Calcul du buckling associé à une équation de transport de neutrons dans un milieu périodique

Jean-François Bourgat, Rémi Sentis

▶ **To cite this version:**

Jean-François Bourgat, Rémi Sentis. Calcul du buckling associé à une équation de transport de neutrons dans un milieu périodique. [Rapport de recherche] RR-0035, INRIA. 1980. inria-00076526

HAL Id: inria-00076526
https://inria.hal.science/inria-00076526

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P 105 78150 Le Chesnay
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 35

CALCUL DU BUCKLING ASSOCIÉ À UNE ÉQUATION DE TRANSPORT DE NEUTRONS DANS UN MILIEU PÉRIODIQUE

Jean-François BOURGAT
Rémi SENTIS

Septembre 1980

CALCUL DU BUCKLING ASSOCIE A UNE EQUATION DE TRANSPORT DE NEUTRONS DANS UN MILIEU PERIODIQUE

Jean-François BOURGAT*, Rémi SENTIS*

RESUME

On considère l'équation monodimensionnelle stationnaire de transport de neutrons dans un mileu périodique supposé infini

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial z} + \hat{q}\phi - \hat{c}\hat{q} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \phi(z,\mu)\, d\mu = 0,$$

et on cherche une solution ϕ qui se factorise sous la forme

$$\phi(z,\mu) = e^{-kx(z)}\phi_o(z,\mu) \ , \ \phi_o(\cdot,\mu) \text{ périodique.}$$

On démontre l'existence du coefficient k, appelé buckling ou laplacien, et on donne une méthode numérique pour le calculer.

ABSTRACT

We consider the one-dimensional stationary neutron transport equation in an unbounded periodical medium

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial z} + \hat{q}\phi - \hat{c}\hat{q} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \phi(z,\mu) d\mu = 0,$$

and we look for a solution which can be factorized in the form

$$\phi(z,\mu) = e^{-kx(z)}\phi_o(z,\mu), \ \phi_o(\cdot,\mu) \text{ periodical.}$$

We prove the existence of the buckling k and we give a numerical method to compute it.

---

* INRIA, Institut National de Recherche en Informatique et Automatique, B.P. 105, 78150 Le Chesnay (France).

INTRODUCTION

On considère l'équation monodimensionnelle stationnaire de transport de neutrons dans un milieu périodique supposé infini :

$$(1.1) \qquad \mu \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \hat{q}\Phi - \hat{c}\hat{q} \frac{1}{2} \int_V \Phi(z,\mu) d\mu = 0$$

où on cherche $\Phi = \Phi(z,\mu)$, fonction définie sur $\mathbb{R}\times V$ (V étant le segment $[-1,+1]$), sachant que $\hat{c}$ et $\hat{q}$ sont deux fonctions strictement positives bornées périodiques de période 1.

$\Phi(z,\mu)$ s'interprète comme la densité de neutrons (en régime stationnaire) dont l'abscisse par rapport à l'axe principal est z et la projection de la vitesse sur l'axe principal est μ, le milieu étant constitué par une succession périodique de plaques perpendiculaires à l'axe principal. Chacune des plaques est caractérisée par deux grandeurs :

. $\hat{c}(z)$, le nombre moyen de neutrons secondaires émis à chaque choc sur un noyau,
. $\hat{q}(z)$, l'inverse du libre parcours moyen entre deux chocx.

On peut donc traiter le cas d'un nombre quelconque de types de plaques. Nous cherchons en fait une solution à valeur réelle ou complexe qui se factorise de la façon suivante :

$$(1.2) \qquad \Phi(z,\mu) = e^{-kx(z)} \Phi_o(z,\mu)$$

où Φ_o est périodique (en z) de période 1,
k est réel ou imaginaire pur
x(z) une fonction de z.

S'il existe un nombre k vérifiant (1.2) avec Φ solution de (1.1) on l'appelle buckling ou "coefficient Laplacien" associé à l'équation de transport (1.1).

Pour l'interprétation physique de ce problème (qui a été étudié depuis longtemps sous différentes formes par les neutroniciens) voir par exemple :

P. BENOIST : Théorie du coefficient de diffusion des neutrons dans un réseau comportant des cavités (Thèse, Paris 1964) Rapport CEA, R 2278 (1964).
M. GELBARD : Anisotropic Neutron diffusion in lattices of zero-power plutonium reactor experiments. Nuclear Sc. Eng. 54 (1974) p. 327.
R.P. HUGHES : An unified derivation of the various definitions of lattice cell diffusion coefficients. Nuclear Sc. Eng. 65 (1978) p. 85.
M.M.R. WILLIAMS [1]
M. LAM-HINE [1]

L'objet de notre travail est tout d'abord de démontrer mathématiquement l'existence du coefficient k. Pour cela nous transformons le problème initial pour le rendre équivalent à la recherche d'une fonction propre pour un opérateur F_k (opérant sur l'espace des fonctions définies sur le tore) et pour la valeur propre 1.

L'opérateur F_k sera un opérateur réel de type positif (voir §2.4) si k est réel et sera un opérateur auto-adjoint si k est imaginaire pur.

Puis nous proposons un algorithme et une méthode numérique basée sur la discrétisation de l'opérateur F_k pour trouver un coefficient k et la fonction ϕ_o associée.

Plan :

1. Position du problème
2. Théorème d'existence
3. Recherche du coefficient k^*
4. Discretisation
5. Calcul de la plus grande valeur propre de l'opérateur F^h_{ib}
6. Résultats numériques
Conclusion
Annexe : Méthode due à A. BENSOUSSAN quand c est pair (2 milieux notamment)
Bibliographie.

Nous remercions A. KAVENOKY et M. LAM-HIME pour les fructueux échanges que nous avons eu au sujet de ce problème.

1. POSITION DU PROBLEME.

Faisons l'hypothèse suivante sur c : il existe deux constantes c' et c" telles que :

$$0 < c' \leq c(z) \leq c'' \qquad \forall z .$$

Nous faisons tout d'abord un changement de variable afin de simplifier l'écriture des équations. Posons :

$$q = \int_0^1 \hat{q}(z)dz$$

$$x(z) = \frac{1}{q}\int_0^z \hat{q}(\theta)d\theta . \tag{1.3}$$

On voit que l'on a

$$x(z+1) = x(z)+1$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\hat{q}(z)}{q} .$$

Le changement de variable $z \to x$ est biunivoque. Posons maintenant :

$$\psi(x,\mu) = \phi(z,\mu) \quad \text{pour } x = x(z)$$

$$c(x) = \hat{c}(z) \quad \text{pour } x = x(z).$$

Donc c est périodique de période 1. Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}\times V$ et intégrable en V, on pose :

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\int_V f(x,\mu)d\mu$$

On voit que :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\,\frac{\hat{q}}{q} .$$

Donc l'équation (1.1) est équivalente à :

$$\mu\frac{\partial \psi}{\partial x} + q\psi - cq\tilde{\psi} = 0. \tag{1.4}$$

Nous cherchons une solution de (1.4) sous la forme :

$$(1.5)\qquad \begin{cases} \psi(x,\mu) = e^{-kx}\,\phi(x,\mu) \\ k \in \mathbb{R}^{+} \cup i\,\mathbb{R}\,,\ \phi(\cdot,\mu) \text{ périodique de période } 1. \end{cases}$$

Notons $\mathfrak{C}$ le tore de dimension 1 identifié à $[0,1[$.
Le problème (1.4)-(1.5) est équivalent à trouver k tel qu'il existe ϕ non nul solution de :

$$(1.6)\qquad \mu\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + (q-k\mu)\phi = cq\tilde{\phi}$$

Nous énonçons maintenant le théorème principal.

2. THEOREME D'EXISTENCE.

Théorème : Il existe k dans $[0,q[\cup (i\,\mathbb{R})$ tel que l'équation (1.6) admette une solution (au sens faible) ϕ, périodique de période 1, non triviale.

Remarque : On ne peut avoir unicité de k car si (k,ϕ) vérifie (1.5) et ϕe^{-kx} est solution de (1.4) on voit que $(k+2\pi i,\ \phi e^{-2\pi i x})$ satisfait aussi (1.4).

Plan de la démonstration du théorème :

1. Définition de l'opérateur G_k
2. Etude de l'équation (1.6)
3. Cas k réel. Propriété de l'opérateur F_k
4. Résultats sur les opérateurs de type positif
5. Cas k réel, étude de $\lambda(F_k)$
6. Cas $k \in i\,\mathbb{R}^{+}$
7. Conclusion

On note $L^1(\mathfrak{C})$, $L^2(\mathfrak{C})$, $L^\infty(\mathfrak{C})$ les espaces de fonctions L^1, L^2, L^∞ de $\mathfrak{C}$ dans C (ou dans $\mathbb{R}$ quand on le précisera) muni des normes $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$ et $|\cdot|_\infty$.
On note $(\cdot,\cdot)$ le produit de dualité $L^1(\mathfrak{C})$-$L^\infty(\mathfrak{C})$ ou le produit scalaire de $L^2(\mathfrak{C})$.

2.1. Définition de l'opérateur G_k.

On suppose que $k \in [0,q[\cup (i\mathbb{R})$. On rappelle que : $0 < c'$.

Lemme 1 : i) Soit $v \in L^2(\mathcal{C})$ il existe une unique solution (au sens faible) $w \in L^2(\mathcal{C})$ pour l'équation suivante où μ est un paramètre dans $[-1,+1]$

$$(2.1) \qquad (q-k\mu)w + \mu \frac{\partial w}{\partial x} = v.$$

Et on a : $w = G_{k,\mu} v$, où $G_{k,\mu}$ est l'opérateur continu de $L^2(\mathcal{C})$ dans $L^2(\mathcal{C})$ défini par :

$$(2.2) \qquad G_{k,\mu} v(x) = \int_0^{+\infty} e^{-qs+k\mu s} v(x-\mu s)\,ds.$$

ii) Et il existe une fonction ζ_k dans $L^2(\mathcal{C})$ vérifiant

$$(G_k v)^{\sim}(x) = \int_0^1 \zeta_k(x-y) v(y)\,dy, \quad \forall v \in L^\infty.$$

Démonstration du lemme 1.

i) Si $v \in L^\infty$ on sait que l'équation (2.1) admet une unique solution définie par $w = G_{k,\mu} v$, et on a donc pour tout $f \in C^1(\mathcal{C})$ ensemble des fonctions C^1 sur $\mathcal{C}$:

$$(2.3) \qquad ((q-k\mu)w, f) - \mu(w, \frac{\partial f}{\partial x}) = (v,f).$$

D'autre part on peut reécrire $G_{k,\mu}$ de la façon suivante pour tout μ non nul :

$$G_{k,\mu} v(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mu} \exp\left[-(\frac{q}{\mu} - k)t\right] v(z-t)\,dt & \text{si } \mu > 0 \\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{|\mu|} \exp\left[-(\frac{q}{|\mu|} + k)t\right] v(z-t)\,dt & \text{si } \mu < 0 \end{cases}$$

Donc si on pose

$$\sigma_{k,\mu}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \exp\left[-(\frac{q}{\mu} - k)(t+j)\right] & \text{si } \mu > 0 \\ \frac{1}{|\mu|} \sum_{j=0}^{\infty} \exp\left[-(\frac{q}{|\mu|} + k)(t+j)\right] & \text{si } \mu < 0 \end{cases}$$

on a alors

$$G_{k,\mu}v(x) = \int_0^1 \sigma_{k,\mu}(z-t)v(t)dt \ .$$

Comme on peut voir que pour μ fixé, $\sigma_{k,\mu}$ est dans $L^2(\mathcal{C})$ on en déduit que $G_{k,\mu}$ est continu de $L^2(\mathcal{C})$ dans $L^2(\mathcal{C})$.

Revenons maintenant à l'équation (2.1) avec $v \in L^2$. On peut approcher v par v_n dans $L^2(\mathcal{C})$ où les v_n sont dans L^∞. En posant $w_n = G_{k,\mu}v_n$ on voit que le couple (w_n,v_n) vérifie une équation (2.3) pour tout f dans $C^1(\mathcal{C})$. Et en passant à la limite en n on vérifie que le couple (w,v) satisfait (2.3) pour tout f dans $C^1(\mathcal{C})$. Donc on peut dire que w est solution au sens faible de (2.1).

ii) On pose

$$g(t) = \int_0^1 \frac{1}{\mu} e^{-q\frac{|t|}{\mu}} d\mu = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\theta} e^{-q\theta|t|} d\theta \text{ si } t\neq 0 \ .$$

La fonction g possède les propriétés suivantes :

$$(2.5) \quad \begin{cases} g(t) \leq e^{-\alpha|t|} \text{ dès que } |t| \text{ est assez grand } \forall\, \alpha \in [0,1[\\ g(t) \leq C_o|t|^{-1/3} \ , \ \forall t, \text{ car on a } e^{-\theta|t|} \leq C^{te}(\theta|t|)^{-1/3}. \end{cases}$$

Donc on a $g \in L^1(\mathbb{R})$ et on peut écrire :

$$(2.6) \qquad (G_k v)^{\sim}(x) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{kt} v(x-t)dt + \int_0^{+\infty} g(t)e^{-kt} v(x+t)dt$$

$$(2.7) \qquad (G_k v)^{\sim}(x) = \int_0^{+\infty} g(y)e^{ky} v(x-y)dy = \int_0^{+\infty} g(x-y)e^{k(x-y)} v(y)dy.$$

Toutes ces intégrales sont convergentes d'après (2.5), et on obtient le résultat cherché en posant :

$$(2.8) \qquad \zeta_k(y) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g(y+j)e^{k(y+j)} \ .$$

On voit que l'on a :

$$(2.8)' \qquad \zeta_k(y) = \int_0^1 \frac{1}{\mu} \left[\frac{e^{(-\frac{q}{\mu}+k)y}}{1-e^{(-\frac{q}{\mu}+k)}} + \frac{e^{-(\frac{q}{\mu}+k)(1-y)}}{1-e^{-(\frac{q}{\mu}+k)}} \right] d\mu \ .$$

D'après (2.5) on voit qu'il existe C_1 vérifiant

$$\Big| \sum_{j\neq 0,1} g(y+j)e^{k(y+j)} \Big| \leq C_1, \quad \forall y \in \mathcal{C}.$$

Donc on a :

$$(2.9) \qquad \zeta_k(y) \leq C_1 + |e^k| C_o \left[|y|^{-1/3} + |1-y|^{-1/3} \right] \leq C_2 \left[|y|^{-1/3} + |1-y|^{-1/3} \right] \quad \forall y \in \mathcal{C}$$

Par conséquent $\zeta_k \in L^2(\mathcal{C})$.

C.Q.F.D.

Remarque : Si $k = ib$, $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\zeta_{ib}(y) = \xi_b(y) + \overline{\xi}_b(1-y) \text{ avec } \xi_b(y) = \int_o^1 \frac{1}{\mu} \frac{e^{(-\frac{q}{\mu}+ib)y}}{1-e^{-\frac{q}{\mu}+ib}} \, d\mu .$$

2.2. Etude de l'équation (1.6).

D'après le lemme 1-i) il s'agit de trouver $\psi \in L^2(\mathcal{C})$ vérifiant

$$(2.10) \qquad \psi = [G_k(cq\psi)]^{\sim} .$$

La solution de (1.6) sera alors $\phi = G_{k,\mu}(cq\psi)$.

Posons $\gamma(x) = \sqrt{c(x)}$ et $u(x) = \psi(x)\gamma(x)$.
L'équation (2.10) est alors équivalente à trouver $u \in L^2(\mathcal{C})$ tel que :

$$(2.10)' \qquad u = F_k u$$

où F_k est l'opérateur défini par :

$$(2.11) \qquad F_k u = q\gamma[G_k(\gamma u)]^{\sim}$$

$$(2.11)' \qquad F_k u(x) = q\gamma(x) \int_o^1 \zeta_k(x-y)\gamma(y)u(y)dy.$$

D'après le lemme 1-ii) on voit que F_k est un opérateur continu de $L^2(\mathcal{C})$ dans $L^2(\mathcal{C})$. En fait F_k est continu de $L^2(\mathcal{C})$ dans $L^\infty(\mathcal{C})$ donc de $L^\infty(\mathcal{C})$ dans $L^\infty(\mathcal{C})$.

Le problème initial revient donc à trouver k tel que F_k admette une valeur propre égale à 1. En fait nous considérons un problème plus particulier : trouver k tel que F_k admette 1 comme valeur propre maximale (c'est-à-dire de module maximal). Etudions donc les valeurs propres maximales de F_k pour tous les k.

2.3. Cas k réel : Propriété de l'opérateur F_k.

On considère F_k comme opérateur de $L^\infty(\mathcal{C})$ dans $L^\infty(\mathcal{C})$. Posons :

$$m_k^{(1)}(x,y) = m_k(x,y) = \gamma(x)\zeta_k(x-y)\gamma(y) \tag{2.12}$$

$$m_k^{(n)}(x,y) = \int_o^1 m_k^{(n-1)}(x,\theta)m_k(\theta,y)dy \ . \tag{2.13}$$

Lemme 2 : Il existe pour tout k, deux constantes m_k' et m_k'' telles que

$$0 < m_k' \le m_k^{(2)}(x,y) \le m_k'' \qquad \forall x,y \in [0,1[\ .$$

Démonstration du lemme 2.

D'après (2.9) en posant $\rho(\theta) = \theta^{-1/3}+(1-\theta)^{-1/3}$ pour $\theta \in [0,1[$, on voit qu'il existe C_k constante dépendant de k, vérifiant

$$m_k(x,y) \le \rho(x-y)C_k \qquad \forall x,y \in \mathcal{C}. \tag{2.14}$$

Or on peut remarquer que pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$\int_o^x t^{-1/3}(x-t)^{-1/3}dt \le 2\int_o^{x/2} t^{-1/3}dt\cdot(\frac{x}{2})^{-1/3} \le 3(\frac{x}{2})^{1/3} \le 3\cdot 2^{-1/3}$$

$$\int_x^1 t^{-1/3}(t-x)^{-1/3}dt \le \int_x^1 (t-x)^{-2/3}dt \le 3.$$

Donc on a (en notant $*$ la convolution dans $\mathcal{C}$) :

$$\int_{\mathcal{C}} \rho(t)\rho(x-t)dt = \rho*\rho(x) \le 2(3+\frac{3}{2^{1/3}}) \quad \forall z.$$

Et on obtient le résultat car d'après (2.14) on a :

$$\int_{\mathfrak{C}} m_k(z,\theta)m_k(\theta,y)d\theta \le C_k^2(\rho*\rho)(x-y) \le C_k^2\ 2(3+\frac{3}{2^{1/3}})$$

D'autre part on a par exemple :

$$m_k(x,y) \ge \sup_{\alpha} g(\alpha)$$

C.Q.F.D.

2.4. Résultats sur les opérateurs de type positif.

On rappelle ici le théorème de Jentzsch-Krein-Rutman puis on en donne un corollaire.

Soit E un espace métrique muni d'une mesure de probabilité (notée comme la mesure de Lebesgue).

Ici les espaces $L^1(E)$, $L^2(E)$ et $L^\infty(E)$ sont des espaces de fonctions à valeurs réelles. On note $(\cdot,\cdot)$ le produit de dualité entre L^1 et L^∞ ou le produit scalaire de L^2.

Soit m une fonction de E×E dans $\mathbb{R}$, on définit $m^{(n)}(z,y)$ comme en (2.13).

Rappel du Théorème de Jentzsch-Krein-Rutman (Harris [1, Chap. 3, Th. 10.1])

Soit m une fonction de E×E dans $\mathbb{R}$ telle que $m(x,\cdot)$ et $m(\cdot,y) \in L^2(E)$

$$0 < m' \le m^{(2)}(x,y) \le m'' \tag{2.18}$$

$$\sup_y |m(\cdot,y)|_1 \le C^{te}. \tag{2.19}$$

Soit F l'opérateur borné de $L^\infty(E)$ dans $L^\infty(E)$ défini par :

$$Ff(x) = \int_E m(x,y)f(y)dy \qquad \forall f \in L^\infty(E).$$

Alors F admet une fonction propre positive u, unique (à constante multiplicative près) correspondant à une valeur propre positive $\lambda(F)$. Et si on suppose $(u,1) = 1$, alors on a :

$$\begin{cases} m' \le \lambda(F)^2\ u(z) \le m'' & \forall z \\ \\ m' \le \lambda(F)^2 \le m'' \end{cases} \tag{2.20}$$

$$\frac{m'}{m''} \le u(z) \le \frac{m''}{m'} \qquad \forall z. \tag{2.21}$$

Corollaire 1 : La fonction u étant la fonction propre ci-dessus on a :

i) $\exists \pi \in L^1(E)$, $\pi \geq 0$, $|\pi|_1 = 1$, tel que

$$\left|\frac{m^{(n)}(z,y)u(y)}{\lambda(F)^n u(z)} - \pi(y)\right| \leq \frac{1}{\delta^2}\,\delta^n \quad \text{avec } \delta = \left[1-\left(\frac{m'}{m''}\right)^2\right]^{1/2}.$$

ii) Posons $\hat{u}(y) = \frac{\pi(y)}{u(y)}$, on a alors :

$$F^*\hat{u} = \int_E m(y,z)\hat{u}(y)dy = \lambda(F)\hat{u}$$

iii) Pour tout $f \in L^\infty(E)$, on a :

$$\left|F^n f(z) - \lambda(F)^n(\hat{u},f)u(z)\right| \leq u(z)(\lambda(F)\delta)^n\, C_o |f|_\infty,$$

avec $C_o = \frac{1}{\delta^2}\frac{m''}{m'} = \frac{m''^3}{(m''^2-m'^2)m'}$

iv) Si ρ est valeur propre de F on a :

$$\lambda(F) \geq |\rho|$$

Et si $|\rho| = \lambda(F)$ alors on a $\rho = \lambda(F)$. Donc $\lambda(F)$ est l'unique valeur propre maximale de F.

Démonstration du Corollaire 1.

Posons $\hat{m}(z,y) = \frac{m(z,y)u(y)}{\lambda(F)u(z)}$. On a alors en définissant $\hat{m}^{(n)}$ de la même façon qu'en (2.13) :

$$\hat{m}^{(n)}(z,y) = \frac{m^{(n)}(z,y)u(y)}{\lambda(F)^n u(z)} .$$

Et d'après (2.20) et (2.21), on a :

$$\hat{m}^{(2)}(z,y) \geq \left(\frac{m'}{m''}\right)^2 \quad \forall z,y .$$

Donc d'après Doob [1, p. 197] on sait qu'il existe une mesure de probabilité π (invariante pour la chaine de Markov définie par $\hat{m}$) qui vérifie :

$$(2.22) \qquad |\hat{m}^{(n)}(z,y)-\pi(y)| \leq \delta^{n-2} \quad \text{avec } \delta = [1-(\frac{m'}{m''})^2]^{1/2}$$

$$(2.23) \qquad \int \pi(z)\hat{m}(z,y)dz = \pi(y) \quad \forall y.$$

De (2.22) on en déduit i) et de (2.23) on en déduit ii) car l'opérateur F^* adjoint de F est donné par

$$F^*f(z) = \int m(y,z)f(y)dy.$$

Et le point iii) vient du fait que :

$$F^nf(z) = \int m^{(n)}(z,y)f(y)dy = \lambda(F)^n u(z) \int \hat{m}^{(n)}(z,y)\frac{1}{u(y)} f(y)dy.$$

iv) Si v est une fonction propre associée à ρ on a d'après iii)

$$|(\frac{\rho}{\lambda(F)})^n v(z)-(\hat{u},v)u(z)| \to 0$$

dont on a soit $|\frac{\rho}{\lambda(F)}| < 1$, soit $\rho = \lambda(F)$ et v proportionnels à u.

C.Q.F.D.

Remarque : Pour toute fonction f positive bornée telle que $(f,1) = 1$, on a

$$(2.24) \qquad \lambda(F) = \lim_{n\to\infty} (F^nf,1)^{1/n} .$$

Démonstration de la remarque.

D'après le Corollaire 1 on a pour tout $f \in L^\infty$:

$$|F^nf(z) - \lambda(F)^n(\hat{u},f)u(z)| \leq C|f|_\infty \lambda(F)^n \delta^n$$

donc en posant $C_f = C|f|_\infty$ on a :

$$\lambda(F)^n [(\hat{u},f)-C_f\delta^n] \leq (F^nf,1)^{1/n} \leq \lambda(F)^n[|(\hat{u},f)| + C_f\delta^n] .$$

Comme on sait que : $0 < \underset{z}{\text{Min}}\ \hat{u}(z) \le (\hat{u},f) \le \text{Max}\ \hat{u}(z)$, on voit que :

$$[(\hat{u},f) \pm C_f \delta^n]^{1/n} \to 1 \quad \text{quand } n \to \infty$$

D'où le résultat cherché. C.Q.F.D.

2.5. Cas k réel. Etude de $\lambda(F_k)$.

Revenons au problème initial. D'après le lemme 2 on peut appliquer tout ce qui précède au cas où E est $\mathcal{C}$, et où F est l'opérateur F_k.

Lemme 3 : L'application $k \to F_k$ est continue pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Démonstration :

On sait que pour tout f dans $L^\infty(\mathcal{C})$ on a (pour k et ℓ dans $\mathbb{R}^+$) :

$$|F_k f - F_\ell f|_\infty \le |\gamma|_\infty^2 |\zeta_k - \zeta_\ell|_1 \cdot |f|_\infty .$$

Or d'après (2.8)' on voit que $|\zeta_k - \zeta_\ell|_1 \to 0$ quand $\ell \to k$. Donc quand $\ell \to k$ on a :

$$\sup \frac{1}{|f|_\infty} |F_k f - F_\ell f|_\infty \to 0$$

Donc $\|F_k - F_\ell\| \to 0$. C.Q.F.D.

Lemme 4 : L'application $k \to \lambda(F_k)$ est continue.

Démonstration : Soit ℓ fixé dans $\mathbb{R}^+$. Notons $\lambda_k = \lambda(F_k)$. Soit u_k une fonction propre associée à F_k et à λ_k et telle que $(u_k,1) = 1$. On a alors

$$u_k = \lambda_k^{-1} F_k u_k \quad , \qquad |u_k|_\infty = \lambda_k^{-2} |F_k^2 u_k|_\infty \le \lambda_k^{-2}\, m_k''(u_k,1) \le C$$

Soit k_p une suite telle que $k_p \to \ell$. Extrayons de u_{k_p} une sous-suite (notée encore u_{k_p}) telle que :

$$u_{k_p} \to u_* \quad \text{quand } p \to \infty \quad , \text{ dans } L^\infty \text{ faible-}*.$$

D'après le lemme 3 on a :

$$F_{k_p} u_{k_p} \to F_\ell u_* \quad \text{dans } L^\infty \text{ faible-}* \ .$$

Donc la suite $(\lambda_{k_p})_p$ admet une limite λ_* et on a :

$$u_* = \lambda_*^{-1} F_\ell u_* \qquad \text{pour tout n.}$$

Donc on a pour tout n :

$$u_* = \lambda_*^{-n} F_\ell^n u_* \ .$$

Or d'après le corollaire 1 on a :

$$\lim_{n\to\infty} (F_\ell^n u_*) \lambda_\ell^{-n} = u_\ell$$

Donc :

$$u_* = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_\ell}{\lambda_*}\right)^n u_\ell \ .$$

Donc comme u_* n'est ni nul ni infini on a $\lambda_\ell = \lambda_*$, ceci étant valable pour toute suite k_p telle que $k_p \to \ell$. On en déduit que quand $k \to \ell$, on a $\lambda_k \to \lambda_\ell$.

C.Q.F.D.

2.6. Etude du cas $k \in i\mathbb{R}^+$.

On pose dorénavant $k = ib$ (avec $b \in \mathbb{R}^+$). D'après la remarque de la fin du §2.1, on sait que $\zeta_{ib}(-y) = \overline{\zeta}_{ib}(y)$. On considère F_{ib} comme opérateur de $L^2(\mathfrak{C})$ dans $L^2(\mathfrak{C})$. Son adjoint F_{ib}^* vérifie :

$$F_{ib}^* v(x) = \gamma(x) \int_0^1 \zeta_{ib}(y-x)\gamma(y)\bar{v}(y)dy = \gamma(x) \int_0^1 \bar{\zeta}(x,y)\gamma(y)\bar{v}(y)dy = \overline{F_{ib} v}.$$

Donc F_{ib} est auto-adjoint. Montrons que F_{ib} est défini non négatif. Notons $(u,v) = \int_{\mathfrak{C}} u(x)\bar{v}(x)dx$ le produit scalaire de 2 éléments de $L^2(\mathfrak{C})$. Soit w la solution de :

$$(2.25) \qquad (q-ib\mu)w + \mu \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma(x)u(x) \quad (\text{donc } F_{ib} u = \gamma \tilde{w}).$$

En multipliant par $\bar{w}$ et en intégrant en x et en μ, on en déduit :

$$(2.26)\qquad \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\int_{\mathcal{C}} [\,(q-ib\mu)w\bar{w} + \mu\frac{\partial w}{\partial x}\bar{w}]\,dx\,d\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\int_{\mathcal{C}}\gamma(x)u(x)\bar{w}(x,\mu)dx\,d\mu = (u,F_{ib}u)$$

et de même en prenant l'équation conjuguée de (2.25) et en multipliant par w :

$$(2.26)'\qquad \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{\mathcal{C}} [\,(q+ib\mu)\bar{w}w + \mu\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}w]dx\,d\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\int_{\mathcal{C}}\gamma(x)\bar{u}(x)w(x,\mu)dx\,d\mu = (F_{ib}u,u)$$

Donc en ajoutant (2.26) et (2.26)', comme on a $\int_{\mathcal{C}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}w + \frac{\partial w}{\partial x}\bar{w}\,dx = 0$, on obtient

$$2(F_{ib}u,u) = \int_{-1}^{1}\int_{\mathcal{C}}\bar{w}w\,dx\,d\mu = \int_{\mathcal{C}}|\tilde{w}(x)|^2dx \geq 0.$$

Ainsi F_{ib} est un opérateur continu auto-adjoint défini non négatif et son spectre consiste en une suite bornée de réels positifs (qui sont valeurs propres) ayant un seul point d'accumulation éventuel, 0. Notons $\lambda(F_{ib})$ la valeur propre maximale.

Lemme 5 : L'application $b \to F_{ib}$ est continue pour la topologie de la norme.

Démonstration : On sait que, si b et β sont dans $\mathbb{R}^+$, on a pour tout v dans $L^2(\mathcal{C})$:

$$|F_{ib}v - F_{i\beta}v|_2 \leq |\gamma|_\infty^2 \cdot |\zeta_{ib}-\zeta_{i\beta}|_2|v|_2.$$

Or d'après (2.8)' on voit que $|\zeta_{ib}-\zeta_{i\beta}|_2 \to 0$ quand $\beta \to b$. Et de même que dans le lemme 3 on vérifie que $\|F_{ib}-F_{i\beta}\| \to 0$.

C.Q.F.D.

Rappelons un résultat classique :

Lemme 6 : Soit H_n une suite d'opérateurs continus de $L^2(\mathcal{C})$ dans $L^2(\mathcal{C})$ auto-adjoints tels qu'il existe H_o continu auto-adjoint et

$$\|H_n - H_o\| \to 0 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Alors (si on note $\lambda(H_n)$ la valeur spectrale maximale de H_n) on a :

$$\lambda(H_n) \to \lambda(H_o) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Démonstration : D'après Kato [1, IV, Remark 3.3] on sait que le spectre d'un opérateur continu varie de façon semi-continue supérieure si l'opérateur varie de façon continue pour la norme $\|\cdot\|$. Donc :

$$\limsup_{n \to \infty} \lambda(H_n) \leq \lambda(H_o).$$

D'autre part on a :

$$\lambda(H_n) = \sup_{\{u/|u|=1\}} (H_n u,u).$$

Or pour u fixé de norme 1, on sait que

$$n \to (H_n u,u) \text{ est continue en n pour } n \to \infty$$

donc en prenant le sup de $(H_n u,u)$ on obtient :

$$n \to \sup_u (H_n u,u) = \lambda(H_n) \text{ est semi-continu inférieurement en n pour } n \to \infty$$

donc

$$\liminf_{n \to \infty} \sup_u (H_n u,u) = \liminf \lambda(H_n) \geq \lambda(H_o)$$

C.Q.F.D.

Remarque : Le lemme 6 est faux si on supprime l'hypothèse "auto-adjoint" (voir Kato [1,IV, ex. 3.9]). Ainsi en appliquant le lemme 6 à notre cas, on voit que :

$$\text{l'application } b \to \lambda(F_{ib}) \text{ est continue.}$$

2.7. Conclusion.

Dans le cas k réel, $\lambda(F_k)$ est valeur propre maximale de F_k considéré comme opérateur de L^2 dans L^2. Pour prouver le théorème il suffit de trouver k^* tel que $\lambda(F_{k^*}) = 1$.

Lemme 7 : Il existe 2 éléments k' et k" de $[0,q[' \cup i\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\lambda(F_{k'}) > 1 \qquad \lambda(F_{k''}) < 1 \qquad \text{et } (k'')^2 < (k')^2.$$

Démonstration du lemme 7 : Remarquons tout d'abord que si on note $\hat{F}_k u = [G_k(cqu)]^{\sim}$ alors on a : $F_k v = \gamma \hat{F}_k(v\gamma^{-1})$. $\forall v \in L^2(\mathcal{C})$.

D'autre part on a pout tout $u \in L^2(\mathcal{C})$:

$$(q-\mu k) \int_{\mathcal{C}} G_k(cqu)(x,\mu)dx = q(1,cu).$$

Donc :

$$(2.29) \qquad (\hat{F}_k u,1) = (G_k(cqu)^{\sim},1) = (cu,1)\nu(k)$$

avec $\nu(k) = \frac{q}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{d\sigma}{q-k\sigma}$.

D'où l'on déduit pour tout $v \in L^2(\mathcal{C})$

$$(2.30) \qquad (F_k v,1) \le c''^{1/2}(\hat{F}_k(\tfrac{v}{\gamma}),1) = c''^{1/2}(\gamma v,1)\nu(k) \le c''(v,1)\nu(k).$$

Or si $k \in [0,q[$, on obtient

$$\nu(k) = \frac{q}{2}\int_{-k}^{k} \frac{1}{k}\frac{dt}{q-t} = \frac{q}{2k}\,\mathrm{Log}\left[\frac{q+k}{q-k}\right]$$

Et si $k=ib$, avec $b \in \mathbb{R}^+$, on obtient

$$\nu(ib) = \frac{q}{2b}\int_{-b/q}^{+b/q} \frac{dt}{1-it} = \frac{q}{b}\int_{0}^{b/q} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{q}{b}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{b}{q}\,.$$

On vérifie facilement que ν est continue sur $i\mathbb{R}^+$ et sur $[0,q[$ et que si deux éléments k et ℓ vérifient $k^2 \le \ell^2$ on a $\nu(k) \le \nu(\ell)$. D'autre part quand k varie sur $i\mathbb{R}^+ \cup [0,q[$, $\nu(k)$ croît continuement de 0 à $+\infty$. Donc il existe k' et k" avec $(k")^2 < (k')^2$ tels que :

$$(2.31) \qquad \nu(k") < \frac{1}{c"}\ ;\ \nu(k') > \frac{1}{c'} \qquad \text{et } k' \in \mathbb{R}^+.$$

Donc on a $\nu(k') > 1$ et $k' \in [0,q[$. Or d'après (2.30), si v désigne la fonction propre de $F_{k"}$, on a :

$$\lambda(F_{k"})(v,1) \le c"\nu(k")(v,1).$$

Donc on a :

$$\lambda(F_{k"}) < 1.$$

Utilisons maintenant la remarque (2.24) pour minorer $\lambda(F_{k'})$, et posons :

$$u_o = \gamma$$
$$u_{n+1} = F_{k'}(u_n) \text{ , c'est-à-dire } \gamma^{-1}u_{n+1} = \hat{F}(\gamma^{-1}u_n).$$

On voit donc en utilisant (2.29) que l'on a (rappelons que $\gamma \geq c'^{1/2}$) :

$$(u_{n+1},1) \geq c'^{1/2}(\gamma^{-1}u_{n+1},1) \geq c'^{1/2}(c\gamma^{-1}u_n,1)\nu(k') \geq c'\nu(k')(u_n,1).$$

Donc d'après (2.31) on voit que :

$$(F_{k'}^n u_o,1) = (u_n,1) \geq (\gamma,1)(c'\nu(k'))^n \to +\infty$$

et d'après la remarque (2.24) on en déduit que $\lambda(F_{k'}) > 1$.

C.Q.F.D.

D'après ce lemme et la continuité des applications :

$$k \to \lambda(F_k) \qquad k \in [0,1[$$
$$b \to \lambda(F_{ib}) \qquad b \in \mathbb{R}^+$$

on en déduit qu'il existe k^* tel que :

$$\lambda(F_{k^*}) = 1$$

D'où le théorème.

3. RECHERCHE DU COEFFICIENT k^*.

Définition : On appelle le milieu sous-critique, critique ou surcritique selon que $\lambda(F_o)$ est inférieur à 1, égal à 1 ou supérieur à 1. On se borne au seul cas intéressant dans la pratique, celui où le milieu est surcritique c'est-à-dire que :

$$\lambda(F_o) > 1$$

On aura donc $k^* \in i\mathbb{R}^+$. Posons :

$$k^* = ib^* \quad \text{et} \quad k'' = ib_{max}$$

On cherchera donc k^* dans $[o,b_{max}]$.

3.1. Explicitons l'opérateur F_{ib} défini par les formules (2.11)-(2.7). $\forall u \in L^2(\mathbb{G})$ on a :

$$F_{ib}u(x) = q\sqrt{c(x)}\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left[\int_0^{+\infty} e^{-qs}e^{ib\sigma s}f(x-s\sigma)ds\right]d\sigma \quad \text{avec } f = \sqrt{c}\ u$$

$$= q\sqrt{c(x)}\ \frac{1}{2}\int_0^1\left\{\int_0^{+\infty}\frac{e^{-q\frac{t}{\sigma}}}{\sigma}\left[e^{ibt}\ f(x-t)+e^{-ibt}\ f(x+t)\right]dt\right\}d\sigma\ .$$

Or on a :

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-q\frac{t}{\sigma}}}{\sigma}\left[e^{ibt}\ f(x-t)\ +\ e^{-ibt}\ f(x+t)\right]dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-q|t|/\sigma}}{\sigma}\ e^{ibt}\ f(x-t)dt = \int_0^1 \sum_{j\in z} f(x-t)\ \frac{e^{-q\frac{|t+j|}{\sigma}}}{\sigma}\ e^{ib(t+j)}dt$$

$$= \int_0^1 f(x-t)\ \frac{1}{\sigma}\left[\frac{e^{ibt-q\frac{t}{\sigma}}}{1-e^{ib-q/\sigma}} + \frac{e^{-ib(1-t)-q\frac{1-t}{\sigma}}}{1-e^{ib\ -\ q/\sigma}}\right]dt$$

Donc on a :

$$F_{ib}u(x) = \frac{q}{2}\sqrt{c(x)}\int_0^1 \mathcal{K}(y)u(x-y)\sqrt{c(x-y)}\ dy$$

avec :

$$\mathcal{K}(y) = K(y) + \bar{K}(1-y)$$

$$K(y) = \int_0^1 L_1(\sigma,y)d\sigma + i\int_0^1 L_2(\sigma,y)\ d\sigma$$

$$L_1(\sigma,y) = \frac{e^{-\frac{qy}{\sigma}}}{\sigma\rho_\sigma^2}\left[\cos by(1-e^{-\frac{q}{\sigma}}\cos b) - e^{-\frac{q}{\sigma}}\sin by\cdot\sin b\right]$$

$$L_2(\sigma,y) = \frac{e^{-\frac{qy}{\sigma}}}{\sigma\rho_\sigma^2}\left[\sin by(1-e^{-\frac{q}{\sigma}}\cos b)+e^{-\frac{q}{\sigma}}\cos by\cdot\sin b\right]$$

sachant que $\rho_\sigma^2 = 1+e^{-q/\sigma}-1e^{-q/\sigma}\cos b$,

3.2. Algorithme de calcul de b^*.

Pour trouver la valeur de b^* on utilise un algorithme de dichotomie. On sait que :

$$\lambda(F_o) > 1 \quad , \quad \lambda(F_{ib_{max}}) < 1 \ .$$

On part de :

$$b'_1 = 0 \quad b''_1 = b_{max} \ .$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{1}{2}(b'_n + b''_n)$ et on calcule $\lambda_n = \lambda(F_{ib_n})$.
Si $\lambda_n < 1$ on prend

$$b'_{n+1} = b'_n$$

$$b''_{n+1} = b_n$$

Si $\lambda_n > 1$ on prend

$$b'_{n+1} = b_n$$

$$b''_{n+1} = b''_n$$

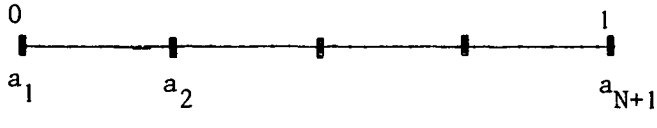
Puis on fait $b_{n+1} = \frac{1}{2}(b'_{n+1} + b''_{n+1})$.

On arrête les itérations lorsque on a (ε étant une constante petite) :

$$\frac{|b_{n+1} - b_n|}{b_{max}} \leq \varepsilon \ .$$

4. DISCRETISATION.

On décompose l'intervalle $[0,1]$ en N intervalles égaux $[a_i, a_{i+1}]$, $i=1,\ldots,N$, de longueur $h = \frac{1}{N}$.



Il est important de prendre un pas de discrétisation constant pour que toutes les quantités x-y, x+y-1 coïncident avec des noeuds de la discrétisation lorsque x et y sont en des noeuds.

On approche l'espace $L^2(\mathcal{C})$ des fonctions périodiques de $L^2(0,1)$ par

(4.1) $V_h = \{v_h \in C^0[0,1]$; v_h affine sur chaque segment $[a_i, a_{i+1}]$; v_h périodique$\}$

V_h est un espace de dimension N et les fonctions w^i, i=1,...,N, définies de la façon suivante, en sont une base

(4.2) $$w_i(a_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j=i \quad (\text{ou si } i=1 \text{ et } j=N+1) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

L'interpolée v_h d'une fonction $v \in L^2(\mathcal{C})$ est définie par

$$v_h = \sum_{i=1}^{N} v_i w_i ,$$

où v_i désigne la valeur de v au point a_i.

Muni de la norme induite par $L^2(\mathcal{C})$, V_h est une approximation interne d'ordre 1 de $L^2(\mathcal{C})$, c'es-à-dire

(4.4) $$\|v-v_h\|_{L^2(\mathcal{C})} \leq Ch \quad , \forall v \in L^2(\mathcal{C}).$$

(4.5) Le problème discret consiste alors à calculer b_h^* en appliquant l'algorithme du problème continu (cf. § 3.2) à l'opérateur $F_{ib}^h : V_h \to V_h$ défini à partir de l'opérateur $F_{ib} : L^2(\mathcal{C}) \to L^2(\mathcal{C})$ par

(4.6) $$F_{ib}^h v_h = (F_{ib} v_h)_h \quad \forall v_h \in V_h.$$

Convergence de b_h^* vers b^* lorsque $h \to 0$.

Introduisons la fonction $\bar{F}_{ib}^h : L^2(\mathcal{C}) \to L^2(\mathcal{C})$ définie par

(4.7) $$\bar{F}_{ib}^h v = F_{ib}^h v_h .$$

On vérifie aisément que F_{ib}^h et $\bar{F}_{ib}^h$ ont les mêmes valeurs propres.

Lemme 8 : $\|\bar{F}^h_{ib}-F_{ib}\| \leq Ch \quad \forall b$

En effet, soit $v \in L^2(\mathcal{G})$ tel que $\|v\| = 1$, on a

$$\|\bar{F}^h_{ib}v-F_{ib}v\| \leq \|\bar{F}^h_{ib}v-\bar{F}^h_{ib}v_h\| + \|\bar{F}^h_{ib}v_h-F_{ib}v\| ,$$

or $\|\bar{F}^h_{ib}v-\bar{F}^h_{ib}v_h\| \leq C_1 h$ car $\|\bar{F}^h_{ib}\|$ est borné indépendamment de b et, tenant compte du fait que $\bar{F}^h_{ib}v_h = F^h_{ib}v_h = (F_{ib}v_h)_h$ on a

$$\|\bar{F}^h_{ib}v_h-F_{ib}v\| = \|(F_{ib}v_h)_h - F_{ib}v\| \leq \|(F_{ib}v_h)_h-F_{ib}v_h\| + \|F_{ib}v_h-F_{ib}v\| .$$

Or

$$\|(F_{ib}v_h)_h-F_{ib}v_h\| \leq C_2 h \quad \text{d'après (4.4)}$$

et

$$\|F_{ib}v_h-F_{ib}v\| \leq C_3 h$$

car $\|F_{ib}\|$ est borné indépendamment de b. Les constantes C_1, C_2, C_3 ne dépendant pas de b, on a bien le résultat du lemme.

Lemme 9 : Si $b = \lim b^*_h$ alors $\bar{F}^h_{ib^*_h} \to F_{ib}$.

On a

$$\|\bar{F}^h_{ib^*_h}-F_{ib}\| \leq \|\bar{F}^h_{ib^*_h}-F_{ib^*_h}\| + \|F_{ib^*_h}-F_{ib}\| ,$$

or

$$\|\bar{F}^h_{ib^*_h}-F_{ib^*_h}\| \leq C_1 h \quad \text{d'après le lemme 8}$$

et

$$\|F_{ib^*_h}-F_{ib}\| \to 0 \text{ par continuité de } b \to F_{ib} \text{ (cf. lemme 5)}$$

d'où le résultat du lemme 9.

Revenons à la démonstration de la convergence de b_h^* vers b^*, $\lambda(F)$ désignant la plus grande valeur propre de F, on a

$$\lambda(\bar{F}^h_{ib_h^*}) = 1 \text{ et } \lambda(F_{ib^*}) = 1.$$

Or, d'après les lemmes 9 et 6, on a :

$$\lambda(\bar{F}^h_{ib_h^*}) \to \lambda(F_{ib}),$$

donc $\lambda(F_{ib}) = \lambda(F_{ib^*}) = 1$, d'où $b = b^*$ et par conséquent $b_h^* \to b^*$ lorsque $h \to 0$.

5. CALCUL NUMERIQUE DE LA PLUS GRANDE VALEUR PROPRE DE L'OPERATEUR F^h_{ib}.

Le calcul de b_h^*, solution du problème discret (4.5), consiste essentiellement à calculer la plus grande valeur propre de l'opérateur F^h_{ib}.

Explicitons la matrice $(a_{ik})_{i,k=1,\ldots,N}$ associée à F^h_{ib}.

$$F^h_{ib} w_k = \sum_{i=1}^{N} a_{ik} w_i$$

$$(F^h_{ib} w_k, w_j) = \sum_{i=1}^{N} a_{ik}(w_i, w_j)$$

$$= a_{j-1}(w_{j-1}, w_j) + a_{jk}(w_j, w_j) + a_{j+1,k}(w_{j+1}, w_j)$$

$$= \frac{h}{6}\,(a_{j-1,k} + 4a_{jk} + a_{j+1,k}).$$

Les coefficients a_{ik}, $i=1,\ldots,N$, sont donc solution du système

$$\frac{1}{4}\,a_{j-1,k} + a_{jk} + \frac{1}{4}\,a_{j+1,k} = \frac{3}{2h}\,(F_{ib} w_k, w_j) \quad j=2,\ldots,N-1$$

$$\frac{1}{4}\,a_{N,k} + a_{1k} + \frac{1}{4}\,a_{2,k} = \frac{3}{2h}\,(F_b w_k, w_1)$$

$$\frac{1}{4}\,a_{N-1,k} + a_{N,k} + \frac{1}{4}\,a_{1,k} = \frac{3}{2h}\,(F_b w_k, w_N)$$

La matrice $(a_{ik})_{i,k=1,\ldots,N}$ est une matrice à coefficients complexes et l'on calcule ses valeurs propres en la réduisant à une forme tridiagonale par la méthode de Householder puis en utilisant l'algorithme QR.

Explicitons le calcul de $(F^h_{ib} w_k, w_j)$.

Définissons l'opérateur G_b par :

$$F^h_{ib} f(x) = \frac{q}{2} \sqrt{c(x)}\ G_b f(x) \quad , \quad G_b f = G^1_b f + i G^2_b f \quad \forall f \text{ fonction réelle}$$

on a alors

$$(F^h_{ib} w_k, w_j) = \frac{q}{2} (\sqrt{c(x)}\ G_b w_k, w_j)$$

et en approchant la fonction c(x), qui est une fonction constante par morceaux, par sa moyenne sur chaque intervalle on a

$$(F^h_{ib} w_k, w_j) = \frac{q}{2} \sum_{\ell=1}^{N} \sqrt{c_\ell} \int_{(\ell-1)h}^{\ell h} G_b w_k(x) w_j(x) dx$$

ce qui, en intégrant numériquement par une formule exacte pour les produits de polynômes de degré 1, donne

$$\begin{aligned}(F^h_{ib} w_k, w_j) = \frac{qh}{12} \{ & \sqrt{c_{j-1}} [\, 2(G^1_b w_k)^j + (G^1_b w_k)^{j-1} + i(2(G^2_b w_k)^j + (G^2_b w_k)^{j-1}) \,] \\ & + \sqrt{c_j} [\, 2(G^1_b w_k)^j + (G^1_b w_k)^{j+1} + i(2(G^2_b w_k)^j + (G^2_b w_k)^{j+1}) \,] \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(F^h_{ib} w_k, w_1) = \frac{qh}{12} \{ & \sqrt{c_1}\, [\, 2(G^1_b w_k)^1 + (G^1_b w_k)^2 + i(2(G^2_b w_k)^1 + (G^2_b w_k)^2) \,] \\ & + \sqrt{c_N}\, [\, 2(G^1_b w_k)^{N+1} + (G^1_b w_k)^N + i(2(G^2_b w_k)^{N+1} + (G^2_b w_k)^N) \,] \} \ .\end{aligned}$$

Compte tenu de (3.4) et (3.5), on a

$$G^1_b w_k(x) = \int_0^1 \left(\int_0^1 L_1(\sigma, y) d\sigma \right) [\, \sqrt{c(x-y)} w_k(x-y) + \sqrt{c(x+y-1)} w_k(x+y-1) \,]\, dy$$

$$G^2_b w_k(x) = \int_0^1 \left(\int_0^1 L_2(\sigma, y) d\sigma \right) [\, \sqrt{c(x-y)} w_k(x-y) - \sqrt{c(x+y-1)} w_k(x+y-1) \,]\, dy$$

On ne peut pas intégrer numériquement les intégrales précédentes au voisinage de (0,0) à cause du terme $e^{\frac{-qy}{\sigma}}$.

On décompose alors l'intégrale $\int_0^1 dy \int_0^1 d\sigma$ en 3 intégrales (cf. figure 1).

$$\int_o^h dy \int_o^h d\sigma + \int_h^1 dy \int_o^1 d\sigma + \int_o^h dy \int_h^1 d\sigma$$

ce qui nous donne, après avoir posé

$\tilde{c}_{i1} = \sqrt{c(x-y)}$; $\tilde{\tilde{c}}_{i1} = \sqrt{c(x+y-1)}$
pour $x = (i-1)h$

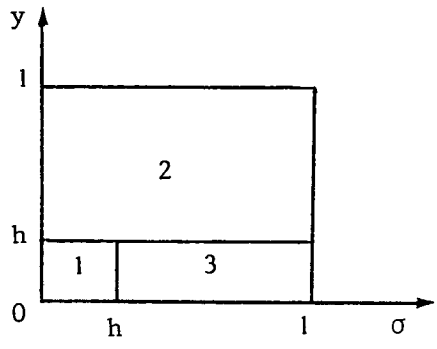


Figure 1

et

$$\mathcal{L}_1(y) = \int_o^1 L_1(\sigma,y)d\sigma \; ; \; \mathcal{L}_{1h}(y) = \int_h^1 L_1(\sigma,y)d\sigma :$$

$$G_h^1 w_k(x) = \tilde{c}_{i1} \int_o^h \int_o^h L_1(\sigma,y) w_k(x-y) d\sigma \, dy + \tilde{\tilde{c}}_{i1} \int_o^h \int_o^h L_1(\sigma,y) w_k(x+y-1) d\sigma \, dy$$

$$+ \sum_{\ell=2}^{N} \{\tilde{c}_{i\ell} \int_{(\ell-1)h}^{\ell h} \mathcal{L}_1(y) w_k(x-y) dy + \tilde{\tilde{c}}_{i\ell} \int_{(\ell-1)h}^{\ell h} \mathcal{L}_1(y) w_k(x+y-1) dy\}$$

$$+ \tilde{c}_{i1} \int_o^h \mathcal{L}_{1h}(y) w_k(x-y) dy + \tilde{\tilde{c}}_{i1} \int_o^h \mathcal{L}_{1h}(y) w_k(x+y-1) dy \; .$$

Les intégrales donnant $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_{1h}$ sont calculées par la méthode des trapèzes avec un pas très fin car elles sont indépendantes de b et on les calcule donc une fois pour toutes.

Pour les intégrales du type $\int_a^b \mathcal{L}_i(y) w_k(x-y) dy$, on utilise une formule d'intégration numérique exacte pour le produit de deux fonctions linéaires

$$\int_a^b \phi\psi \, dy = \frac{b-a}{6} [2\phi(a)\psi(a) + 2\phi(b)\psi(b) + \phi(a)\psi(b) + \phi(b)\psi(a)]$$

Quand aux intégrales du type $\int_o^h \int_o^h$ on les calcule directement en linéarisant les termes $w_k(y)$ cos by et $w_k(y)$ sin by, ce qui nous donne

$$W_k(y) L_1(\sigma,y) \sim \frac{1}{\sigma} \Big[\alpha_o e^{-\frac{qy}{\sigma}} + \alpha_1 y e^{-\frac{qy}{\sigma}} + \alpha_o \cos b \; e^{-\frac{q(1+y)}{\sigma}}$$

$$+ (\alpha_1 \cos b - \beta_1 \sin b) y \; e^{-\frac{q(1+y)}{\sigma}} \Big]$$

avec

$$\alpha_o = w_k(0) \; ; \; \beta_o = 0 \; ; \; \alpha_1 = \frac{1}{h}\left[\cos bh\, w_k(h) - w_k(0)\right] \; ;$$

$$\beta_1 = \frac{1}{h}\left[\sin bh\, w_k(h)\right] .$$

Il suffit alors d'utiliser les résultats suivants :

$$(5.1) \qquad \int_o^h \int_o^h \frac{e^{-\frac{q(1+y)}{\sigma}}}{\sigma} d\sigma\, dy = \frac{h}{6}\left[2e^{-\frac{q(1+h)}{h}} + e^{-\frac{q}{h}}\right]$$

$$(5.2) \qquad \int_o^h \int_o^h y \frac{e^{-\frac{q(1+y)}{\sigma}}}{\sigma} d\sigma\, dy = \frac{h^2}{3} e^{-\frac{q(1+h)}{h}}$$

$$(5.3) \qquad \int_o^h \int_o^h \frac{e^{-\frac{qy}{\sigma}}}{\sigma} d\sigma\, dy = h\left(\frac{1-e^{-q}}{q} + C_q\right) \quad \text{avec } C_q = \int_q^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

$$(5.4) \qquad \int_o^h \int_o^h y \frac{e^{-\frac{q_o y}{\sigma}}}{\sigma} d\sigma\, dy = \frac{h^2}{2}\left[\frac{1}{q^2}\left(1 - \frac{1+q}{e^q}\right) + C_q\right] .$$

On calcule C_q numériquement en l'approchant par $\int_q^{q+5} \frac{e^{-t}}{t} dt$. On négligera les intégrales (5.1) et (5.2) qui sont en $0(h^4)$ et $0(h^5)$ et l'on obtient finalement

$$\left\{ \int_o^h \int_o^h L_1(\sigma,y) w_k(x-y) d\sigma\, dy = h\left\{w_k(x)\left[\frac{1-e^{-q}}{q} + C_q\right] + \frac{1}{2}\left[\cos bh\, w_k(x-h) - w_k(x)\right] \times \left[\frac{1}{q^2}\left(1 - \frac{1+q}{e^q}\right) + C_q\right]\right\}\right.$$

$$\left\{ \int_o^h \int_o^h L_1(\sigma,y) w_k(x+y-1) d\sigma\, dy = h\left\{w_k(x)\left[\frac{1-e^{-q}}{q} + C_q\right] + \frac{1}{2}\left[\cos bh\, w_k(x+h) - w_k(x)\right] \times \left[\frac{1}{q^2}\left(1 - \frac{1+q}{e^q}\right) + C_q\right]\right\}\right.$$

6. RESULTATS NUMERIQUES.

Nous testons la méthode dans le cas où le milieu périodique est constitué de 2 ou 3 matériaux. Dans ce cas nous pouvons comparer nos résultats à ceux obtenus par M. LAM-HINE [1] par une méthode de discrétisation directe du problème initial. Dans le cas de 2 matériaux, avec c(y) symétrique, nous pouvons aussi comparer nos résultats avec ceux obtenus par une méthode de développement asymptotique due à A. BENSOUSSAN [1] (cf. annexe).

Les pas de discrétisation $h = \frac{1}{N}$ ont été choisis de façon à ce que les discontinuités du taux de diffusion c(y) coïncident avec des noeuds.

Pour chaque exemple traité on utilise plusieurs pas de discrétisation h, $\frac{h}{2}$, $\frac{h}{4}$, $\frac{h}{8}$ car la convergence de b_h^* vers b^* est assez lente et nous contraint à calculer b^* par extrapolation.

Pour le test d'arrêt de l'algorithme de dichotomie (cf. § 3.2), nous avons pris $\varepsilon = 10^{-3}$ ce qui correspond à 9 itérations.

6.1. Cas de deux milieux.

Exemple 1

Nous avons pris (cf. Fig. 2)

$$c(y) = \begin{cases} 0.99 \text{ sur } [0, \frac{1}{3}[\\ 1.2 \text{ sur } [\frac{1}{3}, 1[\end{cases}$$

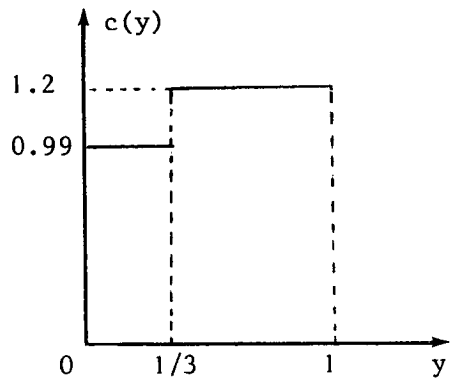


Figure 2

q=1.5

on obtient

N	18	36	72	144
b_h^*	1.057	1.030	1.0158	1.008

Par extrapolation on obtient $b^* = 1.0$ (cf. Fig. 3).

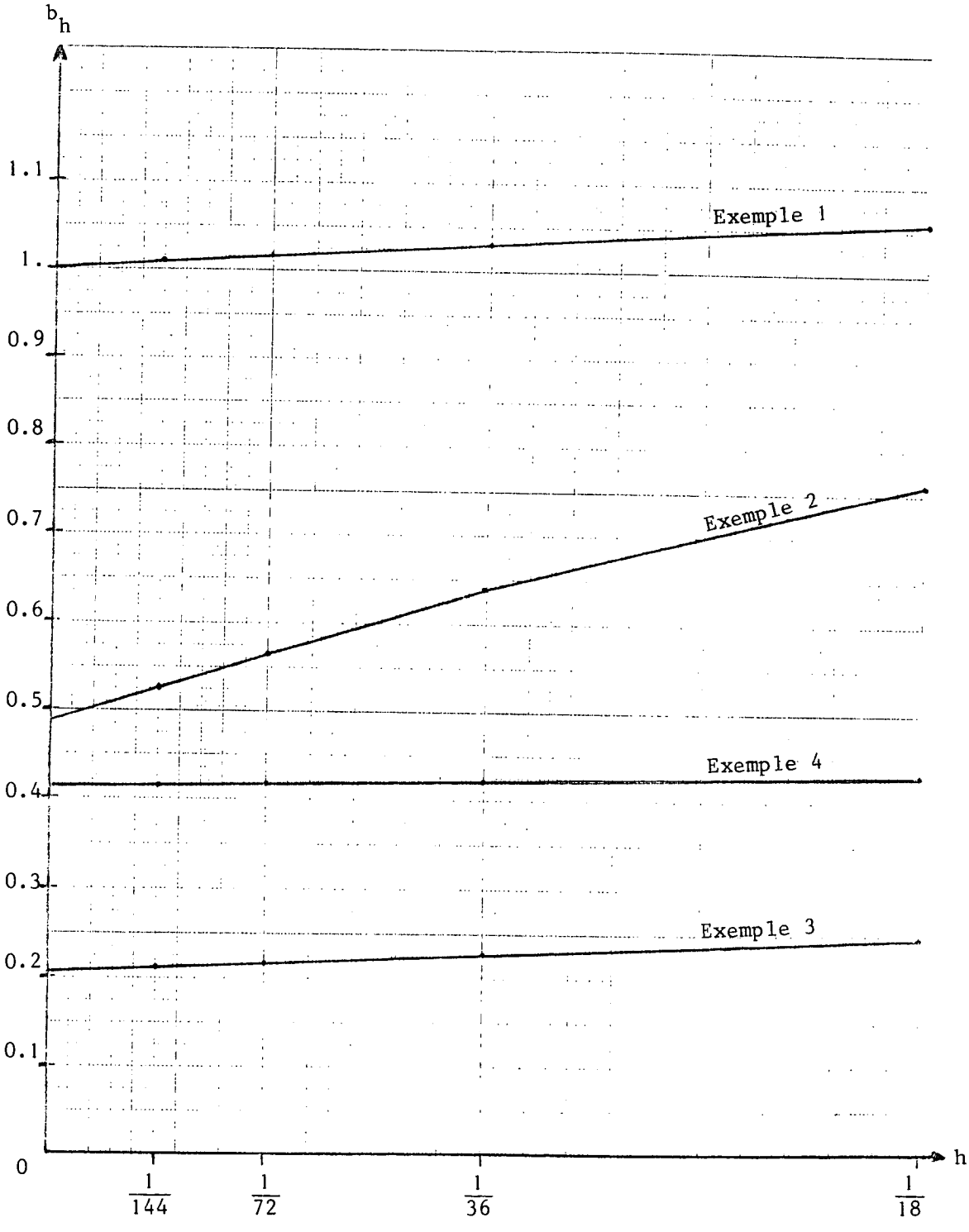


Figure 3 - Extrapolation des résultats

La solution obtenue par M. LAM-HINE est aussi 1.0. Le temps de calcul sur ordinateur IBM 370-168 est de 3 mn.

Il est difficile d'utiliser des pas de discrétisation plus petits que $h = \frac{1}{144}$ à cause du temps de calcul, de la place mémoire et de la précision.

Exemple 2

Nous avons pris (cf. Fig. 4)

$$c(y) = \begin{cases} 0.99 \text{ sur } [0, \frac{8}{9}] \\ 1.2 \text{ sur } [\frac{8}{9}, 1] \end{cases}$$

$q=2.25$

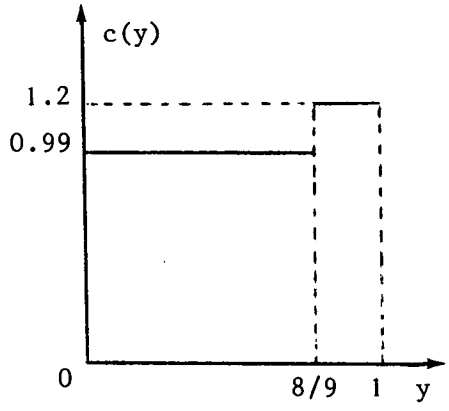


Figure 4

On obtient

N	18	36	72	144
b_h^*	0.761	0.640	0.566	0.526

Par extrapolation on obtient $b^* = 0.485$ (cf. fig. 3).
La solution obtenue par M. LAM-HINE est 0.478.

Exemple 3 : (comparaison avec la méthode de A. BENSOUSSAN (cf. annexe))
c(y) est défini comme dans l'exemple 2
$q=1$.
On obtient

N	18	36	72	144
b_h^*	0.245	0.227	0.217	0.212

Par extrapolation on obtient $b^* = 0.206$ (cf. fig. 3). La méthode de A. BENSOUSSAN donne 0.205.

6.2. Cas de 3 milieux.

Exemple 4 :

Nous avons pris (cf. Fig. 5)

$$c(y) = \begin{cases} 0.8 \text{ sur } [0, \frac{1}{4}] \\ 0.99 \text{ sur } [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ 1.2 \text{ sur } [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

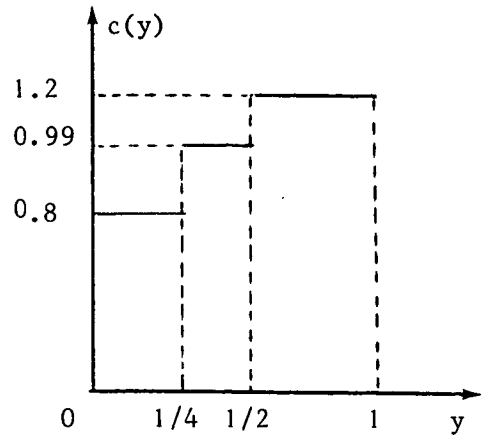


Figure 5

$q=1$.

On obtient

N	16	32	64	128
b_h^*	0.4311	0.4213	0.4164	0.4140

Par extrapolation on obtient $b^* = 0.412$ (cf. Fig. 3).
La solution obtenue par M. LAM-HINE est 0.411.

On remarque sur la Figure 3 que la convergence de b_h^* vers b^* est linéaire ce qui permet une extrapolation facile. C'est très net sur les exemples 1,3 et 4 (où la pente de la courbe $h \to b_h^*$ est faible), c'est encore vrai dans l'exemple 2 mais pour des valeurs de h assez petites.

CONCLUSION.

Au vu des résultats précédents, cette méthode qui permet de tenir compte d'un nombre quelconque de milieux, ce qui est fondamental pour les applications, et qui est rigoureuse du point de vue mathématique, donne dans les cas où la comparaison est possible des résultats tout à fait analogues à ceux obtenus par d'autres méthodes.

ANNEXE : METHODE DE DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DUE A A. BENSOUSSAN [1] POUR LE CALCUL DU BUCKLING HOMOGENEISE DANS LE CAS OU C EST PAIRE.

(cas de 2 milieux notamment)

On considère l'équation du transport avec source dans le cas monodimensionnel. Le flux de neutrons traverse une succession périodique de milieux, de période ε, et est solution de l'équation

$$(1) \qquad (\mu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon})\psi^{\varepsilon}(x,\mu) = \frac{1}{2\varepsilon} C(\frac{x}{\varepsilon}) \int_{-1}^{+1} \psi^{\varepsilon}(x,\mu)d\mu + \frac{1}{2} S_o \delta$$

où

$\mu, -1 \leq \mu \leq 1$, est le cosinus de l'angle fait par la direction des neutrons après la collision,

ε est la période du milieu physique

$c(y)$, $c(y) > 0$, est le taux de diffusion, périodique de période 1. $c(y)$ est supposée paire.

S_o est le terme de source.

δ est la masse de Dirac en x=0

On cherche une solution de l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad \psi^{\varepsilon}(x,\mu) = e^{-\frac{k}{\varepsilon}|x|}(\phi^{\varepsilon}(x,\mu) + \text{sign}(x)\theta^{\varepsilon}(x,\mu)),$$

où ϕ^{ε} et θ^{ε} sont des fonctions paires de x et $K \in \mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}$.

k, appelé buckling homogénéisé, est le buckling du milieu homogène équivalent au milieu périodique.

Dans les milieux surcritiques on pose $k = ib$, $b \in \mathbb{R}$.

L'idée de la méthode consiste à faire un développement asymptotique de ϕ^{ε} et θ^{ε} de la forme

$$\phi^{\varepsilon}(x,\mu) = \phi_o(\frac{x}{\varepsilon},\mu) + \varepsilon\phi_1(\frac{x}{\varepsilon},x,\mu) + \ldots$$

$$\theta^{\varepsilon}(x,\mu) = \theta_o(\frac{x}{\varepsilon},\mu) + \varepsilon\theta_1(\frac{x}{\varepsilon},x,\mu) + \ldots ,$$

les fonctions $\phi_o(y,\mu)$, $\phi_1(y,x,\mu)$, $\theta_o(y,\mu)$, $\theta_1(y,x,\mu)$ étant périodiques en y de période 1.

Le flux approché à l'ordre 1 s'écrit

$$\psi^o(x,\mu) = e^{-i\frac{b}{\varepsilon}|x|}[\phi_o(\frac{x}{\varepsilon},\mu) + \text{sign}(x)\theta_o(\frac{x}{\varepsilon},\mu)]$$

Utilisant un développement en série de Fourier de ϕ_o et θ_o du type $\phi_o(y,\mu) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_o^m(\mu)e^{2\pi imy}$, le coefficient b est abors obtenu de la façon suivante : c'est la valeur b telle que 1 soit valeur propre de A(b) où

$$A(b) = \left(\begin{array}{c|c} A_M^1(b) & A_M^2(b) \\ \hline A_M^2(b) & A_M^1(b) \end{array}\right)$$

avec

$$A_M^1(b) = [\rho_m(b)d_{mp}]_{m,p=-M,+M}$$

$$A_M^2(b) = [\sigma_m(b)d_{mp}]_{m,p=-M,+M}$$

et

$$\rho_m(b) = \int_{-1}^{+1} \frac{1+4\pi^2m^2\mu^2 + b^2\mu^2}{(1-4\pi^2m^2\mu^2+b^2\mu^2)+16\pi^2m^2\mu^2}\, d\mu$$

$$\sigma_m(b) = \int_{-1}^{+1} \frac{4\pi mb\mu^2}{(1-4\pi^2m^2\mu^2+b^2\mu^2)^2+16\pi^2m^2\mu^2}$$

$$d_{mp} = \frac{1}{2}\int_o^1 c(y)\cos 2\pi(p-m)y\, dy\ .$$

Les expériences numériques ont permis de montrer qu'il suffisait de prendre, dans la pratique, M très petit, 4 ou 5 par exemple.

BIBLIOGRAPHIE

A. BENSOUSSAN [1] - Manuscrit non publié

J.L. DOOB [1] - Stochastic Processes, Wiley, New-York, 1953.

T. HARRIS [1] - The Theory of Branching Process, Springer, Berlin, 1963.

T. KATO [1] - Perturbation theory for linear operators (2^{nd} ed.), Springer, Berlin, 1976.

A. KAVENOKY, M. LAM-HIME, Z. STANKOVSKI [1] - Improvements of the integral transport theory method. Proceedings du colloque de Williamsburg, Avril 1979.

M. LAM-HIME [1] - Résolution de l'équation de transport en mode fondamental. Définition et calcul de coefficients de diffusion des neutrons dans un réseau de cellules hétérogènes unidimensionnelles planes. Thèse de 3e cycle, Paris XI, à paraître.

M.M.R. WILLIAMS [1] - Mathematical Methods in Particle Transport Theory, Butterworths, London, 1971