



HAL
open science

Formulation mixte d'écoulement diphasiques incompressibles dans un milieu poreux

Jérôme Jaffré

► **To cite this version:**

Jérôme Jaffré. Formulation mixte d'écoulement diphasiques incompressibles dans un milieu poreux.
[Rapport de recherche] RR-0037, INRIA. 1980. inria-00076524

HAL Id: inria-00076524

<https://inria.hal.science/inria-00076524>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

Rapports de Recherche

N° 37

**FORMULATION MIXTE
D'ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES
INCOMPRESSIBLES
DANS UN MILIEU POREUX**

Jérôme JAFFRE

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105 - 78150 Le Chesnay
France
TÉL 954 90 20

Septembre 1980

FORMULATION MIXTE D'ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES

INCOMPRESSIBLES DANS UN MILIEU POREUX

Jérôme JAFFRE

RESUME :

Les écoulements diphasiques incompressibles en milieu poreux sont modélisés par un système de deux équations non linéaires dont l'une est du type diffusion-convection et l'autre est elliptique. Le terme de diffusion de la première s'annule dans certaines parties du domaine de sorte que le terme de convection devient prépondérant et que la solution présente des fronts raides. On introduit une formulation mixte de ces équations et on l'approche par une méthode d'éléments finis mixtes. Le terme de convection est approché grâce à un schéma de décentrage adapté aux méthodes d'éléments finis discontinus. Pour conclure, on présente des expériences numériques qui concernent le problème de la récupération secondaire du pétrole.

ABSTRACT :

Diphasic incompressible flows in porous media are modeled by a system of two non-linear equations, namely a diffusion-convection equation and an elliptic one. The diffusion term of the first equation vanishes on some range of the domain so that the convective term dominates and the solution has stiff fronts. A mixed formulation of the equation is introduced and is approximated by a mixed finite elements method. The convective term is approximated by an "upwind" scheme for discontinuous finite elements methods. We conclude by presenting numerical experiments concerning the problem of secondary oil recovery.

TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
0 - INTRODUCTION.....	3
I - POSITION DU PROBLEME.....	5
1.1 - Equations fondamentales.....	5
1.2 - Réduction du système des équations fondamentales.....	7
1.3 - Condition initiale et conditions aux limites.....	11
II - THEOREMES D'EXISTENCE.....	13
2.1 - Existence pour des conditions aux bords du type égalité.....	13
2.2 - Existence pour une condition aux bords du type unilatéral.....	17
III - FORMULATION MIXTE DU PROBLEME.....	19
IV - APPROXIMATION DE LA FORMULATION MIXTE.....	22
4.1 - Les éléments finis mixtes.....	22
4.2 - Formulation approchée du problème.....	26
4.3 - Résolution numérique.....	32
V - RESULTATS NUMERIQUES.....	35
5.1 - Introduction.....	35
5.2 - Eléments finis mixtes de degré 0.....	40
5.3 - Eléments finis mixtes de degré 1.....	49
VI - CONCLUSION.....	64

0 - INTRODUCTION

L'étude des écoulements de fluides non miscibles dans un milieu poreux est d'une grande importance, dans l'industrie pétrolière (cf. COLLINS [1], MARLE [1]) ou en hydrologie (cf. MOREL-SEYTOUX [1], WOLSAK [1]) pour ne citer que deux exemples.

Ainsi on trouvera dans BRENIER [1] une application de la méthode présentée ici à un problème d'hydrologie lié à la construction de barrages.

Pour notre part, nous aurons en vue ici des applications à l'industrie pétrolière, cette étude faisant l'objet de contrats entre l'INRIA, l'Institut Français du Pétrole et la Société Nationale Elf Aquitaine (Production).

Le problème considéré est le problème de la récupération secondaire du pétrole. Un gisement est quadrillé par un grand nombre de puits. Par certains puits on injecte un fluide, par exemple de l'eau, qui va pousser l'huile contenue dans le gisement vers d'autres puits où elle sera récupérée.

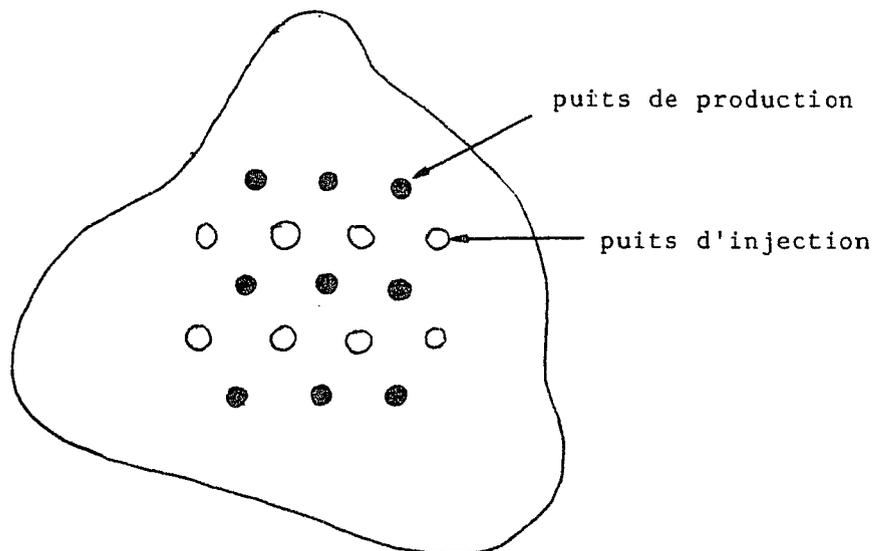


Figure 0.1

Les puits peuvent être disposés de différentes façons. Sur la figure 0.1 est représentée la configuration dite du "five-spot".

Afin de déterminer les conditions de l'exploitation, des simulations numériques doivent être réalisées à partir de mesures effectuées autour de puits "pilotes".

Les équations qui régissent le problème sont des équations aux dérivées partielles non linéaires dont la solution présente des fronts raides.

De nombreuses études ont été effectuées, surtout en différences finies (citons par exemple) TODD-O'DELL-HIRASAKI [1], YANOSIK-CRACKEN [1]), mais aussi avec des éléments finis classiques (DOUGLAS-DUPONT-RACHFORD [1], SPIVAK-PRICE-SETTARI [1], LEMONNIER[1]). Enfin mentionnons à part la méthode stochastique de ALBRIGHT-CONCUS-PROSKUROWSKI [1].

Dans ce travail on fait une étude bidimensionnelle en supposant que la gravité n'intervient pas (gisement plan horizontal). Partant de la formulation de CHAVENT [1], on présente une formulation mixte du problème que l'on approche par la méthode d'éléments finis mixtes de RAVIART-THOMAS [1]. Le terme de convection est approché par le schéma de LESAIN-T-RAVIART [1] qui est un schéma de décentrage adapté aux méthodes d'éléments finis discontinus.

On prolonge ainsi une étude déjà réalisée en dimension 1 (cf. COHEN [1], CHAVENT - COHEN [1]) qui a abouti à un programme exploité industriellement permettant de résoudre des problèmes inverses.

I - POSITION DU PROBLEME

1.1 - Equations fondamentales

Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$), de frontière Γ , figure un milieu poreux de porosité indépendante de la pression. Dans ce milieu se déplacent deux fluides incompressibles non miscibles. On néglige l'influence de la gravité.

On note :

(1.1) $\left\{ \begin{array}{l}]0, T[, T > 0 \text{ l'intervalle de temps d'étude du phénomène} \\ Q = \Omega \times]0, T[\\ \Sigma = \Gamma \times]0, T[\\ \phi \text{ la porosité du milieu, fonction de } \mathbb{R}^n \text{ dans } \mathbb{R} \\ \vec{K} \text{ la perméabilité absolue dans } \Omega, \text{ fonction de } \mathbb{R}^n \text{ dans } \mathbb{R}^n \\ P_i \text{ la pression du fluide } i, i = 1, 2 \\ S_i \text{ sa saturation (pourcentage du volume de pore qu'il occupe)} \\ \vec{q}_i \text{ sa vitesse de filtration (vecteur parallèle à la vitesse moyenne} \\ \text{du fluide } i, \text{ mais de module égal à son débit par unité de surface} \\ \text{normale à la direction de l'écoulement).} \\ \rho_i \text{ sa masse volumique (constante)} \\ \mu_i \text{ sa viscosité (constante)} \\ k_{ri} \text{ sa perméabilité relative, fonction donnée de } S_i \text{ et de } x \in \mathbb{R}^n. \\ k_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i} \text{ sa mobilité} \\ P_C \text{ la pression capillaire, fonction donnée de l'une des saturations} \\ \text{(} S_1 \text{ par exemple).} \end{array} \right.$

Suivant COLLINS [1], MARLE [1], écrivons les équations fondamentales des écoulements de deux fluides incompressibles non miscibles.

Loi de Darcy :

(1.2) $(\vec{q}_i)_j = - K_j k_i (\text{grad } P_i)_j$ dans Q $j = 1, \dots, 3 ; i = 1, 2$

Equation de la pression capillaire

$$(1.3) \quad P_2 - P_1 = P_C \quad \text{dans } Q$$

Equation de continuité

$$(1.4) \quad S_1 + S_2 = 1 \quad \text{dans } Q$$

Equation de conservation

$$(1.5) \quad \phi \frac{\partial(\rho_i S_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho_i \vec{q}_i) = 0 \quad \text{dans } Q \quad i = 1, 2$$

Les équations (1.2), ..., (1.5) forment un système de six équations à six inconnues ($S_1, S_2, P_1, P_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2$).

De plus, les saturations doivent vérifier les inégalités :

$$(1.6) \quad 0 < S_{i \min} \leq S_i \leq S_{i \max} < 1 \quad i = 1, 2$$

où $S_{i \min}$ et $S_{i \max}$ sont des constantes réelles données.

La relation (1.3) montre que les deux fluides ne jouent pas un rôle symétrique. Celui des deux qui a la plus grande pression est appelé fluide non mouillant, i.e., si $P_C \geq 0$, le fluide 1 est le fluide mouillant et le fluide 2, le fluide non mouillant.

Pour le problème de l'exploitation d'un gisement de pétrole, le fluide non mouillant est l'huile et le fluide mouillant peut être, par exemple, de l'eau, et l'allure générale des courbes représentatives de k_{ri} et de P_C est dessinée sur la figure 1.1.

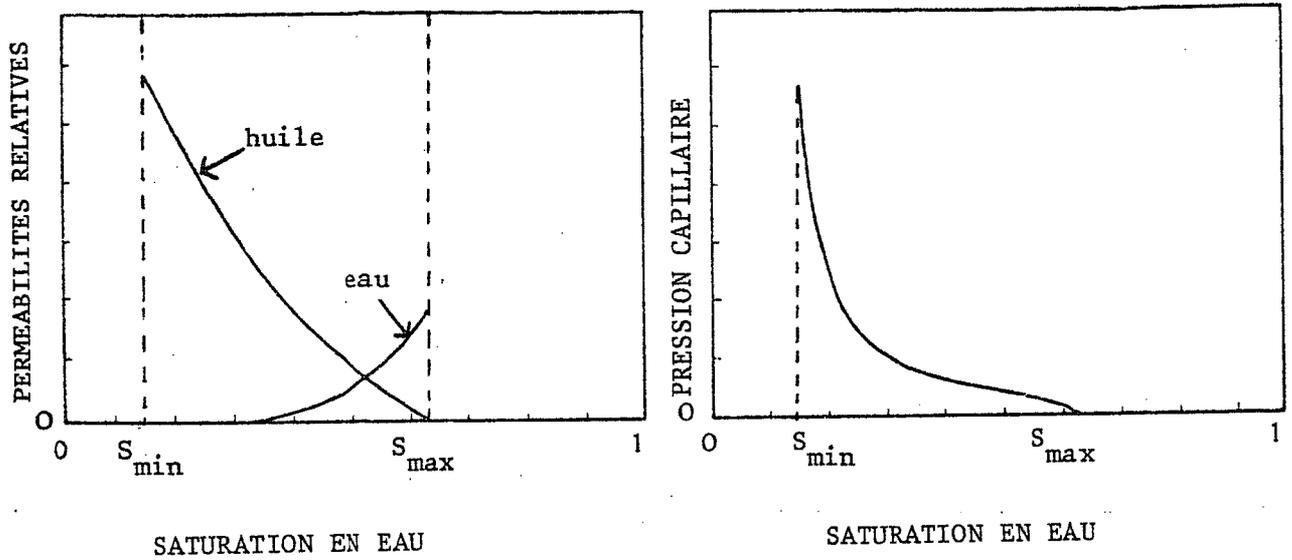


Figure 1.1 : Courbes de perméabilité relative et de pression capillaire en fonction de la saturation en fluide mouillant

1.2 - Réduction du système des équations fondamentales

Suivant la méthode de CHAVENT [1], on va ramener le système (1.2),..., (1.5) de six équations à six inconnues à un système de deux équations à deux inconnues.

Introduisons la saturation réduite de l'un des deux fluides, par exemple le fluide 1, qui sera supposé être le fluide non mouillant :

$$(1.7) \quad u = \frac{S_1 - S_{1 \min}}{S_{1 \max} - S_{1 \min}}$$

Compte tenu de (1.6) on a évidemment :

$$(1.8) \quad 0 \leq u \leq 1$$

On note :

$$(1.9) \left\{ \begin{array}{l} - \bar{P}_C, \text{ la pression capillaire comme fonction de la saturation} \\ \text{réduite :} \\ \quad \bar{P}_C(u) = P_C(S_{1 \text{ min}} + u(S_{1 \text{ max}} - S_{1 \text{ min}})) \\ - \text{De même } \bar{k}_i \text{ est la mobilité du fluide } i \text{ comme fonction de la} \\ \text{saturation réduite, supposée dorénavant indépendante de } x \in \mathbb{R}^n. \\ - \bar{\phi}(x) = (S_{1 \text{ max}} - S_{1 \text{ min}})\phi(x) \quad \forall x \in \Omega \\ - m(u) = \bar{k}_1(u) + \bar{k}_2(u) \quad \forall x \in [0, 1] \\ - m_i(u) = \frac{\bar{k}_i(u)}{m(u)} \end{array} \right.$$

Faisons les calculs dans le cas où le fluide 1 est le fluide non mouillant (dans l'autre cas, ils sont analogues, mis à part que \bar{P}_C change de signe et de sens de variation).

On introduit les fonctions

$$(1.10) \left\{ \begin{array}{l} \gamma(u) = \int_0^u (m_1(u) - m_2(u)) \left(-\frac{d\bar{P}_C}{du}(u)\right) du \\ P = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) + \frac{1}{2} \gamma \end{array} \right.$$

Les deux inconnues du système que nous allons écrire, sont u , la saturation réduite, et P que l'on appellera "pression globale".

Tenant compte de l'incompressibilité des fluides, de (1.4), (1.7), (1.9) et (1.10), on obtient en faisant la différence et la somme des équations (1.5) :

$$(1.11) \quad \bar{\phi} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \left[\frac{1}{2} (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \right] = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(1.12) \quad \operatorname{div} \left[\frac{1}{2} (\vec{q}_1 + \vec{q}_2) \right] = 0 \quad \text{dans } Q$$

Or, de (1.2), (1.9) on déduit :

$$(1.13) \quad (\vec{q}_1 + \vec{q}_2)_j = - K_j [m(m_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_j} + m_2 \frac{\partial P_2}{\partial x_j})] \quad j = 1, \dots, n$$

Mais, de (1.3), (1.9), (1.10) on déduit encore :

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_j} + \frac{\partial P_2}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{2} (m_1 - m_2) \frac{d\bar{P}_C}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ &= m_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_j} + m_2 \frac{\partial P_2}{\partial x_j} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

De (1.13), (1.14) on obtient donc :

$$(1.15) \quad (\vec{q}_1 + \vec{q}_2)_j = - K_j m \frac{\partial P}{\partial x_j} \quad j = 1, \dots, n$$

Remarque 1.1 :

L'égalité (1.15) donne le sens physique de la pression "globale". C'est la pression qui, pour un fluide de mobilité m égale à la somme des mobilités des fluides 1 et 2, donnerait une vitesse de filtration égale à la somme des vitesses de filtration des fluides 1 et 2.

D'autre part, de (1.2), (1.9), (1.13) on obtient :

$$\begin{aligned} (\vec{q}_1 - \vec{q}_2)_j &= - K_j [m(m_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_j} - m_2 \frac{\partial P_2}{\partial x_j})] \\ &= (m_1 - m_2)(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)_j - K_j 2mm_1m_2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_j} - \frac{\partial P_2}{\partial x_j} \right) \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Donc grâce à (1.3), on a :

$$(1.16) \quad (\vec{q}_1 - \vec{q}_2)_j = (m_1 - m_2)(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)_j - K_j 2mm_1m_2 \left(- \frac{d\bar{P}_C}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

Introduisons les notations :

$$(1.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(u) = m(u)m_1(u)m_2(u)\left(-\frac{d\bar{P}_C}{du}(u)\right) = \frac{\bar{k}_1(u)\bar{k}_2(u)}{\bar{k}_1(u)+\bar{k}_2(u)}\left(-\frac{d\bar{P}_C}{du}(u)\right) \\ \alpha(u) = \int_0^u a(u)du \\ b(u) = m_1(u) - m_2(u) = +\frac{\bar{k}_1(u) - \bar{k}_2(u)}{\bar{k}_1(u) + \bar{k}_2(u)} \\ d(u) = \frac{m(u)}{2} = \frac{\bar{k}_1(u) + \bar{k}_2(u)}{2} \end{array} \right.$$

Compte tenu de la forme des courbes représentatives des fonctions $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{P}_C$, les fonctions a, b, d ont les propriétés suivantes :

$$(1.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(0) = a(1) = 0, \quad a(u) > 0 \quad \forall u \in]0, 1[\\ b(0) = -1, \quad b(1) = +1, \quad b \text{ monotone} \\ d(u) \geq d > 0 \quad \forall u \in [0, 1] \end{array} \right.$$

Compte tenu de (1.15), (1.16), (1.17), les équations (1.11), (1.12) s'écrivent :

$$(1.19) \quad \bar{\varphi} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} K_j a(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^3 K_j d(u) \frac{\partial P}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial b(u)}{\partial x_j} = 0 \text{ dans } Q$$

$$(1.20) \quad - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} K_j d(u) \frac{\partial P}{\partial x_j} = 0 \quad \text{dans } Q$$

Posons, avec les notations (1.17) :

$$(1.21) \quad r_j = -K_j a(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = -K_j \frac{\partial \alpha(u)}{\partial x_j} \quad j = 1, \dots, 3$$

$$(1.22) \quad q_j = -K_j d(u) \frac{\partial P}{\partial x_j} \quad j = 1, \dots, 3$$

Le système (1.19), (1.20) se réécrit alors :

$$(1.23) \quad \bar{\varphi} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{r} + \vec{q} \cdot \vec{\operatorname{grad}} b(u) = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(1.24) \quad \operatorname{div} \vec{q} = 0 \quad \text{dans } Q$$

Les équations (1.23), ..., (1.24), compte tenu de (1.21), (1.22) forment un système de deux équations à deux inconnues u et P .

L'équation (1.23) est, pour \vec{q} donné, une équation du type diffusion-convection avec un terme de diffusion $\operatorname{div} \vec{r}$ qui s'annule pour $u = 0$ ou $u = 1$ (alors $\alpha'(u) = a(u) = 0$ d'après (1.18)) et un terme de transport $\vec{q} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} b(u)$.

L'équation (1.24), compte tenu de (1.22), est, pour u donné, une équation elliptique en P .

Notons enfin que, avec les notations (1.17), (1.21), (1.22), les égalités (1.15), (1.16) s'écrivent :

$$(1.25) \quad \frac{1}{2} (\vec{q}_1 + \vec{q}_2) = \vec{q}$$

$$(1.26) \quad \frac{1}{2} (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) = \vec{r} + b(u) \vec{q}$$

On en déduit les vitesses de filtration de chaque fluide :

$$(1.27) \quad \vec{q}_1 = (1 + b(u))\vec{q} + \vec{r}$$

$$(1.28) \quad \vec{q}_2 = (1 - b(u))\vec{q} - \vec{r}$$

1.3 - Condition initiale et conditions aux limites

A l'instant initial, la saturation dans le milieu poreux est donnée :

$$(1.29) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Concernant les conditions sur le bord Γ de Ω , on note :

$$(1.30) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\ell} \quad \text{la partie imperméable de } \Gamma \\ \Gamma_e \quad \text{la frontière par laquelle on injecte un débit de fluide} \\ \quad \text{mouillant donné } q_d(t) \\ \Gamma_s \quad \text{la frontière sur laquelle on impose une pression donnée } P_d(t) \\ \Sigma_{\ell} = \Gamma_{\ell} \times]0, T[\quad ; \quad \Sigma_e = \Gamma_e \times]0, T[\quad ; \quad \Sigma_s = \Gamma_s \times]0, T[\end{array} \right.$$

De plus on partitionne la partie non imperméable $\Gamma_e \cup \Gamma_s = \Gamma - \Gamma_{\ell}$ de la frontière en Γ_- et Γ_+ suivant le sens du champ \vec{q} (on note \vec{v} la normale à Γ extérieure à Ω).

$$(1.31) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_- = \{x \in \Gamma - \Gamma_{\ell} \mid \vec{q} \cdot \vec{v} < 0\} \quad ; \quad \Gamma_+ = \{x \in \Gamma - \Gamma_{\ell} \mid \vec{q} \cdot \vec{v} \geq 0\} \\ \Sigma_- = \Gamma_- \times]0, T[\quad \quad \quad \Sigma_+ = \Gamma_+ \times]0, T[\end{array} \right.$$

u étant toujours la saturation réduite en fluide non mouillant, les conditions sur le bord Γ de Ω sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

Conditions en pression	Conditions en saturation
(1.32) $\vec{q} \cdot \vec{v} = 0$ sur Σ_{ℓ}	$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$
(1.33) $\vec{q} \cdot \vec{v} = q_d$ sur Σ_e	(1.34) $u = 0$ sur Σ_-
(1.35) $P = P_d$ sur Σ_s	(1.36) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } u > 0 \quad \vec{q}_2 \cdot \vec{v} = 0 \\ \text{Sinon } u = 0 \end{array} \right\}$ sur Σ_+

Les conditions (1.32) sur Σ_{ℓ} équivalent, d'après (1.27), (1.28), à $\vec{q}_1 \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{q}_2 \cdot \vec{v} = 0$; elles expriment donc bien que Γ_{ℓ} est imperméable .

Sur $\Sigma_e \subset \Sigma_-$, i.e. $q_d < 0$, les conditions (1.33), (1.34) expriment que Γ_e est une frontière où l'on injecte le fluide mouillant. En effet, dès que la saturation en fluide mouillant est maximale au voisinage du bord, on a $\vec{r} = 0$, $b(u) = -1$, et donc $\vec{q}_1 = 0$, $\vec{q}_2 = 2\vec{q} = 2q_d$ sur Σ_e .

Sur Γ_+ , partie de la frontière où le sens de l'écoulement est sortant, la condition unilatérale (1.36) signifie que le fluide mouillant peut sortir de Ω à travers Γ_+ si et seulement si la saturation en fluide mouillant est maximale.

Sur Σ_s , la condition (1.35) exprime la continuité des pressions de chaque phase sur le bord, au terme de pression capillaire près qui reste faible devant la chute de pression globale.

Dans le cas où l'on étudie le problème de la récupération secondaire du pétrole, on a $\Gamma_e = \Gamma_-$ et $\Gamma_s = \Gamma_+$. Γ_e modélise alors la paroi du puit d'injection et Γ_s celle du puit de production. Dans un premier temps, à travers Γ_s , on ne récupère que du pétrole, puis, quand la saturation en fluide mouillant, injecté par Γ_e , devient maximale sur Γ_s , celui-ci commence à sortir par Γ_s . Le temps qu'il faut au fluide mouillant avant de commencer à sortir par Γ_s , est appelé par les ingénieurs temps de percée (breakthrough).

II - THEOREMES D'EXISTENCE

On énonce ici des résultats d'existence démontrés par CHAVENT [1], [2], [3]. Un premier théorème donne un résultat d'existence en dimension 1, 2 et 3 pour les équations (1.19), (1.20) avec des conditions aux limites mêlées qui sont des égalités. Un deuxième théorème donne un résultat d'existence partiel (valable seulement en dimension 1) quand une condition unilatérale du type (1.36) sur une partie de la frontière est associée aux équations (1.19), (1.20). On trouvera d'autres résultats en dimension 1 dans GAGNEUX [1].

2.1 - Existence pour des conditions aux bords du type égalité

On suppose que :

(2.1) Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$ et sa frontière Γ est régulière.

On introduit les espaces :

$$(2.2) \quad \begin{cases} H = L^2(\Omega) \\ W = \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ sur } \Gamma_s\} \\ V = \{v \in W \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_e \cup \Gamma_s\} \end{cases}$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré, on munit V et W de la norme :

$$(2.3) \quad |v|_V = \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

En identifiant V et W à des sous-espaces de H, et H à son dual, on peut identifier H à des sous-espaces de V' et de W' tels que :

$$(2.4) \quad \begin{cases} V \subset H \subset V' \quad , \quad W \subset H \subset W' \\ \text{les injections étant continues et denses} \end{cases}$$

On note (,) le produit scalaire dans H, ainsi que les produits de dualité entre V' et V, et entre W' et W.

Dans la suite la fonction $\bar{\Phi}$ sera notée Φ .

Soient des fonction Φ, \vec{K}, a, b, d données vérifiant :

$$(2.5) \quad a, b, d \text{ sont continues et bornée de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}$$

$$(2.6) \quad \Phi \in L^\infty(\Omega) ; \vec{K} \in (L^\infty(\Omega))^n$$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \exists \alpha > 0 \text{ tel que } d(u) &\geq \alpha & \forall u \in [0, 1] \\ 1 - \alpha &\geq \Phi(x) \geq \alpha & \forall x \in \Omega \\ K_i(x) &\geq \alpha & \forall x \in \Omega \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$(2.8) \quad a(0) = a(1) = 0 ; a(u) > 0 \quad \forall u \in]0, 1[$$

Ces conditions sont raisonnables pour ϕ et \vec{K} , puisque nous nous plaçons dans un milieu poreux, et par définition de la perméabilité absolue K . D'après (1.18), elles sont aussi raisonnables pour les fonctions a, b, d définies en (1.17).

Les fonctions a, b, d sont prolongées continuellement à \mathbb{R} tout entier par des constantes.

On associe maintenant à toute fonction φ de Ω dans \mathbb{R} , les formes bilinéaires A_φ, BD_φ , sur $V \times V$ et D_φ sur $W \times W$ de la façon suivante :

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(v, w) = \int_{\Omega} a(\varphi) \sum_{i=1}^n K_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \quad \forall v, w \in V \\ BD(v, w) = \int_{\Omega} b(\varphi) d(\varphi) \sum_{i=1}^n K_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \quad \forall v, w \in V \\ D(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} d(\varphi) \sum_{i=1}^n K_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \quad \forall v, w \in W \end{array} \right.$$

On se donne deux fonctions :

$$(2.10) \quad q_d \in L^2(\Sigma_e) \quad ; \quad u_0 \in L^2(\Omega)$$

Aux équations (1.19), (1.20) associons la condition initiale (1.29) et les conditions aux bords ci-dessous :

$$(2.11) \quad \text{sur } \Sigma_e \quad \vec{q} \cdot \vec{v} = q_d \quad ; \quad u = 0$$

$$(2.12) \quad \text{sur } \Sigma_\ell \quad \vec{q} \cdot \vec{v} = 0 \quad ; \quad \vec{r} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(2.13) \quad \text{sur } \Sigma_s \quad P = 0 \quad ; \quad u = 0$$

Ces équations correspondent au problème du déplacement d'un fluide non mouillant par un fluide mouillant, u étant la saturation en fluide non mouillant, Γ_e la frontière d'injection du fluide mouillant et Γ_s la frontière par où le fluide non mouillant sort du domaine.

On est maintenant en mesure d'écrire la formulation variationnelle des équations (1.19), (1.20) munies de la condition initiale (1.29) et des conditions aux bords (2.11), ..., (2.13).

Trouver $u :]0, T[\rightarrow V$ et $P :]0, T[\rightarrow W$ tels que

$$(2.14) \quad \left(\phi \frac{du}{dt}, v\right) + A_{u(t)}(u(t), v) + BD_{u(t)}(P(t), v) = 0$$

$$\forall v \in V, \text{ p.p dans }]0, T[$$

$$(2.15) \quad u(0) = u_0$$

$$(2.16) \quad D_{u(t)}(P(t), w) = \int_{\Gamma_e} q_d \cdot w d\Gamma \quad \forall w \in W \text{ p.p dans }]0, T[$$

On trouve alors dans CHAVENT [1] le théorème suivant :

Théorème 2.1 :

Avec les hypothèses (2.1) à (2.10) et

$$(2.17) \quad 0 \leq u_0(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega$$

$$(2.18) \quad \exists \theta \in]0, 1[\text{ tel que } \beta^{-1} \text{ est une fonction Holderienne d'ordre } \theta \text{ où}$$

$$(2.19) \quad \beta(u) = \int_0^u \sqrt{a(\tau)} d\tau \text{ est une primitive de } \sqrt{a} ;$$

alors les équations (2.14), (2.15), (2.16) ont une solution u vérifiant :

$$(2.20) \quad \beta(u) \in L^2(0, T; V) \quad ; \quad \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V')$$

$$(2.21) \quad 0 \leq u(x, t) \leq 1 \quad \forall (x, t) \in Q$$

Remarque 2.1 :

Les hypothèses (2.18), (2.19) sont satisfaites par tout fonction a vérifiant :

$$a(0) = a(1) = 0 \quad ; \quad a(u) > 0 \quad \forall u \in]0, 1[$$

$$a(u) \sim u^{p_0} \quad \text{quand } u \rightarrow 0 \text{ avec } p_0 > 0$$

$$a(u) \sim (1-u)^{p_1} \quad \text{quand } u \rightarrow 1 \text{ avec } p_1 > 0$$

Ce qui contient notre situation physique (cf. (1.17), (1.18)).

2.2 - Existence pour une condition aux bords du type unilatéral

Nous avons vu au § 1.3 que sur la partie de frontière Σ_+ , on a en fait la condition unilatérale (1.36).

D'après (1.28), cette condition unilatérale peut s'écrire de la façon suivante :

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - b(u)) \vec{q} \cdot \vec{v} - \vec{r} \cdot \vec{v} \geq 0 \\ u \geq 0 \\ u[(1 - b(u)) \vec{q} \cdot \vec{v} - \vec{r} \cdot \vec{v}] = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Sigma_+$$

Introduisons les cônes convexes fermés suivants :

$$(2.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_-} = 0 ; v|_{\Gamma_+} \geq 0\} \\ \mathcal{M} = \{v \in L^2(0, T, V) \mid v(t) \in M \quad \text{p.p sur }]0, T[\} \end{array} \right.$$

D'après CHAVENT [2], et en reprenant les notations (2.2), (2.9), les équations (1.19), (1.20) munies de la condition initiale (1.29) et des conditions aux bords (1.32),..., (1.35), (2.22), ont formellement la formulation variationnelle suivante :

Trouver $u :]0, T[\rightarrow M$ et $p :]0, T[\rightarrow W$ tels que :

$$(2.24) \quad \left(\Phi \frac{du}{dt}, v - u(t) \right) + A_{u(t)}(u(t), v - u(t)) + BD_{u(t)}(p(t), v - u(t)) \geq$$

$$\int_{\Gamma_+} d(u) \left(\sum_{i=1}^n K_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \cdot v_i \right) (v - u(t)) \quad \forall v \in M \quad \text{p.p dans }]0, T[$$

$$(2.25) \quad u(0) = u_0$$

$$(2.26) \quad D_{u(t)}(p(t), w) = \int_{\Gamma_e} q_d \cdot w d\Gamma \quad \forall w \in W \quad \text{p.p dans }]0, T[$$

L'équation en saturation est ainsi formulée sous la forme de l'inéquation variationnelle (2.24).

L'étude théorique du problème (2.24), ..., (2.26) n'a pu être faite qu'en dimension 1 (cf. CHAVENT [3]).

On suppose donc que :

$$(2.27) \quad \Omega =]0, L[\quad ; \quad \Gamma_e = \{0\} \quad ; \quad \Gamma_s = \{L\}$$

Dans ce cas, l'équation en pression (2.26) est trivialement résolue car, en tenant compte de (1.22), elle équivaut à :

$$(2.28) \quad q(x, t) = q(0, t) = q(t) = \frac{1}{f} q_d(t) \quad \forall (x, t) \in Q$$

Le débit total est donc constant et connu le long de l'intervalle]0, L[. Si Γ_e est la frontière d'injection, on aura $q \geq 0$.

Il ne reste donc qu'à étudier l'inéquation variationnelle (2.24), (2.25) :

On se donne alors :

$$(2.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_e = \Gamma_- \quad ; \quad \Gamma_s = \Gamma_+ \\ q \in L^\infty(0, T) \quad q \geq 0 \\ u_0 \in M \quad u_0(x) \geq 0 \quad \text{p.p sur }]0, L[\end{array} \right.$$

Définissons une famille d'opérateurs, notés AB, non linéaires de V dans V' :

$$(2.30) \quad (AB(t ; u), v) = \int_0^L K[a(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x} - q(t)b(u(x))] \frac{\partial v}{\partial x} + q(t) v(L) \quad \forall u, v \in V$$

L'inéquation (2.24) s'écrit alors :

$$(2.31) \quad (\Phi \frac{du}{dt}, v - u(t)) + (AB(t ; u), v - u(t)) \geq 0 \quad \forall v \in M \quad \text{p.p sur }]0, T[$$

Cependant, l'opérateur AB n'étant pas "V-elliptique", on ne peut trouver, avec nos hypothèses, une solution de (2.31), (2.25) qui satisfasse $u(t) \in V, \frac{du}{dt}(t) \in V'$.

On est donc conduit à introduire une formulation variationnelle faible.

Trouver $u =]0, T[\rightarrow M$ tel que

$$(2.32) \quad \int_0^T (\phi \frac{dv}{dt}, v - u) dt + \int_0^T (AB(t; u), v - u) dt \geq 0$$

$$\forall v \in \mathcal{D}, \frac{dv}{dt} \in L^2(Q), v(0) = u_0$$

Dans CHAVENT [3], on trouve alors le théorème d'existence suivant :

Théorème 2.2 :

Avec les hypothèses (2.5), ..., (2.8) auxquelles on ajoute l'hypothèse

$$(2.33) \quad -1 \leq b(u) \leq +1$$

et les hypothèses (2.17), ..., (2.19), (2.23), (2.27), (2.29), (2.30), l'inéquation variationnelle (2.32) admet une solution u qui vérifie :

$$(2.34) \quad \beta(u) \in L^2(0, T; V) \quad ; \quad \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V')$$

$$(2.35) \quad 0 \leq u(x, t) \leq 1 \quad \forall (x, t) \in Q$$

$$(2.36) \quad |\beta(u)|_{L^2(0, T; V)} \leq \frac{1}{2} |u_0|_H \quad ; \quad |u|_{L^\infty(0, T; H)} \leq |u_0|_H$$

III - FORMULATION MIXTE

Cette formulation, suggérée par Chavent après les travaux de ODEN-REDDY [1] et RAVIART-THOMAS [1], consiste à introduire, en plus des fonctions inconnues u et P , les deux fonctions \vec{r} et \vec{q} , définies par les égalités (1.21), (1.22), comme inconnues supplémentaires.

Cette façon de faire permet, d'une part de calculer facilement grâce à (1.27), (1.28) les vitesses de filtration de chaque fluide qui sont des grandeurs physiquement importantes, et d'autre part de coupler simplement l'équation (1.19) à l'équation (1.20) par l'intermédiaire de la fonction \vec{q} .

Ainsi on a maintenant à résoudre un système de quatre équations (1.21), ..., (1.24) à quatre inconnues (u, \vec{r}, P, \vec{q}) .

Dans cette formulation, on va chercher $u(t)$ et $P(t)$ dans un espace moins régulier qui est $H = L^2(\Omega)$ au lieu de $H^1(\Omega)$. $\vec{r}(t)$ et $\vec{q}(t)$ sont cherchés, pour leur part, dans l'espace.

$$(3.1) \quad \vec{X} = \{ \vec{s} \in (L^2(\Omega))^n \mid \operatorname{div} \vec{s} \in L^2(\Omega) \}$$

muni de la norme

$$(3.2) \quad |\vec{s}| = |\vec{s}|_{(L^2(\Omega))^n} + |\operatorname{div} \vec{s}|_{L^2(\Omega)}$$

Par ailleurs, la formulation des conditions aux bords (1.34), (1.36) rend, en fait, nécessaire l'introduction d'une cinquième inconnue, notée u_γ , définie sur $\Sigma - \Sigma_\ell$, qui est, dans un certain sens, la trace de u sur la frontière $\Sigma - \Sigma_\ell$ et vaut donc 0 sur Σ_- .

Plus précisément, la formulation mixte des équations (1.21), ..., (1.24) avec les conditions aux bords (1.32), ..., (1.36) et la condition initiale (1.29) s'écrit de la façon suivante.

Reprenant les hypothèses (2.1), ..., (2.8) et étant données trois fonctions :

$$(3.2) \quad q_d \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_e)) ; P_d \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_s)) ; u_0 \in L^2(\Omega)$$

il s'agit de

trouver $\left\{ \begin{array}{l} (u, \vec{r}) :]0, T[\rightarrow H \times \vec{X} ; u_\gamma \in L^2(\Sigma - \Sigma_\ell) \\ (P, \vec{q}) :]0, T[\rightarrow H \times \vec{X} \end{array} \right\}$ tels que

$$(3.4) \quad - \int_{\Omega} \phi u_0 v(0) dx - \int_Q \phi u \frac{dv}{dt} dx dt + \int_Q \text{div} \vec{r} \cdot v dx dt \\ - \int_Q b(u) \vec{q} \cdot \vec{\text{grad}} v dx dt = 0 \\ \forall v \in H^1(0, T ; V) , v(T) = 0$$

$$(3.5) \quad \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{r}_i(t)}{K_i} s_i dx - \int_{\Omega} \alpha(u(t)) \text{div} \vec{s} dx + \int_{\Gamma - \Gamma_\ell} \alpha(u_\gamma(t)) \vec{s} \cdot \vec{\nu} d\Gamma = 0 \\ \forall \vec{s} \in \vec{X} \quad \vec{s} \cdot \vec{\nu}|_{\Gamma_\ell} = 0 ; \text{ p.p sur }]0, T[$$

$$(3.6) \quad \vec{r} \cdot \vec{\nu}|_{\Sigma_\ell} = 0$$

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - b(u_\gamma)) \vec{q} \cdot \vec{\nu} - \vec{r} \cdot \vec{\nu} \geq 0 \\ u_\gamma \geq 0 \\ u_\gamma [(1 - b(u_\gamma)) \vec{q} \cdot \vec{\nu} - \vec{r} \cdot \vec{\nu}] = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Sigma_+$$

$$(3.8) \quad u_\gamma = 0 \text{ sur } \Sigma - \Sigma_\ell - \Sigma_+ = \Sigma_-$$

$$(3.9) \quad \int_{\Omega} \text{div} \vec{q}(t) \cdot v dx = 0 \quad \forall v \in H ; \text{ p.p sur }]0, T[$$

$$(3.10) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{d(u(t))} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(t)}{K_i} s_i dx - \int_{\Omega} P(t) \text{div} \vec{s} dx + \int_{\Gamma_s} P_d \vec{s} \cdot \vec{\nu} d\Gamma = 0 \\ \forall \vec{s} \in \vec{X} ; \vec{s} \cdot \vec{\nu}|_{\Gamma_e \cup \Gamma_\ell} = 0 ; \text{ p.p sur }]0, T[$$

$$(3.11) \quad \vec{q} \cdot \vec{\nu}|_{\Sigma_e} = q_d ; \vec{q} \cdot \vec{\nu}|_{\Sigma_\ell} = 0$$

L'équation (3.4) est obtenue en multipliant l'équation (1.23) par des fonctions test. Il est nécessaire de les choisir suffisamment régulières et d'intégrer par parties car $u(t)$, étant seulement dans $H = L^2(\Omega)$ pour presque tout t , n'est pas assez régulière pour donner un sens fort à $\frac{du}{dt}$ et $\vec{\text{grad}} b(u)$.

L'équation (3.5), (resp. (3.10)) traduit l'égalité (1.21) (resp. (1.22)) que l'on a multipliée par des fonctions test et où l'on a intégré par parties.

Enfin la condition (3.7) n'est qu'une réécriture de la condition unilatérale (1.36), compte tenu de (1.28).

L'étude théorique de la formulation mixte (3.4), ..., (3.11) reste à faire.

Remarque 3.1 :

Introduisons la variété affine :

$$(3.12) \quad \vec{X}^{q_d} = \{ \vec{s} \in \vec{X} \mid \vec{s} \cdot \vec{v} \Big|_{\Gamma_l} = 0, \vec{s} \cdot \vec{v} \Big|_{\Gamma_e} = q_d(t) \}$$

et le lagrangien défini sur $\vec{X} \times H$

$$(3.13) \quad \mathcal{L}(\vec{s}, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{d(u(t))} \sum_{i=1}^2 \frac{s_i}{K_i} \cdot s_i \, dx + \int_{\Gamma_s} P_d(t) \vec{s} \cdot \vec{v} \, d\Gamma - \int_{\Omega} v \operatorname{div} \vec{s} \, dx$$

$(u(t), P_d(t))$ étant donnés dans $H \times H^{1/2}(\Gamma_s)$, les équations (3.9), ..., (3.11) expriment que $(\vec{q}(t), P(t))$ est la solution du problème :

$$(3.14) \quad \mathcal{L}(\vec{q}(t), P(t)) = \underset{\vec{s} \in \vec{X}^{q_d}}{\operatorname{Min}} \underset{v \in H}{\operatorname{Max}} \mathcal{L}(\vec{s}, v) = \underset{v \in H}{\operatorname{Max}} \underset{\vec{s} \in \vec{X}^{q_d}}{\operatorname{Min}} \mathcal{L}(\vec{s}, v)$$

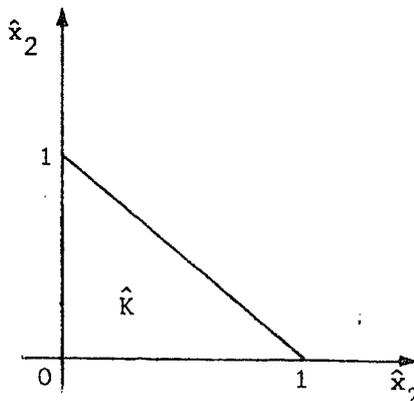
IV - APPROXIMATION DE LA FORMULATION MIXTE

On s'intéresse ici au cas de la dimension 2. On trouvera dans COHEN [1] une étude en dimension 1.

4.1 - Les éléments finis mixtes

On présente ici la méthode des éléments finis mixtes exposée dans RAVIART-THOMAS [1], THOMAS [1]. On renvoie à ces deux ouvrages pour la démonstration des lemmes et propositions de ce paragraphe.

Introduisons d'abord l'espace \vec{X} associé au triangle de référence \hat{K} ci-dessous.



On note :

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_k, \text{ l'espace des polynômes à deux variables de degré } \leq k \\ \hat{S}_k, \text{ l'espace des fonctions définies sur } \partial\hat{K} \text{ dont les restrictions} \\ \text{à chaque côté de } \hat{K} \text{ sont des polynômes de degré } \leq k \\ \lambda_i = \lambda_i(\hat{x}), 1 \geq i \geq 3, \text{ les coordonnées barycentriques d'un point} \\ \hat{x} \text{ relatives aux sommets de } \hat{K}. \end{array} \right.$$

L'espace \vec{X} est choisi de façon à vérifier les propriétés suivantes :

$$(4.2) \quad (P_k)^2 \subset \vec{X}$$

$$(4.3) \quad \dim \vec{X} = (k+1)(k+3)$$

$$(4.4) \quad \forall \vec{s} \in \vec{X} \quad \operatorname{div} \vec{s} \in P_k$$

$$(4.5) \quad \forall \vec{s} \in \vec{X} \quad \vec{s} \cdot \vec{\nu} \in \hat{S}_k \quad (\text{où } \vec{\nu} \text{ note la normale extérieure à } \hat{K})$$

$$(4.6) \quad \forall \vec{s} \in \vec{X} \quad \text{tel que } \operatorname{div} \vec{s} = 0, \text{ alors } \vec{s} \in (P_k)^2$$

Lemme 4.1 :

On suppose que les conditions (4.2), ..., (4.6) sont vérifiées. Alors une fonction $\hat{s} \in \hat{X}$ est déterminée de façon unique par :

(a) les valeurs de $\hat{s} \cdot \vec{\nu}$ en $(k+1)$ points distincts de chaque côté de \hat{K}

(b) les moments d'ordre $k-1$ de \hat{s} , ie

$$\int_{\hat{K}} \hat{s}_i \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} d\hat{x}, \quad i=1, 2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = k-1$$

Pour définir les degrés de liberté (a), il est pratique d'utiliser les points de Gauss Legendre des côtés de \hat{K} .

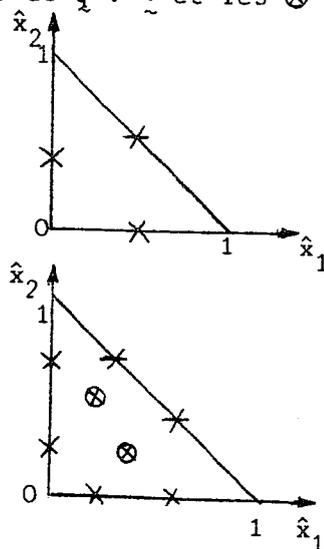
L'espace \vec{X} est, par exemple, l'ensemble des fonctions \vec{s} de la forme :

$$(4.7) \quad \begin{cases} \hat{s}_1(\xi, \eta) = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j \leq k}} a_{ij} \xi^i \eta^j + \xi \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i \xi^{k-i} \eta^i \right) \\ \hat{s}_2(\xi, \eta) = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j \leq k}} b_{ij} \xi^i \eta^j + \eta \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i \xi^{k-i} \eta^i \right) \end{cases}$$

Dans la pratique, on utilise $k=0$ ou $k=1$. Pour ces valeurs de k , l'espace \vec{X} , défini par (4.7), (4.8) est composé des fonctions de la forme ci-dessous. En vis à vis, à gauche, on a représenté les degrés de liberté des fonctions, les \times représentant ceux correspondant aux valeurs de q et les \otimes ceux correspondant aux moments d'ordre $k-1$.

$$(4.9) \quad \boxed{k=0} \quad \vec{s}(\xi, \eta) = \begin{cases} a_0 + \alpha \xi \\ b_0 + \alpha \eta \end{cases}$$

$$(4.10) \quad \boxed{k=1} \quad \vec{s}(\xi, \eta) = \begin{cases} a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta + \xi(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta) \\ b_0 + b_1 \xi + b_2 \eta + \eta(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta) \end{cases}$$



Considérons maintenant un triangle K quelconque dans le plan. Soit une transformation affine inversible

$$(4.11) \quad F_K : \hat{x} \rightarrow F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K ; B_K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) ; b_K \in \mathbb{R}^2$$

que transforme \hat{K} en K .

A toute fonction à valeurs vectorielles \vec{s} définie sur \hat{K} , on associe une fonction \vec{s} définie sur K par :

$$(4.12) \quad \vec{s} = \frac{1}{J_K} B_K \vec{s} \circ F_K^{-1} \quad (\vec{s} = J_K B_K^{-1} \vec{s} \circ F_K)$$

où $J_K = \det B_K$.

A chaque triangle K, on associe l'espace

$$(4.13) \quad \vec{X}_K = \{\vec{s} | \vec{s} \text{ défini par (4.12) avec } \vec{s} \in \vec{X}\}.$$

Le choix de (4.12), (4.13) est justifié par le lemme suivant qui permet de calculer les contributions de chaque triangle par passage au triangle de référence.

Lemme 4.12

En notant $\hat{v} = v \circ F_K$, on a pour toute fonction $\vec{s} \in (H^1(\hat{K}))^2$:

$$\forall \hat{v} \in L^2(\hat{K}) \quad \int_{\hat{K}} \hat{v} \operatorname{div} \vec{s} \, d\hat{x} = \int_K v \operatorname{div} \vec{s} \, dx$$

$$\forall \hat{v} \in L^2(\hat{K}) \quad \int_{\partial \hat{K}} \hat{v} \vec{s} \cdot \vec{\nu} \, d\hat{\gamma} = \int_{\partial K} v \vec{s} \cdot \vec{\nu} \, d\gamma$$

Remarque 4.1 :

De (4.4), (4.5), (4.11), (4.12), (4.13), on déduit que les fonctions de \vec{X}_K ont les propriétés :

- (i) $\operatorname{div} \vec{s}$ est un polynôme de degré $\leq k$
- (ii) la restriction de $\vec{s} \cdot \vec{\nu}$ à chaque côté de K est un polynôme de degré $\leq k$.

On note :

$$(4.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_K, \text{ le diamètre de K} \\ \rho_K, \text{ le rayon du cercle inscrit dans K} \end{array} \right.$$

Considérons une triangulation \mathcal{T}_h de l'ouvert Ω sera dite régulière si :

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{le pas de discrétisation } h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \text{ tend vers zéro ;} \\ \text{il existe une constante } C \text{ telle que :} \\ \forall h, \forall K \in \mathcal{T}_h \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq C \end{array} \right.$$

On supposera, dans la suite, que :

(4.16) Ω est un ouvert polygonal

Considérons une triangulation régulière \mathcal{T}_h de Ω de pas h . Les fonctions à valeurs vectorielles et les fonctions scalaires sont, approchées respectivement dans les espaces.

$$(4.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{X}_h = \{ \vec{s}_h \in \vec{X} \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \vec{s}_h|_K \in \vec{X}_K \} \\ H_h = \{ v_h \in H \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in P_k \} \end{array} \right.$$

Remarque 4.2 :

On constate que :

- (i) les fonctions de H_h sont discontinues le long des arêtes de \mathcal{T}_h
- (ii) les flux, à travers les arêtes de \mathcal{T}_h , des fonctions de \vec{X}_h sont continus
- (iii) $\forall \vec{s}_h \in \vec{X}_h \quad \text{div} \vec{s}_h \in H_h$

Introduisons :

(4.18) $T_h(\Gamma)$, l'espace des traces sur Γ des fonctions de H_h .

On remarquera que les flux à travers Γ des fonctions de \vec{X}_h sont aussi dans $T_h(\Gamma)$.

On munit \vec{X}_h (resp. H_h , $T_h(\Gamma)$) de la norme induite par \vec{X} (resp. H , $L^2(\Gamma)$) qu'on notera $\| \cdot \|_{\vec{X}_h}$ (resp. $\| \cdot \|_{H_h}$, $\| \cdot \|_{T_h(\Gamma)}$).

4.2 - Formulation approchée du problème

On va maintenant donner la formulation approchée des équations (3.4), ..., (3.11).

Les éléments finis ayant été choisis, on a approché le terme de transport de l'équation (3.4) avec le schéma de LESAIN-T-RAVIART [1] qui est un schéma de décentrage adapté aux méthodes d'éléments finis discontinus.

Considérons un triangle K et sa frontière ∂K .

Si \vec{q}_h est la vitesse moyenne de filtration approchée dans X_h^+ , on définit :

$$\Gamma_{h-} = \{x \in \Gamma - \Gamma_d \mid \vec{q}_h \cdot \vec{v} < 0\} \quad \Gamma_{h+} = \{x \in \Gamma - \Gamma_d \mid \vec{q}_h \cdot \vec{v} \geq 0\}$$

où \vec{v} est la normale extérieure à Ω .

$$\forall K \in \mathcal{T}_h \quad \partial K_- = \{x \in \partial K \mid \vec{q}_h \cdot \vec{v}_K < 0\}$$

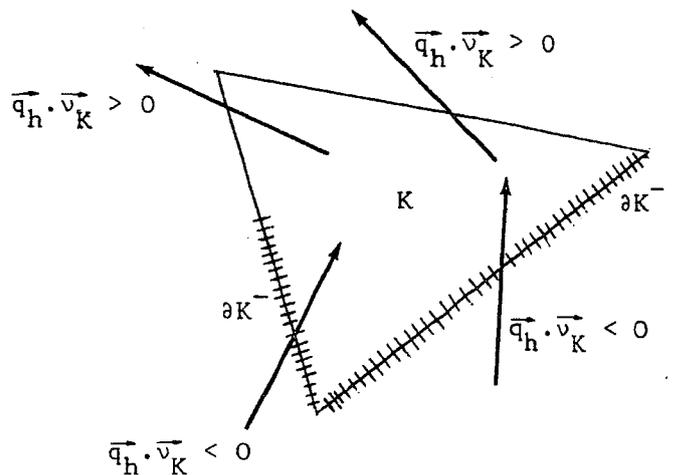
où \vec{v}_K est la normale à ∂K extérieure à K

(4.19)

$$\partial K_+ = \partial K - \partial K_-$$

u_h^- , est, sur les arêtes de \mathcal{T}_h , la trace amont" de u_h relativement au sens de \vec{q}_h :

$$u_h^- = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Gamma_{h-} \cap \partial K_- \\ \text{trace extérieure à K de } u_h & \text{sur } \partial K_- - (\Gamma_{h-} \cap \partial K_-), \\ \text{trace intérieure à K de } u_h & \text{sur } \partial K_+ \end{cases}$$



Ecrivons maintenant la formulation variationnelle approchée des équations (3.4), ..., (3.11) pour un schéma explicite en temps.

L'intervalle $]0, T[$ est découpé en N intervalles de longueur Δt .

Etant données les fonctions,

$$(4.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_d^n \in T_h(\Gamma_e) ; P_d^n \in T_h(\Gamma_s) \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ u_h^0 \in H_h \end{array} \right.$$

et u_h^n étant supposé connu, il s'agit, pour tout n , $0 \leq n \leq N-1$, de

$$\text{trouver } \left\{ \begin{array}{l} (u_h^{n+1}, \bar{r}_h^n) \in H_h \times \bar{X}_h ; u_{\gamma,h}^n \in T_h(\Gamma - \Gamma_\ell) \\ (P_h^n, \bar{q}_h^n) \in H_h \times \bar{X}_h \end{array} \right\} \text{ tels que}$$

$$(4.21) \quad \sum_{K \in \mathcal{U}_h} \left\{ \int_K \phi \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \cdot v_h \, dx + \int_K \operatorname{div} \bar{r}_h^n \cdot v_h \, dx \right. \\ \left. + \int_K \bar{q}_h^n \cdot \operatorname{grad} b(u_h^n) \cdot v_h \, dx - \int_{\partial K_-} \bar{q}_h^n \cdot \vec{\nu}_K (b(u_h^n) - b(u_h^{n-})) \cdot v_h \, d\Gamma \right\} = 0$$

$$\forall v_h \in H_h$$

$$(4.22) \quad \int_\Omega \sum_{i=1}^2 \frac{(\bar{r}_h^n)_i}{\vec{K}_i} (\bar{s}_h)_i \, dx - \int_\Omega \alpha(u_h^n) \operatorname{div} \bar{s}_h \, dx + \int_{\Gamma - \Gamma_\ell} \alpha(u_{\gamma,h}^n) \bar{s}_h \cdot \vec{\nu} \, d\Gamma = 0$$

$$\forall \bar{s}_h \in \bar{X}_h ; \bar{s}_h \cdot \vec{\nu}|_{\Gamma_\ell} = 0$$

$$(4.23) \quad \bar{r}_h^n \cdot \vec{\nu}|_{\Gamma_\ell} = 0$$

$$(4.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} [(1 - b(u_h^{n-})) \bar{q}_h^n - \bar{r}_h^n] \cdot \vec{v} \geq 0 \\ u_{\gamma,h}^n \geq 0 \\ u_{\gamma,h}^n [(1 - b(u_h^{n-})) \bar{q}_h^n \cdot - \bar{r}_h^n \vec{v}] = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_{h+}^n$$

$$(4.25) \quad u_{\gamma,h}^n = 0 \quad \text{sur } \Gamma - \Gamma_\ell - \Gamma_{h+}^n$$

$$(4.26) \quad \int_{\Omega} \text{div } \bar{q}_h^n \cdot v_h \, dx = 0 \quad \forall v_h \in H_h$$

$$(4.27) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{d(u_h^n)} \sum_{i=1}^2 \frac{(\bar{q}_h^n)_i}{\bar{K}_i} (\bar{s}_h)_i \, dx - \int_{\Omega} P_h^n \text{div } \bar{s}_h \, dx + \int_{\Gamma_s} P_d^n \bar{s}_h \cdot \vec{v} \, d\Gamma = 0$$

$$\forall \bar{s}_h \in \bar{X}_h ; \bar{s}_h \cdot \vec{v}|_{\Gamma_e - \Gamma_\ell} = 0$$

$$(4.28) \quad \bar{q}_h^n \cdot \vec{v}|_{\Gamma_e} = q_d^n \quad \bar{q}_h^n \cdot \vec{v}|_{\Gamma_\ell} = 0$$

Remarque 4.3 :

Grâce à (4.26), on a :

$$\forall K \in \mathcal{L}_h \quad \int_K \bar{q}_h^n \cdot \vec{\text{grad}} b(u_h^n) v_h \, dx = \int_K b(u_h^n) \bar{q}_h^n \cdot \vec{\text{grad}} v_h \, dx + \int_{\partial K} \bar{q}_h^n \cdot \vec{\nu}_K b(u_h^n) \cdot v_h \, d\Gamma$$

L'équation (4.21) peut donc encore s'écrire :

$$(4.29) \quad \sum_{K \in \mathcal{L}_h} \left\{ \int_K \phi \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \cdot v_h \, dx + \int_K \text{div } \bar{r}_h^n \cdot v_h \, dx \right. \\ \left. - \int_K b(u_h^n) \bar{q}_h^n \cdot \vec{\text{grad}} v_h \, dx + \int_{\partial K} \bar{q}_h^n \cdot \vec{\nu}_K b(u_h^{n-}) v_h \, d\Gamma \right\} = 0$$

$$\forall v_h \in H_h$$

La proposition suivante exprime le caractère conservatif du schéma.

Proposition 4.1 :

Les fonctions \bar{u}_h^n , \bar{r}_h^n , \bar{q}_h^n définies par les équations (4.21), ..., (4.28) vérifient, pour tout n , $0 \leq n \leq N-1$:

$$(4.30) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad \int_{\partial K} \bar{q}_h^n \cdot \bar{v}_K d\Gamma = 0$$

$$(4.31) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad \int_K \phi(u_h^{n+1} - u_h^n) dx + \Delta t \int_{\partial K} [(1+b(u_h^{n-})) \bar{q}_h^n \cdot \bar{v}_K + \bar{r}_h^n \cdot \bar{v}_K] d\Gamma = 0$$

L'égalité (4.30) exprime la conservation, maille par maille, de la quantité globale de fluide.

L'égalité (4.31) suggère d'approcher les vitesses de filtration de chaque fluide de la façon suivante :

$$(4.32) \quad \begin{cases} ((1+b(u))\vec{q} + \vec{r})(n\Delta t) \approx (1+b(u_h^{n-}))\bar{q}_h^n + \bar{r}_h^n \\ ((1-b(u))\vec{q} - \vec{r})(n\Delta t) \approx ((1-b_h^{n-}))\bar{q}_h^n - \bar{r}_h^n \end{cases}$$

L'égalité (4.31) signifie alors que la variation de la quantité de fluide 1 au cours du temps Δt et dans une maille est égale à la différence entre les quantités de fluide 1 entrée dans K et sortie de K pendant le même temps.

Elle exprime donc la conservation, maille par maille, de la quantité de fluide 1 (et aussi de fluide 2 puisque la quantité globale est conservée).

Les vitesses de filtration étant approchées comme en (4.32), on comprend pourquoi la condition unilatérale (3.7) est approchée par (4.24).

Démonstration de la proposition 4.1 :

L'égalité (4.26) implique, en choisissant $v_h = 1_K$, la fonction caractéristique du triangle K :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h \quad \int_K \operatorname{div} q_h^n dx = 0$$

d'où l'égalité (4.30) en appliquant la formule de Stokes.

D'autre part, on utilise la remarque 4.3 et on prend $v_h = 1_K$ dans (4.29). Puis on intègre par parties le terme en $\text{div } r_h^n$. On obtient :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h \quad \int_K \phi \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} dx + \int_{\partial K} \bar{r}_h^n \cdot \vec{\nu} d\Gamma + \int_{\partial K} \bar{q}_h^n \cdot \vec{\nu} b(u_h^{n-}) d\Gamma = 0$$

ce qui équivaut à (4.31).

Remarque 4.4 :

On fait ici une remarque analogue à la remarque 3.1 pour les équations continues.

Introduisons la variété affine :

$$(4.33) \quad \bar{X}_h^{q_d^n} = \{ \bar{s}_h \in \bar{X}_h \mid \bar{s}_h \cdot \vec{\nu} |_{\Gamma_\ell} = 0 \ ; \ \bar{s}_h \cdot \vec{\nu} |_{\Gamma_e} = q_d^n \}$$

et le lagrangien défini sur $\bar{X}_h \times H_h$.

$$(4.34) \quad \mathcal{L}_h(\bar{s}_h, v_h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{d(u_h^n)} \sum_{i=1}^2 \frac{s_{h,i}}{K_i} s_{h,i} dx + \int_{\Gamma_s} P_d^n \bar{s}_h \cdot \vec{\nu} d\Gamma - \int_{\Omega} v_h \text{div } \bar{s}_h dx$$

(u_h^n, P_d^n) étant donnés dans $H_h \times T_h(\Gamma_s)$, les équations (4.26), ..., (4.28) expriment que (q_h^n, P_h^n) est la solution du problème

$$(4.35) \quad \mathcal{L}_h(q_h^n, P_h^n) = \underset{\bar{s}_h \in \bar{X}_h^{q_d^n}}{\text{Min}} \underset{v_h \in H_h}{\text{Max}} \mathcal{L}_h(\bar{s}_h, v_h) = \underset{v_h \in H_h}{\text{Max}} \underset{\bar{s}_h \in \bar{X}_h^{q_d^n}}{\text{Min}} \mathcal{L}_h(\bar{s}_h, v_h)$$

Ainsi on peut envisager de résoudre les équations (4.26), ..., (4.28) à l'aide d'un algorithme de recherche de point selle.

Remarque 4.5 :

L'étude de la convergence de la solution $(u_h, \bar{r}_h ; u_{\gamma,h} ; P_h, \bar{q}_h)$ des équations (4.21), ..., (4.28) vers la solution u des équations (3.4), ..., (3.11) n'est pas faite.

Cependant, dans JAFFRE [1], on a appliqué la méthode utilisée ici à une équation du type diffusion-convection linéaire stationnaire, démontré sa convergence et calculé des estimations de l'erreur d'approximation. Cette étude montre qu'on peut prévoir en général pour les équations en saturations (4.21), (4.22) une erreur en $O(h^k)$ sur S et \vec{r} .

Mais, dans RAVIART-THOMAS [1], l'étude des équations en pression (4.26), (4.27), donne une estimation en $O(h^{k+1})$ de l'erreur d'approximation sur P et \vec{q} .

Ces résultats théoriques suggèrent donc que, si l'on prend des éléments finis de degré k pour l'équation en pression, on a intérêt à prendre des éléments finis de degré $k+1$ pour l'équation en saturation.

Remarque 4.6 :

L'étude faite dans JAFFRE [1] ayant estimé une erreur en $O(h^k)$ pour les équations en saturation, on ne peut en déduire la convergence de l'approximation de degré 0. Mais, en dimension 1, l'approximation de degré 0, moyennant une formule d'intégration, peut être interprétée comme une méthode de différences finies décentrée d'ordre 1 (cf. JAFFRE [1]). Ceci suggère qu'il en est de même en dimension 2 et que la méthode est encore convergente avec les éléments finis de degré 0 quand on utilise des maillages réguliers. Les résultats numériques présentés au chapitre 5 le confirmeront.

4.3 - Résolution numérique

Décrivons l'algorithme de résolution des équations (4.21), ..., (4.28).

u_h^n étant donné, on effectue les étapes suivantes :

Etape 1 : Calcul de (p_h^n, \vec{q}_h^n) en résolvant les équations (4.26), ..., (4.28).

Etape 2 : Calcul de $(\vec{r}_h^n, u_{\gamma,h}^n)$ en résolvant les équations (4.22), ..., (4.25).

Etape 3 : Calcul de u_h^{n+1} en résolvant l'équation (4.21).

Pour effectuer l'étape 1, il est pratique d'utiliser la remarque 4.4. Cependant il faut noter que si le problème (4.35) admet une solution unique, l'algorithme d'Uzawa (cf. EKELAND - TEMAM [1]), appliqué à la résolution de ce problème, converge mal car le lagrangien \mathcal{L}_h ne vérifie pas :

$$(4.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \vec{s}_h} (\vec{s}_h, v_h) - \frac{\mathcal{L}_h}{\vec{s}_h} (\vec{t}_h, v_h), \vec{s}_h - \vec{t}_h \geq C |\vec{s}_h - \vec{t}_h|_{X_h}^2 \\ \forall \vec{s}_h, \vec{t}_h \in X_h^{\vec{q}_d^n} \end{array} \right.$$

où C est une constante positive indépendante de h

Pour résoudre cette difficulté, on utilise un lagrangien augmenté (cf. HESTENES [1], FORTIN-GLOWINSKI-THOMASSET [1]).

$$(4.37) \quad \mathcal{L}_{R,h} (\vec{s}_h, v_h) = \mathcal{L}_h (\vec{s}_h, v_h) + \frac{R}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{div} \vec{s}_h|_{H_h}^2 dx$$

On vérifie aisément que le problème

$$(4.38) \quad \mathcal{L}_{R,h} (\vec{q}_h^n, P_h^n) = \underset{\substack{\vec{s}_h \in X_h \\ \vec{q}_d^n}}{\operatorname{Min}} \operatorname{Max}_{v_h \in H_h} \mathcal{L}_{R,h} (\vec{s}_h, v_h) = \\ \operatorname{Max}_{v_h \in H_h} \underset{\substack{\vec{s}_h \in X_h \\ \vec{q}_d^n}}{\operatorname{Min}} \mathcal{L}_{R,h} (\vec{s}_h, v_h)$$

a la même solution que le problème (4.35) (puisque elle vérifie $\operatorname{div} \vec{q}_h^n = 0$) et que le lagrangien $\mathcal{L}_{R,h}$ vérifie une propriété du type (4.36).

On peut alors appliquer l'algorithme d'Uzawa à la recherche de la solution du problème (4.38). Il s'écrit :

$$(4.39) \quad (P_h^n)^0 \text{ étant donné arbitrairement dans } H_h$$

$(P_h^n)^m$ étant connu, on détermine $(\vec{q}_h^n)^m$ par :

$$(4.40) \quad \mathcal{L}_{R,h} ((\vec{q}_h^n)^m, (P_h^n)^m) = \underset{\substack{\vec{s}_h \in X_h \\ \vec{q}_d^n}}{\operatorname{Min}} \mathcal{L}_{R,h} (\vec{s}_h, (P_h^n)^m)$$

On calcule $(P_h^n)^{m+1}$ par :

$$(4.41) \quad (P_h^n)^{m+1} = (P_h^n)^m - \rho_m \operatorname{div}(\vec{q}_h^n)^m$$

où $\rho_m > 0$ est à déterminer.

Mais (4.40) équivaut à :

$$(4.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}_{R,h}}{\partial \vec{s}_h} ((\vec{q}_h^n)^m, (P_h^n)^m) \cdot \vec{s}_h = 0 \quad \forall \vec{s}_h \in X_h^0 \\ (\vec{q}_h^n)^m \in X_h^{\vec{q}_d^n} \end{array} \right.$$

ce qui s'écrit encore :

$$(4.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{1}{d(u_h^n)} \sum_{i=1}^2 \frac{q_{h,i}^{n,m}}{K_i} s_i dx + R \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{q}_h^n)^m \operatorname{div} \vec{s}_h dx = \\ \int_{\Omega} (P_h^n)^m \operatorname{div} \vec{s}_h dx - \int_{\Gamma_s} P_d^n \vec{s}_h \cdot \vec{\nu} d\Gamma \quad \forall \vec{s}_h \in X_h \quad \vec{s}_h \cdot \vec{\nu}|_{\Gamma_e \cup \Gamma_l} = 0 \\ (\vec{q}_h^n)^m \cdot \vec{\nu}|_{\Gamma_e} = q_d^n \quad ; \quad (\vec{q}_h^n)^m \cdot \vec{\nu}|_{\Gamma_l} = 0 \end{array} \right.$$

A chaque pas de l'algorithme, le calcul de $(\vec{q}_h^n)^m$ consiste à résoudre le système linéaire (4.42), dont la matrice est symétrique, à diagonal dominante et indépendante du pas de l'algorithme. On la décompose donc par une méthode de Cholevski dès la première itération.

Cependant cette matrice, qui dépend de u_h^n , doit être reconstruite à chaque pas de temps.

Suivant FORTIN-GLOWINSKI-THOMASSET [1] où l'on trouve une discussion complète sur les choix de ρ_m et R , il est pratique de choisir $\rho_m = R$ pour tous les pas de l'algorithme.

Concernant l'étape 2, compte tenu de (4.25), $u_{\gamma,h}^n$ n'est à déterminer que sur Γ_{h+}^n . Si $u_{\gamma,h}^n$ est connu sur Γ_{h+}^n , le calcul de \vec{r}_h^n par (4.22), (4.25) est la résolution d'un système linéaire symétrique dont la matrice, indépendante du pas de temps, peut être décomposée par une méthode de Cholevski.

Pour rendre compte de la condition unilatérale, on utilise la méthode suivante :

(i) On impose à priori la condition :

$$(4.43) \quad (1-b(u_{\gamma,h}^n)) \vec{q}_h^n \cdot \vec{v} - \vec{r}_h^n \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{h-}^n$$

et on calcule $(\vec{r}_h^n, u_{\gamma,h}^n)$ vérifiant (4.22), (4.23), (4.43).

(ii) Aux points où on trouve $u_{\gamma,h}^n > 0$, (4.43) est la bonne condition et on passe à l'étape 3.

(iii) Aux points où on trouve $u_{\gamma,h}^n < 0$, la condition (4.43), qui a été imposée à priori, n'est pas une bonne condition. On refait le calcul de $(\vec{r}_h^n, u_{\gamma,h}^n)$ en remplaçant en ces points la condition (4.43) par $u_{\gamma,h}^n = 0$ avant de passer à l'étape 3.

Concernant l'étape 3, le calcul de u_h^{n+1} par (4.21) revient à la résolution d'un système linéaire symétrique dont la matrice est bloc diagonale et indépendante du pas de temps.

V - RESULTATS NUMERIQUES

5.1 - Introduction

Dans tous les essais numériques, on a utilisé des éléments finis de degré 0 pour les équations en pression-débit (4.26), ..., (4.28).

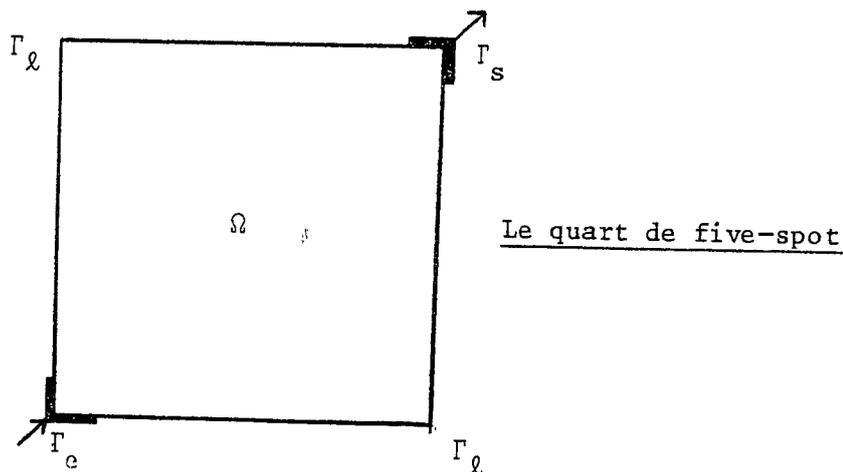
Contrairement aux paragraphes précédents, dorénavant, le fluide 1 est l'eau et les saturations considérées, S et u , non réduites et réduites, sont des saturations en eau.

Elles ont été approchées par des éléments finis de degré 0, puis pour tenir compte de la remarque 4.5, par des éléments finis de degré 1 afin de comparer les résultats.

Sauf mention contraire, tous les calculs de coefficients des équations ont été effectués avec des formules d'intégration qui seraient exactes pour des fonctions α , b et d linéaires.

Voici d'abord quelques données physiques communes à tous les essais numériques.

Le domaine Ω est un carré de longueur de côté 210m, le puits d'injection se trouvant dans le coin Sud-Ouest et le puits de production dans le coin Nord-Est (quart de five spot).



De plus on a choisi :

$$(5.1) \quad K_1 = K_2 = 100 \times 5 \text{ millidarcy} \times \text{mètre} \quad \phi = 0.3 \times 5 \text{ mètre}$$

\vec{K} et ϕ sont maintenant la perméabilité absolue et la porosité multipliées par l'épaisseur, afin d'introduire une épaisseur de 5 mètres au gisement.

Le débit d'injection et la pression au puits d'exploitation sont :

$$(5.2) \quad 2q_d = 40 \text{ m}^3/\text{jour} \quad P_d = 100 \text{ Bar}$$

Considérant les viscosités et les perméabilités relatives, on a utilisé deux jeux de données, l'un scolaire, appelé "perméabilités en croix", et l'autre réaliste.

Le premier est le suivant :

$$\mu_1 = \mu_2 = 1.3 \text{ CP} \quad (1\text{CP} = 1 \text{ centipoise} = 10^{-2} \text{ unité CGS})$$

$$(5.3) \quad S_{\min} = 0 \quad S_{\max} = 1$$

$$k_{r_1}(S) = S \quad k_{r_2}(S) = 1-S$$

$$P_c(S) = p(1-S) \text{ où } p \text{ est un nombre variable suivant les essais.}$$

Avec de telles données, on a :

$$a(u) = + \frac{P}{1.3} u(1-u) \quad b(u) = 1-2u \quad d(u) = \frac{1}{2.5}$$

Le terme de transport est linéaire ; les équations en pression-débit ne dépendent pas de la saturation et ne sont donc à résoudre qu'une seule fois, ce qui permet de faire des essais numériques dans un temps de calcul moindre.

Dans ces essais, on a fait varier la diffusion en faisant varier la pente p de la pression capillaire pour en étudier l'effet sur les fronts de saturation.

Le jeu de données réalistes est le suivant :

(5.4) $\left. \begin{array}{l} \mu_1 = 1. \text{CP} \quad \mu_2 = 1.43 \text{ CP} \\ \text{les perméabilités relatives et la pression capillaire sont} \\ \text{représentées sur la figure 5.1.} \end{array} \right\}$

Les fonctions a, b, d correspondant à ce jeu de données réalistes sont représentées sur la figure 5.2.

Ces données correspondent à un rapport de mobilité voisin de 1, mais, comme on le verra dans la suite, elles donnent des fronts raides, la diffusion capillaire étant très faible.

On a déjà pu remarquer dans les données ci-dessus que les ingénieurs du pétrole utilisent un système d'unités spécial qui leur est pratique.

Pour se conformer à ces habitudes dans les résultats numériques présentés, le temps sera exprimé en jour mais aussi en

$$\begin{aligned} \% \text{ du volume de pore injecté} &= \frac{\text{quantité d'eau injectée}}{\text{volume de pore occupable par l'eau injectée}} \\ &= \frac{2q_d \times \text{nombre de jours}}{\text{surface de } \Omega \times \phi \times (S_{\max} - S_{\min})} \end{aligned}$$

On notera VPI cette unité de temps.

Rappelons enfin que, pour gérer la production d'un gisement, il est essentiel d'estimer la date de percée (breakthrough time) qui est le moment où l'eau commence à sortir au puits de production, et d'estimer les courbes de rapport du débit d'eau au débit d'huile à la sortie (WOR) en fonction du temps.

C'est pourquoi ces quantités joueront une place importante dans la présentation des résultats numériques.

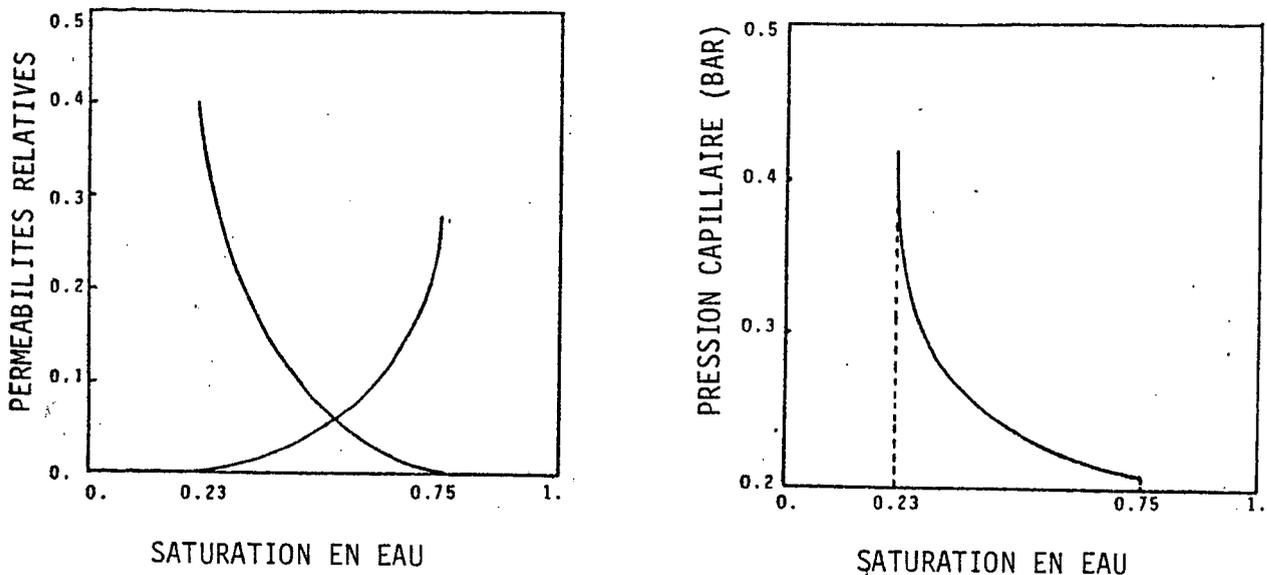


Figure 5.1 : Courbes de perméabilités relatives et de pression capillaire relatives aux données réalistes.

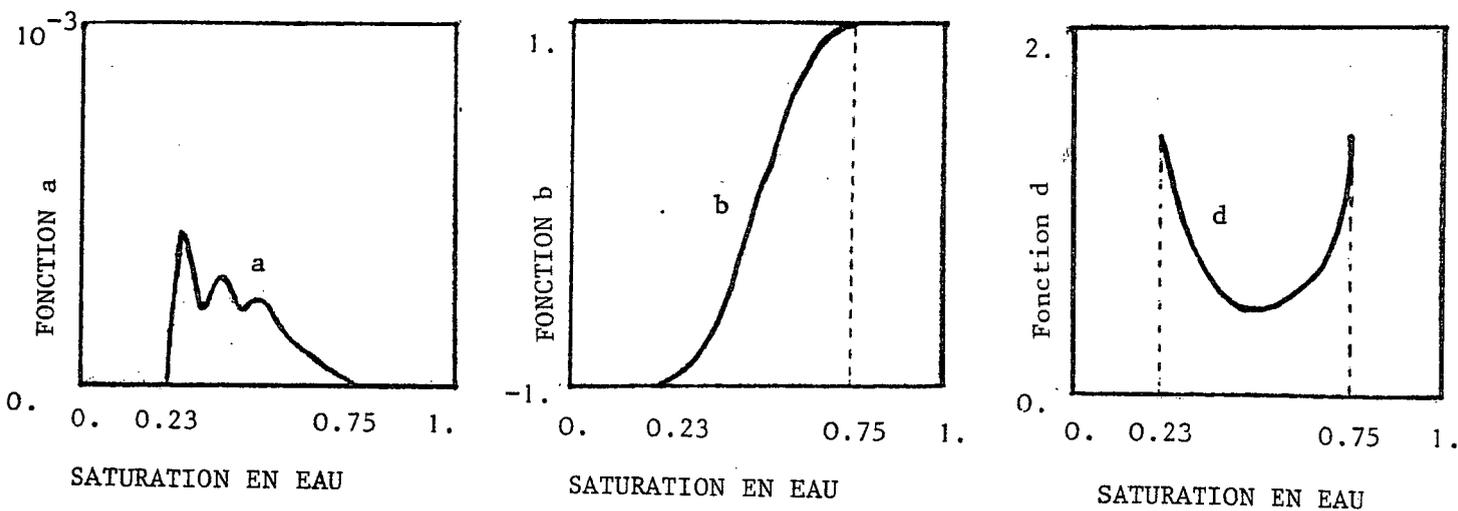


Figure 5.2 : Les fonctions a, b, d correspondant aux données réalistes

5.2 - Eléments finis mixtes de degré 0

Les maillages du carré utilisés sont des maillages à $2 \times 9^2 = 162$ triangles et $2 \times 14^2 = 392$ triangles. Ils sont représentés sur la figure 5.3. Les frontières représentant les puits sont indiquées en traits forts. Les maillages (0.14.a'), (0.14.b') et (0.14.c') ont des puits de taille comparable à ceux des maillages (0.9.a) et (0.9.b) afin de faciliter les comparaisons.

Les fonctions S et P étant constantes par triangle et les fonctions \vec{q} et \vec{r} étant définies par la valeur constante de leur flux à travers les arêtes, le tableau 5.4 donne les nombres de degré de liberté pour chaque fonction et pour les divers maillages.

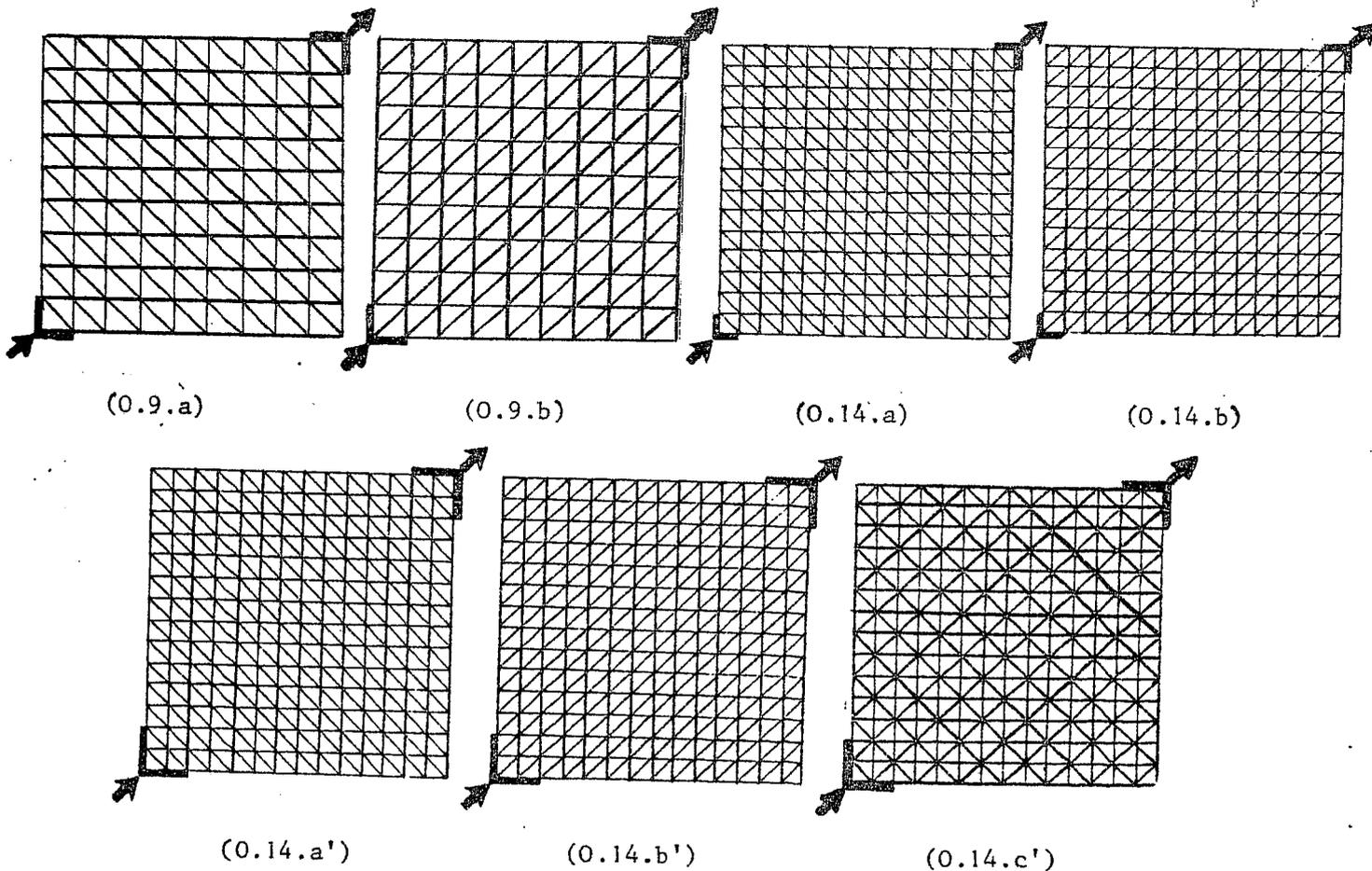


Figure 5.3 : Maillages utilisés avec les éléments finis de degré 0

	S et P	\vec{q} et \vec{r}
maillages (0.9)	162	261
maillages (0.14)	392	616

Tab. 5.4 : Nombre de degrés de liberté pour les divers maillages utilisés

Utilisant les "perméabilités en croix" (cf. §5.1), on a étudié l'influence de la diffusion physique sur les résultats numériques en faisant varier la pente p de la pression capillaire et en utilisant différents maillages.

Sur les figures 5.5 et 5.6 on a représenté la saturation en eau à 600 jours (0.363 VPI) pour $p = 10, 6, 2$, calculée respectivement, avec les maillages (0.9) et (0.14) (chaque densité de hachures correspond à un intervalle de valeurs de la saturation réduite $(i/10, (i+1)/10)$, $i=0, \dots, 9$).

Sur les figures 5.7 et 5.8, sont données les coupes, le long de la diagonale joignant les puits, des saturations calculées à la même date sur les mêmes maillages.

Le tableau 5.9 donne les dates de percée calculées.

Sur ces résultats, on peut faire les constatations suivantes :

- 1 - Quand p (i.e. la diffusion physique) diminue, la largeur des fronts diminue.
- 2 - Les fronts obtenus avec les maillages b sont plus larges que ceux obtenus avec les maillages a et la différence s'accroît quand p diminue (fig. 5.8).

3 - Plus large est le front, plus tôt a lieu la percée et les deux constatations ci-dessus se traduisent en terme de date de percée de la façon suivante : la percée a lieu plus tard quand p diminue et les percées correspondant aux maillages b ont lieu plus tôt. De plus l'écart entre les dates de percées obtenues avec les maillages a et celles obtenues avec les maillages b grandit quand p diminue.

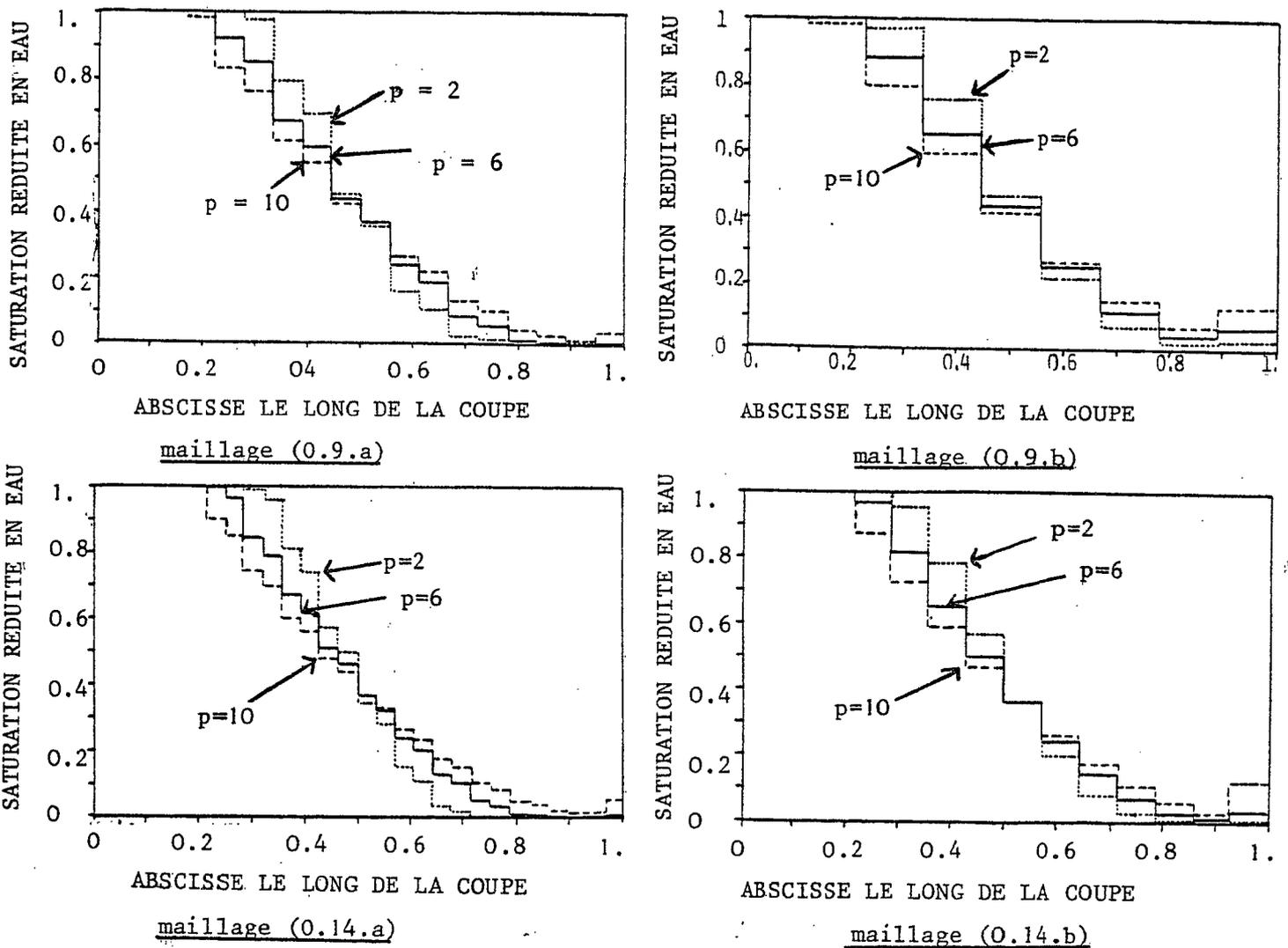


Figure 5.7 : Evolution, quand p varie, des coupes, le long de la diagonale joignant les puits, des saturations à 600 jours, pour divers maillages

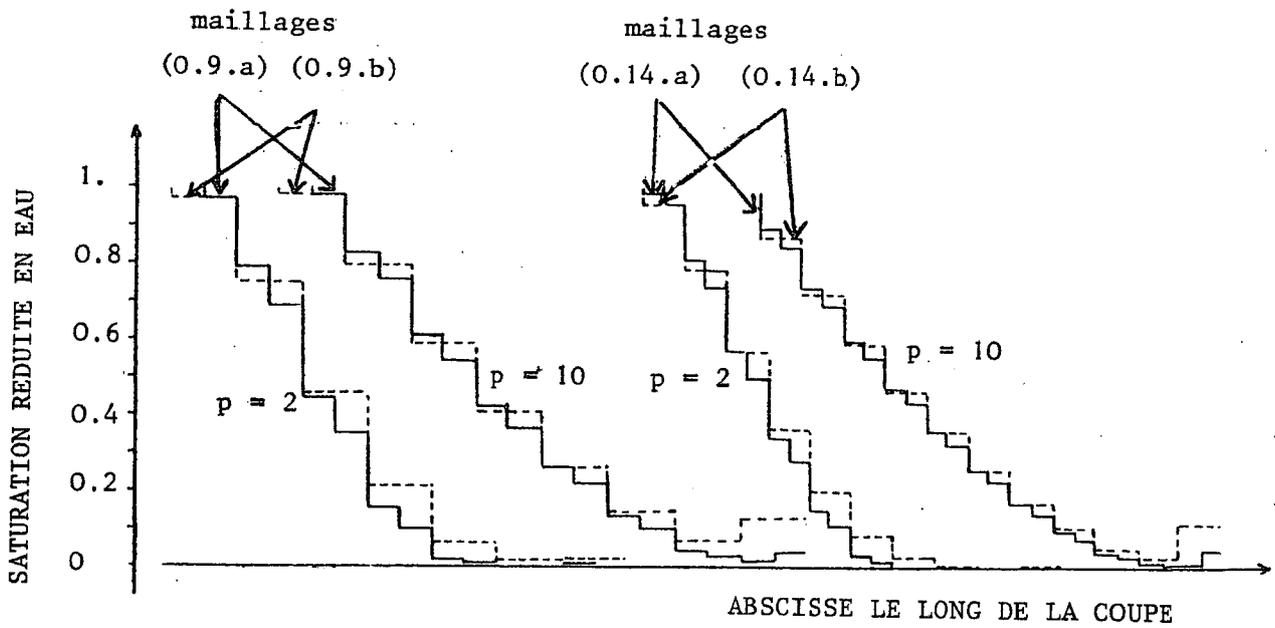


Figure 5.8 : Comparaison des coupes, le long de la diagonale joignant les puits des saturations à 600 jours, calculées avec les maillages (0.a) et (0.b).

	(0.9.a)	(0.9.b)	(0.14.a)	(0.14.b)	(0.14.a')	(0.14.b')
p = 10	.464 VPI 767 jours	.428 VPI 708 jours	.437 VPI 722 jours	.412 VPI 682 jours		
p = 6	.494 VPI 816 jours	.442 VPI 731 jours	.473 VPI 782 jours	.435 VPI 719 jours	.513 VPI 848 jours	.487 VPI 805 jours
p = 2	.534 VPI 883 jours	.479 VPI 792 jours	.526 VPI 870 jours	.454 VPI 750 jours	.549 VPI 908 jours	

Tableau 5.9 : Dates de percée calculées pour différents maillages et diverses valeurs de p.

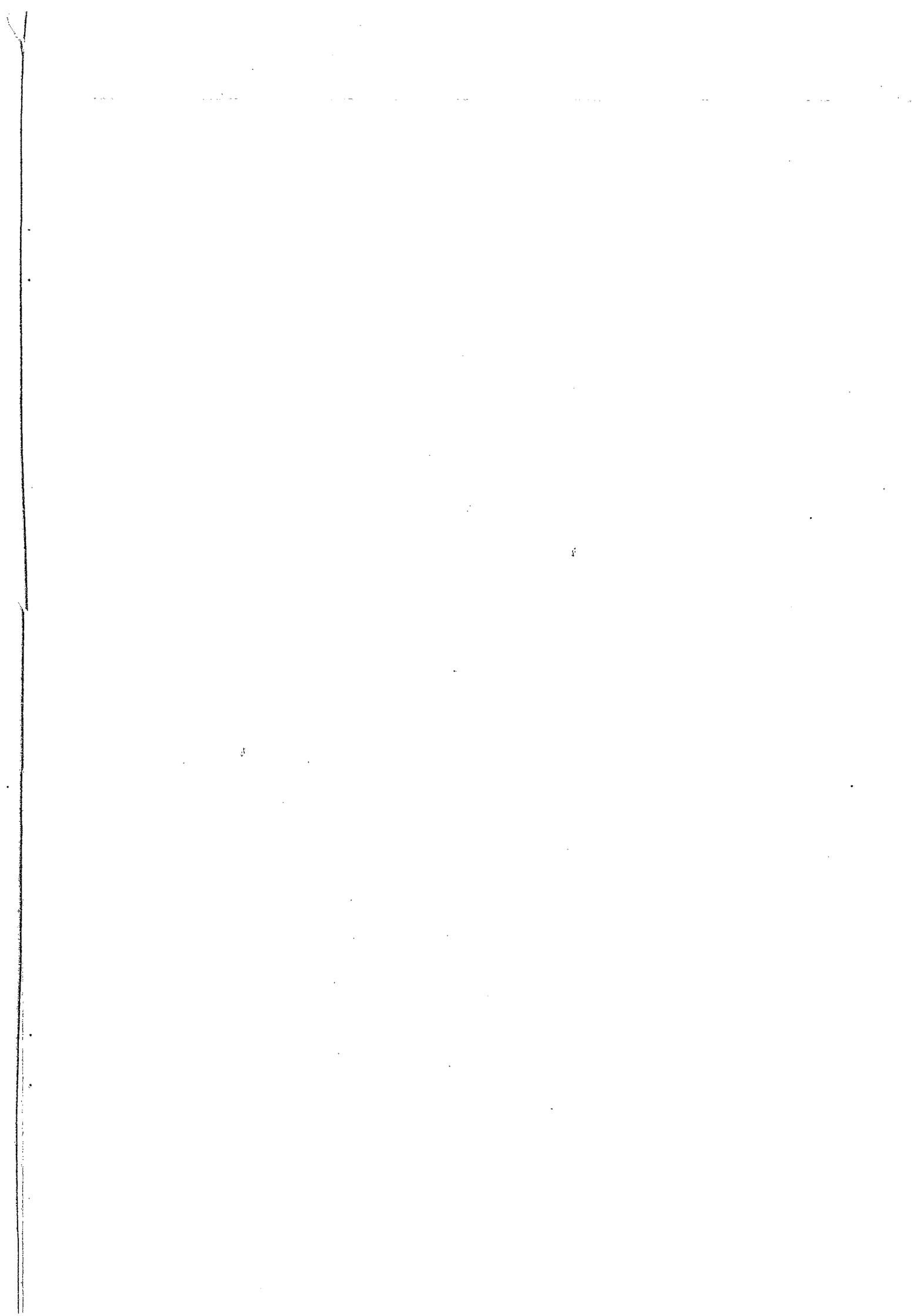
L'effet dû aux maillages s'interprète comme suit : la diffusion numérique est plus importante pour les maillages b que pour les maillages a et cet effet se fait d'autant plus sentir que la diffusion physique est faible.

Notons qu'on ne peut comparer sans précautions les résultats obtenus avec les maillages (0.9) et ceux obtenus avec les maillages (0.14) car la taille des puits n'est pas la même.

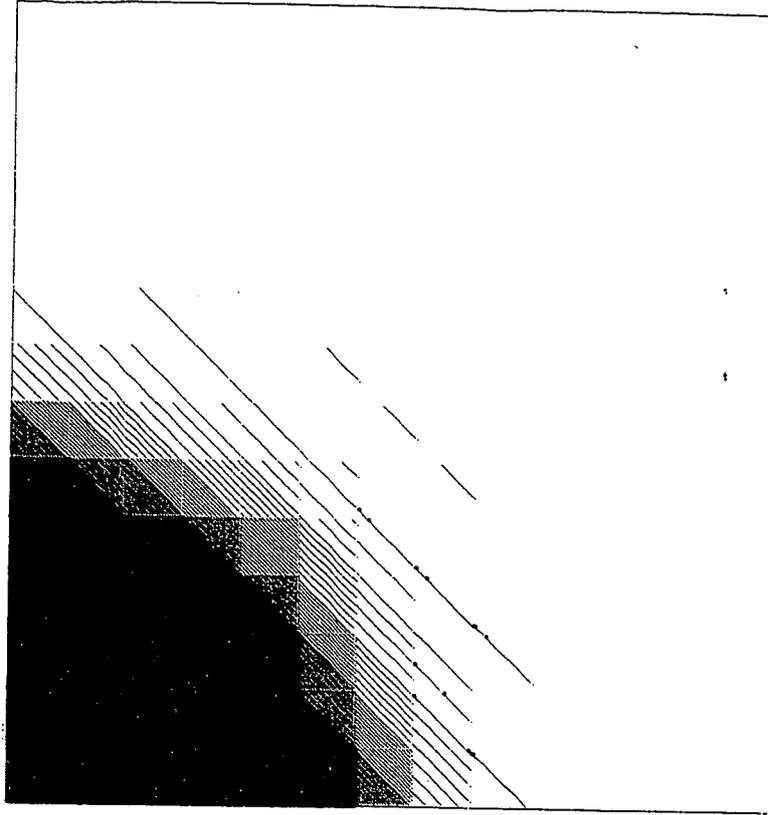
Pour étudier l'effet de la taille des puits, on a fait deux calculs avec respectivement les maillages (0.14.a') et (0.14.b'). Le tableau 5.9 montre qu'alors les dates de percée sont plus tardives qu'avec les maillages (0.14.a) et (0.14.b). Ceci s'explique non pas par des différences significatives sur les fronts mais par le fait que, plus la frontière de sortie est grande, plus il faut d'eau pour la saturer et plus tard a lieu la percée.

A titre indicatif, on montre sur les figures 5.10, ..., 5.14 des résultats numériques complets d'un calcul effectué avec les "perméabilités en croix" ($p=2$) sur le maillage (0.14.a').

On notera sur les figures (5.10) et (5.11) l'accumulation d'eau sur la frontière de production avant la percée. Cette accumulation d'eau est due à la condition de percée (4.24) empêchant l'eau de sortir avant que la saturation en eau ne soit maximum sur le bord. Cette accumulation est d'autant plus faible que la diffusion physique est faible (voir plus loin les résultats obtenus avec les données réalistes où la diffusion physique est beaucoup plus faible).



400 JOURS (0.242 VPI)



PERCEE A 908 JOURS (0.549 VPI)

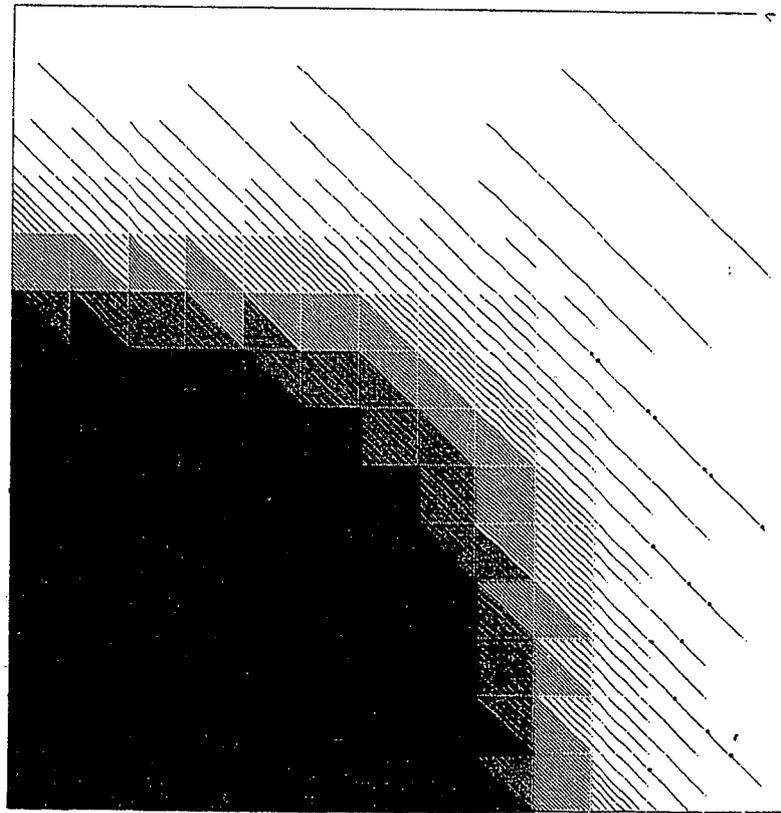
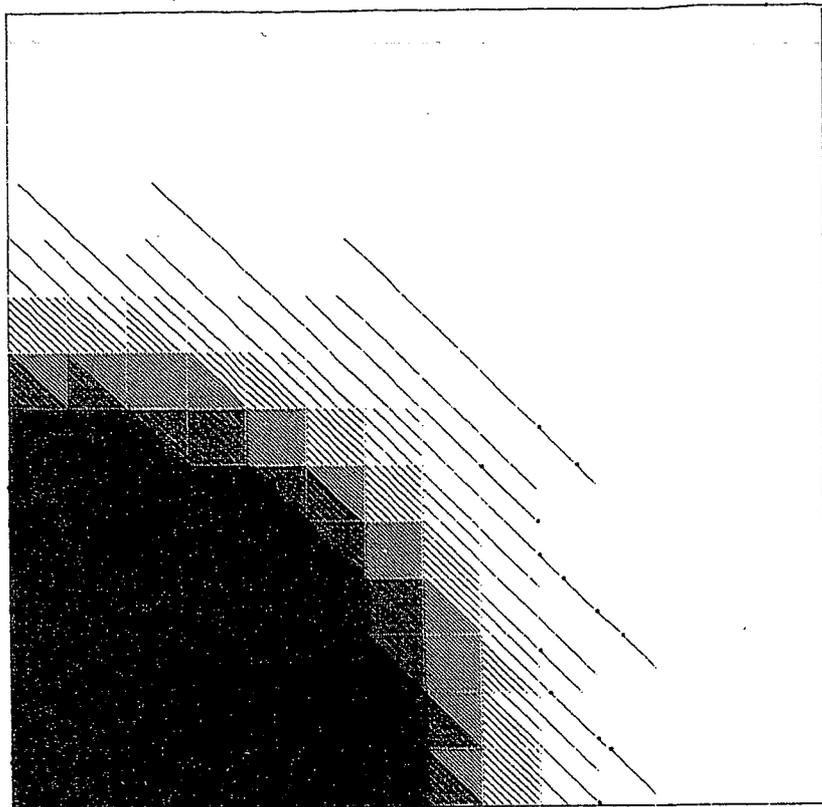
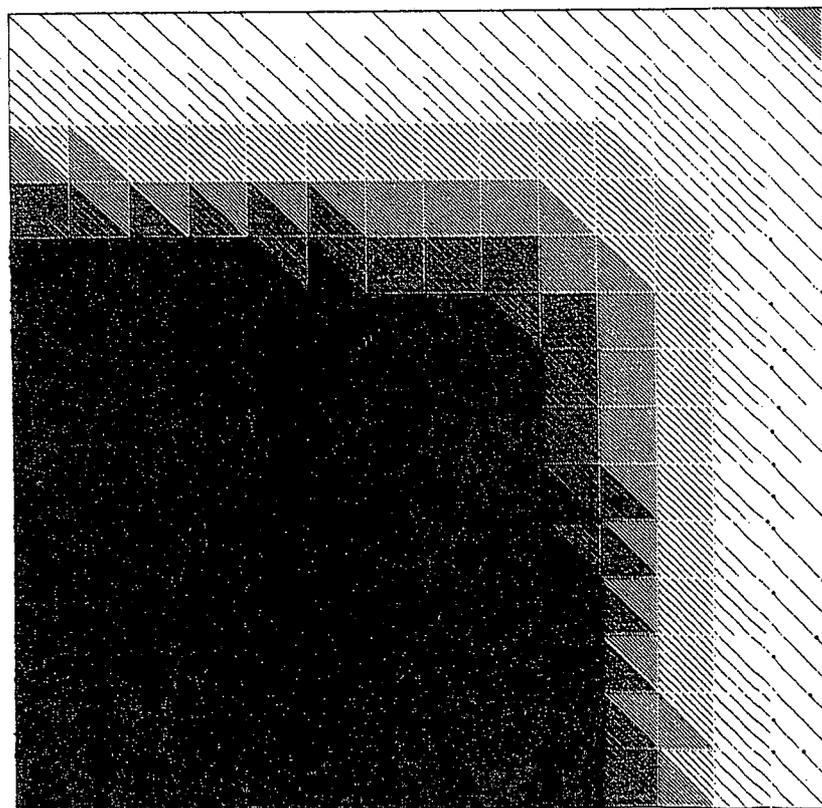


FIGURE 5.10 : SATURATIONS CALCULEES

600 JOURS (0.363 VPI)



1400 JOURS (0.847 VPI)



A DIVERS INSTANTS SUR LE MAILLAGE (0.14.A') POUR $p = 2$

("PERMEABILITES EN CROIX")

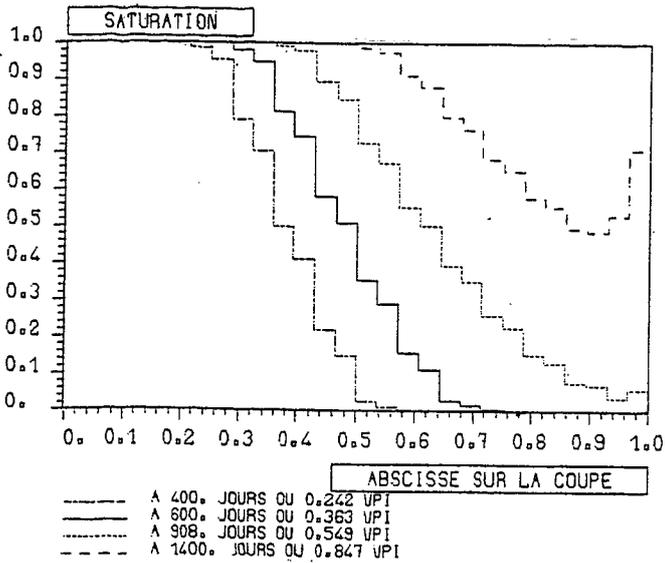


Figure 5.11 : Coupes des saturations le long de la diagonale joignant les puits (maillage (0.14.a'), p = 2)

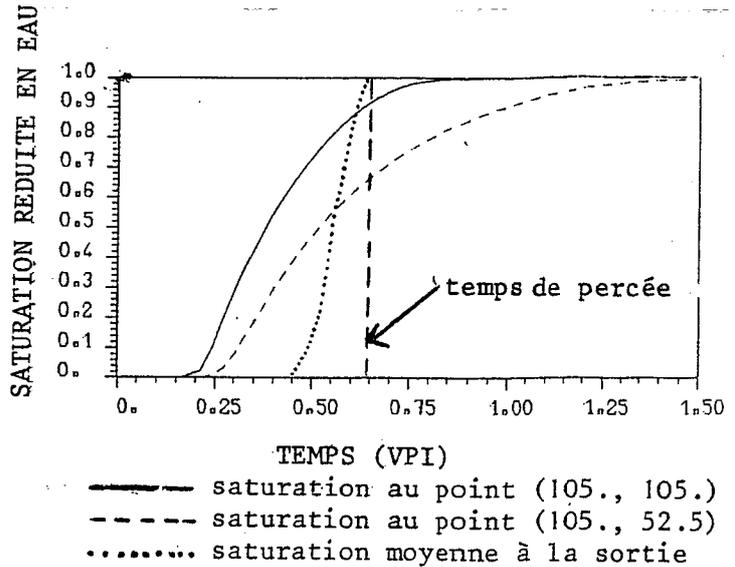


Figure 5.12 : Evolution des saturations en divers points au cours du temps (maillage (0.14.a'), p = 2)

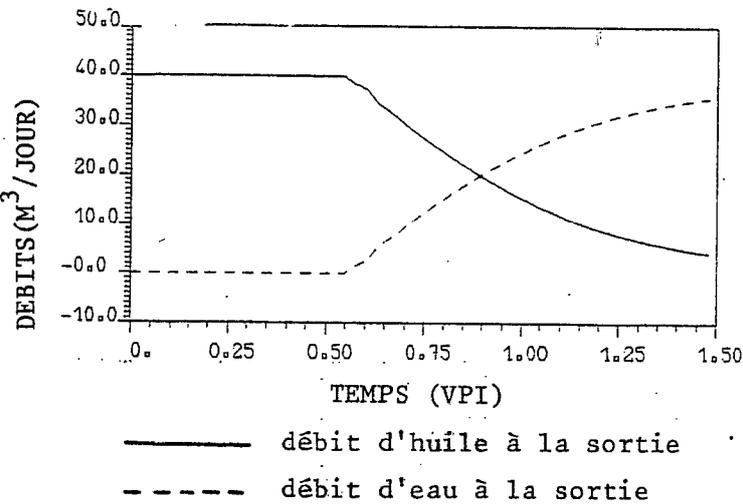


Figure 5.13 : Evolution des débits au cours du temps (maillage (0.14.a') p = 2)

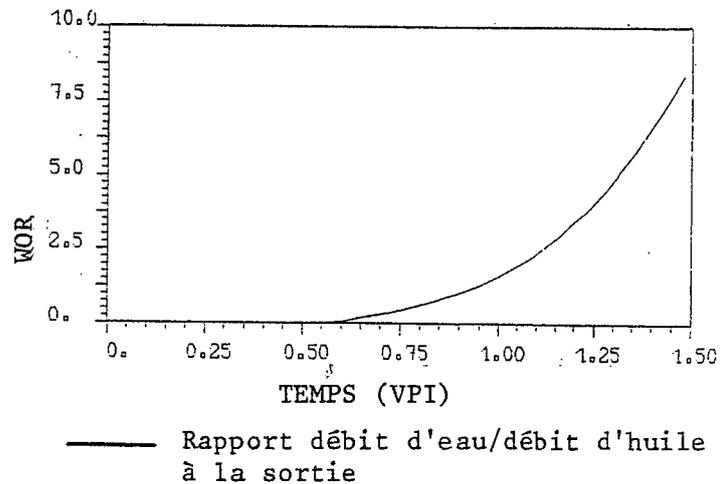


Figure 5.14 : Evolution du WOR au cours du temps (maillage (0.14.a'), p = 2)

Venons en maintenant aux données réalistes.

Sur les figures (5.15), (5.16), (5.17), (5.18), (5.19) on présente une simulation numérique complète obtenue avec le maillage (0.14.c').

On constate qu'on a affaire à des fronts raides. Pour étudier l'influence du choix du maillage on a aussi effectué les calculs avec les maillages (0.14.a') et (0.14.b'). La comparaison est faite grâce aux figures (5.20), (5.21) et au tableau (5.22).

Les résultats obtenus avec le maillage (0.14.c') sont intermédiaires entre ceux obtenus avec les maillages (0.14.a') et (0.14.b'), ce qui était prévisible. Cependant les écarts sont peu importants (10 % sur les dates de percée).

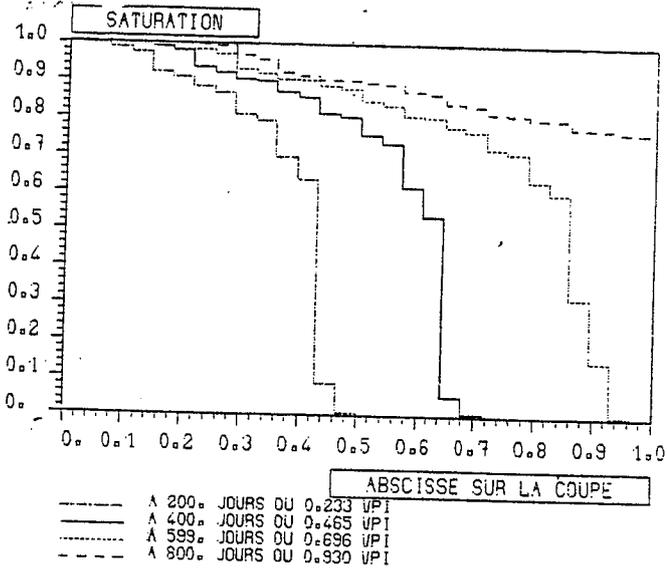


Figure 5.16 : Coupes des saturations le long de la diagonale joignant les puits (maillage (0.14.c'), données réalistes)

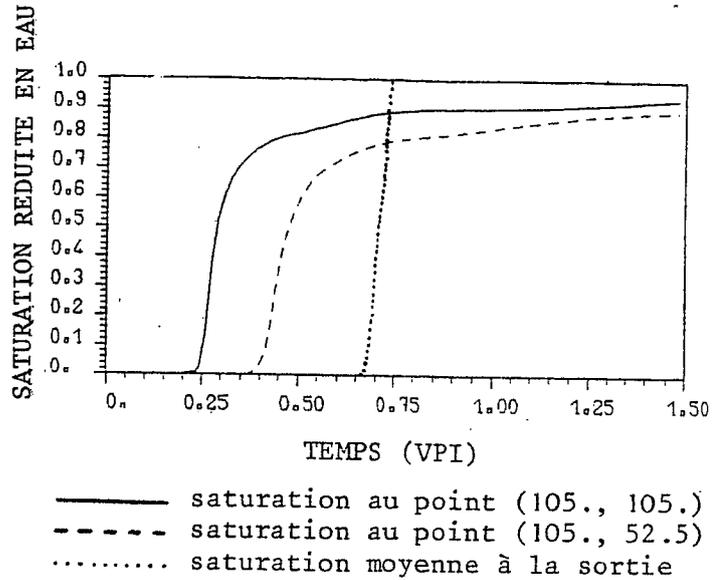


Figure 5.17 : Evolution des saturations en divers points au cours du temps (maillage (0.14.c'), données réalistes)

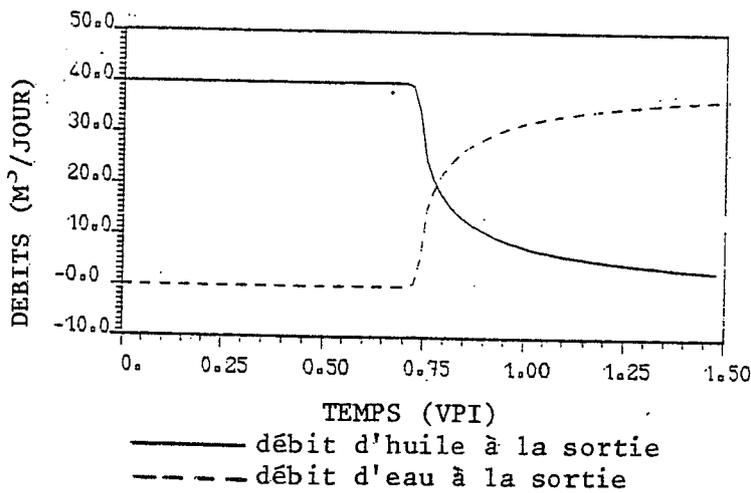


Figure 5.18 : Evolution des débits au cours du temps (maillage (0.14.c'), données réalistes)

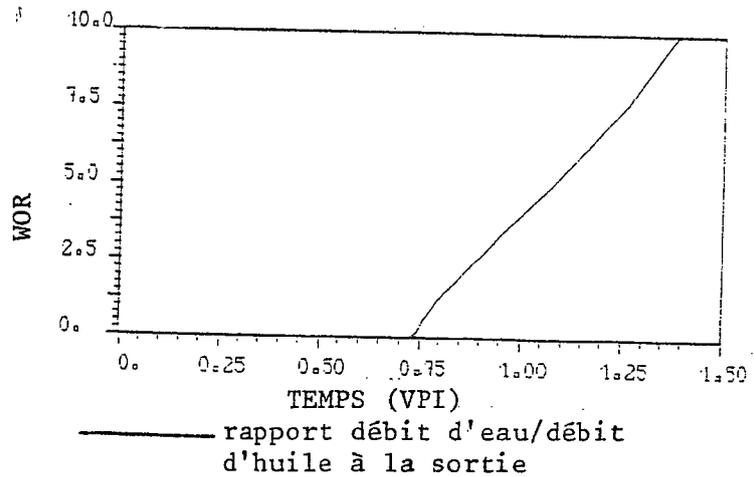


Figure 5.19 : Comparaison des WOR au cours du temps (maillage (0.14.c'), données réalistes)

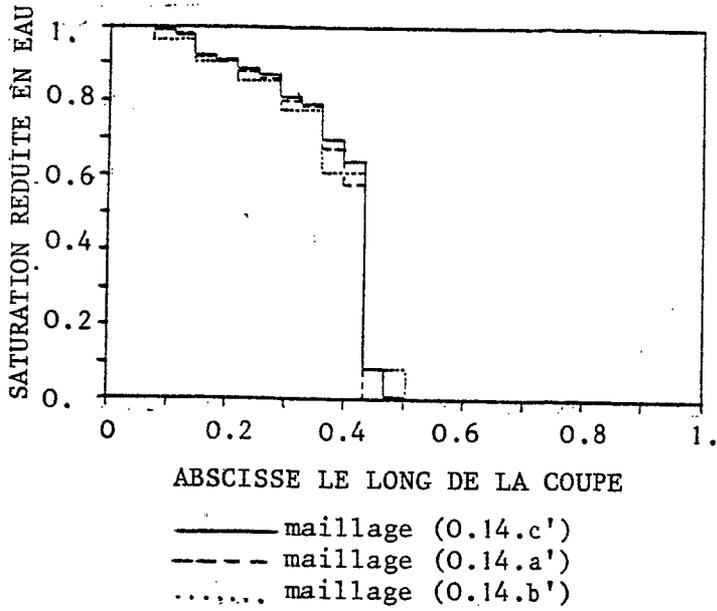


Figure 5.20 : Comparaison des coupes, le long de la diagonale joignant les puits, des saturations à 200 jours pour différents maillages (données réalistes)

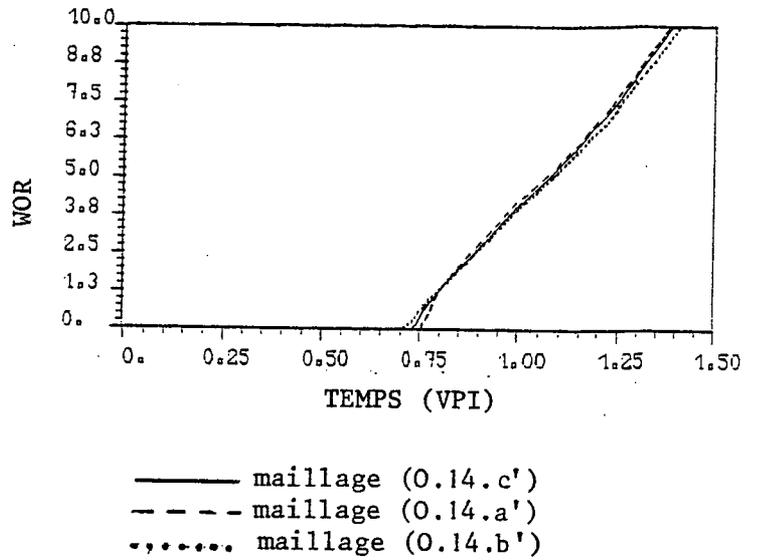


Figure 5.21 : Comparaison des WOR pour différents maillages (données réalistes)

Maillages	(0.14.a')	(0.14.c')	(0.14.b')
Dates de percée	628 jours .730 VPI	599 jours .696 VPI	560 jours .651 VPI

Tableau 5.22 : Comparaison des dates de percée pour différents maillages (données réalistes)

Donnons maintenant quelques renseignements sur le temps de calcul concernant les simulations effectuées avec les données réalistes sur les maillages (0.14).

Par itération en temps, le temps de calcul est de 13 secondes pour un ordinateur CII IRIS 80.

Il a fallu environ 1034 pas de temps pour atteindre le temps 1.5 VPI.

Il faut toutefois noter que ce nombre d'itérations en temps n'est qu'indicatif, car nous n'avons pas porté notre effort sur la recherche de pas de temps optimaux.

Faisons toutefois les remarques suivantes. Rappelons d'abord que nous utilisons un schéma explicite. En effet, à cause de sa difficulté due aux nombreuses non-linéarités du problème et à la formulation de la condition de percée, l'étude de schémas implicites ou semi-implicites n'a été menée jusqu'ici qu'en dimension 1 (cf. FORGES [1]).

Avec un schéma explicite, dans une simulation telle que nous avons présentée, les pas de temps optimaux varient de façon importante : quand le problème est particulièrement raide, c'est-à-dire au début de l'injection et au voisinage de la percée, les pas de temps doivent être petits tandis qu'en dehors de ces moments, on peut les agrandir, notamment après la percée.

Dans notre programme, ces variations se font automatiquement à partir de critères empiriques et les pas de temps ont varié de 0.4 jours (6.4×10^{-4} VPI) à 5.8 jours (6.7×10^{-3} VPI), soit un rapport de 1 à 14.

Pour cerner l'effet de la diffusion numérique dans le cas de ces données réalistes, nous avons effectué une simulation sur le maillage (0.14.c') en annulant la pression capillaire. Nous avons ainsi annulé la diffusion physique dans l'équation en saturation et résolu l'équation hyperbolique obtenue (ce qui se fait par la simple introduction de quelques tests dans le programme).

Si la date de percée a un peu varié, 626 jours (.728 VPI) contre 599 jours (.696 VPI), les fronts de saturation et les débits n'ont pratiquement pas varié.

Cela signifie que, dans le cas de ces données réalistes, avec les maillages utilisés, la diffusion numérique due au terme de transport est plus grande que la diffusion physique.

Ceci est confirmé par la comparaison des saturations en amont du front calculée, environ 0.6, et théorique (saturation de Welge) qui est de 0.8, soit nettement supérieure. Le front s'est "affaissé" sous l'effet de la diffusion numérique.

Pour donner une évaluation générale de cette diffusion numérique, nous pouvons caractériser notre schéma numérique de la façon suivante

Bien que ce ne soit pas démontré, mais compte tenu de l'interprétation du schéma que l'on peut faire en dimension 1 (cf. JAFFRE 1), à condition d'utiliser des triangulations régulières, le schéma numérique utilisant les éléments finis mixtes de degré 0 est un schéma monotone positif dont le terme de transport est approché à l'ordre 1, analogue à un schéma différences finies décentré amont. Les solutions numériques obtenues ont donc les mêmes qualités (monotonie et positivité) et mêmes défauts (diffusion numérique importante) que pour ce dernier schéma.

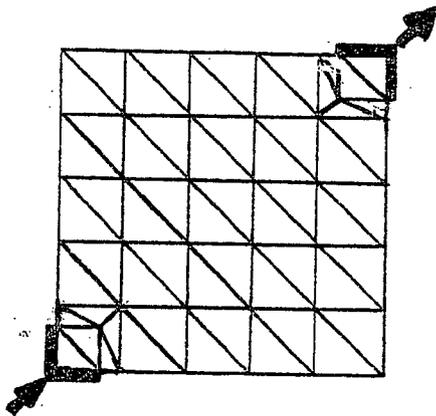
Pour remédier à la trop grande diffusion numérique du schéma, nous avons approché les saturations par des éléments finis mixtes de degré 1.

5.3 - Eléments finis mixtes de degré 1

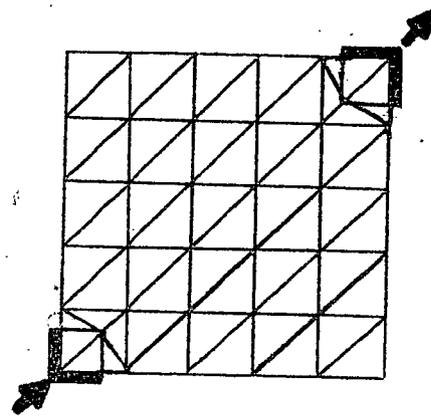
Dans ce paragraphe, les équations en saturation sont résolues avec les éléments de degré 1, mais les équations en pression restent résolues avec les éléments de degré 0.

Rappelons que les saturations sont alors linéaires sur chaque triangle et discontinues d'un triangle à l'autre (3 degrés de liberté par triangle) tandis que les degrés de liberté de \vec{r} sont définies comme en (4.10).

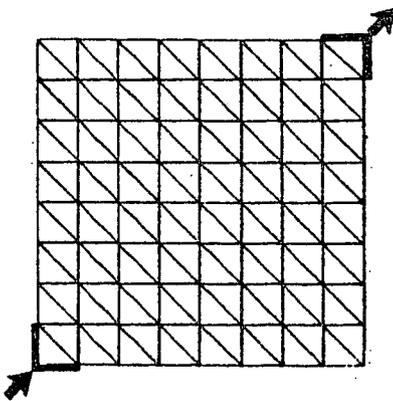
Les maillages utilisés dans les calculs sont représentés sur la figure 5.23 et le tableau 5.24 contient les nombres de degrés de liberté qui leur sont associés.



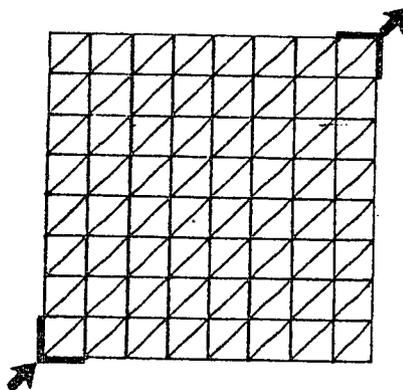
(1.5.a)



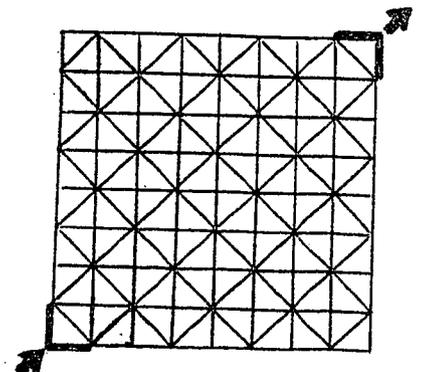
(1.5.b)



(1.8.a)



(1.8.b)



(1.8.c)

Figure 5.23 : maillages utilisés avec les éléments finis de degré 1

	S	\vec{r}	P	\vec{q}
maillage (1.5)	174	314	58	99
(1.8.a) maillages (1.8.b) (1.8.c)	384	672	128	208

Tableau 5.24 : Nombre de degrés de liberté pour les maillages utilisés

Les maillages (1.5) (resp. (1.8)) ont été choisis de façon que, d'une part, les saturations aient sensiblement le même nombre de degré de liberté qu'avec les maillages (0.9) (resp. (0.14)) en degré 0, et, d'autre part, que les maillages (1.5), (1.8), (0.14.a'), (0.14.b') et (0.14.c') aient des puits de tailles semblables.

On a recommencé avec les éléments de degré 1, l'étude faite avec les éléments de degré 0.

Avec les "perméabilisés en croix", on a étudié l'influence de la pente p de la pression capillaire sur les résultats numériques. Sur les figures 5.25 et 5.26, on a représenté la saturation à 600 jours (0.362 VPI) pour $p = 10, 6, 2$, calculée respectivement avec les maillages (1.5) et (1.8). Les lignes d'isosaturation ne sont pas lisses comme à l'habitude car la saturation est approchée par une fonction discontinue d'un triangle à l'autre.

Sur les figures 5.27 et 5.28 sont dessinées les coupes, le long de la diagonale joignant les puits, des saturations à la même date.

Le tableau 5.29 donne les dates de percée calculées.

La figure 5.30 permet de comparer des fronts de saturation à 600 jours, et des WOR, calculés avec des éléments finis de degré 0 et de degré 1, pour $p = 2$. Enfin les figures 5.31, ..., 5.34 montrent une simulation effectuée sur le maillage (1.8.a) avec les mêmes données que celle présentée sur les figures 5.10, ..., 5.14 ($p = 2$) et qui avait été effectuée en utilisant les éléments de degré 0. Les WOR de ces deux simulations sont comparés sur la figure 5.30.

Si, sur les figures 5.25 et 5.26, on constate encore un effet de maillage, la figure 5.28 montre qu'il est en fait très faible et cela est confirmé dans le tableau 5.29 où l'écart des dates de percée obtenues entre les deux maillages (1.a) et (1.b) reste toujours inférieur à 4 %.

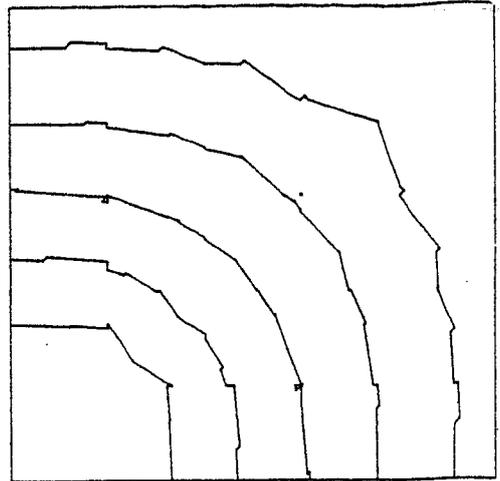
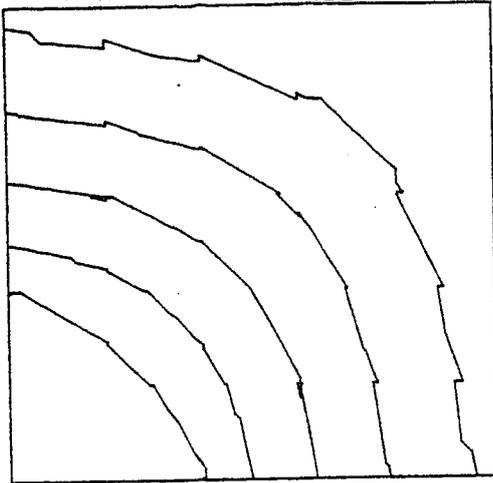
De même, en regardant les figures 5.25 et 5.26, il semble que le passage des maillages (1.5) aux maillages (1.8) s'accompagne de différences numériques notables. En fait, il n'en est rien, comme le montrent les comparaisons de fronts et de WOR effectuées pour $p = 2$ sur la figure 5.30, ainsi que le tableau 5.29 des dates de percée.

Cette stabilité des résultats vis à vis du maillage obtenue avec les éléments finis de degré 1 avait déjà été constatée en dimension 1 (cf. CHAVENT-COHEN [1], COHEN [1]).

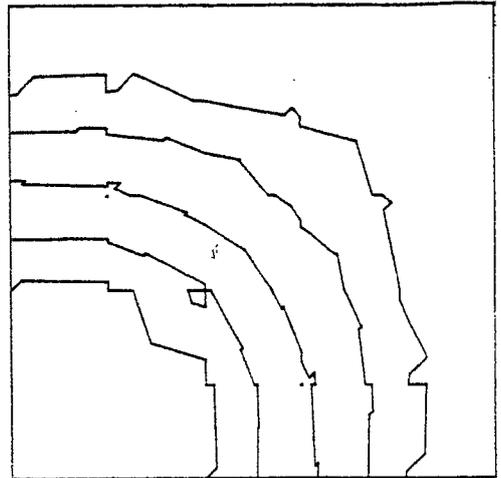
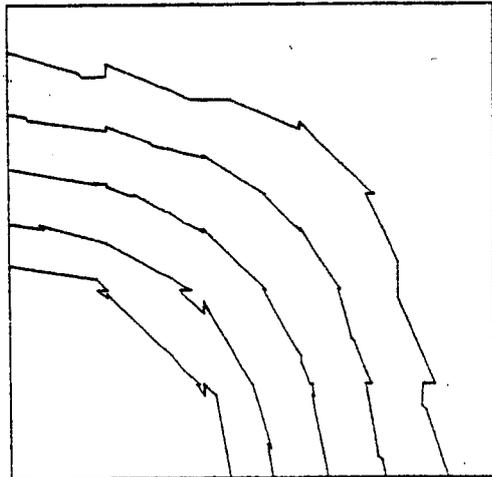
Le tableau 5.29, rapproché des résultats contenus dans le tableau 5.9 concernant les maillages (0.14.a') et (0.14.b'), permet de constater que les percées ont lieu plus tôt avec les éléments finis de degré 0. De plus les comparaisons effectuées sur la figure 5.30 montrent que le front, comme le WOR, calculé avec les éléments finis de degré 0 est plus étalé.

Cela est dû à la grande diffusion numérique du schéma de degré 0 par rapport à celui de degré 1, ce qui va être mieux mis en évidence avec les données réalistes qui sont beaucoup plus raides.

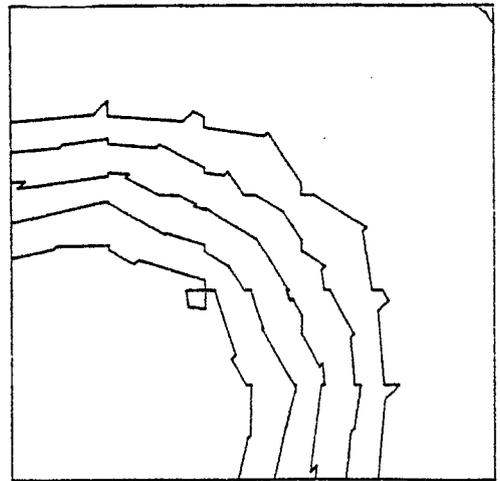
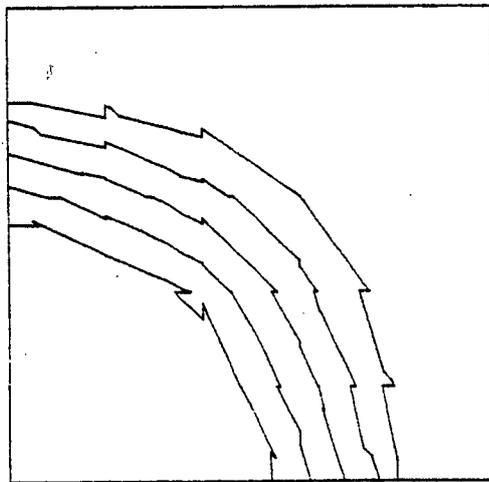
p = 10



p = 6



p = 2



maillage: (1.5.a)

maillage: (1.5.b)

Figure 5.25 : Saturations calculées à 600 jours (0.363 VPI) sur les maillages (1.5.a) et (1.5.b) pour diverses diffusions capillaires ("perméabilités en croix"). (Les lignes représentés sont les isovaleurs 0.9, 0.7, 0.5, 0.3, 0.1).

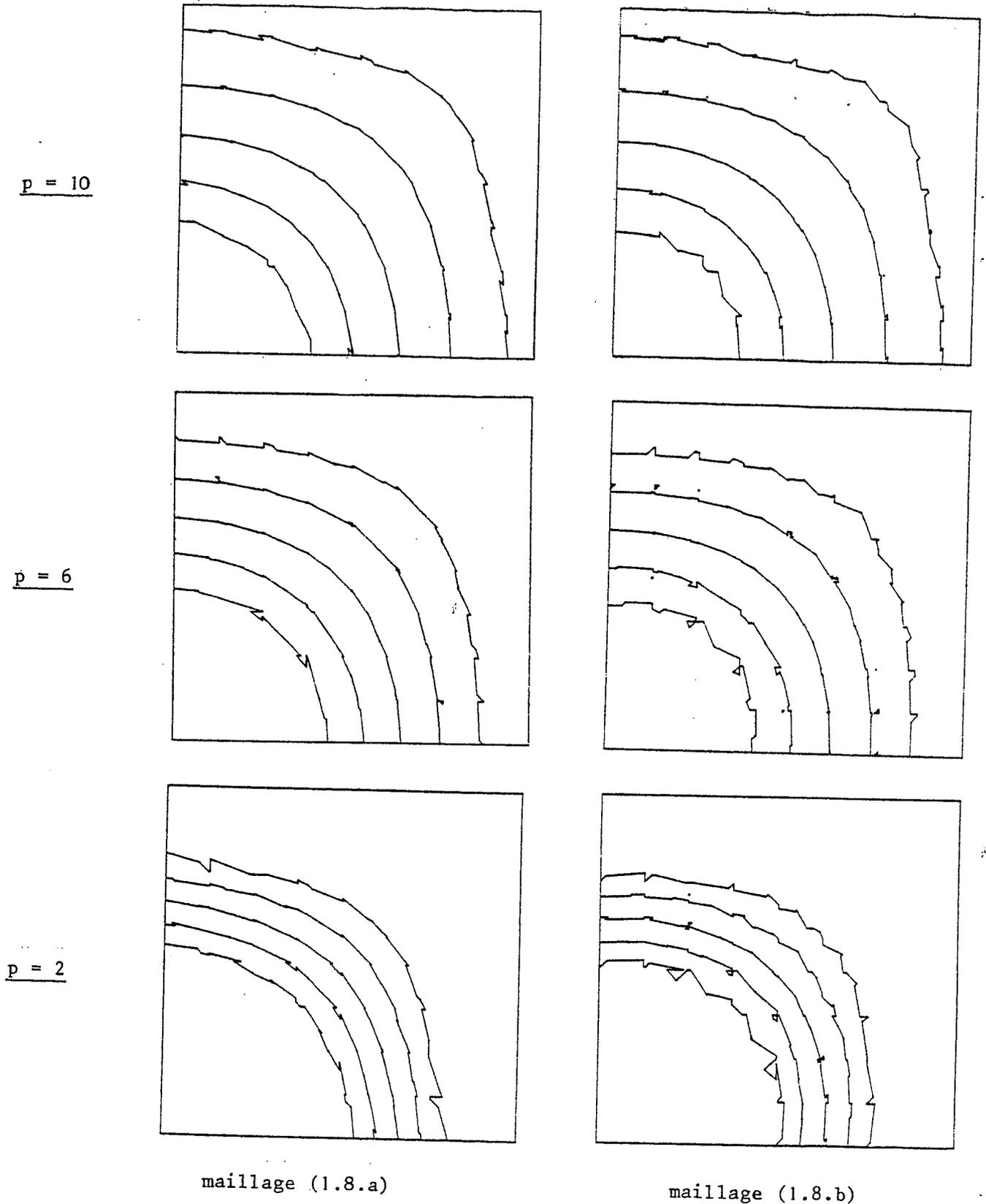


Figure 5.26 : Saturations calculées à 600 jours (0.363 VPI) sur les maillages (1.8.a) et (1.8.b) pour diverses diffusions capillaires ("perméabilités en croix"). (Les lignes représentées sont les isovaleurs 0.9, 0.7, 0.5, 0.3, 0.1).

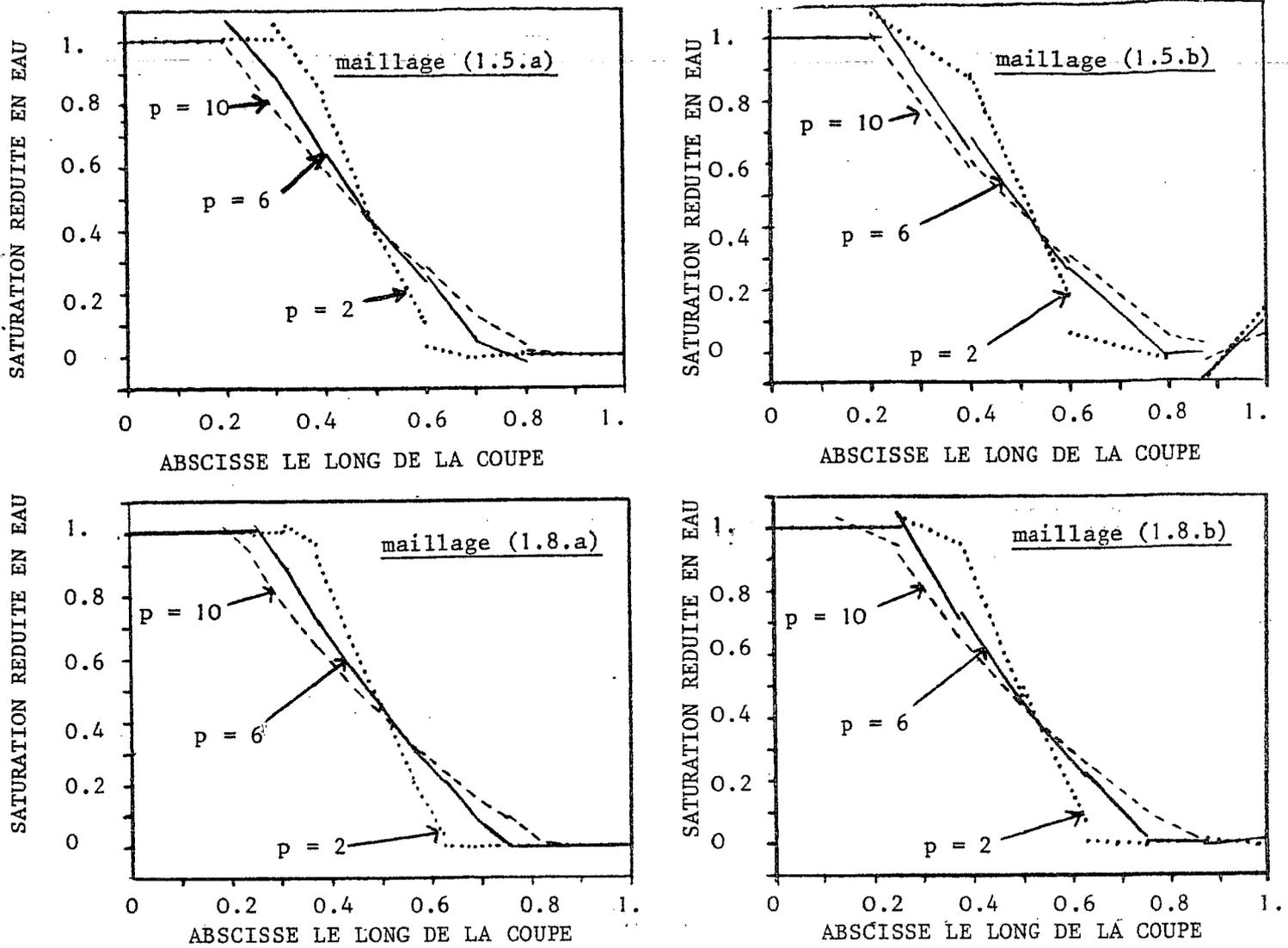


Figure 5.27 : Evolution, quand p varie, des coupes le long de la diagonale joignant les puits, des saturations à 600 jours pour divers maillages

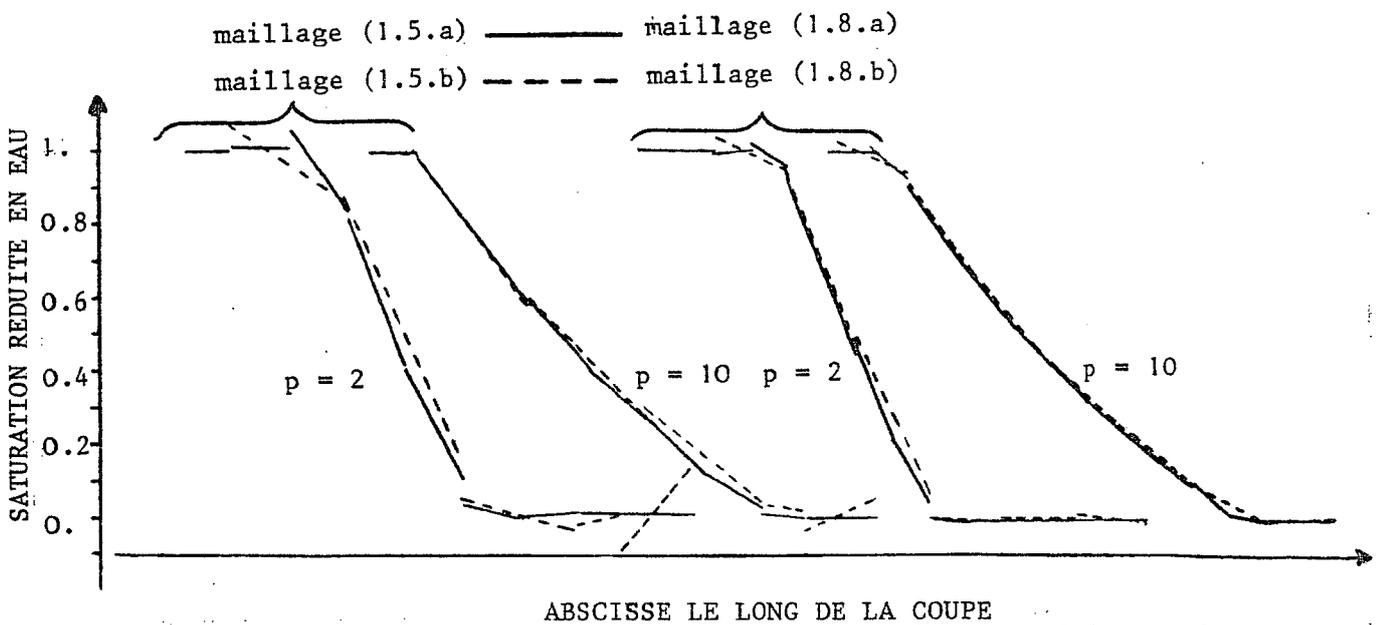


Figure 5.28 : Comparaison des coupes le long de la diagonale joignant les puits, des saturations à 600 jours, calculées avec les maillages (1.a) et (1.b)

	(1.5.a)	(1.5.b)	(1.8.a)	(1.8.b)
p = 10	.451 VPI 817 jours	.473 VPI 782 jours	.490 VPI 811 jours	.480 VPI 794 jours
p = 6	.540 VPI 893 jours	.512 VPI 847 jours	.536 VPI 886 jours	.519 VPI 859 jours
p = 2	.614 VPI 1015 jours	.595 VPI 984 jours	.608 VPI 1006 jours	.594 VPI 982 jours

Tableau 5.29 : Dates de percée calculées pour différents maillages et diverses valeurs de p

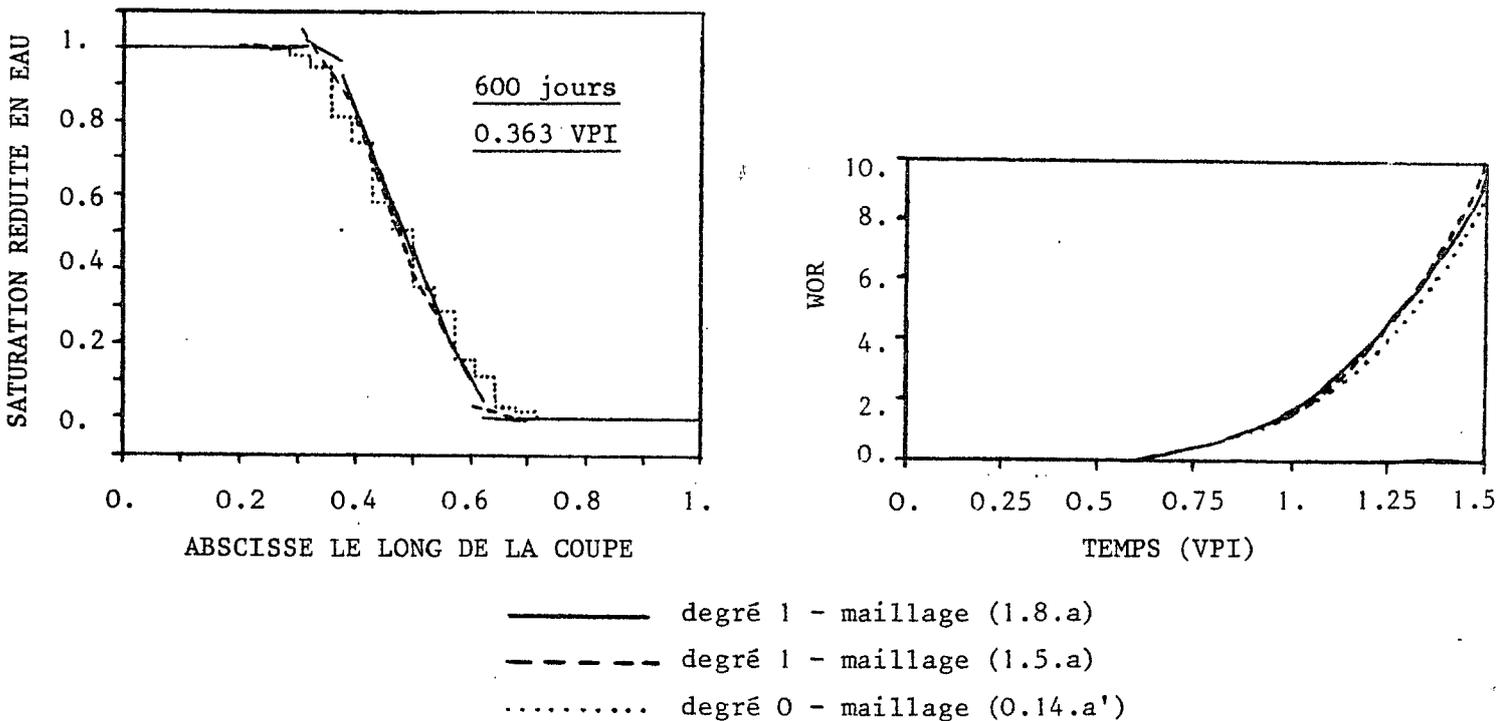
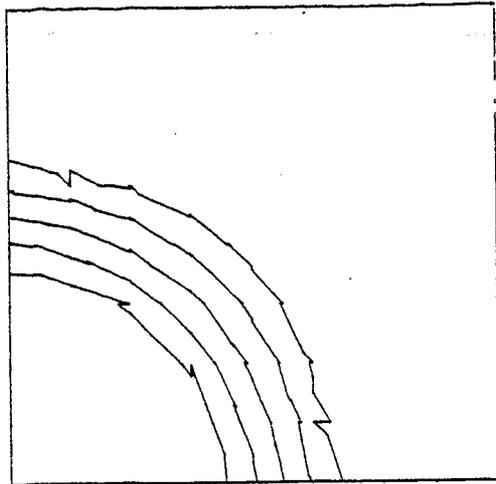
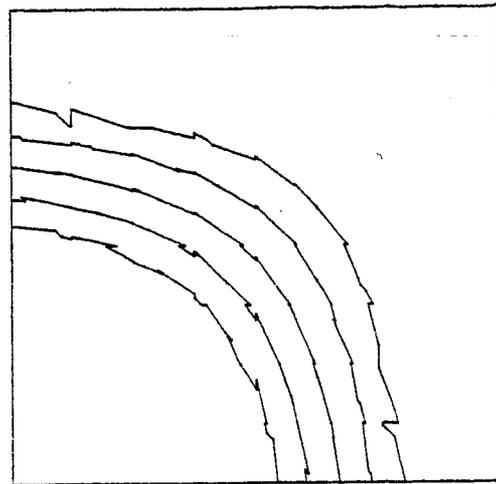


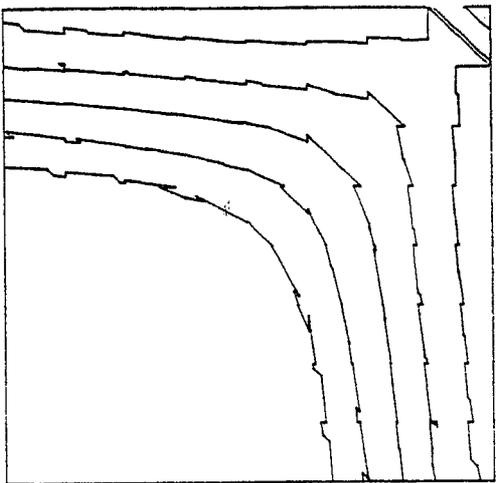
Figure 5.30 : Comparaison des fronts de saturations et des WOR calculés avec des éléments finis de degré 0 et de degré 1, pour p = 2



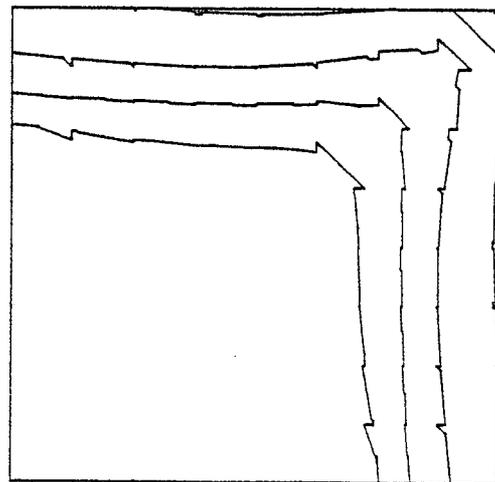
400 jours (0.242 VPI)



600 jours (0.363 VPI)



Percée à 1006 jours (0.608 VPI)



1400 jours (0.847 VPI)

Figure 5.31 : Saturations calculées sur le maillage (1.8.a) pour $p = 2$ ("perméabilités en croix"). (Les lignes représentées sont les isovaleurs 0.9, 0.7, 0.5, 0.3, 0.1).

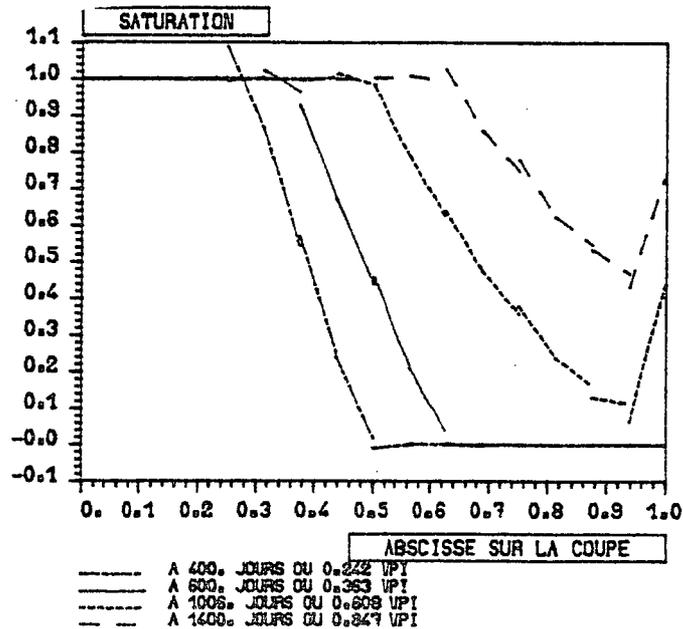


Figure 5.32 : Coupes de saturations le long de la diagonale joignant les puits (maillage (1.8.a), $p = 2$)

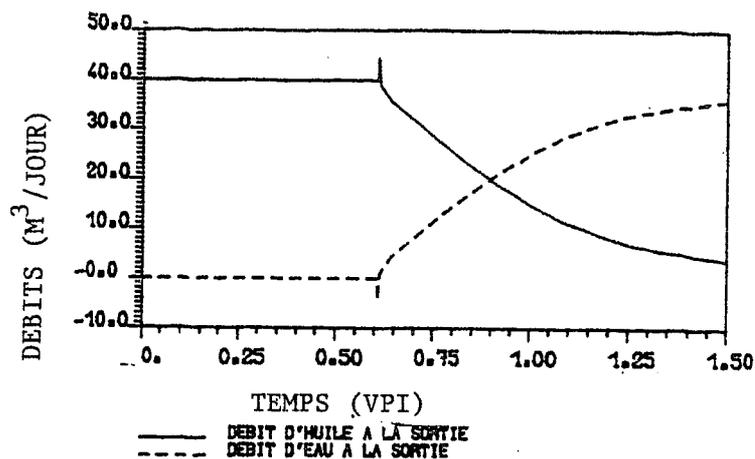


Figure 5.33 : Evolution des débits à la production au cours du temps (maillage (1.8.a), $p = 2$)

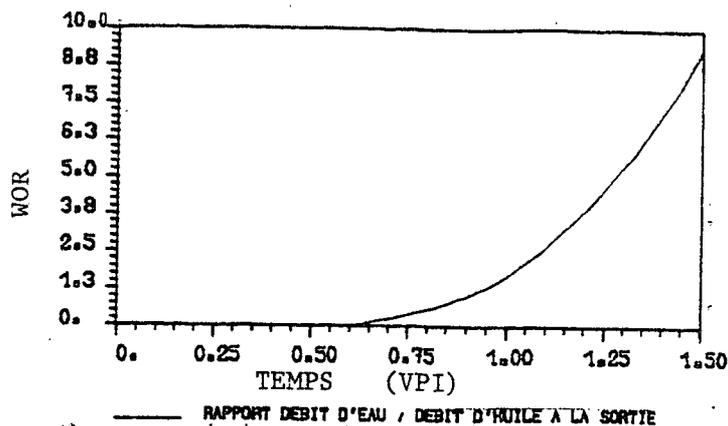


Figure 5.34 : Evolution du WOR au cours du temps (maillage (1.8.a), $p = 2$)

Considérons maintenant les données réalistes.

La figure 5.35 montre les fronts de saturation à 200 jours calculés avec les éléments finis de degré 1, en les comparant à ceux calculés avec les éléments de degré 0. La figure 5.36 montre les coupes de ces fronts suivant la diagonale joignant les puits.

On constate d'abord que le schéma utilisant les éléments finis de degré 1 diffuse beaucoup moins, montrant ainsi l'ampleur de la diffusion numérique du schéma de degré 0. La saturation en amont du front calculée dans des exemples avec le schéma de degré 1 est proche de 0.8, qui est la saturation amont théorique du même problème où l'on néglige la pression capillaire (saturation de Welge). Ceci implique que l'une et l'autre des diffusions numérique et physique sont très faibles.

On constate ensuite que le schéma de degré 1 n'est plus monotone positif, comme l'était le schéma de degré 0, et comme on pouvait s'y attendre par analogie avec les autres schémas d'ordre 2.

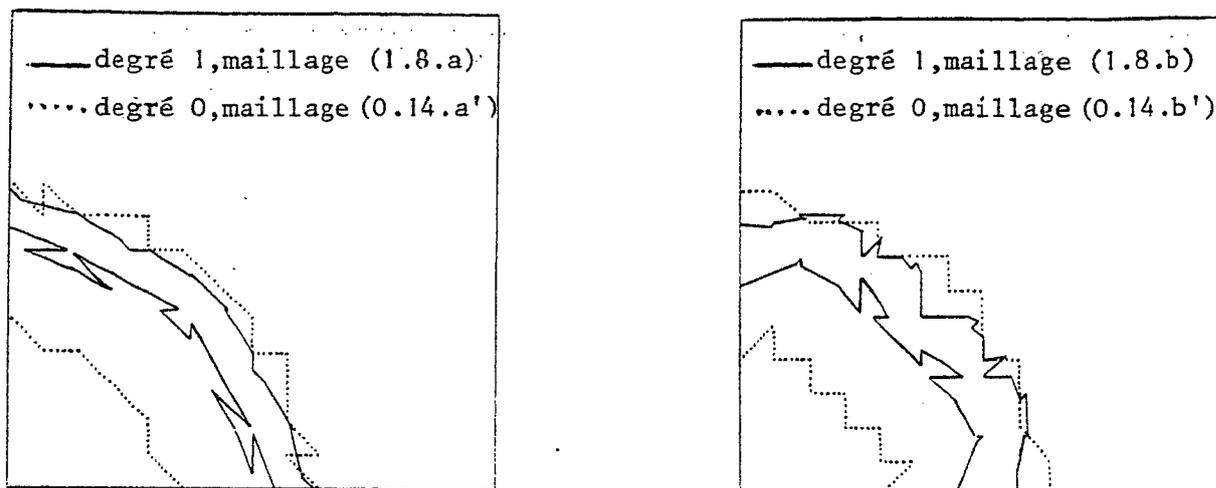


Figure 5.35 : Saturations à 200 jours calculées avec les données réalistes (les lignes isovaleurs représentées sont les lignes 0.9 et 0.1)

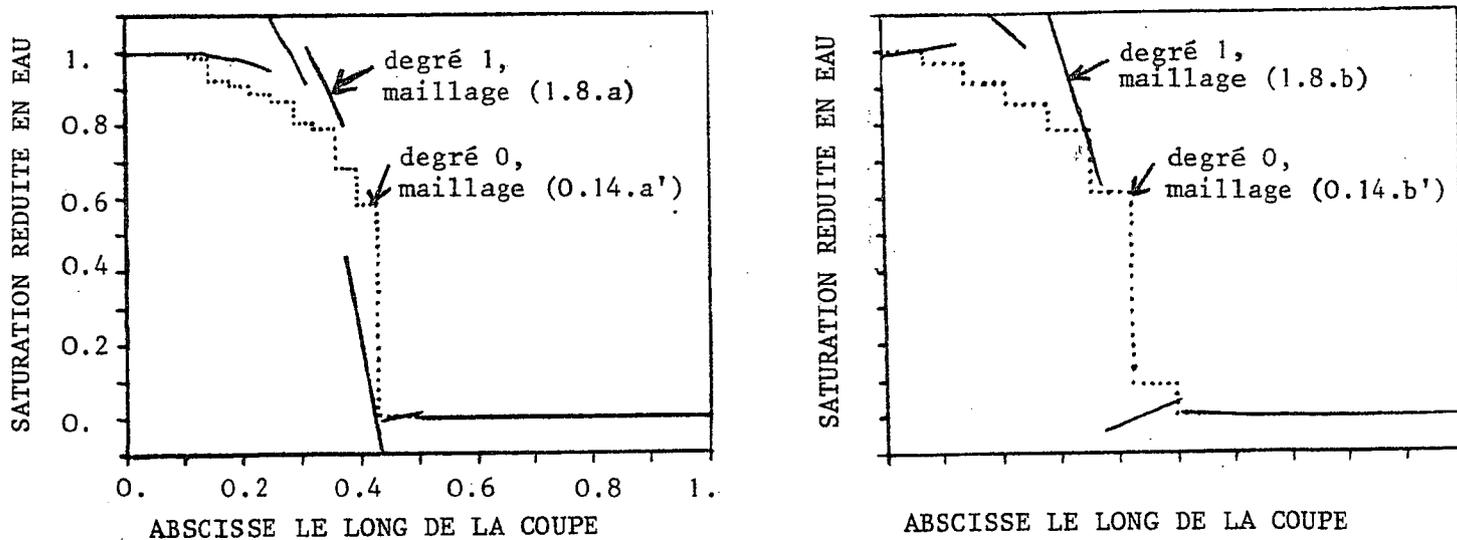


Figure 5.36 : Coupes le long de la diagonale joignant les puits, des saturations à 200 jours calculées avec les données réalistes

La figure 5.37 et le tableau 5.38, comparant les résultats numériques obtenus avec les maillages (1.8.a) et (1.8.b), montrent que ceux-ci ont peu varié.

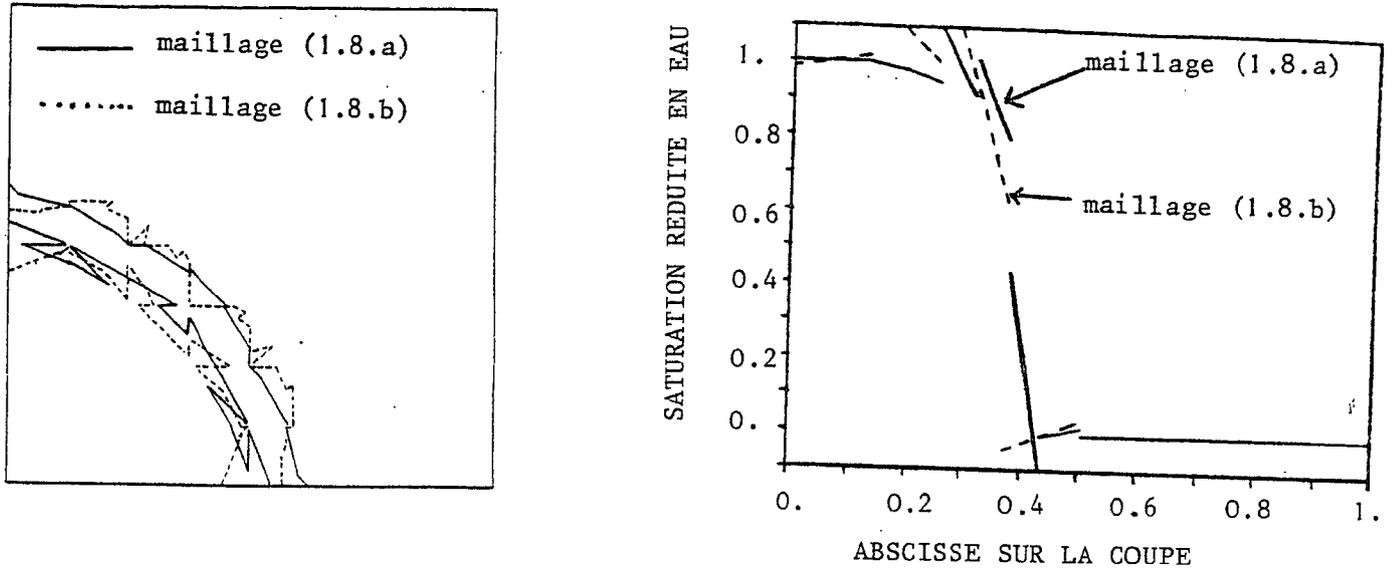
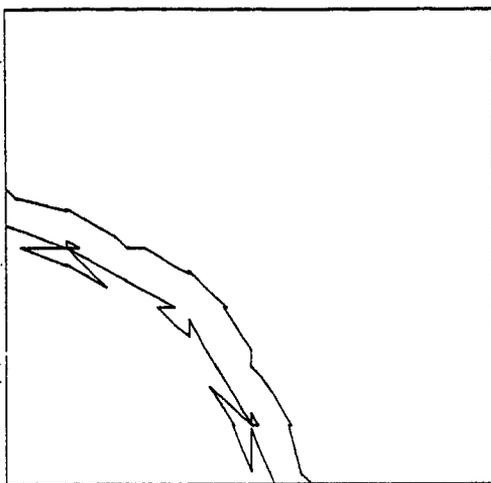


Figure 5.37 : Saturations à 200 jours, et leurs coupes sur la diagonale joignant les puits, calculées avec les éléments finis de degré 1, pour les données réalistes

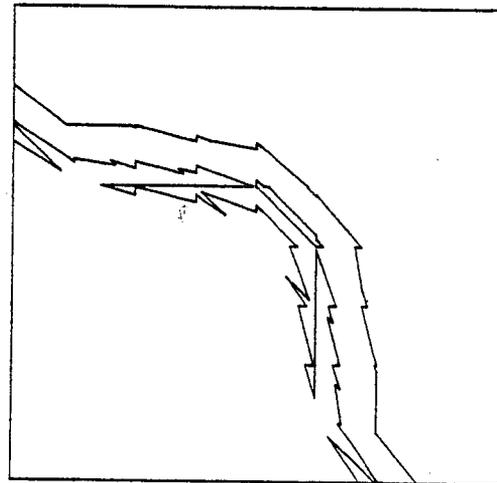
maillage (1.8.a)	maillage (1.8.b)
590 jours ou .686 VPI	531 jours ou .617 VPI

Tableau 5.38 : Dates de percée calculées avec les éléments finis de degré 1 pour les données réalistes.

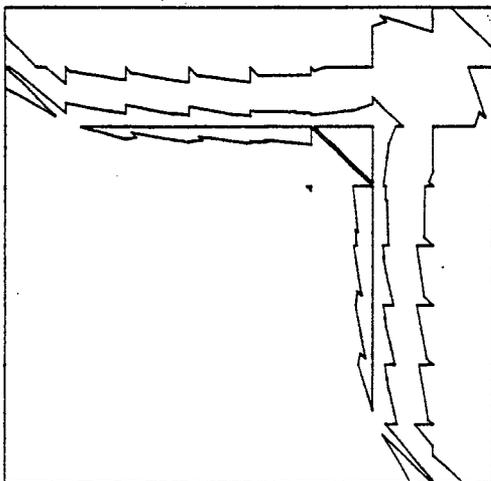
Les figures 5.39, 5.40 et 5.41 montrent une simulation complète sur le maillage (1.8.a). Sur les cartes de saturation, on observe en amont du front certaines "trainées". Ce ne sont en fait que la représentation graphique des oscillations en amont du front. De même si l'allure générale des courbes de débits et de WOR semble bonne, elle est cependant perturbée par des oscillations. Ces oscillations ne sont pas de l'instabilité numérique mais sont causées par l'arrivée au puits de production des oscillations observées en amont du front.



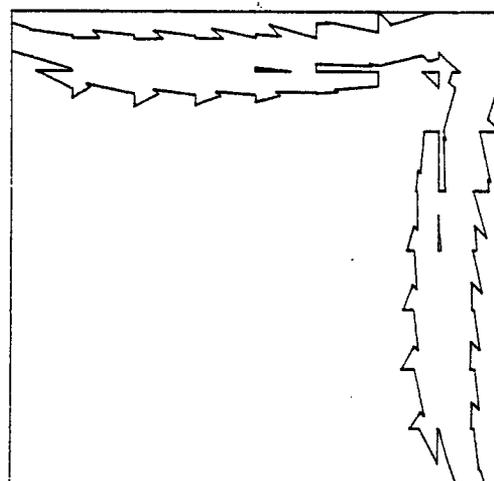
200 jours (0.233 VPI)



400 jours (0.465 VPI)



Percée à 590 jours (0.686 VPI)



800 jours (0.930 VPI)

Figure 5.39 : Saturations calculées sur le maillage (1.8.a) pour les données réalistes (les lignes représentées sont les isovaleurs 0.9 et 0.1)

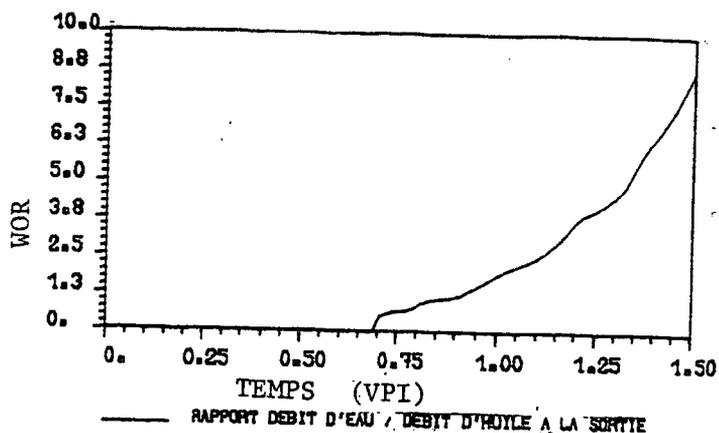
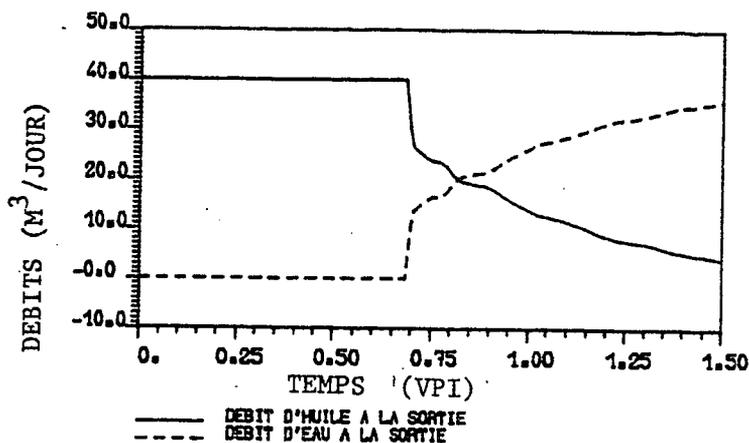


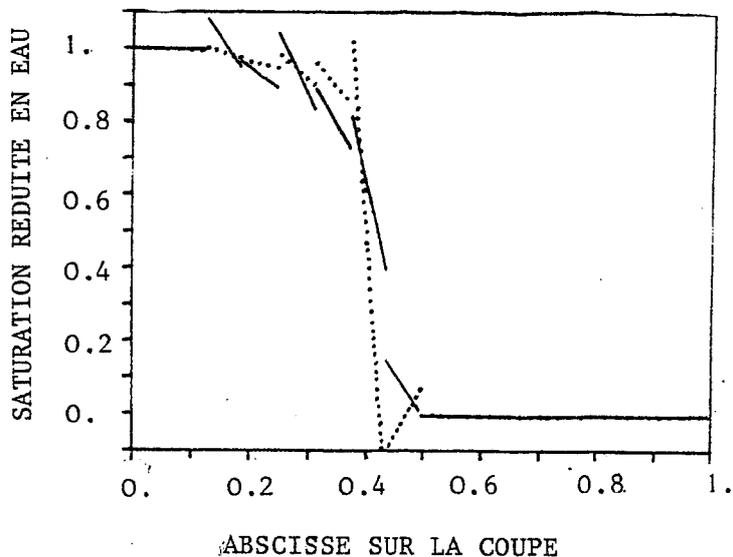
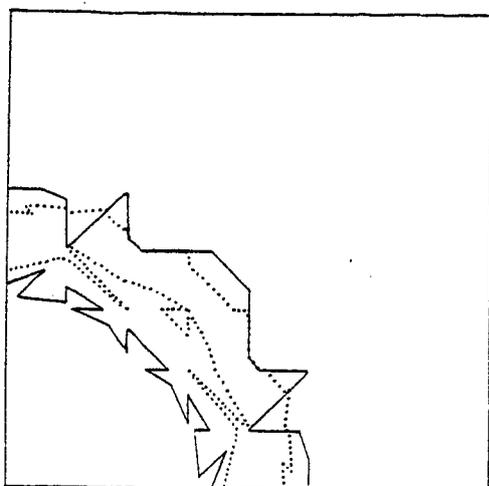
Figure 5.40 : Evolution des débits à la production au cours du temps (maillage (1.8.a), données réalistes).

Figure 5.41 : Evolution du WOR au cours du temps (maillage (1.8.a), données réalistes).

Pour remédier à ces défauts dûs au caractère non positif et non monotone du schéma, divers moyens peuvent être envisagés, les plus sophistiqués consistant à construire un schéma quasi d'ordre 2 pour le terme de convection adapté aux éléments finis discontinus et qui soit monotone positif.

Pour l'instant et pour commencer, nous nous sommes contentés de diagonaliser la matrice de masse de l'équation en saturation en appliquant au premier terme du membre de gauche de (4.21) la formule d'intégration utilisant les trois sommets du triangle.

Les résultats sont représentés sur la figure 5.42 et dans le tableau 5.43. On constate qu'en procédant de cette façon, on a supprimé les oscillations au pied du front, mais qu'en même temps, on a étalé le front et avancé la date de percée, ce qui traduit une argumentation importante de la diffusion numérique. Quant aux oscillations au sommet du front, la situation n'a pas été sensiblement modifiée. Cette procédure est donc insuffisante et l'étude devra donc être poursuivie dans d'autres voies.



—— avec diagonalisation de la matrice de masse des saturations
 sans diagonalisation de la matrice de masse des saturations

Figure 5.42 : Saturation à 200 jours, et leurs coupes sur la diagonale joignant les puits calculées sur le maillage 1.8.c pour des données réalistes

avec	sans
476 jours ou .553 VPI	549 jours ou .638 VPI

Tableau 5.43 : Dates de percée calculées avec les éléments finis de degré 1 sur le maillage 1.8.c pour des données réalistes, avec et sans diagonalisation de la matrice de masse des saturations

Donnons maintenant quelques indications sur le temps de calcul nécessaires aux simulations effectuées avec les données réalistes sur les maillages (1.8).

Par itération en temps, le temps de calcul est d'environ 7 secondes pour un ordinateur CII-IRIS 80. Ce temps est inférieur au temps de calcul d'une itération pour les éléments finis de degré 0 (13 secondes). Ce résultat paradoxal est dû en partie à des améliorations de programmation, mais surtout au fait que, même quand les saturations sont approchées par des éléments finis de degré 1, les pressions restent approchées par des éléments finis de degré 0, et donc que leur nombre de degrés de liberté dans les simulations utilisant les éléments de degré 1 sur les maillages (1.8) est plus faible que dans les simulations utilisant les éléments de degré 0.

Par contre, il a fallu environ 5100 pas de temps, soit cinq fois plus que pour les simulations de degré 0 comparables en utilisant toujours une méthode empirique de variation de pas de temps (le pas de temps a varié dans un rapport de 1 à 4).

6 - CONCLUSION.

L'utilisation de la formulation mixte permet un calcul facile des débits en eau et en huile et assure un bon couplage entre les équations en saturation et en pression, dans la mesure où la pression P n'intervient dans l'équation en saturation que par l'intermédiaire de son "pseudo-gradient" \vec{q} .

Elle conduit, par l'intermédiaire d'une méthode d'éléments finis mixtes et d'un schéma de décentrage pour les éléments finis discontinus, à un schéma de diffusion-convection pour résoudre les équations en saturation.

Dans ces équations, le phénomène dominant et difficile étant la convection, toute l'attention doit porter sur le schéma de décentrage.

L'utilisation d'éléments finis de degré 0 conduit à un schéma monotone positif d'un comportement analogue aux schémas d'ordre 1, c'est-à-dire très diffusif.

L'utilisation d'éléments finis de degré 1 diminue cette diffusion, mais comme tous les schémas de convection d'ordre 2, perd la monotonie et la positivité. Les oscillations obtenues sur les saturations perturbent les débits et le WOR. Il est donc nécessaire de corriger le schéma de transport construit, ce qui fait l'objet de nos efforts actuels.

BIBLIOGRAPHIE

- N. ALBRIGHT, P. CONCUS, W. PROSKUROWSKI [1]
Numerical solution of the multi-dimensional Buckley-Leverett equation by a sampling method, SPE 7681, Denver, Fev. 1979.
- Y. BRENIER [1]
Ecoulements eau-air en milieu poreux : application à l'essorage de barrages en terre, Rapport Interne.
- G. CHAVENT [1]
A new formulation of diphasic incompressible flows in porous media, Lecture notes in mathematics, 503, Springer, 1976.
- G. CHAVENT [2]
About the identification and modelling of miscible or immiscible displacement in porous media, Lecture notes in Control and Information Sciences, 1, Springer, 1978.
- G. CHAVENT [3]
Un théorème d'existence dans une inéquation variationnelle parabolique dégénérée modélisant le déplacement d'un fluide par un autre non miscible. Rapport Laboria n° 260, IRIA, BP 105, 78150 Le Chesnay.
- G. CHAVENT, G. COHEN [1]
Numerical approximation and identification in a 1-D parabolic degenerated non linear diffusion and transport equation, Proceedings of the 8th IFIP Conference on Optimization Techniques, Würzburg, Sept. 5-9 1977, Lecture notes in Control and Information Sciences, 6, Springer, 1978.
- G. COHEN [1]
Résolution numérique et identification pour une équation quasi-parabolique non linéaire dégénérée de diffusion et transport en dimension 1, Thèse de 3ème cycle, Univ. P & M Curie, Paris, 1978.
- R.E. COLLINS [1]
Flow of fluids through porous materials.
- J. DOUGLAS Jr., T. DUPONT, H.H. RACHFORD [1]
The application of variational methods to water-flooding problems, The Journal of Canadian Petroleum Technology, p. 79-85, Sept. 1969.

F. FORGES [1]

Approximation d'une équation diffusion-transport par des méthodes d'éléments finis espace-temps, Thèse de 3ème cycle, Univ. Paris 9, Paris, 1980.

M. FORTIN, R. GLOWINSKI, F. THOMASSET [1]

Résolution numérique de problèmes aux limites par des méthodes de Lagrangien augmenté, à paraître.

G. GAGNEUX [1]

Déplacements de fluides non miscibles incompressibles dans un cylindre poreux, Journal de Mécanique, Vol. 19, n° 2, p. 1-31, 1980.

M.R. HESTENES [1]

Multiplier and gradient methods, JOTA, 4, p. 303-320, 1969.

J. JAFFRE [1]

Approximation par une méthode d'éléments finis mixte d'une équation du type diffusion-convection linéaire stationnaire, Rapport Laboria n° 367, IRIA, BP 105, 78150 Le Chesnay, Oct. 1979.

P. LEMONNIER [1]

Improvement of reservoir simulation of a triangular discontinuous finite element method, SPE 8249, Las Vegas, Sept. 1979.

P. LESAIN, P.A. RAVIART [1]

On a finite element method for solving the neutron transport equation, Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations, Éd. Carl de Boor, Academic Press, 1974.

C. MARLE [1]

Les écoulement polyphasiques en milieu poreux, Cours de production, Tome IV, Editions Technip IFP, 1972.

H.J. MOREL-SEYTOUX [1]

Pour une théorie modifiée de l'infiltration, Cahiers ORSTOM, Ser. Hydrol., 2 - p. 185-194, 3 - p. 199-209, 1973.

J.T. ODEN, J.N. REDDY [1]

On dual complementary variational principles in mathematical physics, Int. J. Eng. Sci. 12, p. 1-29, 1974.

P.A. RAVIART, J.M. THOMAS [1]

A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems, Mathematical aspects of finite element methods, Rome, 1975, Lecture notes in mathematics, 606, Springer, 1977.

A. SPIVAK, H.S. PRICE, A. SETTARI [1]

Solution of the equations for multidimensional two phase immiscible flow by variational methods, SPE 5723, Los Angeles, Feb. 1976.

M.R. TODD, P.M. O'DELL, C.J. HIRASAKI [1]

Methods for increased accuracy in numerical reservoir simulation, Soc. Pet. Eng. J., p. 515-529, Dec. 1972.

J. WOLSAK [1]

Schéma théorique de l'hydraulique des sols non saturés

J.L. YANOSIK, T.A. Mc. CRACKEN [1]

A nine point finite difference reservoir simulator for realistic production of unfavourable mobility ratio displacements, SPE 5734, Los Angeles, Feb. 1976.

