HAL
open science

Génération et programmation automatiques des équations de Lagrange des robots et manipulateurs

Alain Liégeois, Marie-José Aldon

To cite this version:

Alain Liégeois, Marie-José Aldon. Génération et programmation automatiques des équations de Lagrange des robots et manipulateurs. [Rapport de recherche] RR-0032, INRIA. 1980. inria-00076529

HAL Id: inria-00076529

https://inria.hal.science/inria-00076529

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105 78150 Le Chesnay
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 32

GÉNÉRATION ET PROGRAMMATION AUTOMATIQUES DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE DES ROBOTS ET MANIPULATEURS

Alain LIÉGEOIS
Marie-José ALDON

Septembre 1980

GÉNÉRATION ET PROGRAMMATION AUTOMATIQUES DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE DES ROBOTS ET MANIPULATEURS

A. Liégeois - M. J. Aldon

Résumé :

Les équations mathématiques qui régissent le comportement dynamique d'un système mécanique articulé constituent un outil indispensable pour la conception et pour la commande adaptative d'un robot manipulateur. Après avoir analysé rapidement les différentes méthodes théoriques existantes qui permettent d'établir le modèle dynamique d'un système articulé, nous décrivons une méthode, basée sur le formalisme de Lagrange, qui nous a permis d'automatiser au maximum l'élaboration des modèles mathématiques ainsi que leur simplification. L'application de l'algorithme décrit à la génération des équations dynamiques d'un robot industriel permet au lecteur de juger de la simplicité de description du mécanisme et de la forme condensée des résultats obtenus.

Abstract :

The mathematical equations which describe the dynamic behavior of an articulated mechanism are a necessary tool for the design and for the adaptative control of robots. Firstly, the different theoretical methods which allow one to obtain the dynamic model of interconnected mechanical systems are briefly analyzed. Then, we develop an algorithm using the Lagrangian formalism for obtaining such equations automatically with an optimal factorization. The application of this method to an industrial robot is described ; the condensed dynamic equations obtained by using a minicomputer illustrates the system's performances.

TABLE DES MATIERES

1. INTRODUCTION

1.1. Objectifs
1.2. Les modèles mathématiques utilisés

1.2.1. Les équations de Newton et d'Euler
1.2.2. Le principe des travaux virtuels de d'Alembert
1.2.3. La fonction de Gibbs

1.3. Les équations de Lagrange

2. UTILISATION DES COORDONNEES HOMOGENES

2.1. Rappels mathématiques
2.2. Description de la chaîne
2.3. Equations du mouvement

2.3.1. Energie potentielle
2.3.2. Energie cinétique
2.3.3. Application de l'équation de Lagrange

2.4. Simplification et utilisation des équations

3. ALGORITHME DE GENERATION D'EQUATIONS CONDENSEES

3.1. Définition du corps augmenté
3.2. Notation matricielle
3.3. Calcul des couples dus à la gravité

3.3.1. q_i est une rotation
3.3.2. q_i est une translation

3.4. Calcul des effets d'inertie

3.4.1. q_j est une translation

3.4.1.1. q_i est une translation
3.4.1.2. q_i est une rotation

3.4.2. q_j est une rotation

3.4.2.1. q_i est une translation
3.4.2.2. q_i est une rotation

3.5. Calcul des couples centrifuges et de Coriolis

4. APPLICATION A UN ROBOT INDUSTRIEL

4.1. Description du robot

4.1.1. Données géométriques
4.1.2. Données dynamiques

4.2. Codage interne
4.3. Constantes et variables intermédiaires
4.4. Couples de gravité
4.5. Couples dynamiques

5. CONCLUSION

REFERENCES

PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES (*)

A_{ij} Coefficient dynamique du couple d'inertie engendré par l'accélération du mouvement de l'articulation j sur le mouvement de l'articulation i.

B_{ijk} Coefficient dynamique du couple de Coriolis dû au couplage de vitesse entre les articulations j et k et ressenti par l'articulation i.

$\underline{b_\lambda}$ Vecteur qui lie l'articulation O_λ précédant le corps S_λ au barycentre B_λ.

$\left[b_\lambda\right]$ Matrice colonne formée par les composantes du vecteur $\underline{b_\lambda}$ dans le repère $\mathfrak{R}_\lambda$.

$\left[b_\lambda\right]^T$ Matrice transposée de $\left[b_\lambda\right]$.

C_{ij} Coefficient dynamique du couple centrifuge engendré par la vitesse du mouvement de l'articulation j sur le mouvement de l'articulation i.

c_i $\cos(q_i)$.

c_{ij} $\cos(q_i + q_j)$.

$\left[D_i\right]$ Opérateur matriciel constant de dimensions (4 x 4) dont le produit par la matrice $\left[P^i_{i-1}\right]$ donne la dérivée de cette matrice par rapport à la variable q_i.

$\underline{d_\lambda}$ Vecteur qui lie l'articulation O_λ précédant le corps S_λ au centre de masse G_λ.

$\left[d_\lambda\right]$ Matrice colonne formée par les composantes du vecteur $\underline{d_\lambda}$ dans le repère $\mathfrak{R}_\lambda$.

$\underline{\underline{E}}$ Tenseur unité d'ordre 2.

(*) *Des notations similaires sont utilisées pour les calculs matriciels utilisant les coordonnées homogènes et ceux utilisant les coordonnées classiques.*

E_{c_λ} Energie cinétique du corps S_λ.

E_{p_λ} Energie potentielle du corps S_λ.

F_i Force généralisée qui s'exerce sur l'articulation i.

G_λ Centre de masse du corps S_λ.

$\underline{G}$ Vecteur qui représente l'accélération de la pesanteur.

$[G]$ Matrice colonne formée par les composantes du vecteur $\underline{G}$ dans le repère $\mathfrak{R}$.

$\underline{g_i}$ Vecteur unitaire lié à l'articulation i, autour ou le long duquel s'effectue le mouvement de cette articulation.

$[g_i]$ Matrice colonne formée par les composantes du vecteur $\underline{g_i}$ dans le repère $\mathfrak{R}_i$.

$\underline{\underline{I_\lambda}}$ Tenseur d'inertie du corps S_λ en son centre de masse G_λ.

$[I_\lambda]$ Matrice d'inertie constituée par les composantes du tenseur $\underline{\underline{I_\lambda}}$ dans le repère $\mathfrak{R}_\lambda$.

$\underline{\underline{J_\lambda}}$ Tenseur d'inertie en O_λ du corps S_λ augmenté.

$[J_\lambda]$ Matrice d'inertie formée par les composantes du tenseur $\underline{\underline{J_\lambda}}$ dans le repère $\mathfrak{R}_\lambda$.

$\underline{l_\lambda}$ Vecteur qui lie les articulations O_λ et $O_{\lambda+1}$.

$[l_\lambda]$ Matrice colonne formée par les composantes du vecteur $\underline{l_\lambda}$ dans le repère $\mathfrak{R}_\lambda$.

$\mathcal{M}_i$ Moment du couple (ou des forces) exercées sur l'articulation i.

m_λ Masse du corps S_λ.

M_λ Masse du corps S_λ augmenté.

O_λ Articulation qui joint les corps $S_{\lambda-1}$ et S_λ.

$\left[P_0^i\right]$	Matrice de passage généralisée, de dimensions 4 x 4, qui permet de passer du repère $\mathcal{R}_i$ au repère de base $\mathcal{R}$.
Q_i	Couple (ou force) exercé par la pesanteur sur l'articulation i.
q_i	Coordonnée généralisée définissant la position de l'articulation i (ou du repère $\mathcal{R}_i$ par rapport au repère $\mathcal{R}_{i-1}$).
$\dot{q}_i$	Vitesse du mouvement de l'articulation i.
$\ddot{q}_i$	Accélération du mouvement de l'articulation i.
$\mathcal{R}$	Repère de base fixe, cartésien (supposé galiléen).
$\mathcal{R}_\lambda$	Repère cartésien lié au corps S_λ.
$\left[R_i^j\right]$	Matrice de passage du repère $\mathcal{R}_j$ au repère $\mathcal{R}_i$ (dimensions 3 x 3).
S_λ	Corps n° λ
s_i	$\sin(q_i)$
s_{ij}	$\sin(q_i + q_j)$
TR $[P]$	Trace de la matrice $[P]$.
$\underline{v_\lambda}$	Vecteur vitesse du centre de masse G_λ du corps S_λ, par rapport au repère de base $\mathcal{R}$.
$\left[v_\lambda\right]$	Matrice colonne formée par les composantes du vecteur $\underline{v_\lambda}$ dans $\mathcal{R}$.
.	Produit scalaire.
$\wedge$	Produit vectoriel.
	L'absence de signe représente le produit tensoriel.
V_λ	Masse rapportée en O_λ.
W_λ	Inertie rapportée en O_λ.

1. INTRODUCTION

1.1. Objectifs

L'automatisation d'un poste de travail dans un système de production industrielle pose un problème important qui est de concevoir et d'évaluer les performances d'une structure mécanique articulée, de ses actionneurs et des organes d'inspection et de décision capables de satisfaire les critères techniques et économiques définis par le cahier des charges de la production. De telles structures adaptatives capables d'assister ou de remplacer l'homme dans des tâches de manipulation, sont désignées généralement sous le nom de robots industriels.

La plupart des robots existant actuellement sont dotés d'un système de commande qui asservit indépendamment chaque articulation ; or, dès que l'on atteint des vitesses et des accélérations importantes, ces articulations sont soumises à des couplages dynamiques qui induisent des erreurs de position inadmissibles pour des tâches industrielles précises. Il est alors indispensable d'établir un modèle mathématique capable de décrire correctement le comportement dynamique du système afin de corriger de façon efficace les erreurs prévisibles par les lois de la physique.

Les travaux présentés dans ce rapport concernent l'élaboration d'un "Modèle d'Interaction Robot-Environnement". Plus précisément, étant donné un robot manipulateur défini par sa structure et ses actionneurs, il s'agit d'établir automatiquement, par calculateur, les équations qui permettent soit à l'opérateur soit à un calculateur de s'assurer qu'une tâche est exécutable par un robot donné, sinon de définir les modifications des paramètres (géométrie du robot, puissance des actionneurs, ..., trajectoire, ...) qui permettront de l'exécuter dans les meilleures conditions. Un tel modèle doit pouvoir satisfaire deux types d'applications :

- la conception assistée par ordinateur de systèmes mécaniques articulés : les tâches sont les entrées du modèle défini par ses paramètres structuraux ; les sorties sont les forces et les couples devant être exercés par les moteurs. L'aspect interactif des programmes de génération d'équations est indispensable ici, afin d'éviter les contraintes liées à la reprogrammation en cas de changement de la structure mécanique ou de l'emplacement du robot ;

- la commande dynamique autoadaptative : le modèle est utilisé en temps réel pour déterminer les commandes à appliquer au processus afin qu'il

fournisse la réponse désirée ; on voit ici la nécessité d'un modèle aussi "compact" que possible afin de réduire le temps de calcul et la taille mémoire utilisée.

1.2. Les modèles mathématiques utilisés

La modélisation des systèmes mécaniques articulés a fait l'objet de recherches théoriques avancées tant sur le plan national qu'international /1/. Les équations différentielles obtenues traduisent les relations entre les forces et couples aux articulations d'une part, et d'autre part les positions, vitesses et accélérations des variables articulaires.

Les méthodes utilisées peuvent être classées en quatre groupes principaux suivant qu'elles font appel aux formalismes classiques :

- équations de Lagrange,
- équations de Newton et d'Euler,
- principe du travail virtuel de d'Alembert,
- fonction de Gibbs.

Nous allons analyser rapidement les trois dernières méthodes, ainsi que les modèles qui les utilisent, puis nous examinerons de façon plus détaillée les avantages de la formulation lagrangienne.

1.2.1. Les équations de Newton et d'Euler

Appliquées à chacun des n corps articulés d'un système, elles permettent de définir complètement son mouvement, si on leur adjoint les équations de liaison et les relations cinématiques (équations de Poisson). En effet, les (2n + 1) équations de Newton et d'Euler contiennent 2n forces de liaison et 2n couples de liaison entre lesquels existent 2n relations dues à la loi de l'action et de la réaction. On démontre qu'il est toujours possible de réduire le nombre d'équations en éliminant les forces de liaison et une partie des couples de liaison dus aux contraintes.

Les modèles qui utilisent le formalisme de Newton-Euler sont rappelés dans le tableau de la figure 1 établi par M. Renaud /1/. Il faut signaler en particulier celui de W. W. Hooker et G. Margulies /2/ qui a le grand intérêt de définir pour la première fois les notions de corps augmenté et de barycentre d'un tel corps fictif ; elles permettent de simplifier les équations tout en

leur donnant une signification physique. R. E. Roberson et J. Wittenburg ont ensuite introduit la notation matricielle dans l'écriture de leurs équations et ont surtout décrit la topologie du système de manière plus intéressante /3/.

C'est F. W. Ossemberg-Franzes qui présenta , en 1973, la méthode de mise en équation la plus générale s'appliquant à la fois à des mouvements de translation et de rotation, les mécanismes décrits pouvant comporter des boucles fermées. Cependant, cette méthode présente des difficultés de notation et est difficilement utilisable pour une mise en équation automatique, à cause de l'absence de procédure matricielle explicite.

1.2.2. Le principe des travaux virtuels de d'Alembert

Ce principe a été utilisé récemment par J. C. Samin pour étudier le comportement dynamique de mécanismes à structure d'arbre topologique et munis d'articulations rotoïdes ou prismatiques /4/. Ce principe peut s'énoncer ainsi : "Dans un système matériel en mouvement, il y a équilibre à chaque instant entre les forces intérieures, les forces extérieures et les forces d'inertie des différents points matériels dont se compose le système". La méthode de Samin permet d'obtenir les équations sous forme matricielle ; elle a, par ailleurs, l'avantage d'éviter l'élimination des forces et couples de contraintes qui apparaissent avec la méthode de Newton-Euler.

1.2.3. La fonction de Gibbs

Cette fonction fait appel à la notion "d'énergie d'accélération". Elle a été utilisée par E. P. Popov pour mettre en équation les systèmes mécaniques à structure de chaîne dont chaque articulation a un degré de liberté de rotation ou de translation. Cette méthode permet d'écrire très simplement les équations du mouvement /5/, mais le calcul de "l'énergie d'accélération" est plus compliqué que celui de l'énergie cinétique qui intervient naturellement dans les équations de Lagrange.

1.3. Les équations de Lagrange

Dans l'ordre chronologique, elles viennent en seconde position après les équations de Newton-Euler, sur lesquelles elles présentent pour l'automaticien les avantages suivants :

- elles ne conduisent pas à un système où apparaissent les forces de réaction ; le nombre d'équations obtenues est égal au nombre de degrés de

liberté ;

- elles font intervenir directement, en valeur algébrique, les grandeurs de commande, forces et couples dus aux moteurs, et autres origines dissipatives d'énergie.

Leur inconvénient est de nécessiter le calcul formel des dérivées partielles de l'énergie cinétique. En effet, pour définir le modèle dynamique d'un mécanisme arborescent dont toutes les liaisons sont supposées parfaites, on utilise les équations de Lagrange sous la forme :

$$\sum_{\lambda=1}^{NN} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{c\lambda}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{c\lambda}}{\partial q_i} \right] = Q_i + F_i, (i = 1, 2, \ldots N) \qquad (1-1)$$

où

NN représente le nombre de corps solides S_λ, $(\lambda = 1, 2, \ldots NN)$

$E_{c\lambda}$ " l'énergie cinétique totale du solide S_λ

q_i désigne la ième coordonnée généralisée du système

$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$

Q_i est le couple (ou la force) exercée par la pesanteur sur l'articulation i

F_i représente la force généralisée sur l'articulation i.

Le principal problème à résoudre est celui du calcul de l'énergie cinétique ; il a été abordé de manière différente pour la conception des modèles dynamiques.

J. J. Uicker a proposé, en 1968, une méthode absolument générale pouvant s'appliquer à toute structure mécanique /6/. Elle fait appel à deux notions essentielles :

a) la notion de matrice de passage généralisée d'ordre 4 (que nous définirons au paragraphe 2),

b) la notion de trace d'une matrice qui permet de simplifier le calcul de l'énergie cinétique $E_{c\lambda}$ du solide S_λ.

Bien que cette méthode permette la simulation sur ordinateur des équations du mouvement, elle ne fait pas apparaître les notions intéressantes de corps augmenté et de barycentre d'un corps. Elle a cependant été utilisée par plusieurs

auteurs :

- M. E. Kahn a établi ainsi les équations analytiques d'un système de trois corps articulés en rotation dont deux s'effectuent autour d'axes parallèles /7/. Les résultats obtenus sont très compliqués et nécessitent des simplifications ultérieures qui auraient pu être évitées ;

- A. K. Bejczy et R. A. Lewis ont tenté d'appliquer la méthode à un manipulateur télescopique et à rotule muni d'une pince (bras de Scheinman). Les équations symboliques obtenues en considérant le modèle complet sont relativement complexes /8, 9/. A. K. Bejczy propose de les simplifier en considérant successivement le mouvement du bras puis celui de la pince (cf. § 9) ;

- Les méthodes proposées par M. Renaud /1, 11/ et W. Khalil /12, 13/ font intervenir les notions de calcul matriciel introduites par Uicker. Elles s'appliquent aussi bien aux manipulateurs anthropomorphes qu'à ceux dotés de segments télescopiques. Les deux méthodes ont été implémentées sur gros ordinateur. Le calcul des dérivées partielles a été résolu, dans les deux cas, par une technique de dérivation littérale facile à mettre en oeuvre avec le langage PL/1 utilisé. En effet, celui-ci est particulièrement adapté à la manipulation de chaînes de caractères et de tableaux. Le programme EDYLMA /12/ s'applique aux mécanismes comportant une seule chaîne de corps articulés. Bien qu'il soit extrêmement performant par rapport aux programmes conçus antérieurement (TOAD, OSSAM), la capacité mémoire qu'il exige est encore relativement grande : il faut environ 200 K mots de 16 bits pour calculer, sous forme littérale, l'ensemble des coefficients dynamiques d'un manipulateur à 6 degrés de liberté. En outre, les équations obtenues remplissent une centaine de pages et il est difficile d'envisager une procédure de simplification automatique rapide et efficace. J. Zabala obtient des résultats plus simples en utilisant les notions de corps augmenté et de barycentre (que nous définirons au paragraphe 3). Cependant, le langage de description du mécanisme qui consiste à introduire les données directement sous forme matricielle le rend difficilement utilisable par un non informaticien.

Le tableau de la figure 1 établi par M. Renaud /1/, rappelle les principales méthodes de mise en équation des mécanismes articulés.

Nous présentons, dans le paragraphe suivant, la méthode matricielle proposée par J. J. Uicker qui a permis à A. K. Bejczy et à R. A. Lewis de résoudre le problème de calcul de l'énergie cinétique.

SYSTEME	---	TOPOLOGIE				MOUVEMENTS RELATIFS			Obtention pratique des équations
		2 corps	Chaîne	Arbre	Quelconque	Rotations:nbre de rotations :	1 rotation ou 1 translation	Quelconque	
FLETCHER	Newton-Euler	X				1 ou 2			oui
HOOKER-MARGULIES	id.			X		1 ou 2			non
ROB.-WITTENBURG	id.			X		1 ou 2			non
HOOKER	id.			X		1 ou 2			non
LIKINS	id.			X		1			oui
POPOV 1.	id.		X			1			oui
VUKOBRATOVIC 1.	id.			X		1,2 ou 3			oui
WITTENBURG	id.			X				X	non
VUKOBRATOV. 2.	id.				X	1			oui
OSSENBERG	id.				X			X	non
UICKER	Lagrange				X		X		oui
KORONEV	id.			X		1,2 ou 3			non
LIEG.-REN.	id.			X		1			oui
SAMIN	d'Alembert			X				X	oui
POPOV 2.	Gibbs-Appel		X				X		oui
RENAUD-ZABALA	Lagrange			X			X		oui

Figure 1 : Les différents modèles mathématiques /1/

2. UTILISATION DES COORDONNEES HOMOGENES

L'utilisation des équations de Lagrange conduit à calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle des différents segments rigides S_j constituant le système mécanique articulé. Ces calculs font intervenir les positions relatives q_i des différentes articulations, ainsi que leurs dérivées première et seconde par rapport au temps. Il est intéressant de pouvoir décrire la position et l'orientation des différents segments dans un repère cartésien fixe $\mathcal{R}$, supposé galiléen, choisi comme repère de référence. Connaissant les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}_i$ lié au segment S_i, on peut calculer ainsi ses coordonnées absolues dans le repère $\mathcal{R}$.

De nombreux auteurs utilisent la représentation matricielle et, plus particulièrement, les matrices de passage généralisées d'ordre 4. Après avoir rappelé les points essentiels de cette représentation, nous décrirons l'algorithme de calcul utilisé pour la génération automatique des équations ; puis nous essaierons d'analyser ses avantages et ses inconvénients en ce qui concerne, d'une part, sa mise en oeuvre sur calculateur et d'autre part, la présentation des résultats obtenus.

2.1. Rappels mathématiques

La position d'un point M de l'espace est définie, dans le repère $\mathcal{R}_i$, par les composantes du vecteur $\overline{O_i M}$ dans ce repère. Ces composantes sont représentées par la matrice colonne $\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$.

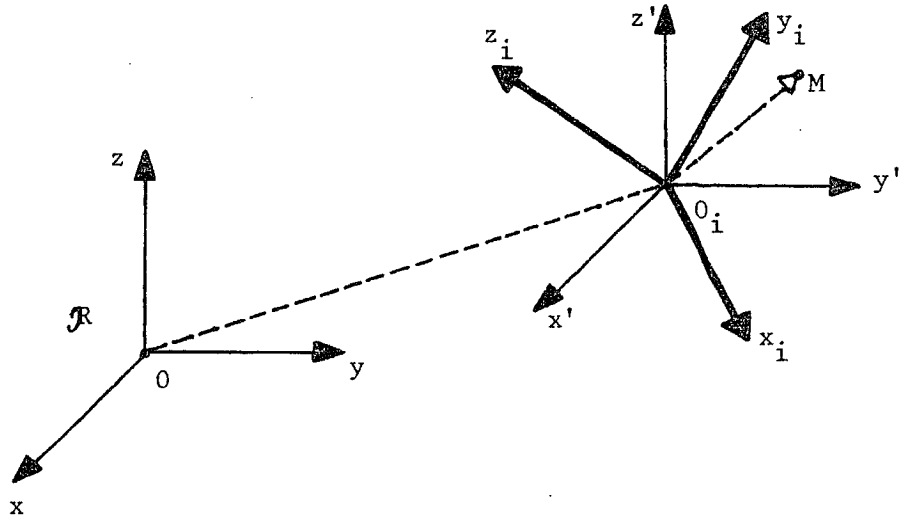


Figure 2

De même, la position de M dans le repère de référence $\mathcal{R}$ est définie par le vecteur $\underline{OM}$ dont les composantes constituent la matrice : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

La relation vectorielle : $\underline{OM} = \underline{OO_i} + \underline{O_iM}$ s'écrit, dans le repère $\mathcal{R}$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{O_i} \\ y_{O_i} \\ z_{O_i} \end{bmatrix} + \left[R_O^i\right] \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}1)$$

x_{O_i}, y_{O_i}, z_{O_i} sont les composantes du vecteur $\underline{OO_i}$ dans le repère $\mathcal{R}$; $\left[R_O^i\right]$ est la matrice de rotation qui permet d'amener le repère $\mathcal{R}_i$ en coïncidence avec un repère $\mathcal{R}'$ d'origine O_i et d'axes parallèles à ceux du repère $\mathcal{R}$.

En effet, on peut toujours amener le repère $\mathcal{R}$ en coïncidence avec le repère $\mathcal{R}_i$ en effectuant :

- une translation définie par le vecteur $\underline{OO_i}$,

- des rotations autour des axes x, y, z, auxquelles on peut associer respectivement les matrices de passage élémentaires $\left[R_O^i\right]_x$, $\left[R_O^i\right]_y$, $\left[R_O^i\right]_z$;

On peut donc écrire :

$$\left[R_O^i\right] = \left[R_O^i\right]_x \left[R_O^i\right]_y \left[R_O^i\right]_z$$

Rappelons l'expression de ces matrices élémentaires qui ne dépendent que des rotations successives q_x, q_y, q_z :

$$\left[R_O^i\right]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_x & -\sin q_x \\ 0 & \sin q_x & \cos q_x \end{bmatrix}$$

$$\left[R_O^i\right]_y = \begin{bmatrix} \cos q_y & 0 & \sin q_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_y & 0 & \cos q_y \end{bmatrix}$$

$$\left[R_O^i\right]_z = \begin{bmatrix} \cos q_z & -\sin q_z & 0 \\ \sin q_z & \cos q_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'équation (2-1) écrite dans l'espace à 3 dimensions n'est pas homogène par rapport à $\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$.

J. Denavit et R. S. Hartenberg /14/ ont proposé de la rendre homogène en choisissant un espace à 4 dimensions dans lequel intervient une coordonnée supplémentaire homogène à un facteur d'échelle π arbitraire non nul. Ainsi, ils définissent :

$$X = \pi x \qquad X_i = \pi_i \, x_i$$
$$Y = \pi y \qquad Y_i = \pi_i \, y_i \qquad \pi = \pi_i$$
$$Z = \pi z \qquad Z_i = \pi_i \, z_i$$

Cela permet d'écrire l'équation (2-1) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ \pi \end{bmatrix} = \left[P^i\right] \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ \pi_i \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}2)$$

Avec :

$$\left[P^i\right] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \left[R_O^i\right] & \begin{matrix} x_{O_i} \\ y_{O_i} \\ z_{O_i} \end{matrix} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (2\text{-}3)$$

$\left[P^i\right]$ est appelée "matrice de passage généralisée" d'ordre 4. Le coefficient π étant arbitraire, nous le choisirons égal à 1. L'équation (2-2) s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \left[P^i\right] \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}4)$$

L'écriture des coordonnées d'un point matériel sous forme d'une matrice colonne d'ordre 4 permet d'exprimer de façon homogène l'énergie cinétique de ce point, quel que soit le type de déplacement qu'il subit.

2.2. Description de la chaîne

Considérons une chaîne de N corps rigides reliés par N articulations rotoïdes ou prismatiques * (figure 3).

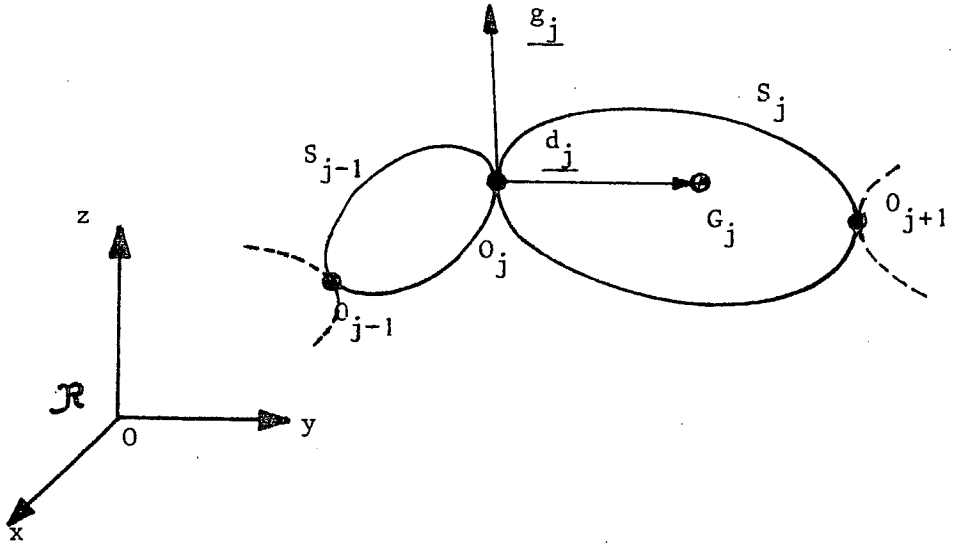


Figure 3

Chaque segment S_j est caractérisé par :

- sa masse m_j,

- le vecteur $\underline{d}_j$ définissant la position de son centre de masse G_j par rapport à l'articulation O_j dans le repère $\mathcal{R}$ qui lui est rattaché ; ce vecteur est représenté par la matrice colonne :

---

* *Il est toujours possible d'inclure dans la chaîne des corps fictifs de façon à ne considérer qu'un seul degré de liberté par corps.*

$$[d_j] = \begin{bmatrix} d_{x_j} \\ d_{y_j} \\ d_{z_j} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- son tenseur d'inertie $\underline{\underline{I_j}}$ dont les composantes dans le repère $\mathcal{R}_j$ constituent la matrice $[I_j]$; ces composantes sont de la forme /9/ :

$$I_{xy} = \begin{cases} I_{xy}^{*} & \text{si } x = y \\ -I_{xy}^{*} & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

avec $I_{xy}^{*} = \int_{s_j} \delta_{xy} \left(\sum_k d_k^2 - d_x d_y \right) d_m$

Par ailleurs, on appellera :

F_i : le couple ou la force généralisé agissant sur l'articulation i (i = 1, 2, ... N) ;

q_i : la coordonnée généralisée définissant la position de cette articulation ;

$\dot{q}_i$: sa vitesse ;

$\ddot{q}_i$: son accélération ;

$\underline{g_i}$ est le vecteur unitaire lié à l'articulation i, autour (ou le long) duquel s'effectue la rotation (ou la translation) q_i.

On désignera par $\underline{G}$ le vecteur représentant l'accélération de la pesanteur ; dans le repère inertiel $\mathcal{R}$, $\underline{G}$ est représenté par la matrice :

$$[G] = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soit $[P^j]$ la matrice de passage généralisée qui permet d'écrire dans le repère de référence $\mathcal{R}$, les coordonnées d'un point lié au repère $\mathcal{R}_j$. Elle peut s'écrire sous la forme d'un produit des j matrices élémentaires qui permettent de passer d'un repère de la chaîne au suivant, c'est-à-dire :

$$[P^j] = [P_0^1] \quad [P_1^2] \quad [P_2^3] \quad \dots \quad [P_{j-1}^j] \qquad (j \leq N)$$

La matrice $\left[P^i_{i-1}\right]$ ne dépend que de la variable généralisée q_i caractérisant la transformation correspondante. Sa dérivée par rapport à q_i fait intervenir un opérateur constant $\left[D_i\right]$ tel que :

$$\frac{\partial \left[P^i_{i-1}\right]}{\partial q_i} = \left[D_i\right] \left[P^i_{i-1}\right]$$

Cet opérateur définit l'orientation du vecteur $\underline{g_i}$ dans le repère $\mathcal{R}_i$. Par exemple, si $\underline{g_i}$ est porté par l'axe $\vec{z}_i$, on aura :

- pour une articulation rotoïde :

$$\left[D_i\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- pour une articulation prismatique :

$$\left[D_i\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut donc représenter ainsi les dérivées partielles de $\left[P^j\right]$ par rapport aux coordonnées généralisées :

$$\left[U_{ji}\right] = \frac{\partial \left[P^j\right]}{\partial q_i} = \left[P^1_0\right] \left[P^2_1\right] \cdots \left[D_i\right] \left[P^i_{i-1}\right] \cdots \left[P^j_{j-1}\right], \quad \text{si } i \leq j \leq N$$

$$\left[U_{ji}\right] = 0 \qquad \text{si } i > j$$

De même, on note :

$$\left[U_{jkp}\right] = \frac{\partial \left[U_{jk}\right]}{\partial q_p} = \frac{\partial^2 \left[P^j\right]}{\partial q_k \cdot \partial q_p} = \left[P^1_0\right] \left[P^2_1\right] \cdots \left[D_k\right] \left[P^k_{k-1}\right] \cdots \left[D_p\right] \left[P^p_{p-1}\right] \cdots \left[P^j_{j-1}\right]$$

avec : $k < p \leq j \leq N$

Dans le cas d'une dérivée seconde par rapport à i, on a donc :

$$\frac{\partial^2 \left[P^i_{i-1}\right]}{\partial q_i} = \left[D_i\right] \left[D_i\right] \left[P^i_{i-1}\right]$$

Pour une articulation prismatique : $\left[D_i\right] \left[D_i\right] = 0$, Donc $\left[U_{jii}\right] = 0$.

Pour une articulation rotoïde :

$$\left[D_i\right] \left[D_i\right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On note aussi que : $\left[U_{jkp}\right] = \left[U_{jpk}\right]$

et : $\left[U_{jkp}\right] = 0$ si $k > j$, ou $p > j$

Les notations, adoptées par A. K. Bejczy, permettent de simplifier l'écriture des équations du mouvement. En effet, on exprime facilement, sous forme matricielle, dans le repère de référence $\mathcal{R}$, la position $\left[OG_j\right]$ et la vitesse $\left[v_j\right]$ du point G_j défini par : $\left[O_j\ G_j\right] = \left[d_j\right]$

$$\left[OG_j\right] = \left[P^j\right] \left[d_j\right] = \left[P^j\right] \begin{bmatrix} d_{x_j} \\ d_{y_j} \\ d_{z_j} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[v_j\right] = \frac{d \left[OG_j\right]}{dt} = \left(\frac{d \left[P^j\right]}{dt} \right) \left[d_j\right] = \left[\dot{P}_j\right] \left[d_j\right]$$

ou encore :

$$\left[v_j\right] = \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{\partial \left[P^j\right]}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \left[d_j\right] = \left(\sum_{i=1}^{j} \left[U_{ji}\right] \dot{q}_i \right) \left[d_j\right]$$

2.3. Equations du mouvement

A. K. Bejczy et R. A. Lewis ont appliqué la méthode de J. J. Uicker à l'obtention des équations dynamiques du bras de Scheinman /8, 9/. Cette méthode est basée sur l'utilisation des matrices généralisées d'ordre 4 (cf § 2.1.) et des propriétés de la trace d'une matrice. Rappelons les points essentiels de l'algorithme, en utilisant les notations définies au paragraphe 2.2.

2.3.1. L'énergie potentielle

L'énergie potentielle du corps S_j exprimée dans le repère $\mathcal{R}$ s'écrit : $Ep_j = -m_j \underline{G} \cdot \underline{OG_j}$ ou encore, sous forme matricielle :

$$Ep_j = - m_j \left[G\right]^T \left[U_{ji}\right] \left[d_j\right]$$

2.3.2. L'énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel M_j du corps S_j s'exprime en fonction de sa masse dm_j et de sa vitesse absolue $\underline{v_j}$ qui est la vitesse du centre de masse G_j par rapport au repère de base $\mathcal{R}$:

$$d\,Ec_j = 1/2 \left[v_j\right]^T \cdot \left[v_j\right] dm_j$$

ou encore, en introduisant la trace TR d'une matrice :

$$d\,Ec_j = 1/2\ TR\ (\left[v_j\right] \left[v_j\right]^T)\ dm_j$$

ou, d'après (2-5) :

$$\left[v_j\right] = (\sum_{p=1}^{j} \left[U_{jp}\right] \dot{q}_p) \left[d_j\right]$$

avec :

$$\left[d_j\right] = \begin{bmatrix} d_{x_j} \\ d_{y_j} \\ d_{z_j} \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrice colonne formée à partir des coordonnées de G_j dans le repère $\mathcal{R}_j$.

On en déduit :

$$d\,Ec_j = 1/2\ TR\ (\sum_{p=1}^{j} \sum_{r=1}^{j} \left[U_{jp}\right] (\left[d_j\right] dm \left[d_j\right]^T) \left[U_{jr}\right]^T \dot{q}_p\, \dot{q}_r)$$

En posant :

$$\left[J_j\right] \triangleq \int_{S_j} \left[d_j\right] \left[d_j\right]^T d_m$$

On obtient :

$$Ec_j \triangleq \int_{S_j} d\,Ec_j = 1/2\ TR\ (\sum_{p=1}^{j} \sum_{r=1}^{j} \left[U_{jp}\right] \left[J_j\right] \left[U_{jr}\right]^T \dot{q}_p\, \dot{q}_r)$$

La matrice $\left[J_j\right]$ peut s'exprimer en fonction des composantes de la matrice d'inertie $\left[I_j\right]$ du corps j /9/ par :

$$[J_j] = \begin{bmatrix} \frac{-I_{XX}+I_{YY}+I_{ZZ}}{2} & I_{XY} & I_{XZ} & m_j\, dx_j \\ I_{XY} & \frac{+I_{XX}-I_{YY}+I_{ZZ}}{2} & I_{YZ} & m_j\, dy_j \\ I_{XZ} & I_{YZ} & \frac{I_{XX}+I_{YY}-I_{ZZ}}{2} & m_j\, dz_j \\ m_j\, d_{xj} & m_j\, d_{yi} & m_j\, d_{zj} & m_j \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}6)$$

Ainsi, l'énergie cinétique totale du manipulateur s'écrit :

$$E_c \triangleq \sum_{j=1}^{N} Ec_j = 1/2 \sum_{j=1}^{N} TR\left(\sum_{p=1}^{j} \sum_{r=1}^{j} [U_{jp}]\, [J_j]\, [U_{jr}]^T\, \dot{q}_p\, \dot{q}_r \right) \qquad (2\text{-}7)$$

2.3.3. L'application de l'équation de Lagrange

L'application de l'équation de Lagrange (1-1) au mouvement de l'articulation i conduit, après dérivation de l'énergie cinétique, à l'expression suivante :

$$F_i = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \sum_{k=1}^{j} TR\left([U_{jk}]\, [J_j]\, [U_{ji}]^T \right) \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{j} \sum_{p=1}^{j} TR\left([U_{jkp}]\, [J_j]\, [U_{ji}]^T \right) \dot{q}_k\, \dot{q}_p - m_j\, [G]^T\, [U_{ji}]\, [d_j] \right\} \qquad (2\text{-}8)$$

L'écriture de cette équation est simplifiée /9/ en introduisant les coefficients :

$$Q_i = \sum_{j=i}^{N} \left(- m_j\, [G]^T\, [U_{ji}]\, [d_j] \right) \qquad (2\text{-}9)$$

$$A_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^{N} TR\left([U_{jk}]\, [J_j]\, [U_{ji}]^T \right) \qquad (2\text{-}10)$$

$$B_{ikp} = 2 \sum_{j=\max(i,k,p)}^{N} TR\left([U_{jkp}]\, [J_j]\, [U_{ji}]^T \right) \text{ pour } k \neq p \qquad (2\text{-}11)$$

$$C_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^{N} TR\left([U_{jkk}]\, [J_j]\, [U_{ji}]^T \right)$$

Ces termes représentent respectivement les couples (ou les forces) dus à la gravité, puis les coefficients des couples dus aux forces d'accélération, aux forces de Coriolis et aux forces centripètes. Pour l'ensemble

de l'articulation i, la force généralisée s'écrit :

$$F_i = \sum_{k=1}^{N} \left\{ A_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{N} \sum_{p=1}^{N} B_{ikp} \dot{q}_k \dot{q}_p \right\} + Q_i \qquad (2\text{-}13)$$

avec $A_{ik} = A_{ki}$, $B_{ikk} = C_{ik}$ et $B_{ikp} = B_{ipk}$.

Certains coefficients s'annulent en raison de la géométrie ou de la configuration du manipulateur. D'autres sont nuls dans tous les cas ; par exemple :

$$B_{iii} = 0$$
$$B_{iki} = 0 \quad \text{pour } i > k$$

De même, certains couples ou forces qui apparaissent dans les équations littérales complètes pourraient être négligés dans le résultat numérique.

2.4. Simplification et utilisation des équations

La complexité des équations littérales obtenues par la méthode précédente /8/ ne permet pas d'envisager l'utilisation en ligne de ce modèle dynamique complet pour réaliser une commande adaptative précise à cause du retard introduit par les nombreux calculs. Aussi, les auteurs proposent-ils deux types de simplification :

a) L'écriture des équations fait apparaître des termes complexes liés à l'existence de nombreux couplages dynamiques actifs lorsque toutes les articulations sont en mouvement. Il est possible d'obtenir un modèle dynamique restreint en considérant seulement le mouvement d'un nombre réduit d'articulations. Ainsi, dans le cas du bras de Scheinman à 6 degrés de liberté et plus généralement lorsque les dimensions , la masse de l'organe terminal et sa charge sont petites devant celles des segments du bras qui les véhiculent, les deux sous-groupes dynamiques importants identifiés sont constitués par les trois premiers,puis les trois derniers segments.

La définition du modèle restreint est la suivante :

- il peut y avoir mouvement simultané des trois premières articulations alors que les trois dernières (poignet) sont au repos ;

- les trois derniers segments et l'objet saisi forment une charge sensiblement constante pour les trois premières articulations.

Dans ce modèle restreint :

- les coordonnées des vecteurs $\underline{d_j}$ et la matrice $[J_j]$, pour les deux premiers corps (j = 1, 2) sont inchangées par rapport au modèle complet ;

- par contre, $\underline{d_3}$ et $[J_3]$ dépendront de la configuration du poignet.

b) Le deuxième type de simplification consiste à admettre que les effets des forces centrifuges et de Coriolis sont souvent négligeables devant ceux dus à la gravité et aux forces d'inertie. L'équation (2-13) s'écrit alors :

$$F_i = \sum_{k=1}^{N} A_{ik} \ddot{q}_k + Q_i$$

En conclusion, l'élaboration du modèle dynamique suivant cette méthode impose à l'ingénieur chargé de l'étude d'un système de commande ou de la programmation d'un robot, des simplifications ultérieures très complexes qui peuvent être évitées par :

- une analyse préliminaire de la structure du mécanisme qui supprime les calculs inutiles de coefficients nuls ou négligeables ;

- le regroupement de termes constants tels que les masses et les inerties rapportées sur les différentes articulations, termes que nous définirons dans la suite de ce rapport (cf § 3.1.) ;

- le regroupement des variables généralisées et des couples ou forces correspondant à des rotations successives autour d'axes parallèles.

Par ailleurs, bien que l'utilisation des coordonnées homogènes conduise à une forme générale des expressions des coefficients valable à la fois pour les rotations et pour des translations et compatible avec la plupart des logiciels d'informatique graphique pour la représentation géométrique des objets tridimensionnels, elle présente, pour l'automaticien, l'inconvénient de conduire à des calculs longs, redondants et souvent inutiles, de matrices de rotations.

Nous proposons donc, dans le paragraphe suivant, une nouvelle méthode ayant, pour objectif, de pallier ces inconvénients.

$[d_j]$ et $[l_j]$ les matrices colonnes formées par les composantes respectives des vecteurs $\underline{d_j}$ et $\underline{l_j}$ dans le repère $\mathfrak{R}_j$.

Nous appelons "corps j augmenté" /14/ le corps S_j sur lequel on applique en O_{j+1} la somme des masses m_p $(p > j)$ des corps de la chaîne située en aval de S_j.

Nous désignons par M_j la masse du "corps j augmenté" :

$$M_j = \sum_{p=j}^{N} m_p \tag{3-2}$$

Le barycentre B_j du corps augmenté est défini par la relation vectorielle :

$$M_j \, \underline{b_j} = m_j \, \underline{d_j} + \underline{l_j} \sum_{p=j+1}^{N} m_p \tag{3-3}$$

dans laquelle $\underline{b_j}$ représente le vecteur $\underline{O_jB_j}$.

Soit $\underline{\underline{J_j}}$ le tenseur d'inertie en O_j du "corps augmenté" et $\underline{\underline{I_j}}$ le tenseur d'inertie du corps j au centre de masse G_j ; nous pouvons écrire :

$$\underline{\underline{J_j}} = \underline{\underline{I_j}} + m_j \, (\underline{d_j} \cdot \underline{d_j} \, \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{d_j}} \, \underline{\underline{d_j}}) + \sum_{p=j+1}^{N} m_p \, (\underline{l_j} \cdot \underline{l_j} \, \underline{\underline{E}} - \underline{l_j} \, \underline{l_j}) \tag{3-4}$$

soit : $\underline{\underline{J_j}} = \underline{\underline{I_j}} + \underline{\underline{K_j}} + \sum_{p=j+1}^{N} \underline{\underline{K_p}}$

Où : $\underline{\underline{E}}$ représente le tenseur unité d'ordre 2

Le produit scalaire est noté "."

L'absence de point signifie "produit tensoriel".

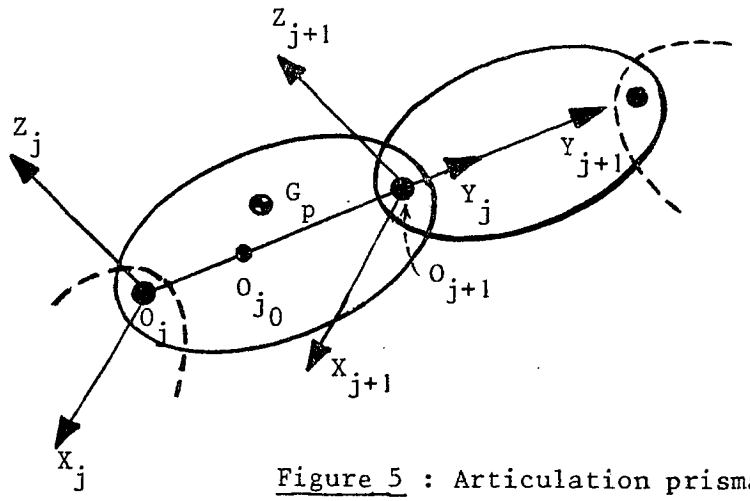
Les matrices formées par les composantes dans $\mathfrak{R}_j$ des tenseurs définis ci-dessus sont notées $[J_j]$, $[I_j]$ et $[K_j]$.

<u>Dans le cas où l'articulation O_j est prismatique</u>, le vecteur $\underline{l_j}$ a une longueur variable ; on a alors :

$$\underline{l_j} = \underline{l_{j_0}} + \underline{q_j}$$

où $\underline{q_j}$ représente le vecteur variable $\underline{O_{j_0} \, O_{j+1}}$ décrit par le point O_{j+1} depuis une origine arbitraire O_{j_0}. Il est porté généralement par un axe du repère $\mathfrak{R}_p$.

$\underline{l_{j_0}}$ représente le vecteur constant $\underline{O_j\, O_{j_0}}$ joignant le point O_j à l'origine de la translation O_{j_0}.



$$\underline{l_j} = \underline{O_j\, O_{j+1}}$$

$$\underline{l_{j_0}} = \underline{O_j\, O_{j_0}}$$

$$\underline{q_j} = \underline{O_{j_0}\, O_{j+1}}$$

Figure 5 : Articulation prismatique

Dans ce cas, l'équation (3-3) appliquée à la définition du barycentre B_j du corps augmenté s'écrira :

$$M_j \cdot \underline{b_j} = m_j\, \underline{d_j} + \underline{l_{j_0}} \sum_{p=j+1}^{N} m_p + \underline{q_j} \sum_{p=j+1}^{N} m_p$$

Les deux premiers termes de la somme restent constants et pourront être pré-calculés.

De même, dans l'équation (3-4) du tenseur d'inertie, le terme $\sum_{p=j+1}^{N} m_p\, (\underline{l_j} \cdot \underline{l_j}\, \underline{\underline{E}} - \underline{l_j}\, \underline{l_j})$ comportera une partie constante et une partie variable fonction de $\underline{q_j}$.

3.2. Notation matricielle

Afin d'obtenir des algorithmes faciles à mettre en oeuvre sur un minicalculateur disposant d'une taille mémoire réduite, nous n'avons pas adopté les coordonnées homogènes qui conduisent à représenter le système dans un espace à 4 dimensions. La cinématique du manipulateur utilise des vecteurs (3 x 1) et des matrices (3 x 3).

Ainsi, les coordonnées d'un point M lié au segment S_j sont définies :

3. ALGORITHME DE GENERATION D'EQUATIONS CONDENSEES

Nous développons, dans ce paragraphe, une méthode de génération des équations dynamiques d'un mécanisme articulé, sous forme matricielle symbolique, utilisant le formalisme de Lagrange et faisant intervenir les notions de barycentre et de corps augmenté. Notre objectif est d'obtenir, à partir d'une description simple et naturelle du mécanisme (cf § 4.1.), les expressions littérales condensées des coefficients qui interviennent dans l'équation de Lagrange, en mettant en évidence des regroupements de termes constants ou variables et en n'effectuant que des opérations élémentaires de produit matrice-vecteur et de produit scalaire en trois dimensions.

Afin de simplifier les notations, nous effectuons les calculs pour une chaîne de corps articulés, sachant que le principe est le même pour un mécanisme arborescent /10/.

Après avoir défini les notions de barycentre et de corps augmenté, nous rappelons la notation matricielle utilisée, puis nous établissons l'algorithme de calcul pour :

- les forces (ou couples) dus à la gravité,
- les forces (ou couples) d'inertie,
- les forces (ou couples) centrifuges et de Coriolis.

En effet, pour un mécanisme possédant N degrés de liberté indépendants, l'équation de Lagrange (1-1) est de la forme :

$$\sum_{j=1}^{N} \left\{ A_{ij}\, \ddot{q}_j + \sum_{k=j+1}^{N} B_{ijk}\, \dot{q}_j\, \dot{q}_k + C_{ij}\, \dot{q}_j^2 \right\} = Q_i + F_i \qquad (3\text{-}1)$$

avec : $i = 1, 2, \ldots N$

Le premier membre représente les couples dynamiques qui agissent sur l'articulation i :

$A_{ij}\, \ddot{q}_j$ est le couple ou la force d'inertie induit par l'accélération $\ddot{q}_j$;

$B_{ijk}\, \dot{q}_j\, \dot{q}_k$ est le couple ou la force de Coriolis engendré par les vitesses $\dot{q}_j$ et $\dot{q}_k$;

$C_{ij}\ \dot{q}_j^2$ est le couple ou la force centrifuge du à $\dot{q}_j$.

Par ailleurs :

Q_i désigne le couple ou la force de gravité ;

F_i représente le couple ou la force exercé par les systèmes dissipatifs agissant sur l'articulation i (moteurs, frottements et autres forces dissipatives).

3.1. Définition du corps augmenté

Nous utilisons, dans ce chapitre, les notations et définitions du paragraphe 2.2. pour la description d'une chaîne articulée de N corps.

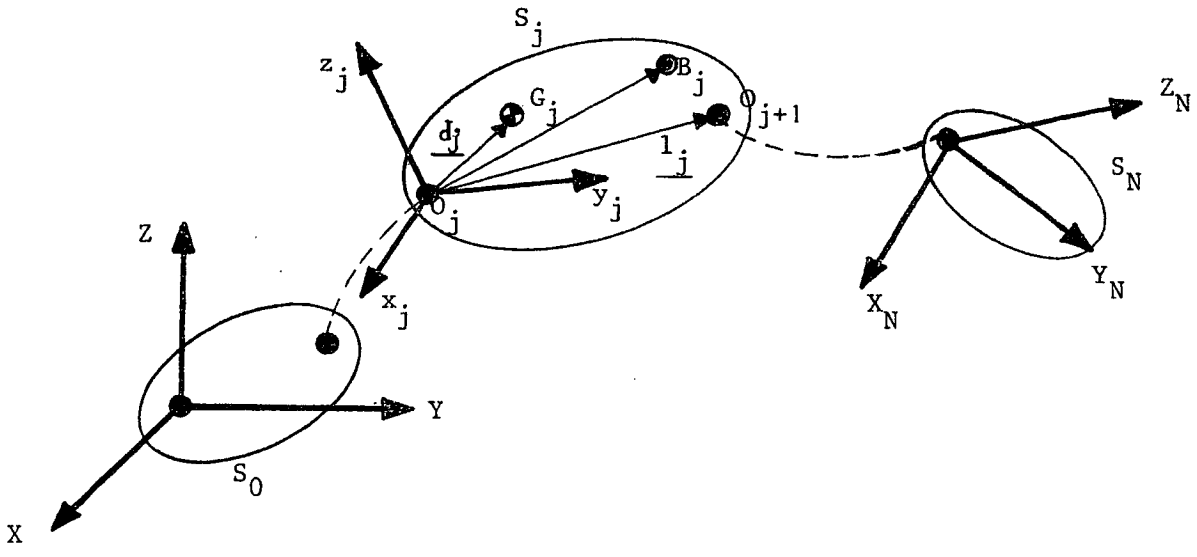


Figure 4 : Topologie du système

A chacun des corps S_j de la chaîne est associé un repère de référence $\mathcal{R}_j$ dont l'origine se trouve en O_j (articulation des corps S_{j-1} et S_j) et dont l'un des axes porte le vecteur unitaire $\underline{g_j}$ autour (ou le long) duquel s'effectue le mouvement de l'articulation. Par ailleurs :

- le vecteur $\underline{d_j}$ définit la position du centre de masse G_j par rapport à O_j ;
- le vecteur $\underline{l_j}$ réunit les articulations O_j et O_{j+1}.

Pour l'écriture matricielle des équations, nous désignerons par

- dans le repère $\mathcal{R}_j$, par le vecteur constant $\underline{O_jM}$ représenté par la matrice colonne :

$$\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}$$

- dans le repère $\mathcal{R}_k$ lié au corps S_k de la chaîne, par un vecteur variable $\underline{O_kM}$ tel que :

$$\underline{O_kM} = \underline{O_k\,O_j} + \underline{O_jM} = \sum_{p=k}^{j-1} \underline{O_p\,O_{p+1}} + \underline{O_jM}$$

soit, en notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \sum_{p=k}^{j-1} \left[R_k^p\right] \left[l_p\right] + \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}$$

où $\left[R_k^p\right]$ représente la matrice (3 x 3) qui permet de passer par rotation du repère $\mathcal{R}_k$ au repère $\mathcal{R}_p$ (cf § 2.1.).

Dans le cas où l'articulation O_p est prismatique, la matrice colonne $\left[l_p\right]$ représentant le vecteur $\underline{O_p\,O_{p+1}}$ qui joint deux articulations successives à un élément variable.

3.3. Calcul des couples dus à la gravité

Nous établissons l'expression du couple exercé sur une articulation rotoïde puis celle de la force agissant sur une articulation télescopique.

3.3.1. q_i est une rotation

Le couple résultant, sur l'articulation portée par l'axe $\vec{g}_i$, des forces induites par l'accélération de la pesanteur $\underline{G}$ s'écrit :

$$Q_i = \underline{g_i} \cdot \sum_{k=i}^{N} \underline{O_i\,G_k} \wedge (m_k\,\underline{G}) \qquad (3\text{-}5)$$

Soit, d'après les propriétés du produit mixte :

$$Q_i = (\underline{g_i} \wedge \sum_{k=i}^{N} (\underline{O_i G_k}\, m_k)) \cdot \underline{G} \qquad (3\text{-}6)$$

Sachant que : $\underline{O_k G_k} = \underline{d_k}$ et : $\underline{O_k O_{k+1}} = \underline{l_k}$, on peut écrire :

$$m_i \underline{O_i G_i} = m_i \underline{d_i}$$

$$m_{i+1} \underline{O_i G_{i+1}} = m_{i+1} \underline{l_i} + m_{i+1} \underline{d_{i+1}}$$

Donc : $$\sum_{k=i}^{i+1} \underline{O_i G_k}\, m_k = (m_i \underline{d_i} + m_{i+1} \underline{l_i}) + m_{i+1} \underline{d_{i+1}}$$

Par récurrence :

$$\sum_{k=i}^{N} \underline{O_i G_k}\, m_k = \sum_{k=i}^{N} (m_k \underline{d_k} + \sum_{p=k+1}^{N} m_p \underline{l_k})$$

Soit, d'après la définition du barycentre (3-3) :

$$\sum_{k=i}^{N} \underline{O_i G_k}\, m_k = \sum_{k=i}^{N} M_k \underline{b_k} \qquad (3\text{-}7)$$

La relation (3-6) s'écrit alors :

$$Q_i = \left(\underline{g_i} \wedge \sum_{k=i}^{N} M_k \underline{b_k}\right) \cdot \underline{G}$$

Ou encore :

$$Q_i = \left(\sum_{k=i}^{N} M_k\right) (\underline{g_i} \wedge \underline{b_k}) \cdot \underline{G}$$

Or, on peut considérer $\underline{g_i} \wedge \underline{b_k}$ comme la dérivée du vecteur $\underline{b_k}$ de module constant, par rapport à la variable q_i qui définit la position du vecteur $\underline{g_i}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, c'est-à-dire :

$$\underline{g_i} \wedge \underline{b_k} = \frac{\partial \underline{b_k}}{\partial q_i} \qquad (3\text{-}8)$$

Donc : $$Q_i = \sum_{k=i}^{N} M_k \frac{\partial \underline{b_k}}{\partial q_i} \cdot \underline{G}$$

En utilisant la notation matricielle et en considérant que le vecteur $\underline{G}$ représente l'accélération de la pesanteur dans le référentiel $\mathcal{R}$, le couple exercé sur l'articulation i s'écrit :

$$Q_i = \left[G\right]^T \sum_{k=i}^{N} \frac{\partial \left[R_0^k\right]}{\partial q_i} M_k \left[b_k\right] \qquad (3\text{-}9)$$

3.3.2. q_i est une translation

La force résultante exercée par la pesanteur en O_i sur l'articulation prismatique portée par l'axe $\vec{g_i}$ s'écrit :

$$Q_i = \sum_{k=i}^{N} \underline{g_i} \cdot (m_k \underline{G})$$

En utilisant la notation matricielle :

$$Q_i = \left[G\right]^T \left(\sum_{k=i}^{N} m_k\right) \left[R_0^i\right] \left[g_i\right]$$

Soit, en faisant intervenir la masse du corps i augmenté (3-2) :

$$Q_i = \left[G\right]^T M_i \left[R_0^i\right] \left[g_i\right] \qquad (3\text{-}10)$$

3.4. Calcul des effets d'inertie

Nous distinguons les cas où i et j sont soit des articulations rotoïdes, soit des articulations prismatiques. Il s'agit dans chacun de ces cas, de calculer le couple ou la force d'inertie $A_{ij}\ \ddot{q}_j$ induit par l'accélération $\ddot{q}_j$ sur l'axe $\vec{g_i}$ de l'articulation i.

3.4.1. q_j est une translation

Considérons l'articulation prismatique portée par l'axe $\vec{g_j}$ et soumise à une accélération $\ddot{q}_j$. La force d'inertie exercée sur cette articulation par un corps S_k situé en aval de O_j s'écrit :

$$\underline{F_k} = m_k\ \ddot{q}_j\ \underline{g_j}$$

3.4.1.1. q_i est une translation

La résultante des forces d'inertie $\underline{F_k}$ exercées par les corps S_k situés en aval de O_j ($k \geq j$) s'écrit :

$$\sum_{k=j}^{N} m_k\ \ddot{q}_j\ \underline{g_j} = M_j\ \ddot{q}_j\ \underline{g_j} \qquad (3\text{-}11)$$

L'articulation prismatique O_i est soumise à une force $A_{ij}\,\ddot{q}_j$ égale à la projection de cette résultante sur l'axe $\vec{g}_i$:

$$A_{ij}\,\ddot{q}_j = M_j\,\ddot{q}_j\,\underline{g_j}\cdot\underline{g_i}$$

D'où :
$$A_{ij} = M_j\,\left[g_i\right]^T\left[R_i^j\right]\left[g_j\right] \qquad (3\text{-}12)$$

3.4.1.2. q_i est une rotation

Le moment résultant sur l'axe $\vec{g}_i$ des forces d'inerties $\underline{F_k}$ est :

$$A_{ij}\,\ddot{q}_j = \underline{g_i}\cdot\sum_{k=j}^{N}\underline{O_i\,G_k}\wedge m_k\,\ddot{q}_j\,\underline{g_j}$$

Soit :
$$A_{ij}\,\ddot{q}_j = \underline{g_i}\cdot\sum_{k=j}^{N}(\underline{O_i\,O_j}+\underline{O_j\,G_k})\wedge m_k\,\underline{g_j}\,\ddot{q}_j$$

Compte-tenu des propriétés du produit mixte, le coefficient A_{ij} s'écrit :

$$A_{ij} = \underline{g_i}\wedge\sum_{k=j}^{N}(\underline{O_i\,O_j}+\underline{O_j\,G_k})\cdot(m_k\,\underline{g_j})$$

Soit :
$$A_{ij} = (\underline{g_i}\wedge\underline{O_i\,O_j})\cdot\underline{g_j}\,(\sum_{k=j}^{N}m_k) + \underline{g_i}\wedge\sum_{k=j}^{N}(\underline{O_j\,G_k}\,m_k)\cdot\underline{g_j}$$

En appliquant les résultats précédents (3-7), (3-8) :

$$A_{ij} = M_j\,(\underline{g_i}\wedge\sum_{k=i}^{j-1}\underline{l_k})\cdot\underline{g_j} + (\underline{g_i}\wedge\sum_{k=j}^{N}M_k\,\underline{b_k})\cdot\underline{g_j}$$

Soit :
$$A_{ij} = M_j\,(\sum_{k=i}^{j-1}\frac{\partial\,\underline{l_k}}{\partial\,q_i})\cdot\underline{g_j} + (\sum_{k=j}^{N}M_k\,\frac{\partial\,\underline{b_k}}{\partial\,q_i})\cdot\underline{g_j}$$

En utilisant les notations matricielles :

$$A_{ij} = M_j\left[\sum_{k=i}^{j-1}\frac{\partial\,\left[R_i^k\right]}{\partial\,q_i}\left[l_k\right]\right]^T\left[R_i^j\right]\left[g_j\right] + \left[\sum_{k=j}^{N}\frac{\partial\,\left[R_i^k\right]}{\partial\,q_i}\left[b_k\right]\right]^T\left[R_i^j\right]\left[g_j\right] \qquad (3\text{-}13)$$

3.4.2. q_j est une rotation

Les forces d'inerties dues aux corps S_k ($k \geq j$) appliquées en G_k exercent sur l'articulation portée par l'axe $\vec{g}_j$ un moment résultant de la forme :

$$\sum_{k=j}^{N} \mathcal{M}_k = \sum_{k=j}^{N} \ddot{q}_j \, (\underline{g_j} \wedge \underline{O_j G_k} \, m_k)$$

Soit, d'après (3-7) :

$$\Sigma \, \mathcal{M}_k = (\underline{g_j} \wedge \sum_{k=j}^{N} M_k \, \underline{b_k}) \, \ddot{q}_j$$

D'après (3-8) :

$$\Sigma \, \mathcal{M}_k = (\sum_{k=j}^{N} M_k \frac{\partial \underline{b_k}}{\partial q_j}) \, \ddot{q}_j$$

3.4.2.1. q_i est une translation

L'articulation i est soumise à une force résultante suivant $\vec{g_i}$ de la forme :

$$A_{ij} \, \ddot{q}_j = \underline{g_i} \cdot (\sum_{k=j}^{N} M_k \frac{\partial \underline{b_k}}{\partial q_j}) \, \ddot{q}_j$$

Ce qui donne :

$$A_{ij} = \underline{g_i} \cdot (\sum_{k=j}^{N} M_k \frac{\partial \underline{b_k}}{\partial q_j})$$

Soit, en module :

$$A_{ij} = \left[g_i\right]^T \sum_{k=j}^{N} (\frac{\partial \left[R_i^k\right]}{\partial q_j} \, M_k \, \left[b_k\right]) \qquad (3\text{-}14)$$

3.4.2.2. q_i est une rotation

L'articulation i est soumise au couple $A_{ij} \, \ddot{q}_j$ résultant du mouvement des corps k ($k \geq j$) autour de l'axe de rotation $\vec{g_j}$. Pour chacun de ces corps, on peut considérer de manière classique que le mouvement est équivalent à la somme de deux mouvements élémentaires :

- un mouvement de rotation autour d'un axe passant par le centre d'inertie G_k ;

- un mouvement de translation de G_k où est supposée concentrée la masse m_k.

A ces deux mouvements, on associe respectivement :

- le moment dû à l'inertie du corps autour de l'axe $\vec{g_i}$;

- le moment, autour de cet axe, de la résultante des forces d'inertie.

Calculons ces deux termes : $(A_{ij})_R\ \ddot{q}_j$ et $(A_{ij})_T\ \ddot{q}_j$

a) Terme lié aux rotations

L'articulation rotoïde i est soumise suivant l'axe $\vec{g_i}$ à un moment résultant de la rotation des corps S_k ($k \geq j$) autour d'un axe passant par leur centre de masse G_k. Ce moment s'exprime en fonction des tenseurs d'inertie $\underline{\underline{I_k}}$ par la relation :

$$(A_{ij})_R\ \ddot{q}_j = \underline{g_i} \cdot \left(\sum_{k=j}^{N} \underline{\underline{I_k}}\right) \ddot{q}_j \cdot \underline{g_j}$$

En utilisant la notation matricielle, on obtient :

$$(A_{ij})_R = \sum_{k=j}^{N} \left[g_i\right]^T \left[R_i^k\right] \left[I_k\right] \left[R_k^j\right]^T \left[g_j\right] \qquad (3\text{-}15)$$

b) Terme lié aux translations

Les forces d'inertie F_k appliquées en G_k exercent sur $\vec{g_j}$ un moment résultant de la forme :

$$\sum_{k=j}^{N} \mathcal{M}_k = \sum_{k=j}^{N} \ddot{q}_j\ (\underline{g_j} \wedge \underline{O_j\ G_k}\ m_k)$$

Le moment résultant sur l'articulation i aura pour expression :

$$(A_{ij})_T\ \ddot{q}_j = \underline{g_i} \cdot \left(\sum_{k=j}^{N} \ddot{q}_j\ (\underline{O_i\ G_k} \wedge (\underline{g_j} \wedge \underline{O_j\ G_k}\ m_k))\right)$$

D'où:

$$(A_{ij})_T = \underline{g_i} \cdot \left(\sum_{k=j}^{N} ((\underline{O_i\ O_j} + \underline{O_j\ G_k}) \wedge (g_j \wedge O_j\ G_k\ \ m_k))\right)$$

En développant :

$$(A_{ij})_T = \underline{g_i} \cdot (\underline{O_i\ O_j} \wedge (\underline{g_j} \wedge \sum_{k=j}^{N} \underline{O_j\ G_k}\ m_k))$$

$$+ \underline{g_i} \cdot \left(\sum_{k=j}^{N} (\underline{O_j\ G_k} \wedge (g_j \wedge \underline{O_j\ G_k}\ m_k))\right)$$

on peut donc écrire : $(A_{ij})_T = A_1 + A_2$; avec :

$$A_1 = \underline{g_i} \cdot (\underline{O_i\ O_j} \wedge (g_j \wedge \sum_{k=j}^{N} \underline{O_j\ G_k}\ m_k))$$

$$A_2 = \underline{g_i} \cdot (\sum_{k=j}^{N} (\underline{O_j\ G_k} \wedge (\underline{g_j} \wedge \underline{O_j\ G_k}\ m_k)))$$

Calculons A_1. D'après la relation (3-7), on peut écrire :

$$A_1 = \underline{g_i} \cdot (\underline{O_i\ O_j} \wedge (\underline{g_j} \wedge \sum_{k=j}^{N} M_k\ \underline{b_k}))$$

D'où :

$$A_1 = (\underline{g_i} \wedge \underline{O_i\ O_j}) \cdot (\underline{g_j} \wedge \sum_{k=j}^{N} M_k\ \underline{b_k})$$

Or, $\underline{O_i\ O_j} = \sum_{p=i}^{j-1} \underline{l_p}$; donc, d'après (3-8) :

$$A_1 = (\sum_{p=i}^{j-1} \frac{\partial\ \underline{l_p}}{\partial\ q_i}) \cdot (\sum_{k=j}^{N} M_k \frac{\partial\ \underline{b_k}}{\partial\ q_j})$$

Ceci s'écrit avec la notation matricielle :

$$A_1 = \sum_{p=i}^{j-1} \left[\frac{\partial \left[R_i^p\right]}{\partial\ q_i} \left[l_p\right]\right]^T \sum_{k=j}^{N} M_k \left[\frac{\partial \left[R_i^k\right]}{\partial\ q_j} \left[b_k\right]\right]$$

ou :

$$A_1 = \sum_{k=j}^{N} \sum_{p=i}^{j-1} \left[\frac{\partial \left[R_i^p\right]}{\partial\ q_i} \left[l_p\right]\right]^T M_k \left[\frac{\partial \left[R_i^k\right]}{\partial\ q_j} \left[b_k\right]\right]$$

Calculons A_2 ; on peut écrire :

$$\underline{O_j\ G_k} = \underline{O_j\ O_k} + \underline{O_k\ G_k}$$

Soit :

$$\underline{O_j\ G_k} = \sum_{p=j}^{k-1} \underline{O_p\ O_{p+1}} + \underline{O_k\ G_k} = \sum_{p=j}^{k-1} \underline{l_p} + \underline{d_k}$$

Donc :

$$A_2 = \underline{g_i} \cdot (\sum_{k=j}^{N} ((\sum_{p=j}^{k-1} \underline{l_p} + \underline{d_k}) \wedge (\underline{g_j} \wedge (\sum_{r=j}^{k-1} \underline{l_r} + \underline{d_k})\ m_k)))$$

Le développement de l'expression A_2 fait apparaître des termes de la forme :

$$\alpha_s = \underline{g_i} \cdot (m_s\ (\underline{d_s} \wedge (\underline{g_j} \wedge \underline{d_s})) + \sum_{p=s+1}^{N} m_p\ (\underline{l_p} \wedge (\underline{g_j} \wedge \underline{l_p})))$$

Sachant que $\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{c} \cdot \underline{a}\ \underline{\underline{E}} - \underline{c}\ \underline{a}) \cdot \underline{b}$, où $\underline{\underline{E}}$ est le tenseur unité d'ordre 2, l'expression précédente s'écrit :

$$\alpha_s = \underline{g_i} \cdot (m_s (\underline{d_s} \cdot \underline{d_s} \underline{\underline{E}} - \underline{d_s}\, \underline{d_s}) \cdot \underline{g_j})$$

$$+ \underline{g_i} \cdot (\sum_{p=k+1}^{N} (m_p) (\underline{l_s} \cdot \underline{l_s} \underline{\underline{E}} - \underline{l_s}\, \underline{l_s}) \cdot \underline{g_j})$$

D'après (3-4), on peut écrire :

$$\alpha_s = \underline{g_i} \cdot (\underline{\underline{K_s}} + \sum_{p=s+1}^{N} \underline{\underline{K_p}}) \cdot \underline{g_j}$$

On retrouve ici le tenseur d'inertie en O_s du corps s augmenté. Par ailleurs, les termes restant sont de la forme :

$$\alpha_1 = \underline{g_i} \cdot (\sum_{p=j}^{N-1} \underline{O_p\, O_{p+1}} \wedge (\underline{g_j} \wedge \sum_{k=j}^{N} \underline{O_j\, G_k}\ m_k))$$

$$\alpha_2 = \underline{g_i} \cdot ((\sum_{p=j}^{N} \underline{O_j\, G_p}\ m_p) \wedge \sum_{k=j}^{N-1} (\underline{g_j} \wedge \underline{O_k\, O_{k+1}}))$$

D'après (3-7) :

$$\alpha_1 = \underline{g_i} \cdot (\sum_{p=j}^{N-1} \underline{O_p\, O_{p+1}} \wedge (\underline{g_j} \wedge \sum_{k=j}^{N} M_k\, \underline{O_j\, B_k}))$$

$$\alpha_1 = (\underline{g_i} \wedge \sum_{p=j}^{N-1} \underline{O_p\, O_{p+1}}) \cdot (\underline{g_j} \wedge \sum_{k=j}^{N} M_k\, \underline{O_j\, B_k})$$

$$\alpha_1 = \sum_{k=j}^{N} \sum_{p=j}^{N-1} ((\frac{\partial\, \underline{l_p}}{\partial\, q_i}) \cdot (M_k \frac{\partial\, \underline{b_k}}{\partial\, q_j}))$$

De même :

$$\alpha_2 = \underline{g_i} \cdot (\sum_{p=j}^{N} M_p\, \underline{O_j\, B_p} \wedge \sum_{k=j}^{N-1} (\underline{g_j} \wedge \underline{O_k\, O_{k+1}}))$$

$$\alpha_2 = \sum_{k=j}^{N-1} \sum_{p=j}^{N} ((\underline{g_i} \wedge M_p\, \underline{b_p}) \cdot (\underline{g_j} \wedge \underline{l_k}))$$

$$\alpha_2 = \sum_{k=j}^{N-1} \sum_{p=j}^{N} ((M_p \frac{\partial\, \underline{b_p}}{\partial\, q_i}) \cdot (\frac{\partial\, \underline{l_k}}{\partial\, q_j}))$$

On en déduit l'expression de A_2 sous forme matricielle :

$$A_2 = \sum_{k=j}^{N} \cdot \left[g_i\right]^T \left[R_i^k\right] \left(\left[K_k\right] + \sum_{p=k+1}^{N} \left[K_p\right]\right) \left[R_k^j\right]^T \left[g_j\right]$$
$$+ \sum_{k=j}^{N} \sum_{p=i}^{N-1} \left[l_p\right]^T \frac{\partial \left[R_i^p\right]^T}{\partial q_i} \frac{\partial \left[R_i^k\right]}{\partial q_j} M_k \left[b_k\right] \qquad (3\text{-}16)$$
$$+ \sum_{k=j}^{N-1} \sum_{p=j}^{N} M_p \left[b_p\right]^T \frac{\partial \left[R_i^p\right]^T}{\partial q_i} \frac{\partial \left[R_i^k\right]}{\partial q_j} \left[l_k\right]$$

En regroupant A_1 et A_2, on retrouve la pseudo-matrice d'inertie :

$$\left[J_k\right] = \left[I_k\right] + \left[K_k\right] + \sum_{p=k+1}^{N} \left[K_p\right]$$

c'est à dire :

$$A_{ij} = \sum_{k=j}^{N} \left[g_i\right]^T \left[R_i^k\right] \left[J_k\right] \left[R_k^j\right]^T \left[g_j\right]$$
$$+ \sum_{k=j}^{N} \sum_{p=i}^{N-1} \left[\frac{\partial \left[R_i^p\right]}{\partial q_i} \left[l_p\right]\right]^T M_k \left[\frac{\partial \left[R_i^k\right]}{\partial q_j} \left[b_k\right]\right] \qquad (3\text{-}17)$$
$$+ \sum_{k=j}^{N-1} \sum_{p=j}^{N} M_p \left[\frac{\partial \left[R_i^p\right]}{\partial q_i} \left[b_p\right]\right]^T \left[\frac{\partial \left[R_i^k\right]}{\partial q_j} \left[l_k\right]\right]$$

3.5. Calcul des couples centrifuges et de Coriolis

Ce sont les couples dynamiques engendrés par les couplages de vitesse entre les articulations. Dans le premier membre de l'équation (3-1), ils sont représentés par les termes :

$$C_{ij} \dot{q}_j^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=j+1}^{N} B_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Il s'agit donc d'évaluer les coefficients C_{ij} et B_{ijk} en fonction des coordonnées généralisées.

On démontre que ces éléments sont obtenus par dérivations partielles des coefficients A_{ij} par rapport aux coordonnées généralisées /10, 11/. Ainsi :

$$B_{ijk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \qquad (3\text{-}17)$$

De même :

$$C_{ij} = 2 \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jj}}{\partial q_i} \tag{3-18}$$

Il apparaît que le calcul de ces dérivées partielles est la méthode la plus rapide d'obtention des coefficients B et C lorsque les expressions symboliques de coefficients A_{ij} sont connues. Les résultats obtenus font encore apparaître les regroupements de termes constants liés au "corps augmentés" et les regroupements de variables telles que les sommes d'angles dans les arguments des fonctions trigonométriques. On remarque, par ailleurs que :

$$C_{ij} = B_{ijj}$$

De même, les propriétés suivantes permettent de simplifier le calcul des coefficients :

- Si $i = k$, comme $k < j$: $B_{iji} = 0$

- Si $i = j$: $B_{iik} = \dfrac{\partial A_{ii}}{\partial q_k}$; $C_{ii} = 0$

- Si $i < j$: $B_{ijk} = \dfrac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \dfrac{\partial A_{ik}}{\partial q_j}$; $C_{ij} = 2 \dfrac{\partial A_{ij}}{\partial q_j}$

- Si $i > j$: $B_{ijk} = \dfrac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} - \dfrac{\partial A_{jk}}{\partial q_i}$; $C_{ij} = - \dfrac{\partial A_{jj}}{\partial q_i}$

Malgré les simplifications apportées par les regroupements de termes, les expressions littérales obtenues pour les coefficients B et C restent relativement compliquées. Ceci conduit, dans la plupart des cas, à considérer un modèle simplifié où seuls seront pris en compte les couples d'inertie et de gravité, ou à découpler les mouvements de rotation de l'organe terminal du manipulateur de ceux du bras, lorsque les dimensions de l'organe terminal sont petites vis-à-vis de celles du bras. La dynamique de ce dernier ne fait alors intervenir que trois variables au lieu de six.

4. APPLICATION A UN ROBOT INDUSTRIEL

La méthode décrite dans le paragraphe 3 a été utilisée pour établir les équations dynamiques d'un robot industriel à l'aide d'un minicalculateur T 1600 utilisé en mode conversationnel. Nous présenterons brièvement le langage de description du mécanisme, puis les résultats du codage interne. Enfin, nous verrons comment sont regroupés, au fur et à mesure des calculs, les termes constants qui interviennent dans les expressions littérales des couples de gravité Q_i puis des couples d'inertie $A_{ij}\ddot{q}_j$.

4.1. Description du robot

4.1.1. Données géométriques

Le robot schématisé sur la figure 6 est constitué de 4 corps rigides qui se déplacent grâce à 6 articulations rotoïdes. En effet, le segment terminal est une trompe assimilée à un segment rigide à 3 degrés de liberté. Afin de respecter les contraintes imposées par l'algorithme de calcul, nous lui adjoindrons deux corps fictifs S_4 et S_5 de masse nulle.

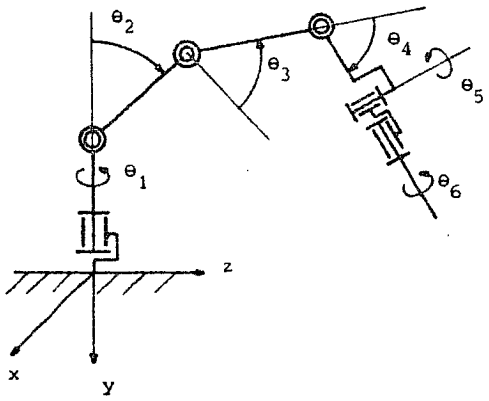


Figure 6 : Schéma d'un robot à 6 degrés de liberté

Le langage de description utilisé /16, 17/ est applicable à tout mécanisme arborescent ne comportant pas de boucle fermée.

En règle générale, on définit un repère $\mathcal{R}$ (0, X, Y, Z) orthonormé direct, lié à la base du mécanisme et un repère $\mathcal{R}_N$ lié au segment terminal. La chaîne est décrite par la succession des changements de repère qui amènent le repère $\mathcal{R}$ en coïncidence avec le repère $\mathcal{R}_N$. Deux types de changement de repère

sont utilisés : rotation (R) (ou translation (T)) autour (ou le long) d'un des axes du repère précédent. Les changements de repère qui correspondent aux articulations mécaniques des corps sont fonction des variables articulaires, par exemple : ROTX. Ceux qui décrivent la forme d'un corps sont constants (ils sont identifiés par la lettre K), par exemple : TZK représente un segment porté par l'axe Z du repère précédent. Les longueurs des corps et les limites articulaires sont représentées par un symbole (ou une valeur numérique) entre parenthèses.

Ainsi, la phrase de description représentant le mécanisme de la figure 6 peut s'écrire :

RY (θ_1 MIN, θ_1 MAX), TYK (L1), RX (θ_2 MIN, θ_2 MAX),
TYK (L2), RX (θ_3 MIN, θ_3 MAX), TZK (L3),
RX (θ_4 MIN, θ_4 MAX), TZK ($\emptyset$), RY (θ_5 MIN, θ_5 MAX),
TZK ($\emptyset$), RZ (θ_6 MIN, θ_6 MAX), TZK (L_6) ;

Contrairement aux descriptions existantes /11, 12/ qui sont soit trop condensées, soit trop détaillées, celle-ci, très proche du langage naturel, facilite le dialogue homme-calculateur et autorise ainsi des modifications de la topologie du mécanisme. Par ailleurs, une détection des erreurs de syntaxe est effectuée lors de la traduction de la phrase d'entrée ; elles sont signalées par un message à l'opérateur.

4.1.2. Données dynamiques

Après analyse de la phrase de description géométrique, un codage interne du robot est généré par le calculateur (cf § 4.2.). Ensuite, suivant les besoins de l'application en cours, l'utilisateur devra fournir les paramètres massiques et inertiels du manipulateur pour chaque segment S_i, c'est-à-dire : les masses m_i, les positions des centres de masse d_i et les matrices d'inertie $[I_i]$ au centre de masse G_i, dans le repère $\mathcal{R}_i$ lié au corps. Pour simplifier, nous supposerons, dans l'exemple étudié, d'une part que le centre de masse G_i est toujours porté par le vecteur $\underline{l_i}$ qui joint les articulations successives O_i et O_{i+1} et, d'autre part, que la matrice $[I_i]$ est diagonale, bien que le cas général puisse être traité.

4.2. Codage interne

La description du système articulé donnée par l'utilisateur est mise en forme pour permettre un accès rapide aux variables géométriques et massiques

lors du calcul des équations littérales. Nous avons adopté une représentation matricielle compatible avec les algorithmes développés précédemment.

Par analyse du langage d'entrée, le traducteur donne directement sous forme de chaînes de caractères :

- le nombre NR de repères utilisés,
- le nombre N de degrés de liberté,
- la matrice MRR (NR x 4) qui définit le déplacement de chaque repère par rapport au précédent,
- la liste des corps décrits, ainsi que leur longueur,
- le tableau des degrés de liberté et de leurs limites.

Ensuite, afin d'optimiser les calculs, la description des paramètres structuraux est condensée en deux tableaux :

- Le tableau ANGLE définit les rotations relatives des corps (ou des repères associés) lorsque l'on se déplace du repère origine vers l'extrêmité du manipulateur. Au corps n° i, mobile en rotation autour de l'axe j, on associe l'élément e_{ij}, constitué d'une suite de n caractères, lorsque les n - 1 rotations qui précèdent s'effectuent autour du même axe j. On évite ainsi, d'une part des calculs redondants de matrices de rotation et d'autre part la simplification ultérieure d'équations où apparaîtraient, sous forme développée, les fonctions trigonométriques d'une somme d'arguments. Dans l'exemple cité, c'est le cas des rotations θ_1, θ_3, θ_4 qui s'effectuent autour de l'axe X et que l'on retrouve dans le tableau ANGLE sous forme des chaînes de caractères '2', '23', '234'.

- Le tableau VLL représente les vecteurs $\underline{l_i}$ des leviers dans les repères $\mathcal{R}_i$ liés au corps.

Les paramètres massiques sont également mémorisés sous forme de tableaux de caractères :

- le tableau VCG représente les positions des centres de masse $[d_i]$ dans les repères $\mathcal{R}_i$; dans le cas examiné, les vecteurs $\underline{d_i}$ et $\underline{l_i}$ sont colinéaires.

- les matrices d'inertie $[I_i]$ sont représentées ici par leurs termes diagonaux ; par ailleurs, l'inertie de chaque corps autour de son axe est supposée nulle.

RY(θ1MIN,θ1MAX),TYK(L1),RX(θ2MIN,θ2MAX),TYK(L2),RX(θ3MIN,θ3MAX),
TZK(L3),RX(θ4MIN,θ4MAX),TZK(0),RY(θ5MIN,θ5MAX),TZK(0),RZ(θ6MIN,θ6MAX),TZK(L6);

TABLEAU MRR DE LA DESCRIPTION
****

0	1	0	0
0	1	0	1
2	0	0	0
0	2	0	1
3	0	0	0
0	0	3	1
4	0	0	0
0	0	4	1
0	5	0	0
0	0	5	1
0	0	6	0
0	0	6	1

NOMBRE DE CHANGEMENTS DE REPERES 12

NOMBRE DE DEGRES DE LIBERTE 6

TABLEAU DES TRANSLATIONS CONSTANTES
****

0	L1	0
0	L2	0
0	0	L3
0	0	0
0	0	0
0	0	L6

TABLEAU DES ROTATIONS
****

0	1	0
2	0	0
23	0	0
234	0	0
0	5	0
0	0	6

LISTE DES CORPS DECRITS
****

NO DU CORPS	LONGUEUR
1	L1
2	L2
3	L3
4	0
5	0
6	L6

LIMITES DES DEGRES DE LIBERTE
****

NO DU DDL	MIN	MAX
1	θ1MIN	θ1MAX
2	θ2MIN	θ2MAX
3	θ3MIN	θ3MAX
4	θ4MIN	θ4MAX
5	θ5MIN	θ5MAX
6	θ6MIN	θ6MAX

DONNEES MASSIQUES
****

CORPS NO	MASSE	VCG		
1	M1	0	D1	0
2	M2	0	D2	0
3	M3	0	0	D3
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	M6	0	0	D6

TENSEURS D INERTIE
****

CORPS NO 1 :

IX1 0 IZ1

CORPS NO 2 :

IX2 0 IZ2

CORPS NO 3 :

IX3 IY3 0

CORPS NO 6 :

IX6 IY6 0

4.3. Constantes et variables intermédiaires

Dans la plupart des structures mécaniques considérées, on peut admettre, en première approximation, que les centres de masse sont portés par les axes des leviers qui joignent les articulations, autrement dit, que les vecteurs $\underline{d}$ et $\underline{l}$ qui interviennent dans la définition du barycentre sont colinéaires. Il en résulte que le barycentre B est lui aussi porté par le vecteur $\underline{l}$. Par conséquent, si l'on désigne par $\underline{u_j}$ le vecteur unitaire de l'axe qui porte le corps j, la relation (3-3) peut s'écrire :

$$m_j\, b_j\, \underline{u_j} = (m_j\, d_j + l_j \sum_{p=j+1}^{N} m_p)\, \underline{u_j}$$

On met en évidence des termes constants que nous désignerons sous le nom de "masses rapportées":

$$V_j = m_j\, b_j = m_j\, d_j + l_j \sum_{p=j+1}^{N} m_p$$

De la même façon, compte-tenu des simplifications apportées généralement aux tenseurs d'inertie, la relation tensorielle (3-4) peut s'écrire, sous forme matricielle :

$$[J_j] = [I_j] + [K_j] + \sum_{p=j+1}^{N} [K_p]$$

Avec :

$$[I_j] + [K_j] = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} + m_j\,(d_{xj}^2 + d_{yj}^2 + d_{zj}^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$- m_j \begin{bmatrix} d_{xj}^2 & d_{xj}\, d_{yj} & d_{xj}\, d_{zj} \\ d_{xj}\, d_{yj} & d_{yj}^2 & d_{yj}\, d_{zj} \\ d_{xj}\, d_{zj} & d_{yj}\, d_{zj} & d_{zj}^2 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$[I_j] + [K_j] = \begin{bmatrix} I_x + m_j\,(d_{y_j}^2 + d_{zj}^2) & - m_j\,(d_{xj}\, d_{yj}) & - m_j\,(d_{xj}\, d_{zj}) \\ - m_j\,(d_{xj}\, d_{yj}) & I_y + m_j\,(d_{xj}^2 + d_{zj}^2) & - m_j\,(d_{yj}\, d_{zj}) \\ - m_j\,(d_{xj}\, d_{zj}) & - m_j\,(d_{yj}\, d_{zj}) & I_z + m_j\,(d_{xj}^2 + d_{yj}^2) \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, lorsque $\underline{u_j}$ est porté par un axe du repère $\mathcal{R}_j$, deux composantes du vecteur $\underline{d}$ sont nulles. Ainsi, si $\underline{u_j}$ est porté par l'axe $\vec{x}_j$, on peut écrire :

$$d_{xj} = d_j \; ; \; d_{yj} = d_{zj} = 0$$

Il en résulte :

$$\left[I_j\right] + \left[K_j\right] = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y + m_j\, d_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_z + m_j\, d_j^2 \end{bmatrix}$$

Pour les corps p d'indice supérieur à j, on aura de même :

$$\sum_{p=j+1}^{N} \left[K_p\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{p=j+1}^{N} m_p\, l_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{p=j+1}^{N} m_p\, l_j^2 \end{bmatrix}$$

Ce qui conduit à :

$$\left[I_j\right] = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y + W_j & 0 \\ 0 & 0 & I_z + W_j \end{bmatrix}$$

En posant : $W_j = m_j \quad d_j^2 + \sum_{p=j+1}^{N} m_p \cdot l_j^2$

On met ainsi en évidence le terme constant W_j que l'on désignera sous le nom "d'inertie rapportée". Des expressions analogues sont obtenues lorsque $\underline{u_j}$ est porté par les axes $\vec{y_j}$ ou $\vec{z_j}$.

Dans le cas du robot étudié, ces termes constants sont regroupés avant la mise en équation. On obtient alors les expressions suivantes :

```
MASSES RAPPORTEES CONSTANTES
****************************
CORPS NO 1:   VY1 =D1*M1+L1*(+M2+M3+M6)
CORPS NO 2:   VY2 =D2*M2+L2*(+M3+M6)
CORPS NO 3:   VZ3 =D3*M3+L3*(+M6)
CORPS NO 6:   VZ6 =D6*M6
```

```
INERTIES RAPPORTEES CONSTANTES
******************************
CORPS NO 1:   WY1 =D1**2*M1+L1**2*(M2+M3+M6)
CORPS NO 2:   WY2 =D2**2*M2+L2**2*(M3+M6)
CORPS NO 3:   WZ3 =D3**2*M3+L3**2*(M6)
CORPS NO 6:   WZ6 =D6**2*M6

INERTIE TOTALE
**************
JX1    =IX1+WY1
JZ1    =IZ1+WY1
JX2    =IX2+WY2
JZ2    =IZ2+WY2
JX3    =IX3+WZ3
JY3    =IY3+WZ3
JX6    =IX6+WZ6
JY6    =IY6+WZ6
```

4.4. Couples de gravité

L'équation (3-5) permet d'exprimer le couple exercé par la gravité sur l'articulation i de la manière suivante :

$$Q_i = \left[G\right]^T \sum_{j=i}^{N} \left(\left[R_0^1\right] \left[R_1^2\right] \cdots \frac{\partial \left[R_{i-1}^i\right]}{\partial \theta_i} \cdots \left[R_{j-1}^j\right] \left[V_j\right] \right)$$

On remarquera que, dans le cas particulier où les vecteurs de deux articulations rotoïdes $\underline{g_{i-1}}$ et $\underline{g_i}$ sont parallèles, on peut écrire :

$$\left[R_{i-2}^{i-1}\right] \frac{\partial \left[R_{i-1}^i\right]}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \left[R_{i-2}^{i-1}\right]}{\partial \theta_i} \qquad \left[R_{i-1}^i\right] = \frac{\partial \left[R_{i-2}^i\right]}{\partial \theta_i}$$

Par suite, dans le cas où l'on calcule les couples Q_i pour des valeurs décroissantes de i, on peut réduire les expressions en posant :

$$Q_{i-1} = \left(\left[G\right]^T \left[R_0^1\right] \left[R_1^2\right] \cdots \frac{\partial \left[R_{i-2}^{i-1}\right]}{\partial q_{i-1}} \left[V_{i-1}\right] \right) + Q_i$$

L'algorithme de calcul ne fait donc intervenir que des produits de "matrice (3 x 3) x vecteur (3)", les matrices de rotation et leurs dérivées étant calculées par deux sous-programmes élémentaires qui ne nécessitent que la connaissance de l'axe de rotation donné par le tableau ANGLE.

Pour le robot à 6 corps étudié, on obtient directement les expressions symboliques suivantes, où l'on note :

$C\theta = \cos\theta$

$S\theta = \sin\theta$

$\theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$

```
COUPLES EXERCES PAR LA PESANTEUR
********************************
Q( 6)= 0

Q( 5)= +G*(+S234*S5*VZ6)

Q( 4)= +G*(-C234*C5*VZ6)

Q( 3)= +G*(-C23*VZ3)+Q(4)

Q( 2)= +G*(-S2*VY2)+Q(3)

Q( 1)= 0
```

4.5. Couples dynamiques

L'expression des coefficients A_{ij} (3-17) appliquée au cas particulier d'un robot dont les vecteurs $\underline{d_j}$ et $\underline{l_j}$ sont colinéaires donne, pour des articulations rotoïdes :

$$A_{ij} = \sum_{k=j}^{N} \left(\left[g_i\right]^T \left[R_i^k\right] \left[J_k\right] \left[R_k^j\right]^T \left[g_j\right] + \sum_{p=i}^{N} \left(l_p \; V_k \; \left[g_p\right]^T \frac{\partial \left[R_i^p\right]^T}{\partial \theta_i} \frac{\partial \left[R_i^k\right]}{\partial \theta_j} \left[g_k\right] \right) + \sum_{p=j}^{N} \left(l_k \; V_p \; \left[g_p\right]^T \frac{\partial \left[R_i^p\right]^T}{\partial \theta_i} \frac{\partial \left[R_i^k\right]}{\partial \theta_j} \left[g_k\right] \right) \right)$$

pour $i \leq j$ et en considérant $l_N = 0$.

avec : $\left[J_k\right] = \left[I_k\right] + \left[W_k\right]$, inertie constante rapportée sur le corps k.

On remarque que, dans le cas particulier où i = j, on a :

$$A_{ii} = \sum_{k=i}^{N} \left(\left[g_i\right]^T \left[R_i^k\right] \left[J_k\right] \left[R_k^i\right]^T \left[g_i\right] + 2 \sum_{p=i}^{N} \left(l_p \; V_k \; \left[g_p\right]^T \frac{\partial \left[R_i^p\right]^T}{\partial \theta_i} \frac{\partial \left[R_i^k\right]}{\partial \theta_i} \left[g_k\right] \right) \right)$$

Des regroupements analogues à ceux effectués pour les couples de gravité conduisent aux expressions suivantes pour l'exemple étudié :

```
COEFFICIENTS AIJ DES COUPLES D INERTIE
**************************************
A11=+2*VZ3*L2*(+C23*S2)+2*VZ6*L2*(+C234*C5*S2)+2*VZ6*L3*(+C234*C5*C23)+JZ2*S2*S2+JY3
    *C23*C23+JX6*C6*S5*S234*C5*S5*S234+JX6*C6*S5*S234*S6*C234+JX6*S6*C234*C6*S5*S234
    +JX6*S6*C234*S6*C234+JY6*S6*S5*S234*S6*S5*S234-JY6*S6*S5*S234*C6*C234-JY6*C6*C23
    4*S6*S5*S234+JY6*C6*C234*C6*C234
A12=+VZ6*L2*(-S5*C2)+VZ6*L3*(+S5*S23)+JX6*C6*C5*C6*S5*S234+JX6*C6*C5*S6*C234+JY6*S6*
    C5*S6*S5*S234-JY6*S6*C5*C6*C234

A13=+VZ6*L3*(+S5*S23)+JX6*C6*C5*C6*S5*S234+JX6*C6*C5*S6*C234+JY6*S6*C5*S6*S5*S234-JY
    6*S6*C5*C6*C234

A14=+JX6*C6*C5*C6*S5*S234+JX6*C6*C5*S6*C234+JY6*S6*C5*S6*S5*S234-JY6*S6*C5*C6*C234
```

```
A15=+VZ6*L2*(+S2*C5)+VZ6*L3*(+C23*C5)+JX6*S6*C6*S5*S234+JX6*S6*S6*C234-JY6*C6*S6*S5*
    S234+JY6*C6*C6*C234

A16=0

A22=+2*VZ3*L2*(-S3)+2*VZ6*L2*(-S34*C5)+2*VZ6*L3*(+C4*C5)+JX2+JX3+JX6*C6*C5*C6*C5+JY6
    *S6*C5*S6*C5

A23=+VZ3*L2*(-S3)+VZ6*L3*(+C4*C5)+VZ6*L2*(-S34*C5)+VZ6*L3*(+C4*C5)+JX3+JX6*C6*C5*C6*
    C5+JY6*S6*C5*S6*C5

A24=+VZ6*L2*(-S34*C5)+VZ6*L3*(+C4*C5)+JX6*C6*C5*C6*C5+JY6*S6*C5*S6*C5

A25=+VZ6*L2*(-C34*S5)+VZ6*L3*(-S4*S5)+JX6*S6*C6*C5-JY6*C6*S6*C5

A26=0

A33=+2*VZ3*L3*(+C4*C5)+JX3+JX6*C6*C5*C6*C5+JY6*S6*C5*S6*C5

A34=+VZ6*L3*(+C4*C5)+JX6*C6*C5*C6*C5+JY6*S6*C5*S6*C5

A35=+VZ6*L3*(-S4*S5)+JX6*S6*C6*C5-JY6*C6*S6*C5

A36=0

A44=+JX6*C6*C5*C6*C5+JY6*S6*C5*S6*C5

A45=+JX6*S6*C6*C5-JY6*C6*S6*C5

A46=0

A55=+JX6*S6*S6+JY6*C6*C6

A56=0

A66=0
```

5. CONCLUSION

Après avoir analysé brièvement les différents formalismes qui conduisent à la mise en équation des systèmes articulés, nous nous sommes intéressés plus spécialement aux méthodes dérivées des équations de Lagrange qui fournissent directement le nombre minimum d'équations et en particulier à celles qui ont conduit à une procédure matricielle permettant le calcul des coefficients dynamiques sur ordinateur.

Cependant, les algorithmes et les programmes développés par ailleurs nous ont semblé parfois assez difficiles à utiliser :

- la description du mécanisme n'est pas toujours très simple pour un utilisateur non initié ;

- la capacité mémoire exigée suppose l'utilisation d'un gros ordinateur.

D'autre part, les équations obtenues ne sont pas applicables en temps réel compte-tenu de leur complexité.

La méthode que nous avons mise au point et présentée dans le paragraphe 3 de ce rapport, a été implantée sur un minicalculateur T 1600 disposant de 24 K mots de mémoire vive. Le logiciel essentiellement écrit en FORTRAN a été conçu de façon modulaire ; 10 K mots de mémoire suffisent pour établir les expressions symboliques des couples de gravité sur un robot à 10 degrés de liberté. Par ailleurs, l'utilisation de matrices (3 x 3) et le regroupement de coefficients intermédiaires qui apparaissent souvent dans les équations, réduisent le nombre de calculs à effectuer. L'algorithme développé s'applique également à des manipulateurs dotés de segments télescopiques ; des termes variables s'ajoutent alors aux expressions des masses et des inerties rapportées.

L'exemple développé dans le quatrième paragraphe pour un robot à six articulations rotoïdes montre que les équations littérales obtenues sont relativement simples par rapport à celles données par des programmes comme EGAM /1/ ou EDYLMA /12/. De ce fait, elles sont beaucoup plus facilement interprêtables d'un point de vue analytique, et l'information que pourra en tirer le concepteur d'un robot ne sera pas négligeable. De plus, leur utilisation pour une évaluation en ligne des forces de gravité et des forces dynamiques est envisageable pour des simulations permettant l'analyse des performances et la C. A. O. de robots /20/. En effet :

- les termes constants tels que les masses et les inerties équivalentes rapportées sur chaque articulation peuvent être calculés hors ligne ;

- on peut envisager d'utiliser un modèle simplifié très proche du modèle réel obtenu, en affectant des valeurs numériques aux paramètres physiques du manipulateur, de façon à estimer a priori les termes négligeables dans le modèle complet. Compte-tenu de la souplesse du mode d'acquisition de données, l'utilisateur peut, de façon interactive, supprimer ces termes dans les expressions littérales obtenues précédemment.

L'application à un robot industriel nous a permis de calculer les couples statiques et dynamiques aux articulations pour une trajectoire de test donnée. L'élaboration d'une loi de commande utilisant la prédiction des couples dynamiques a permis d'améliorer dans un rapport voisin de 10 la précision obtenue. Cependant, les enregistrements réalisés montrent que l'effet des forces d'inertie et de gravité est prépondérant, tandis que les forces centrifuges et de Coriolis peuvent être éventuellement négligées /18, 19/. En effet, dans l'exemple étudié, elles correspondent, en valeur absolue, dans le cas extrême, à 20 % de l'effet dynamique total.

En conclusion, l'ensemble de ces résultats justifie avantageusement l'utilisation d'un modèle dynamique d'autant plus proche du modèle réel que les performances exigées de précision et de vitesse de travail sont élevées.

REFERENCES

/1/ M. RENAUD, "Contribution à l'étude de la modélisation et de la commande des systèmes mécaniques articulés", Thèse de Docteur-Ingénieur, U. P. S. Toulouse, 1975.

/2/ W. W. HOOKER, "A set of r dynamical attitude equations for an arbitrary n-body sattelite having r rotational degrees of freedom", A. I. A. A. Journal, vol. 8, n° 7, July 1970.

/3/ J. WITTENBURG, "Automatic construction of non linear equations of motion for systems with many degrees of freedom", Euromech Colloquium, Louvain La Neuve, Belgium, 1973.

/4/ J. C. SAMIN, "Dynamique des corps déformables en rotation", Thèse de Docteur ès-Sciences Appliquées, Louvain La Neuve, Mai 1974.

/5/ E. P. POPOV, A. F. VERÉSHCHAGIN, A. M. IVKIN, A. G. LESKOV, V. S. MEDVEDEV, "Synthèse de la commande des robots utilisant les modèles dynamiques des systèmes mécaniques", VIe IFAC Symposium Control in Space, Session X, 1974.

/6/ J. J. UICKER, "Dynamic behaviour of spatial linkages", Transactions of the ASM, n° 68, Mech. 5, pp. 1-15, 1968.

/7/ M. E. KAHN, "The near minimum time control of open loop articulated kinematic chains", Stanford University, Ph. D. Engineering Mechanical, 1970.

/8/ A. K. BEJCZY, "Dynamic models and control equations for manipulators", Lecture notes, Tutorial Workshop on "Basics of Advanced Automation of Complex Motion Systems", 18th C.D.C., Fort Lauderdale, 1979.

/9/ R. A. LEWIS, "Autonomous manipulation on a robot. Summary of manipulator software functions", JPL, Tech. Memo 33-679, March 1974.

/10/ D. L. PIEPER, "The kinematics of manipulators under computer control", Ph. D. Thesis, Stanford University, 1968.

/11/ J. ZABALA ITURRALDE, "Commande des robots manipulateurs à partir de la modélisation de leur dynamique", Thèse de Doctorat de Spécialité, UPS, Toulouse, 1978.

/12/ W. KHALIL, "Modélisation et commande par calculateur du manipulateur MA 23. Extension à la conception par ordinateur des manipulateurs", Thèse de Docteur-Ingénieur, USTL, 1976.

/13/ A. LIEGEOIS, W. KHALIL, J. M. DUMAS, M. RENAUD, "Mathematical and computer models of interconnected mechanical systems", Proc. of 2nd Int. Symp. on Theory and Practice of Robots and Manipulators (RO.MAN.SY), Warsaw (Poland), 1976

/14/ J. DENAVIT, R. S. HARTENBERG, "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based matrices", Journal of Applied Mechanics , pp. 215-221, June 1955.

/15/ A. LIEGEOIS, M. RENAUD, "Modèle mathématique des systèmes mécaniques articulés en vue de la commande automatique de leurs mouvements", CRAS, Paris, t. 278 (29 avril 1974).

/16/ P. BORREL, "Modèle de comportement des manipulateurs. Application à l'analyse de leurs performances et à leur commande automatique". Thèse de Doctorat de 3ème cycle, USTL, 1979.

/17/ P. BORREL, M. J. ALDON, A. LIEGEOIS, "Traduction automatique de la description d'un mécanisme articulé. Application à la conception assistée des robots manipulateurs", Proc. 2ème Congrès AFCET/IRIA Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, IRIA Ed., t. 3, pp. 257-264, Sept. 1979.

/18/ A. LIEGEOIS, A. FOURNIER, M. J. ALDON, "Model reference control of high-velocity industrial robots", 1980 JACC, San Francisco, 13-15 aug. 1980.

/19/ A. LIEGEOIS, A. FOURNIER, "Utilisation des équations de Lagrange pour la commande en temps réel d'un robot de peinture et de manutention", Rapport intermédiaire à l'intention de la Direction des Automatismes de la RNUR, Mai 1979.

/20/ A. LIEGEOIS, A. FOURNIER, M. J. ALDON, P. BORREL, "A system for computer aided design of robots and manipulators", 5th CIRT, Milan, 1980.