto \bar{u}(\lambda, \Gamma)$$

pour les normes

$$\mathbb{R} \times C^{2+\alpha}(\gamma_0) \rightarrow C^{1+\alpha}(\bar{B}).$$

Naturellement, les calculs de dérivation sont identiques à ceux du point (ii).

Etape 3 : Equivalence locale entre les problèmes (2.3) et (2.5) : Utilisons le fait que le couple (γ_0, u_0) est aussi solution du problème (2.3) c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} u_0 < 0 & \quad \text{dans } \Omega_{\gamma_0} \\ u_0 > 0 & \quad \text{dans } \mathcal{O}_{\Gamma_0} \setminus \bar{\Omega}_{\gamma_0}. \end{aligned}$$

Soit (γ, u) une solution du problème à frontière libre (2.5) assez proche de (γ_0, u_0) au sens des théorèmes précédents, nous allons montrer que (γ, u) est aussi solution de (2.3).

Nous nous restreignons pour plus de clarté au cas où Ω_γ est un domaine étoilé et nous considérons les solutions $\tilde{U}_1(\gamma)$ et $\tilde{U}_2(\gamma)$ "transportées en domaines fixes"; nous avons par hypothèse :

$$\bullet \quad \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial r} \Big|_{\gamma_0} > 0 ;$$

Il existe donc un réel α et un voisinage \mathcal{V} de γ_0 dans Ω_{γ_0} tel que :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{U}_2(\gamma_0) \Big|_{\mathcal{V}} &\geq \alpha > 0 \\ \tilde{U}_2(\gamma_0) \Big|_{\Omega_{\gamma_0} \setminus \mathcal{V}} &\geq \alpha > 0. \end{aligned} \right.$$

Mais si

$$\|\tilde{U}_2(\gamma) - \tilde{U}_2(\gamma_0)\|_{C^1(\bar{\mathcal{O}}_{\Gamma_0} - \Omega_{\gamma_0})} < \frac{\alpha}{2}$$

alors

$$\tilde{U}_2(\gamma) \Big|_{\Omega_{\gamma_0} \setminus \mathcal{V}} \geq \frac{\alpha}{2} > 0$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r} (U_2(\gamma)) \Big|_{\mathcal{V}} \geq \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Pour un angle polaire θ fixé et r croissant, $\tilde{U}_2(\gamma)$ croît strictement et s'annule sur γ_0 , donc $\tilde{U}_2(\gamma)$ est strictement positif sur Ω_{γ_0} ; on raisonne de même pour le signe de $\tilde{U}_1(\gamma)$.

Le cas général se traite de manière identique. \square

2.4.3. Application au contrôle optimal

Il se pose pour des machines coûteuses comme les tokamaks des problèmes de construction optimale ("optimal structural design") et de commande optimale. En particulier la disposition optimale des bobinages extérieurs semble intéresser les physiciens; le modèle mathématique est alors différent du modèle étudié ici puisqu'au lieu de se poser dans une enceinte, il se pose dans un domaine infini; signalons que cette différence ne change pas la nature des résultats que nous

donnons ici. Rappelons enfin que le modèle présent est très simplifié mais que la méthode a de bonnes possibilités de généralisation (cf. la Remarque 2.2).

Afin de pouvoir exhiber des conditions nécessaires pour qu'une fonction-coût dépendant de l'état (γ, u) soit minimale, nous allons calculer son gradient. L'intérêt de ce calcul est qu'il met en évidence la simplicité de l'introduction (et du calcul pratique) de l'état adjoint (qui rappelons-le est adjoint par rapport à u et γ : il s'agit en d'autres termes de linéariser le problème de frontière libre); comme un tel calcul dépend somme toute assez peu du critère considéré, nous allons le faire sur un exemple, ce qui permettra d'être plus explicite : considérons la fonctionnelle

$$(2.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} j(\lambda, \Gamma) = J(\lambda, \Gamma, \gamma(\lambda, \Gamma), u(\lambda, \Gamma)) \\ \text{où } (\gamma(\lambda, \Gamma), u(\lambda, \Gamma)) \text{ est solution du P.F.L. (2.3) et où} \\ J(\lambda, \Gamma, \gamma, u) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}_\Gamma} (u - u_d)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\gamma - \gamma_d)^2 d\theta ; \end{array} \right.$$

pour plus de clarté on s'est restreint à un contexte étoilé ⁽¹⁾ : u_d et γ_d sont des observations désirées de la fonction u et de la frontière libre.

Calculons par exemple la dérivée de j par rapport à Γ ; par dérivations composées nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial j}{\partial \Gamma}(\lambda, \Gamma) \cdot \delta \Gamma &= \int_{\mathcal{O}_\Gamma} (u - u_d) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \Gamma} \cdot \delta \Gamma \right) dx \\ &+ \int_0^{2\pi} (\gamma - \gamma_d) \frac{1}{\langle n, r \rangle \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_\gamma} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \Gamma} \cdot \delta \Gamma \right) d\theta \\ &+ \frac{1}{2} \int_\Gamma (u - u_d)^2 \langle n, r \rangle \delta \Gamma d\sigma \end{aligned}$$

le système adjoint est le suivant :

Trouver $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ tel que $\forall (\psi_1, \psi_2) \in [C^\infty(\mathbb{R}^2)]^2$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{O}_\Gamma \setminus \bar{\Omega}_\gamma} p_1 \Delta \psi_1 dx + \int_{\Omega_\gamma} p_2 (\Delta + \lambda) \psi_2 dx \\ &+ \int_\gamma [p_3 (\psi_1 - \psi_2) + p_4 \frac{\partial}{\partial n} (\psi_1 - \psi_2)] d\sigma + \int_\Gamma p_5 \psi_1 d\sigma = \\ &= \int_{\mathcal{O}_\Gamma} (u - u_d) (\psi_1 \chi_{\Omega_\Gamma \setminus \bar{\Omega}_\gamma} + \psi_2 \chi_{\Omega_\gamma}) dx \\ &+ \int_0^{2\pi} (\gamma - \gamma_d) \frac{1}{\langle n, r \rangle \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_\gamma} \psi_2 \Big|_\gamma d\theta ; \end{aligned}$$

appliquons la formule de Green; le système précédent s'interprète ainsi :

(1) Cette hypothèse est physiquement raisonnable : cf. T. GALLOUËT [1, 2].

$$(2.47) \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_1 = u - u_d \text{ dans } \mathcal{O}_\Gamma \setminus \overline{\Omega}_\gamma \\ \Delta p_2 + \lambda p_2 = u - u_d \text{ dans } \Omega_\gamma \\ p_1 - p_2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} (p_1 - p_2) = \frac{\gamma - \gamma_d}{\langle n, r \rangle \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}\right)^2}} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_\gamma \\ p_1|_\Gamma = 0 \end{array} \right\} \text{ sur } \gamma$$

d'où la proposition

Proposition 2.7. - La fonctionnelle j définie par (2.46) est de classe C^1 pour les normes : $\mathbb{R} \times C^{2+\alpha} \rightarrow \mathbb{R}$ et admet pour dérivées :

$$(2.48) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial \Gamma}(\lambda, \Gamma) \cdot \delta \Gamma = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial p_1}{\partial n} + \frac{1}{2} (u - u_d)^2 \right) \langle n, r \rangle \cdot \delta \Gamma \, d\sigma \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda}(\lambda, \Gamma) \cdot \delta \lambda = \delta \lambda \times \int_{\Omega_\gamma} u p_1 \, dx \end{array} \right.$$

où p_1 est solution du système (2.47). ▣

3. ETUDE DES BRANCHES DE SOLUTIONS

Nous introduisons dans ce paragraphe une nouvelle formulation du problème à frontière libre qui permettra d'obtenir quelques résultats supplémentaires concernant les branches de solutions du problème initial.

3.1. PRELIMINAIRES

Désormais la frontière $\Gamma = \partial \mathcal{O}$ est fixe et de classe $C^{\ell+\alpha}$ ($\ell \in \mathbb{N}, \ell \geq 2, \alpha \in]0, 1[$) ; on appellera solution du Problème (2.5) un couple (λ, γ) tel que (2.5) soit vérifié (resp. solution du Problème (2.3) un couple $(\lambda, u) \dots$).

Nous nous plaçons désormais au voisinage d'un couple (λ_0, γ_0) tel que

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda_0, \gamma_0) \text{ est solution de (2.5)} \\ \gamma_0 \text{ est une courbe de classe } C^{\ell+\alpha}. \end{array} \right.$$

Donnons-nous un champ de vecteur V transverse et régulier au sens du Paragraphe 1 sur γ_0 qui servira à repérer la frontière générique γ et introduisons l'application suivante :

Pour $\lambda > 0$, γ au voisinage de γ_0 , on pose

$$(3.2) \quad \Psi(\lambda, \gamma) = [U_1(\lambda, \gamma) - U_2(\lambda, \gamma)]|_{\gamma}$$

où

$$U(\lambda, \gamma) = [U_1(\lambda, \gamma), U_2(\lambda, \gamma)]$$

est la solution du système suivant, où l'on a omis la variable (λ, γ) et où a est une constante précisée plus loin :

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta U_1 = -\lambda U_1 \text{ dans } \Omega_{\gamma} \\ \Delta U_2 = 0 \text{ dans } \mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}_{\gamma} \\ \frac{\partial U_1}{\partial n} + a U_1 = \frac{\partial U_2}{\partial n} + a U_2 \text{ sur } \gamma \\ U_2 = 0 \text{ sur } \gamma \\ U_2 = 1 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

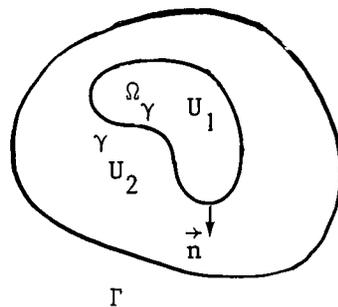


Fig. 9

La trace (3.2) définit une fonction de $C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ par l'intermédiaire du repérage⁽¹⁾

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(\lambda, \gamma)[\theta] = U_1(\lambda, \gamma) - U_2(\lambda, \gamma) \text{ au point } x \\ \text{avec} \\ x = x_0 + \gamma(\theta) V(x_0), \quad x_0 \in \gamma_0. \end{array} \right.$$

(1) On peut aussi définir cette trace par un changement de variable comme dans (2.21)

Il convient de vérifier que la correspondance U et l'application Ψ sont bien définies; c'est l'objet de la proposition suivante (démontrée en Annexe 3).

Proposition 3.1. - Si γ_0 vérifie (3.1), alors il existe⁽¹⁾ un réel a tel que le problème (3.3) est bien posé.

Remarque 3.1. - Nous ne supposons plus que le problème linéarisé est bien posé (Hypothèse (2.4) ii). □

Nous supposons désormais que

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{La constante } a \text{ est telle que } \lambda_0 \text{ n'est pas une valeur propre du pro-} \\ \text{blème (3.3) pour } \gamma = \gamma_0 \end{array} \right.$$

Des résultats classiques sur la dépendance d'une valeur propre par rapport au domaine (voir les références données dans le Paragraphe 1) montrent que si la propriété (3.5) est vraie pour un couple (λ_0, γ_0) , elle est encore vraie pour tout (λ, γ) dans un voisinage convenable de (λ_0, γ_0) .

En particulier, on a la proposition suivante (démontrée en Annexe 4).

Proposition 3.2. - Sous les hypothèses (3.1) et (3.5), l'application Ψ est définie par (3.2), (3.3) est analytique (réelle) au voisinage de (λ_0, γ_0) pour les normes $\mathbb{R} \times C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ dans $C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ □

3.2. - POINTS SINGULIERS DE L'APPLICATION Ψ

Définition(s) 3.1. - Nous appellerons point singulier ou point critique tout couple (λ_1, γ_1) solution de $\Psi(\lambda_1, \gamma_1) = 0$ satisfaisant à (3.1) et tel que :

$$(3.6) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}(\lambda_1, \gamma_1) \notin \text{Aut} [C_{\text{per}}^{\ell+\alpha}(\gamma_0)]$$

(a étant choisi tel que (3.5) ait lieu pour (λ_1, γ_1)) ;
les couples solutions non singuliers sont dits réguliers. □

Les points singuliers et réguliers sont caractérisés par les propositions suivantes :

Proposition 3.3. (cas régulier) : Plaçons-nous sous les hypothèses (3.1) et (3.5) et considérons le système suivant :

(1) Nous ne savons pas montrer que le problème (3.3) est bien posé pour $a = 0$: il nous semble possible que λ soit à la fois la première valeur propre du problème de Dirichlet dans Ω_γ et une valeur propre du problème de Neumann dans le même domaine.

$$(3.7) \left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi = -\lambda_0 \chi_{\Omega_{\gamma_0}} \phi \quad \text{dans } \mathcal{O} \\ \phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad \int_{\mathcal{O}} \phi^2 dx = 1; \\ \text{on posera } \phi_1 = \phi|_{\bar{\Omega}_{\gamma_0}}, \quad \phi_2 = \phi|_{\bar{\mathcal{O}} \setminus \bar{\Omega}_{\gamma_0}}. \end{array} \right.$$

Si le système (3.7) n'a pas de solution et si on a

$$(3.8) \quad \frac{\partial u_0}{\partial n} > 0 \quad \text{sur } \gamma_0,$$

alors l'opérateur $A = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma}(\lambda_0, \gamma_0)$ est un isomorphisme de $C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ sur lui-même qui a pour expression

$$(3.9) \left\{ \begin{array}{l} A \delta \gamma = (W_1 - W_2)|_{\gamma_0} \quad \text{avec} \\ (\Delta + \lambda) W_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\gamma_0} \\ \Delta W_2 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}_{\gamma_0} \\ \left. \begin{array}{l} (\frac{\partial}{\partial n} + a)(W_1 - W_2) = 0 \\ W_2 = \frac{\partial W_2}{\partial n} \langle n, V \rangle \delta \gamma \end{array} \right\} \quad \text{sur } \gamma_0 \\ W_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

et dont l'inverse A^{-1} a pour expression

$$(3.10) \left\{ \begin{array}{l} A^{-1} \beta = \frac{1}{k} X_2|_{\gamma_0} \quad \text{avec } k = \frac{\partial U_2}{\partial n}|_{\gamma_0} \langle n, V \rangle, \quad \text{et avec} \\ (\Delta + \lambda) X_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\gamma_0} \\ \Delta X_2 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}_{\gamma_0} \\ \left. \begin{array}{l} (\frac{\partial}{\partial n} + a)(X_1 - X_2) = 0 \\ X_1 - X_2 = \beta \end{array} \right\} \quad \text{sur } \gamma_0 \\ X_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad \square$$

Pour certains cas singuliers nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.4. (cas singulier) : Plaçons-nous sous les hypothèses (3.1) et (3.5) et supposons que (3.8) ait lieu mais que le système (3.7) admette λ_0 pour valeur propre simple.

Alors l'opérateur $A = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma}(\lambda_0, \gamma_0)$ est un opérateur de Fredholm; son noyau est de dimension 1 et défini par :

$$(3.11) \quad \text{Ker } A = \mathbb{R} \left\{ \frac{1}{k} \phi_2|_{\gamma} \right\}$$

(ϕ_2 défini en (3.7), k en (3.10)).

son image est de codimension 1 et définie par

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Im } A = (\text{Ker } A^*)^\perp \\ \text{Ker } A^* = \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial n} + a \phi_1 \right\}; \phi_1 \text{ défini en (3.7)}. \end{array} \right.$$

Les démonstrations de ces propositions sont données au Paragraphe 3.3.

□

Définition 3.2. - Nous appellerons rameau de solutions du problème (2.5) une composante connexe de l'ensemble des solutions régulières de l'équation $\Psi(\lambda, \gamma) = 0$.

□

Un tel ensemble est donc limité par des points singuliers ou à l'infini.

De la Proposition 3.2 nous déduisons par le théorème des fonctions implicites (M.M. VAINBERG, V.A. TRENIGIN [1]) la proposition suivante :

Proposition 3.5. - Tout rameau \mathcal{R} admet localement un paramétrage du type suivant : pour tout couple (λ_0, γ_0) appartenant à \mathcal{R} , il existe un réel strictement positif $\varepsilon(\lambda_0)$ tel que, si l'on pose

$$B_0 = \{\lambda; |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon(\lambda_0)\},$$

alors il existe une application analytique

$$\Gamma : B_0 \rightarrow C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$$

telle que

$$(3.13) \quad \{(\lambda, \gamma) \in \mathcal{R}; \lambda \in B_0\} = \{(\lambda, \Gamma(\lambda)); \lambda \in B_0\},$$

l'égalité étant entendue au sens du repérage utilisé au Paragraphe 2.

□

Cette proposition signifie que le choix de λ comme paramètre est sous les conditions précédentes pleinement justifié et que l'application $\lambda \mapsto \Gamma(\lambda)$ est analytique mais définie ici seulement localement du fait du choix du repérage. Il est en fait possible de construire une famille de difféomorphismes indexée en λ qui déforme une frontière libre solution γ_0 correspondant à λ_0 en une quelconque autre solution γ du rameau correspondant à un λ :

$$\gamma = T_{\lambda_0}(\lambda) \gamma_0.$$

Cette propriété découle de la définition du rameau \mathcal{R} ; il est intéressant de noter qu'elle a encore lieu pour les rameaux du problème initial (2.3) :

Corollaire 1 - Soit $\mathcal{R}_1 = \{(\lambda, u), \lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[\}$ où $\lambda = \lambda(t)$, $u = u(t)$ sont des fonctions continues de $]0, 1[$ respectivement dans \mathbb{R} et $L^2(\Omega)$ et telles que

$$\left[\begin{array}{l} \forall t \in]0, 1[, (\lambda(t), u(t)) \text{ est une solution de (2.5)} \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t) > 0 \text{ sur la frontière libre correspondante} \\ (3.7) \text{ n'a pas de solution} \end{array} \right.$$

alors toutes les frontières libres de ce rameau sont difféomorphes les unes aux autres.

Démonstration : $\forall (\lambda_0, u_0) \in \mathcal{R}_1$, la F.L. correspondante est régulière. Montrons qu'au voisinage de (λ_0, u_0) , \mathcal{R}_1 est confondu avec le rameau \mathcal{R} (au sens de la Définition 3.2) qui passe par (λ_0, γ_0) : D'après le théorème des fonctions implicites, le rameau \mathcal{R} est continu en (λ_0, γ_0) donc en (λ_0, u_0) or, puisque (3.7) n'a pas de solution, il y a unicité locale pour le problème (2.3) (cf. T. GALLOUET [1]).

3.3. - DEMONSTRATIONS

3.3.1. - Démonstration de la Proposition 3.3

Pour calculer la dérivée de Ψ , il faut d'abord calculer la dérivée de (U_1, U_2) solution de (3.3); à cet effet nous introduisons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \gamma, U_1, U_2, \psi) &= \int_{\Omega_\gamma} [\Delta U_1 + \lambda U_1] \psi_1 \, dx \\ &+ \int_{\sigma \setminus \bar{\Omega}_\gamma} \Delta U_2 \psi_2 \, dx + \int_\gamma \psi_3 \left[\frac{\partial}{\partial n} + a \right] [U_1 - U_2] \, d\sigma \\ &+ \int_\gamma U_2 \psi_4 \, d\sigma + \int_\Gamma \psi_3 (U_2 - 1) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Dérivons par rapport à γ l'identité

$$\Phi(\lambda, \gamma, U_1(\lambda, \gamma), U_2(\lambda, \gamma), \psi) = 0 ;$$

nous obtenons, via les lemmes de mécanique⁽¹⁾ et en posant $W_i = \frac{\partial U_i}{\partial \gamma} \cdot \delta \gamma$

(1) On utilise la formule de Green

$$\begin{aligned} \int_\gamma \psi_3 \frac{\partial U_1}{\partial n} \, d\sigma &= \int_{\Omega_\gamma} (\langle \nabla U_1, \nabla \psi_3 \rangle + \psi_3 \Delta U_1) \, dx \\ - \int_\gamma \psi_3 \frac{\partial U_2}{\partial n} \, d\sigma &= \int_{\sigma \setminus \bar{\Omega}_\gamma} (\langle \nabla U_2, \nabla \psi_3 \rangle + \psi_3 \Delta U_2) \, dx - \int_\Gamma \psi_3 \frac{\partial U_2}{\partial n} \, d\sigma; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\Delta W_1 + W_1) \psi_1 \, dx + \int_{\partial \Omega} \lambda_{\Omega} \Delta W_2 \psi_2 \, dx \\
& + \int_{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n} + a \right) (W_1 - W_2) \psi_3 \, d\sigma + \int_{\gamma} W_2 \psi_4 \, d\sigma + \int_{\partial \Omega} W_2 \psi_5 \, d\sigma \\
& = \int_{\gamma} [\Delta U_1 + \lambda U_1] \psi_1 \langle n, V \rangle \delta \gamma - \int_{\gamma} \Delta U_2 \psi_2 \langle n, V \rangle \delta \gamma \, d\sigma \\
& + \int_{\gamma} [\langle \nabla U_1, \nabla \psi_3 \rangle + \psi_3 \Delta U_1 - \langle \nabla U_2, \nabla \psi_3 \rangle - \psi_3 \Delta U_2] \langle n, V \rangle \delta \gamma \, d\sigma \\
& + \int_{\gamma} \{ \langle \nabla [a(U_1 - U_2) \psi_3 + U_2 \psi_4], n \rangle + H [a(U_1 - U_2) \psi_3 + U_2 \psi_4] \langle n, V \rangle \delta \gamma \, d\sigma
\end{aligned}$$

Mais si nous utilisons le système (3.3) vérifié par (U_1, U_2) et le fait que (λ, γ) est solution du problème (2.5), le second membre de l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned}
& 0 + 0 + \int_{\gamma} \left\{ \frac{\partial U_1}{\partial n} \frac{\partial \psi_3}{\partial n} + 0 + 0 - \frac{\partial U_2}{\partial n} \frac{\partial \psi_3}{\partial n} - 0 - 0 \right. \\
& + 0 + a \psi_3 \left(\frac{\partial U_1}{\partial n} - \frac{\partial U_2}{\partial n} \right) + 0 + \psi_4 \frac{\partial U_2}{\partial n} + U_2 \frac{\partial \psi_4}{\partial n} + H [0 + 0] \} \langle n, V \rangle \delta \gamma \, d\sigma \\
& = \int_{\gamma} \psi_4 \frac{\partial U_2}{\partial n} \langle n, V \rangle \delta \gamma \, d\sigma.
\end{aligned}$$

donc (W_1, W_2) vérifie le système (3.9); la dérivée de Ψ par rapport à γ s'obtient par dérivation composée

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \cdot \delta \gamma = (W_1 - W_2) \Big|_{\gamma} + \langle \nabla (U_1 - U_2), V \rangle \delta \gamma$$

mais pour une solution du problème (2.5) nous avons

$$\nabla (U_1 - U_2) \Big|_{\gamma_0} = 0$$

d'où la première ligne de (3.9).

D'après le Paragraphe 2, $\frac{\partial U_2}{\partial n} \Big|_{\gamma_0}$ est de classe $C^{\ell+\alpha}$ et par conséquent, compte tenu des résultats classiques sur les systèmes elliptiques (AGMON - DOUGLIS - NIRENBERG [1, 2]), les fonctions W_1, W_2, X_1, X_2 sont de classe $C^{\ell+\alpha}$, ce qui implique que les opérateurs A et A^{-1} , qui sont trivialement inverses l'un de l'autre, sont linéaires continus de $C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ dans lui-même.

□

3.3.2. - Démonstration de la Proposition 3.4

Nous démontrons en Annexe 5 le lemme suivant :

Lemme 3.1 : L'opérateur A est fermé de $C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ dans lui-même.

□

Montrons l'assertion (3.11) : Si $A \delta \gamma = 0$, alors le couple (W_1, W_2) solution de (3.9) est identique à la solution (ϕ_1, ϕ_2) de (3.7) et l'on a :

$$W_2|_{\gamma_0} = \phi_2|_{\gamma_0} = k \delta\gamma .$$

Le Lemme 1 entraîne la première partie de (3.12); pour montrer la deuxième partie de (3.12), nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2 : Soit A^* l'opérateur suivant

$$(3.14) \quad A^* \xi = k \frac{\partial}{\partial n} (\zeta_1 - \zeta_2)|_{\gamma_0}$$

avec

$$(3.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Delta + \lambda) \zeta_1 = 0 \text{ dans } \Omega_{\gamma_0} \\ \Delta \zeta_2 = 0 \text{ dans } \mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}_{\gamma_0} \\ \zeta_1 - \zeta_2 = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial}{\partial n} + a\right) \zeta_1 = \xi \text{ sur } \gamma_0 \\ \zeta_2 = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Alors, pour tout couple $(\xi, \delta\gamma)$ d'éléments de $C^{\lambda+\alpha}(\gamma_0)$ on a

$$(3.16) \quad \int_{\gamma_0} \xi A \delta\gamma \, d\sigma = \int_{\gamma_0} \delta\gamma A^* \xi \, d\sigma .$$

Remarque 3.2 - Le choix du produit (3.16) se justifie de la manière suivante : A est un endomorphisme de $H^{1/2}(\gamma_0)$ et A^* un endomorphisme de $H^{-1/2}(\gamma_0)$.

Démonstration du lemme : Nous avons □

$$\int_{\gamma_0} \xi A \delta\gamma \, d\sigma = \int_{\gamma_0} \xi (W_1 - W_2) \, d\sigma = \int_{\gamma_0} \xi (W_1 - k \delta\gamma) \, d\sigma ;$$

calculons

$$I = \int_{\gamma_0} \xi W_1 \, d\sigma$$

on a

$$I = \int_{\gamma_0} W_1 \left[\frac{\partial \zeta_1}{\partial n} + a \zeta_1 \right] d\sigma ;$$

appliquons la formule de Green :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} W_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial n} \, d\sigma &= \int_{\gamma_0} \zeta_1 \frac{\partial W_1}{\partial n} \, d\sigma + \int_{\Omega_{\gamma_0}} [W_1 \Delta \zeta_1 - \zeta_1 \Delta W_1] \, dx \\ &= \int_{\gamma_0} \zeta_1 \frac{\partial W_1}{\partial n} \, d\sigma + \int_{\Omega_{\gamma_0}} \lambda [W_1 \zeta_1 - W_1 \zeta_1] \, dx ; \end{aligned}$$

la seconde intégrale est donc nulle; réinjectons dans I :

$$I = \int_{\gamma_0} \zeta_1 \left[\frac{\partial W_1}{\partial n} + a W_1 \right] d\sigma$$

et d'après les équations en W_i et ζ_i

$$I = \int_{\gamma_0} \zeta_2 \left[\frac{\partial W_2}{\partial n} + a W_2 \right] d\sigma ;$$

Appliquons maintenant la formule de Green dans Ω_2 (en tenant compte de l'orientation de \vec{n})

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} \zeta_2 \frac{\partial W_2}{\partial n} d\sigma &= \int_{\Gamma} \zeta_2 \frac{\partial W_2}{\partial n} - \int_{\Gamma} W_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial n} + \int_{\gamma_0} W_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial n} \\ &+ \int_{\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}_2 \setminus \gamma_0} [W_2 \Delta \zeta_2 - \zeta_2 \Delta W_2] dx \end{aligned}$$

d'où

$$I = \int_{\gamma_0} W_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial n} + a \zeta_2 W_2 ;$$

Nous avons donc au total :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} \xi A \delta\gamma d\sigma &= \int_{\gamma_0} W_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial n} + a \zeta_2 W_2 - W_2 \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial n} + a \zeta_1 \right) d\sigma \\ &= \int_{\gamma_0} W_2 \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial n} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial n} \right) d\sigma \\ &= \int_{\gamma_0} \delta\gamma A^* \xi d\sigma . \end{aligned} \quad \square$$

Pour expliciter $\text{Ker } A^*$, il suffit de remarquer que $A^* \xi = 0$ équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + \lambda)\zeta_1 = 0 \text{ dans } \Omega_\gamma, \Delta \zeta_2 = 0 \text{ dans } \mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}_\gamma \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial n} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial n} = 0, \zeta_1 - \zeta_2 = 0, \left(\frac{\partial}{\partial n} + a \right) \zeta_1 = \xi \text{ sur } \gamma \\ \zeta_2|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit $(\zeta_1, \zeta_2) = (\Phi_1, \Phi_2)$ et (3.12).

□

3.4. - CONSERVATIONS ET REGULARITE AU VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER

3.4.1. - Hypothèses

Plaçons-nous au voisinage d'une solution (λ_0, γ_0) singulière vérifiant (3.8) et telle que (3.7) admette λ_0 pour valeur propre simple.

Nous supposons aussi que

- (3.17) les frontières γ_0 et $\partial\Omega$ admettent l'axe Ox comme axe de symétrie.
- (3.18) la solution ϕ de (3.7) n'admet pas Ox comme axe de symétrie : Ox est donc un axe d'antisymétrie pour ϕ .

3.4.2. - Régularité de la branche symétrique

Proposition 3.6. - On se place sous l'hypothèse (3.1) et sous les hypothèses du Paragraphe 3.4.1; alors au point (λ_0, γ_0) se raccordent exactement un couple de rameaux, \mathcal{R}_+ (avec $\lambda > \lambda_0$), \mathcal{R}_- (avec $\lambda < \lambda_0$) dont tous les points sont des solutions symétriques par rapport à Ox ; ces deux rameaux, qui sont analytiques d'après la Proposition 5, se raccordent analytiquement en (λ_0, γ_0) et les frontières libres de ces rameaux sont difféomorphes à γ_0 .

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites à l'application Ψ dans l'espace des fonctions symétriques de $C^{\lambda+\alpha}(\gamma_0)$ (c'est-à-dire qui prennent des valeurs identiques en des points de γ_0 symétriques par rapport à Ox).

Le nouvel espace ainsi introduit est un espace de Banach; le noyau de $A = \frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}$ étant antisymétrique, la restriction de A à cet espace est un isomorphisme, et par conséquent le théorème des fonctions implicites s'applique à nouveau.

□

Remarque 3.3 - La formulation en fonction de la frontière libre et l'introduction de la fonction ψ de ce paragraphe permettent de se retrouver dans un contexte classique (différentiabilité etc...); en particulier nous pouvons en tirer une condition suffisante de bifurcation (malheureusement difficile à vérifier) que nous donnons en Annexe 6.

□

CONCLUSION

La méthode développée dans ce travail est une méthode efficace pour l'étude du comportement de la frontière libre.

Elle aboutit à des résultats locaux d'existence, d'unicité, de régularité spatiale et de régularité par rapport aux données, et permet d'exhiber des expressions simples des gradients des solutions par rapport aux données, ce qui permet de les utiliser en Contrôle Optimal.

Cette méthode permet aussi d'étudier des branches de solutions et elle peut s'adapter à l'étude de points singuliers.

Enfin elle est susceptible de s'appliquer à de nombreux autres problèmes à frontière libre et nous donnerons dans des rapports faisant suite à celui-ci plusieurs autres exemples.

REMERCIEMENTS : Ce rapport doit beaucoup à B. NICOLAENKO et R. TEMAM que je tiens à remercier ici.

ANNEXE N° 1

LEMES DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Certains des lemmes de dérivation suivants sont classiques en mécanique des milieux continus (dérivées particulières : voir P. GERMAIN [1]). Le lecteur pourra trouver des démonstrations des deux premiers dans F. MURAT, J. SIMON [3] (Chapitre IV).

Hypothèses : Les notations sont celles du Paragraphe 1.3; la frontière γ est paramétrée par un champ transverse régulier V et varie dans $C^k(\partial\Omega)$, C est une application dérivable de $\bar{\Omega} \times C^k(\partial\Omega)$ dans $C^2(\bar{\Omega})$ et $k \geq 1$.

Lemme 1

$$\frac{d}{d\gamma} \left[\int_{\Omega_\gamma} C(\gamma) dx \right] \cdot \delta\gamma = \int_{\Omega_\gamma} \frac{\partial C}{\partial \gamma}(\gamma) \cdot \delta\gamma dx + \int_{\gamma} C(\gamma) \langle n, V \rangle \delta\gamma d\sigma$$

Lemme 2

$$\frac{d}{d\gamma} \left[\int_{\gamma} C(\gamma) d\sigma \right] \cdot \delta\gamma = \int_{\gamma} \frac{\partial C}{\partial \gamma} \cdot \delta\gamma d\sigma + \int_{\gamma} \{ \langle \text{grad}_x C, n \rangle + H C \} \langle n, V \rangle \delta\gamma d\sigma$$

où H est la courbure de γ (positive si Ω_γ est convexe).

Lemme 3

$$\forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega})$$

$$\frac{d}{d\gamma} \left[\int_{\gamma} \varphi \frac{\partial C(\gamma)}{\partial n} d\sigma \right] \cdot \delta\gamma = \int_{\gamma} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\partial C}{\partial \gamma} \cdot \delta\gamma \right] d\sigma + \int_{\gamma} [\langle \text{grad}_x C, \text{grad}_x \varphi \rangle + \varphi \Delta_x C] \langle n, V \rangle \delta\gamma d\sigma.$$

(On utilise la formule de Green et le Lemme 1). ▣

Remarque : Les lemmes précédents sont encore vrais si l'ouvert variable est repéré par un difféomorphisme T ; on remplace la dérivation par rapport à γ par la dérivation par rapport à T et on pose

$$V = \delta T \circ T^{-1}$$

(voir F. MURAT, J. SIMON [2], [3] ou B. PALMERIO, A. DERVIEUX [1][2]).

ANNEXE N° 2

PROPRIETES DE REGULARITE DE L'APPLICATION $(T, f) \rightarrow f \circ T$

Nous nous inspirerons des démonstrations de F. MURAT, J. SIMON ([3], § 4.1.3).

On note B la boule unité de \mathbb{R}^N , B_1 une boule contenant \bar{B} , T_0 un difféomorphisme de classe $C^{1+\alpha}$ (cf. Définition 1.3) et f_0 une fonction de $C^\alpha(\bar{B}_1)$ ($\alpha \in [0, 1[$).

1. - CONTINUITÉ

Lemme 1 - L'application

$$E_1 : (T, f) \rightarrow f \circ T$$

est continue de $[C^{\alpha+1}(\bar{B})]^N \times C^\alpha(\bar{B}_1) \rightarrow C^\alpha(\bar{B})$ dans un voisinage de (T_0, f_0) .

Démonstration - Enonçons d'abord quelques inégalités ($\alpha \in [0, 1[$)⁽¹⁾ :

- (1) $|f \cdot g|_\alpha \leq 2 |f|_\alpha |g|_\alpha$
- (2) $|f \circ g|_\alpha \leq (1 + |g|_1^\alpha) |f|_\alpha$
- (3) $\left| \int_0^1 f(., h) dh \right|_\alpha \leq \text{Max}_h |f(., h)|_\alpha$.

Nous devons estimer la différence

$$E = |(f + \delta f) \circ (T + \delta T) - f \circ T|_\alpha ;$$

On a

$$E \leq E_1 + E_2$$

avec

$$E_1 = |(f + \delta f) \circ (T + \delta T) - f \circ (T + \delta T)|_\alpha$$

$$E_2 = |f \circ (T + \delta T) - f \circ T|_\alpha$$

Estimation de E_1

$$E_1 \leq |\delta f| [|T + \delta T|_1^\alpha + 1]$$

d'où

$$E_1 \rightarrow 0 \text{ quand } |\delta f|_\alpha + |\delta T|_{1+\alpha} \rightarrow 0$$

Estimation de E_2 - Soit φ un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\begin{aligned} f \circ (T + \delta T) - f \circ T &= (f - \varphi) \circ (T + \delta T) - (f - \varphi) \circ T \\ &\quad + [\varphi \circ (T + \delta T) - \varphi \circ T] \end{aligned}$$

les deux premiers termes de la somme du deuxième membre se majorent ainsi :

(1) Nous utilisons la notation simplifiée : $|\cdot|_\alpha = |\cdot|_{C^\alpha}$.

$$(4) \quad | [f - \varphi] \circ T |_{\alpha} < |f - \varphi|_{\alpha} (1 + |T|_1^{\alpha})$$

$$(5) \quad | (f - \varphi) \circ (T + \delta T) |_{\alpha} < |f - \varphi|_{\alpha} (1 + |T + \delta T|_1^{\alpha})$$

d'autre part pour tout x on a :

$$\varphi \circ (T + \delta T)(x) - \varphi \circ T(x) = \int_0^1 \langle (\text{grad } \varphi) \circ (T + h \delta T)(x), \delta T(x) \rangle dh$$

majorons d'abord la norme dans C^0

$$(6) \quad | \varphi \circ (T + \delta T) - \varphi \circ T |_0 \leq | \text{grad } \varphi |_0 | \delta T |_0$$

Etudions la semi-norme $C^{\alpha(1)}$

$$\int_0^1 \{ \langle (\text{grad } \varphi) \circ (T + h \delta T)(x), \delta T(x) \rangle - \langle (\text{grad } \varphi) \circ (T + h \delta T)(y), \delta T(y) \rangle \} dh = \\ = A_1 + A_2$$

avec

$$A_1 = \int_0^1 \langle (\text{grad } \varphi) \circ (T + h \delta T)(x), \delta T(x) - \delta T(y) \rangle dh$$

$$A_2 = \int_0^1 \langle (\text{grad } \varphi) \circ (T + h \delta T)(x) - (\text{grad } \varphi) \circ (T + h \delta T)(y), \delta T(y) \rangle dh$$

d'où

$$A_1 \leq | \text{grad } \varphi |_0 [\delta T]_{\alpha} |x - y|^{\alpha}$$

$$A_2 \leq | \delta T |_0 [\text{grad } \varphi]_{\alpha} |T + h \delta T|_1^{\alpha} |x - y|^{\alpha} .$$

Finalement pour $\delta T < \eta(T)$ on a :

$$(7) \quad | f \circ (T + \delta T) - f \circ T |_{\alpha} \leq 3 \{ |f - \varphi|_{\alpha} + | \text{grad } \varphi |_{\alpha} | \delta T |_{\alpha} \} (1 + |T|_1^{\alpha})$$

Des estimations (4), (5) et (7) (en choisissant φ puis $\eta(T)$) on déduit la continuité de l'application E_1 . ■

2. - DERIVABILITE

Lemme 2 - Si f_0 appartient à $C^{\alpha+1}(\bar{B}_1)$, alors l'application

$$E_2 : (T, f) \rightarrow f \circ T$$

est pour $\alpha \in [0, 1[$ de classe C^1 de $[C^{\alpha+1}(\bar{B})]^N \times C^{\alpha+1}(\bar{B}_1)$ dans $C^{\alpha}(\bar{B}_1)$ dans un voisinage de (T_0, f_0) .

Démonstration - Nous devons estimer la norme suivante :

$$E = | (f + \delta f) \circ (T + \delta T) - f \circ T - \delta f \circ T - Df \circ T \cdot \delta T |_{\alpha}$$

(1) On rappelle que cette semi-norme a pour expression

$$[f]_{\alpha} = \text{Sup}_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha}}$$

que nous décomposons ainsi

$$E \leq E_1 + E_2$$

$$E_1 = |(f + \delta f) \circ (T + \delta T) - f \circ (T + \delta T) - \delta f \circ T|_\alpha$$

$$E_2 = |f \circ (T + \delta T) - f \circ T - Df \circ T \cdot \delta T|_\alpha$$

Estimation de E_1 - Nous avons

$$E_1 = \left| \int_0^1 D \delta f \circ (T + h \delta T) \cdot \delta T dh \right|_\alpha$$

d'où (cf. (1) (2) (3)).

$$(8) \quad E_1 \leq 2 |D \delta f|_\alpha |\delta T|_\alpha \max_h (1 + (T + h \delta T)_1^\alpha).$$

Estimation de E_2 - Nous avons

$$E_2 = \left| \int_0^1 \text{grad } f \circ (T + h \delta T) - \text{grad } f \circ T, \delta T > dh \right|_\alpha$$

Suivons la démonstration du Lemme 1; pour

$$|\delta T|_{1+\alpha} < \eta(T)$$

on a (voir(7))

$$E_2 \leq 3 |\delta T|_\alpha (1 + |T|_1^\alpha) |\text{grad } f - \varphi|$$

Pour φ assez proche de $\text{grad } f$ puis δT assez petit on a

$$(9) \quad E_2 \leq \varepsilon |\delta T|_\alpha,$$

ce qui, joint à (8) nous donne la dérivabilité de E_2 .

Montrons maintenant la continuité de l'application

$$\begin{aligned} E_2' : [C^{1+\alpha}(\bar{B})]^N \times C^{1+\alpha}(\bar{B}_1) &\rightarrow \mathcal{L}([C^{1+\alpha}(\bar{B})]^N \times C^{1+\alpha}(\bar{B}_1) ; C^\alpha(\bar{B})) \\ (T, f) &\mapsto E_2'(T, f) \end{aligned}$$

définie par

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \delta T \in [C^{1+\alpha}(\bar{B})]^N, \delta f \in C^{1+\alpha}(\bar{B}_1) \\ E_2'(T, f) \cdot (\delta T, \delta f) = \delta f \circ T + Df \circ T \cdot \delta T. \end{array} \right.$$

Il faut estimer la différence

$$E = E_2'(T + \delta T_1, f + \delta f_1) - E_2'(T, f);$$

on a

$$E = E_1 + E_2$$

$$E_1 = \delta f \circ (T + \delta T_1) - \delta f \circ T$$

$$E_2 = \{D(f + \delta f_1) \circ (T + \delta T_1) - Df \circ T\} \cdot \delta T$$

Estimons E_1 :

$$E_1 = \int_0^1 D \delta f \circ (T + h \delta T_1) \cdot \delta T_1 \, dh$$

d'où

$$|E_1|_\alpha \leq 2 |D \delta f|_\alpha (1 + |T + h \delta T_1|_1^\alpha) |\delta T_1|_\alpha$$

et pour $|\delta T_1| < \eta(T)$

$$(11) \quad |E_1|_\alpha \leq 3 |\delta f|_{\alpha+1} (1 + |T|_1^\alpha) |\delta T|_\alpha$$

d'autre part

$$(12) \quad |E_2|_\alpha \leq |\delta T|_\alpha |D(f + \delta f_1) \circ (T + \delta T_1) - Df \circ T|_\alpha ;$$

Lorsque $|\delta T_1|_{1+\alpha} + |\delta f_1|_{1+\alpha}$ tend vers 0, le deuxième facteur du produit de droite tend vers 0 (cf. le Paragraphe 1). Ce qui, joint à (11) assure la continuité de E_2' .

3. - GENERALISATION AUX ESPACES $C^{\ell+\alpha}$ $\ell \geq 1$

Proposition 1 : On suppose que T_0 est un difféomorphisme de classe $C^{\ell+\alpha}(\bar{B}_1)$, Pour ℓ, k entiers $\ell \geq k \geq 1$, $\alpha \in [0, 1[$, l'application

$$\Xi : (T, f) \rightarrow f \circ T$$

est de classe C^k de $[C^{\ell+\alpha}(\bar{B})]^N \times C^{\ell+\alpha}(\bar{B}_1)$ dans $C^{\ell+\alpha-k}(\bar{B})$ dans un voisinage de (T_0, f_0) .

Démonstration

1°) Le cas $k = 1$ - Les démonstrations de F. MURAT, J. SIMON ([3] § IV, pp. 11-12 et 13-14) se transposent sans adaptation notable; nous donnons la démonstration de la dérivabilité pour mémoire : montrons que E_2 (Lemme 2) est dérivable de $[C^{\ell+\alpha}(\bar{B})]^N \times C^{\ell+\alpha}(\bar{B}_1)$ dans $C^{\ell-1+\alpha}(\bar{B})$ ($\ell \geq 1$).

Dans une première étape on démontre l'équivalence des deux hypothèses de récurrence suivantes pour $\ell \geq 2$.

$$(H.R.1.\ell) \quad E_2 \text{ est dérivable de } [C^{\ell+\alpha}(\bar{B})]^N \times C^{\ell+\alpha}(\bar{B}_1) \rightarrow C^{\ell-1+\alpha}(\bar{B})$$

$$(H.R.2.\ell) \quad (E_2, E_3) \text{ est dérivable de } [C^{\ell+\alpha}(\bar{B})]^N \times C^{\ell+\alpha}(\bar{B}_1) \rightarrow [C^{\ell-2+\alpha}(\bar{B})]^{N+1}$$

avec

$$(13) \quad E_3(T, f) = \text{grad}(f \circ T).$$

L'implication suivante est triviale

$$(H.R.1.\ell) \implies (H.R.2.\ell)$$

l'implication dans le sens inverse se prouve en observant que (au sens des distributions)

$$(14) \quad \text{grad} \left(\frac{\partial}{\partial T} (f \circ T)(T) \cdot \delta T \right) = \frac{\partial}{\partial T} (\text{grad}(f \circ T)(T) \cdot \delta T)$$

$$(15) \quad \text{grad} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (\varphi \circ T) \Big|_{\varphi=f} \cdot \delta \varphi \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\text{grad } \varphi \circ T) \Big|_{\varphi=f} \cdot \delta \varphi .$$

Dans une deuxième étape on démontre que pour $\ell \geq 1$ on a

$$(H.R.1.\ell) \implies (H.R.2.\ell+1)$$

en effet c'est une conséquence de l'identité suivante

$$(16) \quad \text{grad}(f \circ T) = \text{grad } f \circ T \cdot DT .$$

D'où la propagation de la récurrence, son départ étant assuré par le lemme 2.

2°) Le cas $k > 1$ - Il résulte du cas $k = 1$ via la formule des dérivations successives des fonctions composées. ▣

4. - DERIVABILITE DE L'APPLICATION $(\gamma,) \rightarrow \varphi|_{\gamma}$

Plaçons nous sous les hypothèses et notations du Paragraphe 1.3 ; soit φ_0 un élément arbitraire de $C^{\ell+\alpha}(\bar{G})$; les traces de φ_0 seront définies comme des éléments de $C^{\ell+\alpha}(\partial\Omega)$ via la convention suivante :

$$\forall \gamma \in G_{ad} \text{ (cf. (1.22))}$$

$$\forall x \in \partial\Omega$$

$$\varphi_0|_{\gamma}(x) = \varphi_0[x+\gamma(x) V(x)]$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \Big|_{\gamma}(x) = \langle n(\gamma)[x+\gamma(x)V(x)], \text{grad } \varphi_0[x+\gamma(x)+V(x)] \rangle .$$

Proposition 2. - (i) Pour $\ell \geq k \geq 1$, l'application

$$(\gamma, \varphi) \rightarrow \varphi|_{\gamma}$$

est de classe C^k de $C^{\ell+\alpha}(\partial\Omega) \times C^{\ell+\alpha}(\bar{G}) \rightarrow C^{\ell+\alpha-k}(\partial\Omega)$ dans un voisinage de $(0, \varphi_0)$.

(ii) Pour $\ell \geq k+1 \geq 1$, l'application

$$(\gamma, \varphi) \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\gamma}$$

est de classe C^k de $C^{\ell+\alpha}(\partial\Omega) \times C^{\ell+\alpha}(\bar{G}) \rightarrow C^{\ell+\alpha-k-1}(\partial\Omega)$ dans un voisinage de $(0, \varphi_0)$.

Démonstration : (i) Il suffit de remarquer que

$$\varphi|_{\gamma} = (\varphi_0 \circ T_{\gamma}) \Big|_{\partial\Omega}$$

où T_{γ} est défini par (1.26)

(ii) Nous avons l'identité

$$(18) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\gamma} = \langle n(\gamma), \text{grad } \varphi|_{\gamma} \rangle_{\mathbb{R}^N}$$

d'où la conclusion, compte tenu de (i) (appliqué à $\text{grad } \varphi$) et de la régularité de l'application

$$\gamma \rightarrow n(\gamma)$$

qui est de classe C^∞ de $C^{\ell+\alpha}(\mathbb{R})$ dans $[C^{\ell+\alpha-1}(\mathbb{R})]^N$.

Remarque 1 - Par transport (cf. Paragraphe 1.2), les résultats précédents s'étendent au repérage par un champ de vecteur.

4.2. - Calcul de gradients

Nous donnons ici (entre autres) les gradients des deux applications précédentes.

Proposition 3. - On suppose que la frontière γ est repérée par un champ de vecteurs V (cf. Paragraphe 1.2)⁽¹⁾ alors

- (i) $\frac{\partial}{\partial \gamma}(\varphi|_\gamma) \cdot \delta \gamma = \langle \text{grad } \varphi|_\gamma, V \rangle \delta \gamma$
- (ii) $\frac{\partial}{\partial \varphi}(\varphi|_\gamma) \cdot \delta \varphi = \delta \varphi|_\gamma$
- (iii) $\frac{\partial}{\partial \gamma}(\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_\gamma) \cdot \delta \gamma = \langle \text{grad } \varphi|_\gamma, \frac{\partial n}{\partial \gamma}(\gamma) \cdot \delta \gamma \rangle + \sum_{i,j=1,N} n_i V_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$
- (iv) $\frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_\gamma) \cdot \delta \varphi = \frac{\partial \delta \varphi}{\partial n}|_\gamma$

Démonstration - Nous avons

$$(19) \quad \varphi|_\gamma = \varphi \circ T_\gamma|_{\partial \Omega_\infty} \quad (\text{cf. Paragraphe 1.2}) ;$$

De (19) et (18) on déduit trivialement (ii) et (iv); prolongeons le vecteur normal \vec{n} dans un voisinage de γ comme suit :

$$\forall x \in \partial \Omega_\infty, \forall h \text{ un réel assez proche de } \gamma(x),$$

$$\vec{n}(\gamma) [x+h V(x)] = \vec{n}(\gamma) [x]$$

alors le point (iii) est une conséquence directe de (18) et de (i) qui reste seul à démontrer : or il suffit de remarquer que par convention

$$(20) \quad \forall x \in \partial \Omega_\infty, \varphi|_\gamma(x) = \varphi(x+\gamma V(x)). \quad \blacksquare$$

(1) En représentation "polaire", $\vec{V} = \vec{r}$ vecteur radial

ANNEXE N° 3

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.1

Il faut vérifier que le problème de Neumann suivant est bien posé dans Ω_γ pour au moins une constante a

$$(1) \quad \begin{cases} (\Delta + \lambda_0)U_1 = 0 & \text{dans } \Omega_{\gamma_0} \\ \frac{\partial U_1}{\partial n} + a U_1 = g & \text{sur } \gamma_0 ; g \text{ donné.} \end{cases}$$

Raisonnons par l'absurde : si cela n'est pas le cas, λ_0 est une valeur propre du Problème (1) pour toutes les valeurs de a ; cette valeur propre est donc stationnaire par rapport au coefficient a ; écrivons la condition de stationnarité au point $a = 0$ (cf. F. MIGNOT [1]).

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[\int_{\Omega_{\gamma_0}} \langle \text{grad } \varphi, \text{grad } \psi \rangle dx + \int_{\gamma_0} a \varphi \psi d\sigma - \lambda_0 \int_{\Omega_{\gamma_0}} \varphi \psi dx \right]_{a=0} = 0$$

où φ et ψ sont prises égales à la fonction propre ϕ_N du problème suivant :

$$(2) \quad \begin{cases} (\Delta + \lambda_0) \phi_N = 0 & \text{dans } \Omega_{\gamma_0} \\ \frac{\partial \phi_N}{\partial n} = 0 & \text{sur } \gamma_0 \end{cases}$$

d'où

$$\int_{\gamma_0} \phi_N^2 d\sigma = 0 ,$$

soit

$$\phi_N |_{\gamma_0} = 0 .$$

La fonction propre ϕ_N du problème de Neumann est donc identique à la solution $u_0|_{\Omega_{\gamma_0}}$ des problèmes (2.3)(2.5); mais nous voyons que cela est impossible car le

principe du maximum appliqué à $u_0|_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_{\gamma_0}}$ donne

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} > 0 \text{ sur } \gamma_0$$

ce qui contredit (2). □

ANNEXE N° 4

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.2

Pour tout paramètre réel λ , pour tout accroissement γ dans G_{ad} , nous considérons la solution $[U_1(\lambda, \gamma), U_2(\lambda, \gamma)]$ du système (3.3) (Paragraphe 3.1) et nous posons :

$$\tilde{U}_i(\lambda, \gamma) = U_i(\lambda, \gamma) \circ T_\gamma$$

où T_γ est défini comme aux Paragraphes 1.3 et 2.2.2.

Lemme 1. - L'application

$$(\lambda, \gamma) \mapsto (\tilde{U}_1(\lambda, \gamma), \tilde{U}_2(\lambda, \gamma))$$

est analytique de G_{ad} dans $C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}_0) \times C^{\ell+\alpha}(\bar{\mathcal{O}} \setminus \Omega_0)$.

Démonstration - Montrons d'abord que l'application qui à $(T_\gamma, T_\gamma^{-1})$ fait correspondre les coefficients du système vérifié par $[\tilde{U}_1(\lambda, \gamma), \tilde{U}_2(\lambda, \gamma)]$ est analytique de $[C^{\ell+\alpha}(\bar{\mathcal{O}})]^{2N}$ dans $C^{\ell-2+\alpha}(\Omega_0)$ et $C^{\ell-2+\alpha}(\bar{\mathcal{O}} \setminus \Omega_0)$: par transport l'opérateur Δ se transforme en l'opérateur A suivant

$$A = \text{div} [|DT| \quad DT^{-1} \cdot [DT^{-1}]^* \cdot \text{grad}]$$

avec

DT : dérivée de T_γ

$|DT|$: déterminant jacobien.

Nous constatons que ces coefficients sont des polynômes en T_γ et T_γ^{-1} et leurs dérivées; d'où leur analyticité par rapport à γ via la Proposition 1.2 ; il en est de même pour les opérateurs frontières qui sont des dérivées conormales relatives à A .

Il est donc possible d'appliquer le théorème des fonctions implicites comme dans le Paragraphe 1 à l'équation vérifiée par $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2)$; l'analyticité est déduite du théorème des fonctions implicites - cas analytique (cf. M.M. VAINBERG, V.A. TRENIGIN [1]).

□

Fin de la démonstration de la Proposition 3.2 :

L'analyticité de l'application Ψ se déduit de la proposition précédente puisque (3.4) peut s'écrire aussi :

$$\Psi(\lambda, \gamma) [\theta] = [\tilde{U}_1(\lambda, \gamma) - \tilde{U}_2(\lambda, \gamma)] \text{ au point } \vec{\gamma}_0(\theta)$$

Cet opérateur trace est bien évidemment linéaire continu d'où l'analyticité par composition.

□

ANNEXE N° 5

A EST UN OPERATEUR D'IMAGE FERMEE

Rappelons que :

$$(1) \quad \begin{cases} A \cdot \delta\gamma = W_1 - W_2|_{\gamma} \text{ avec} \\ (\Delta + \lambda) W_1 = 0 \text{ dans } \Omega_{\gamma}, \Delta W_2 = 0 \text{ dans } \mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}_{\gamma} \\ (\frac{\partial}{\partial n} + a) (W_1 - W_2)|_{\gamma} = 0 ; W_2|_{\gamma} = k \delta\gamma \\ W_2|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

Nous supposons que :

$$(2) \quad A \delta\gamma^m \rightarrow g \text{ dans } C^{\ell+\alpha}(0, 1)$$

et nous devons montrer que

$$(3) \quad \exists \delta\gamma^* \in C^{\ell+\alpha}(\gamma_0) \text{ t.q. } g = A \delta\gamma^*$$

Posons :

$$W_i^m = W_i(\delta\gamma^m), i = 1, 2$$

$$g_m = (W_1^m - W_2^m)|_{\gamma} ;$$

 (W_1^m, W_2^m) est une solution du problème de transmission (mal posé) suivant

$$(4) \quad \begin{cases} (\Delta + \lambda) W_1^m = 0 ; \Delta W_2^m = 0 \\ (\frac{\partial}{\partial n} + a) (W_1^m - W_2^m)|_{\gamma} = 0 \\ (W_1^m - W_2^m)|_{\gamma} = g_m \\ W_2^m|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Admettons un instant le lemme suivant :

Lemme 1 . - L'opérateur \mathcal{A} suivant, correspondant au Problème (4) est d'image fermée (1).

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}_0) \times C^{\ell+\alpha}(\bar{\mathcal{O}} \setminus \Omega_0) \\ \rightarrow C^{\ell-2+\alpha}(\bar{\Omega}_0) \times C^{\ell-2+\alpha}(\bar{\mathcal{O}} \setminus \Omega_0) \times C^{\ell-1+\alpha}(\gamma_0) \times C^{\ell+\alpha}(\gamma_0) \times C^{\ell+\alpha}(\Gamma) \end{aligned}$$

$$(5) \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} (\Delta + \lambda)|_{\Omega_0} & 0 \\ 0 & \Delta|_{\mathcal{O} \setminus \Omega_0} \\ \left(\frac{\partial}{\partial n} + a\right)|_{\gamma_0} & - \left(\frac{\partial}{\partial n} + a\right)|_{\gamma_0} \\ 1|_{\gamma_0} & - 1|_{\gamma_0} \\ 0 & 1|_{\Gamma} \end{pmatrix}$$

□

Nous avons :

$$(6) \quad \mathcal{A}W^m = (0, 0, 0, g_m, 0) \rightarrow (0, 0, 0, g, 0)$$

dans $C^{\ell+\alpha}(\gamma_0)$ quand $m \rightarrow +\infty$;

D'après le lemme précédent

$$(7) \quad \begin{cases} \exists W^* = (W_1^*, W_2^*) \in C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}_0) \times C^{\ell+\alpha}(\bar{\mathcal{O}} \setminus \Omega_0) \\ \text{tel que } \mathcal{A}W^* = (0, 0, 0, g, 0) ; \end{cases}$$

Posons maintenant

$$\delta\gamma^* = \frac{1}{k} W_2^*|_{\gamma}$$

nous obtenons

$$g = A \delta\gamma^*$$

□

Démonstration du Lemme 1. - C'est un résultat connu bien qu'écrit nulle part, nous résumons une démonstration :

Première étape : Les résultats d'AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [2] sur les systèmes dans un domaine s'appliquent à notre système à deux domaines : par cartes locales nous nous ramenons au cas de deux demi-espaces ; puis à un seul demi-espace par symétrie.

Nous obtenons donc les estimations de type Schauder ($C^{\ell+\alpha}$) et dans L^p .

Deuxième étape : Par la même méthode que dans J.L. LIONS, E. MAGENES⁽¹⁾ (Lemme de Peetre, p. 171), nous en déduisons que l'opérateur \mathcal{A} est de Fredholm pour les espaces de Sobolev.

Troisième étape : Si

$$W_m \in C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}_0) \times C^{\ell+\alpha}(\bar{\mathcal{O}} \setminus \Omega_0),$$

et, quand m tend vers $+\infty$,

(1) Problèmes aux limites non homogènes t.1, Dunod 1969, Paris.

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}W_m \rightarrow y \text{ dans } C^{\ell-2+\alpha}(\bar{\Omega}_0) \times C^{\ell-2+\alpha}(\bar{\mathcal{O}} \setminus \Omega_0) \times C^{\ell-1+\alpha}(\gamma_0) \times C^{\ell+\alpha}(\gamma_0) \\ \times C^{\ell+\alpha}(\Gamma) \end{array} \right.$$

alors

$$W_m \in H^2(\Omega_0) \times H^2(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}_0)$$

et

$$\mathcal{L}W_m \rightarrow y \text{ dans } L^2(\Omega_0) \times L^2(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}_0) \times H^{1/2}(\gamma_0) + H^{3/2}(\gamma_0) \times H^{3/2}(\Gamma)$$

et d'après la deuxième étape, il existe W dans $H^2(\Omega_0) \times H^2(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}_0)$ tel que

$$\mathcal{L}W = y$$

Mais d'après (8) y est dans un espace de fonctions Höldériennes et nous pouvons utiliser les estimations de Schauder obtenues dans la première étape pour en déduire que :

$$W \in C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}_0) \times C^{\ell+\alpha}(\bar{\mathcal{O}} \setminus \Omega_0)$$

d'où la conclusion du lemme.

□

ANNEXE N° 6

UNE CONDITION SUFFISANTE DE BIFURCATION

Proposition : Plaçons-nous sous les hypothèses de la Proposition 3.6; soit $\lambda \mapsto \gamma_S(\lambda)$, la branche régulière (d'après la Proposition 3.6) des solutions symétriques passant par le point singulier (λ_0, γ_0) . Une condition suffisante d'existence d'une branche bifurquée de solutions symétriques est la suivante :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \gamma} (\lambda_0, \gamma_0) \cdot \gamma_N + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \gamma^2} (\lambda_0, \gamma_0) \cdot \gamma_N \cdot \frac{\partial \gamma_S}{\partial \lambda} (\lambda_0) \in \text{Im} \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} (\lambda_0, \gamma_0).$$

Démonstration : C'est une conséquence directe de l'application du théorème principal de J. CRANDALL, P.H. RABINOWITZ [1] au problème ci-dessus : la condition (1) est la condition de transversalité; les autres hypothèses se déduisent facilement des propriétés de l'application Ψ établies dans les paragraphes précédents. □

Remarque : Nous ne savons pas si il existe des contextes dans lesquels (1) est vérifiée; pour un contexte où la bifurcation est établie; cf. M.SERMANGE [2]. □

BIBLIOGRAPHIE

S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions.

[1] I, Comm. Pure Appl. Math., XII(1959), p. 623-727.

[2] II, Comm. Pure Appl. Math., XVII(1964), p. 35-92.

H. BERESTYCKI, H. BREZIS [1] Sur certains problèmes de frontière libre, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série A, 283 (1976), p. 1091-1094.

[2] On a free boundary problem arising in plasma physics, Rapport 78017, Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Paris VI (1978).

J. CEA, A. GIOAN, J. MICHEL [1] Quelques résultats sur l'identification de domaines, Calcolo(1973).

D. CHENAIS [1] Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série A, 276 p. 547, 277 p. 905, 280 p. 1145, 283 p. 461.

M.G. CRANDALL, P.H. RABINOWITZ [1] Bifurcation for simple eigenvalues, J. Funct. Anal., 8 (1971), p. 321-340.

J.A. DIEUDONNE [1] Eléments d'Analyse, I, Fondements de l'Analyse Moderne, Gauthiers-Villars Ed., Paris (1968).

T. GALLOUËT [1] Contribution à l'étude d'une équation apparaissant en physique des plasmas. Thèse 3ème cycle. Université Pierre et Marie Curie. Paris (1978).

[2] Quelques remarques sur une équation apparaissant en physique des plasmas, C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, 286, p. 739-743 (1978).

P.R. GARABEDIAN [1] Partial Differential Equations, Wiley, New-York (1964).

P. GERMAIN [1] Mécanique des milieux continus, Masson et Cie, Paris (1962).

D. KINDERLEHRER, L. NIRENBERG, J. SPRUCK [1] Régularité dans les problèmes elliptiques à frontière libre, C.R. Acad. Sc. Paris, 286 (19 juin 1978) p. 1187-1190.

D. KINDERLEHRER, J. SPRUCK [1] The shape and smoothness of stable plasma configurations, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 5, n° 1, p 131-148 (1978).

J.L. LIONS [1] Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Les Presses de l'Université de Montréal(1962).

A.M. MICHELETTI [1] Metrica per famiglie di domini limitati et proprietà generiche degli autovalori, Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa, XXVI, p 684-694 (1972).

F. MIGNOT [1] Thèse, Paris VI(1975).

F. MURAT, J. SIMON [1] Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique, Rapport 74003, Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Paris VI(1974).

[2] Etude des problèmes d'Optimal Design, Proc. of the 7th IFIP Conf. on Optimization techniques, J. C'éa Ed., Lectures Notes in Computer Sciences, 41, Springer Verlag (1976).

[3] Sur le contrôle par un domaine géométrique, Lab. d'Analyse Numérique, Univ. Paris VI (1976).

J. NEČAS [1] Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson et Cie, Paris (1967).

B. NICOLAENKO, R. TEMAM [1] à paraître.

B. PALMERIO, A. DERVIEUX [1] Une formule de Hadamard dans des problèmes d'identification de domaines, C.R. Acad. Sci. Paris Série A, 280, p 1697-1700 et 1761-1764 (1975).

[2] Une formule de Hadamard dans des problèmes d'Optimal Design, Proc. of the 7th IFIP Conf. on Optimization Techniques. J. C'éa Ed., Lectures Notes in Computer Sciences, 41 (1976).

[3] Hadamard's Variational Formula for a mixed problem and an application to a problem related to a Signorini-like variational Inequality, Num. Funct. Anal. and Optimization, 1, N° 2, p. 113-144 (1979).

O. PIRONNEAU [1] Sur les problèmes d'optimisation de structure en mécanique des fluides, Thèse Univ. Paris VI (1976).

B. ROUSSELET [1] Etude de la régularité de valeurs propres par rapport à des déformations bilipschitziennes du domaine géométrique, C.R. Acad. Sci. Paris (31 Mai 1976).

M. SERMANGE [1] Une méthode numérique en bifurcation; application à un problème à frontière libre de la physique des plasmas, Appl. Math. Optim. 5, p. 127-151 (1979).

[2] Bifurcation of free boundary plasma equilibria. Rapport Laboria n° 365 (1979).

J. SIJBRAND [1] Bifurcation analysis for a class of problems with a free boundary, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl., 3 (1979), n° 6, p. 723-753.

R. TEMAM [1] A nonlinear eigenvalue problem : the shape at equilibrium of a confined plasma, Arch. Rat. Mech. Anal., 60 (1975), 51-73.

[2] Remarks on a free boundary value problem arising in plasma physics, Comm. in Part. Diff. Ed., 2 (1977), 563-585.

[3] Monotone rearrangement of a function and the Grad-Mercier equation of plasma physics, Lecture at the International Conference on "Recent method in nonlinear Analysis and Applications", Rome, May 8-12 (1978). Proceedings edited by E. MAGENES, U. MOSCO (à paraître).

M.M. VAINBERG, V.A. TRENIGIN [1] Theory of branching of solutions of nonlinear equations, Noordhoff int. pub., Leyden (1974).

J.P. ZOLESIO [1] Identification de domaines par déformations, Thèse, Univ. Nice (1979).

