



**HAL**  
open science

# Étude de schémas numériques de l'élastodynamique linéaire

A. Bamberger, Guy Chavent, P. Lailly

► **To cite this version:**

A. Bamberger, Guy Chavent, P. Lailly. Étude de schémas numériques de l'élastodynamique linéaire. [Rapport de recherche] RR-0041, INRIA. 1980. inria-00076520

**HAL Id: inria-00076520**

**<https://inria.hal.science/inria-00076520>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**IRIA**

*Cell Def*

Rapports de Recherche

N° 41

**ETUDE DE SCHÉMAS  
NUMÉRIQUES  
POUR LES ÉQUATIONS  
DE L'ÉLASTODYNAMIQUE  
LINÉAIRE**

**Alain BAMBERGER  
Guy CHAVENT  
Patrick LAILLY**

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105 78150 Le Chesnay  
France  
Tél. 954 90 20

Octobre 1980

**IRIA**

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P. 105 - 78150 Le Chesnay  
France  
Tél. 954 90 20

*Cell Def*

Rapports de Recherche

N° 41

**ETUDE DE SCHEMAS  
NUMERIQUES  
POUR LES EQUATIONS  
DE L'ELASTODYNAMIQUE  
LINEAIRE**

Alain BAMBERGER  
Guy CHAVENT  
Patrick LAILLY

Octobre 1980

## RESUME

Nous nous intéressons à l'approximation des équations de l'élastodynamique à deux dimensions par différents schémas numériques.

Dans ce rapport (1ère partie de l'étude) nous comparons les propriétés de propagation des solutions exactes et numériques dans un milieu homogène infini isotrope.

Nous avons étudié plusieurs schémas numériques classiques provenant de la discrétisation par différences finies ou par différentes techniques d'éléments finis (éléments finis Q1 et P1, différentes triangulations, différentes méthodes de calcul de la matrice de masse).

En analysant la relation de dispersion associée à chaque schéma, nous comparons les ondes P et S numériques à leur homologue continu : nous obtenons, en fonction des paramètres physiques et numériques, les vitesses de phase et de groupe des ondes numériques ainsi que les directions du mouvement.

Cette étude permet de comparer l'efficacité des différents schémas numériques et constitue une aide pour le choix des paramètres de discrétisation en fonction des conditions initiales et de la précision souhaitée.

## ABSTRACT

We have been interested in the approximation by different numerical schemes of the 2-D linear elastodynamic equations.

In this report (first part of the study) we compare the propagation of the numerical and exact solutions in an infinite homogeneous and isotropic medium.

We have studied some classical numerical schemes coming from discreti-

zations by finite differences or by different finite elements techniques (Q1 and P1 finite elements, different triangulations, different computations of the mass matrix).

Analyzing the dispersion relation associated to each scheme, we compare the numerical P and S waves to their continuous homologues : we measure, in terms of the physical and numerical parameters, the phase and group velocities of the numerical waves and the difference between the directions of displacement for the continuous and numerical waves.

At last we compare the efficiency of the numerical schemes and give some information about the choice of the sampling parameters in terms of the initial conditions and of the desired accuracy.

## 0. INTRODUCTION

- 0.1. Objet de l'étude : présentation.
- 0.2. Présentation des schémas étudiés.
- 0.3. Motivation : simulation numérique d'une expérience de sismique réflexion.
  - 0.3.1. Description sommaire d'une expérience de sismique réflexion.
  - 0.3.2. Intérêt d'une simulation numérique.
  - 0.3.3. Difficultés numériques.
- 0.4. Les travaux en cours.
  - 0.4.1. Prolongements des travaux de la 1ère partie.
  - 0.4.2. Etudes des réflexions et réfractions d'ondes planes sur un interface plan.
  - 0.4.3. Etude de la diffraction due à une distorsion du maillage.

## 1. QUELQUES RAPPELS SUR LES EQUATIONS DE L'ELASTODYNAMIQUE LINEAIRE

- 1.1. Dérivation des équations.
- 1.2. Principe de conservation de l'énergie.
- 1.3. Propagation d'ondes planes.
  - 1.3.1. Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de  $\bar{B}_0(\vec{k})$ .
  - 1.3.2. La relation de dispersion.
  - 1.3.3. Les ondes P et les ondes S.
- 1.4. Equations vérifiées par les potentiels.
- 1.5. Propagation à vitesse finie.
- 1.6. Valeur des coefficients  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  envisagés.
- 1.7. Rappel sur la notion de vitesse de groupe.

## 2. ETUDE D'UN SCHEMA NUMERIQUE AUX DIFFERENCES FINIES

- 2.1. Présentation du schéma numérique.
- 2.2. Etude du schéma par les méthodes variationnelles.
  - 2.2.1 Quelques propriétés des opérateurs  $B_h$  et  $\bar{B}_h$ .
  - 2.2.2. Etude de la stabilité du schéma numérique : condition suffisante.
- 2.3. Etude du schéma numérique par la transformée de Fourier.
  - 2.3.1. Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice  $\bar{B}_h(\vec{k})$ .
  - 2.3.2. Etude de la suite  $\vec{u}^{(n)}(\vec{k})$ .
  - 2.3.3. Une condition nécessaire de stabilité.
- 2.4. Etude des ondes planes numériques.
  - 2.4.1. Détermination de la relation de dispersion numérique.
  - 2.4.2. Intervalle de définition des pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

- 2.4.3. La condition de stabilité.
  - 2.4.4. Développement limité pour les petites valeurs des paramètres de discrétisation.
  - 2.4.5. Majoration de la vitesse de groupe.
  - 2.5. Ondes planes numériques et continues : choix des éléments de comparaison
    - 2.5.1. Les paramètres de l'onde.
    - 2.5.2. Le pas de discrétisation en temps, condition de stabilité.
    - 2.5.3. Les paramètres physiques.
    - 2.5.4. Comparaison des vitesses de phase.
    - 2.5.5. Comparaison des vitesses de groupe.
    - 2.5.6. Comparaison des directions du mouvement.
    - 2.5.7. Domaine de variation de  $\vec{k}$ .
  - 2.6. Etude numérique de la relation de dispersion (cas  $\Delta x = \Delta z$ ).
    - 2.6.1. Ecart  $\delta\theta$  entre la direction de propagation et la direction du déplacement.
    - 2.6.2. Dispersion des ondes P.
    - 2.6.3. Dispersion des ondes S.
    - 2.6.4. Mode d'emploi d'un programme de simulation utilisant le schéma 1.
3. ETUDE DE SCHEMAS NUMERIQUES PROVENANT DE LA DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS  $Q_1$  DES EQUATIONS DE L'ELASTODYNAMIQUE.
- 3.1. Rappel de la formulation variationnelle des équations de l'élastodynamique.
  - 3.2. Approximation de l'espace  $V$  par des éléments finis  $Q_1$ .
  - 3.3. Définition des problèmes approchés (semi discrétisation en espace).
    - 3.3.1. Obtention des équations semi discrétisées en espace.
    - 3.3.2. Equations semi discrétisées en espace avec condensation de la matrice de masse.
    - 3.3.3. Contraintes discrètes.
  - 3.4. Schéma d'approximation en temps.
  - 3.5. Schémas discrétisés en espace et en temps.
    - 3.5.1. Schéma avec calcul exact de la matrice de masse (schéma 2).
    - 3.5.2. Schéma avec condensation de la matrice de masse (schéma 3).
  - 3.6. Etude des ondes planes numériques associées au schéma 2.
    - 3.6.1. Détermination de la relation de dispersion.
    - 3.6.2. Calcul des valeurs propres de la matrice  $\bar{B}_h(\vec{k})$ .
    - 3.6.3. Une condition nécessaire de stabilité du schéma.
    - 3.6.4. Obtention de  $\omega$  à partir de  $\vec{k}$  (vitesse des ondes numériques).
    - 3.6.5. Calcul de  $\vec{d}$  à partir de  $\vec{k}$  (écart entre la direction du déplacement et la direction de propagation).

- 3.7. Etude numérique de la relation de dispersion pour le schéma 2 (cas  $\Delta x =$ 
    - 3.7.1. Dispersion des ondes P.
    - 3.7.2. Dispersion des ondes S.
    - 3.7.3. Mode d'emploi d'un programme de simulation utilisant le schéma
  - 3.8. Etude des ondes planes numériques associées au schéma 3.
    - 3.8.1. Détermination de la relation de dispersion.
    - 3.8.2. Une condition nécessaire de stabilité du schéma.
    - 3.8.3. Obtention de  $w$  à partir de  $\vec{k}$  (vitesse des ondes numériques).
  - 3.9. Etude numérique de la relation de dispersion pour le schéma 3 (cas  $\Delta x =$ 
    - 3.9.1. Dispersion des ondes P.
    - 3.9.2. Dispersion des ondes S.
    - 3.9.3. Mode d'emploi d'un programme de simulation utilisant le schéma
4. COMPARAISON DES SCHEMAS 1, 2, ET 3.
- 4.1. Comparaison des schémas en éléments finis  $Q_1$  avec matrice de masse exacte (schéma 2) et avec condensation de masse (schéma 3).
    - 4.1.1. Comparaison des temps calculs.
    - 4.1.2. Comparaison des schémas pour la propagation des ondes P.
    - 4.1.3. Comparaison des schémas pour la propagation des ondes S.
    - 4.1.4. Conclusions.
  - 4.2. Comparaison des schémas aux différences finies (schéma 1) et en éléme finis  $Q_1$  avec condensation de masse (schéma 3).
    - 4.2.1. Comparaison des temps calcul à  $\Delta t$  et  $\Delta x$  fixés.
    - 4.2.2. Influence des conditions de stabilité.
    - 4.2.3. Comparaison des schémas pour la propagation des ondes P.
    - 4.2.4. Comparaison des schémas pour la propagation des ondes S.
    - 4.2.5. Conclusions.
5. ETUDE DE SCHEMAS NUMERIQUES PROVENANT DE LA DISCRETISATION PAR ELEMENTS FI  $P_1$  DES EQUATIONS DE L'ELASTODYNAMIQUE
- 5.1. Approximation de l'espace  $V$  par des éléments finis  $P_1$ .
  - 5.2. Définition des problèmes approchés (semi discrétisation en espace).
    - 5.2.1. Equations semi discrétisées en espace pour une triangulation d domaine en triangles rectangles.
    - 5.2.2. Equations semi discrétisées en espace pour une triangulation d domaine en triangles équilatéraux.
  - 5.3. Schémas discrétisés en espace et en temps.
    - 5.3.1. Présentation du schéma 4 (élément fini  $P_1$ , triangulation en tr rectangles, condensation de masse, schéma explicite en temps).



- 5.3.2. Présentation du schéma 5 (élément fini  $P_1$ , triangulation en triangles équilatéraux, condensation de masse, schéma explicite en temps).
- 5.4. Etude des ondes planes numériques associées au schéma 4 (cas  $\Delta x = \Delta z$ ).
- 5.4.1. Détermination de la relation de dispersion.
- 5.4.2. Calcul des valeurs propres de la matrice  $\bar{B}_h(\vec{k})$ .
- 5.4.3. Une condition nécessaire de stabilité du schéma.
- 5.4.4. Obtention de  $w$  à partir de  $\vec{k}$  (vitesse des ondes numériques).
- 5.4.5. Obtention de  $\vec{d}$  à partir de  $\vec{k}$  (écart entre la direction de propagation et la direction du déplacement).
- 5.5. Etude numérique de la relation de dispersion pour le schéma 4 (cas  $\Delta x = \Delta z$ ).
- 5.5.1. Etude de l'écart  $\delta\theta$  entre la direction de propagation et la direction du déplacement.
- 5.5.2. Dispersion des ondes P.
- 5.5.3. Dispersion des ondes S.
- 5.5.4. Mode d'emploi d'un programme de simulation utilisant le schéma 4.
- 5.6. Etude des ondes planes numériques associées au schéma 5.
- 5.6.1. Détermination de la relation de dispersion.
- 5.6.2. Calcul des valeurs propres de la matrice  $\bar{B}_h(\vec{h})$ .
- 5.6.3. Une condition nécessaire de stabilité du schéma.
- 5.6.4. Obtention de  $w$  à partir de  $\vec{k}$  (vitesse des ondes numériques).
- 5.6.5. Calcul de  $\vec{d}$  à partir de  $\vec{k}$  (écart entre la direction de propagation et la direction du déplacement).
- 5.7. Etude numérique de la relation de dispersion pour le schéma 5.
- 5.7.1. Etude de l'écart  $\delta\theta$  entre la direction de propagation et la direction du déplacement.
- 5.7.2. Dispersion des ondes P.
- 5.7.3. Dispersion des ondes S.
- 5.7.4. Mode d'emploi d'un programme de simulation utilisant le schéma 5.
- ANNEXE : démonstration des lemmes 5.4., 5.5., 5.6.

## 6. COMPARAISON DES SCHEMAS EXPLICITE AVEC CONDENSATION DE MASSE EN ELEMENTS FINIS $Q_1$ ET $P_1$ (TRIANGLES EQUILATERAUX).

- 6.1. Comparaison des temps calculs.
- 6.1.1. Programmation utilisant le caractère homogène du milieu et du maillage.
- 6.1.2. Programmation dans le cas général d'un milieu quelconque et d'un maillage non uniforme.

- 6.2. Comparaison des schémas pour la propagation des ondes P.
- 6.3. Comparaison des schémas pour la propagation des ondes S.
- 6.4. Comparaison des schémas pour l'écart  $\delta\theta$  entre la discrétisation de propagation et la direction du déplacement.
- 6.5. Conclusion.

#### BIBLIOGRAPHIE.

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

## 0. INTRODUCTION

### 0.1. Objet de l'étude : présentation

Nous nous proposons d'étudier différents schémas numériques pour le système des équations de l'élastodynamique à deux dimensions d'espace :

$$(1.1) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right)$$

$$(1.2) \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right)$$

Nous essaierons de répondre à la question suivante : pour des conditions initiales et un second membre donnés, comment doit-on, pour chaque schéma numérique envisagé choisir les paramètres de discrétisation de façon à bien rendre compte des phénomènes de propagation ?

Dans toute cette étude nous supposons que la densité  $\rho$  et les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  sont constants. Dans un tel milieu homogène et isotrope, peuvent se propager des ondes planes élastiques qui sont d'une part des ondes de pression (Ondes P) et d'autre part des ondes de cisaillement (Ondes S). Le milieu n'est pas dispersif.

Afin de calculer une approximation de la solution (1.1),(1.2) nous considérons différents schémas numériques. Pour l'approximation en espace nous envisageons des grilles périodiques dans le cas des différences finies et des maillages périodiques dans le cas des éléments finis. Nous définissons ainsi un milieu discret, homogène mais anisotrope puisque certaines directions de l'espace sont privilégiées.

Nous envisageons des découpages réguliers du temps et des approximations centrées c'est-à-dire réversibles. Nous montrons que des ondes planes peuvent se propager dans les schémas numériques : nous définissons ainsi

des ondes P et des ondes S numériques. Le milieu est dispersif : nous examinons la dispersion de ces ondes en fonction des paramètres de l'onde elle-même, des paramètres de discrétisation et du coefficient de Poisson.

### 0.2. Présentation des schémas étudiés

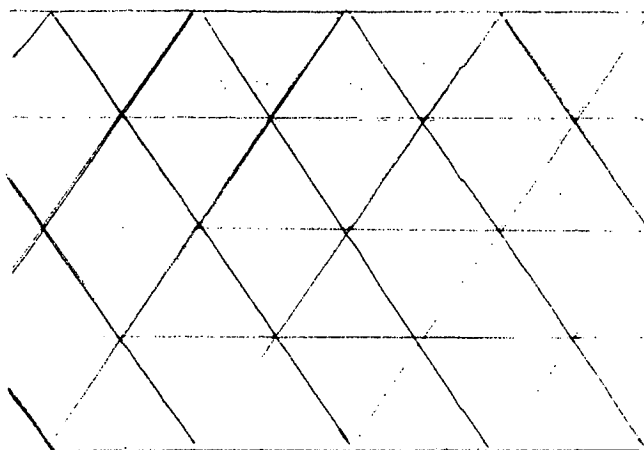
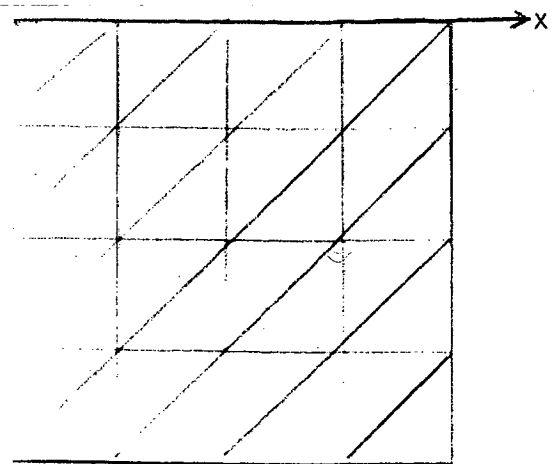
Les schémas auxquels nous nous sommes intéressés sont des schémas classiques. Nous examinerons successivement :

- le schéma du second ordre aux différences finies (schéma 1), les pas de discrétisation suivant les 2 dimensions d'espace étant les mêmes.
- 2 schémas en éléments finis  $Q_1$  :

	SCHEMA 2	SCHEMA 3
Constitution du maillage	carrés	carrés
Matrice de masse	exacte	diagonale (condensation de masse)

- 2 schémas en éléments finis  $P_1$  :

	SCHEMA 4	SCHEMA 5
Constitution de la triangulation (cf. figure 0.1.)	Triangles rectangles isocèles	Triangles équilatéraux
Matrice de masse	Condensation de masse	Condensation de masse



Triangulation utilisée pour le schéma 4 (triangles rectangles iso-cèles)

Triangulation utilisée pour le schéma 5 (triangles équilatéraux)

FIGURE 0.1.

0.3. Motivation : simulation d'une expérience de sismique réflexion

0.3.1. Description sommaire d'une expérience de sismique réflexion

Le principe d'une expérience de sismique réflexion est schématisé sur la figure 0.2.

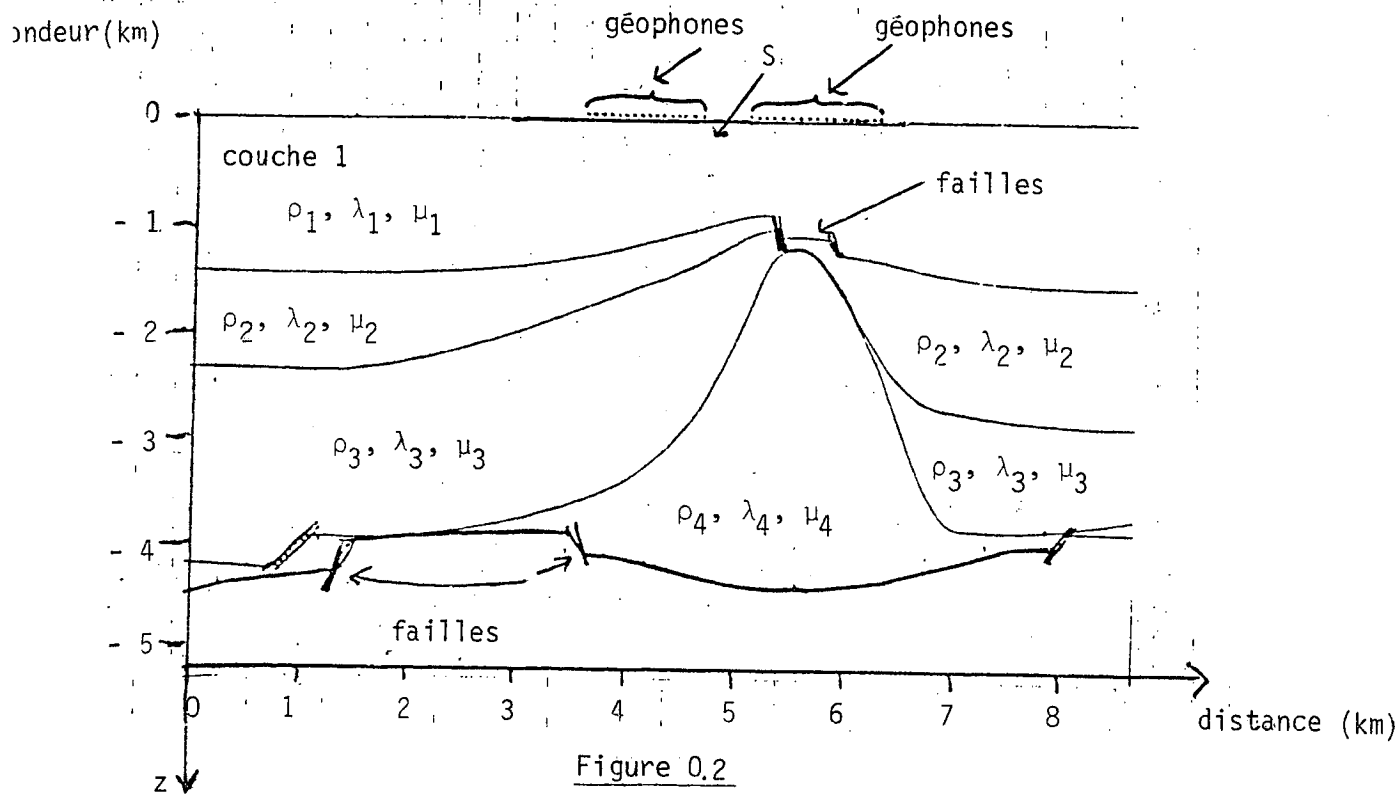


Figure 0.2

Une source sismique placée en S (à quelques mètres de profondeur) génère des ondes élastiques. Ces ondes vont se propager dans le milieu et se réfléchir, se réfracter, se convertir, diffracter, etc... La réponse du milieu est enregistrée par des géophones situés en surface de part et d'autre de la source et l'on essaie d'obtenir à partir de ces enregistrements des informations sur la structure géologique du sous-sol. L'enregistrement (d'une composante de la vitesse) du déplacement en surface en fonction du temps constitue un sismogramme ; sa durée est de l'ordre de 4 secondes. Nous donnons sur la figure 0.3. un exemple de sismogramme.

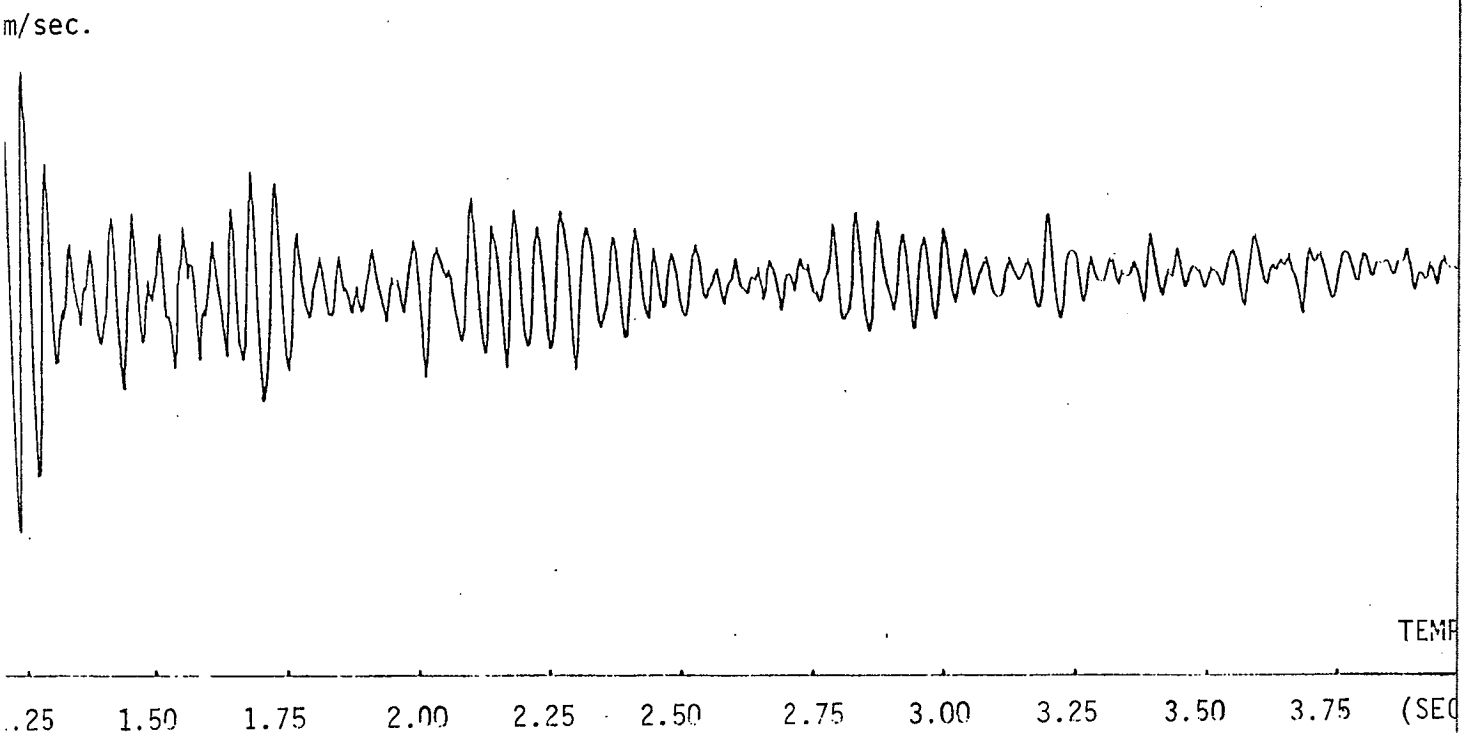


Figure 0.3

#### 0.3.2. Intéret d'une simulation numérique

Nous nous intéressons à la simulation de l'expérience précédente.

Nous faisons l'hypothèse (non vérifiée au voisinage de la source) que les ondes élastiques correspondent à de petits déplacements et qu'elles satisfont avec une bonne approximation le modèle des équations de l'élastodynamique linéaire (1.1)(1.2) (milieu élastique linéaire isotrope).

Nous considérons le problème réduit à deux dimensions d'espace (x horizontale et z verticale) :

- nous faisons l'hypothèse (bien sûr) restrictive que le milieu géologique est constant suivant la troisième dimension y.

- nous supposons également que les déplacements sont indépendants de y ou encore que l'excitation est une source ligne (parallèle à y).

Nous supposons connues la structure géologique du milieu, l'excitation de la source S et nous proposons de déterminer, à l'aide du modèle mécanique retenu, les sismogrammes synthétiques, c'est-à-dire l'état vibratoire en surface qui aurait été enregistré si l'expérience physique vérifiait les hypothèses précédentes.

De telles simulations :

- permettent une meilleure compréhension des phénomènes de propagation d'ondes dans une structure compliquée.
- constituent une aide à l'interprétation géologique : on peut, par comparaison des sismogrammes synthétiques et enregistrés, valider (ou améliorer) la structure géologique retenue à l'issue de l'interprétation (ceci sans limitation pratique sur la complexité de la structure).
- permettent d'élargir la gamme des exemples synthétiques sur lesquels on teste les nouvelles méthodes de traitement.

Enfin, nous envisageons une simulation numérique car :

- la simulation en laboratoire (modèle réduit par exemple) est malaisée.
- la complexité des structures géologiques étudiées ne permet pas d'envisager le calcul de solutions analytiques du problème et limite considérablement l'intérêt d'approximations par l'optique géométrique (méthodes de rayons).



### 0.3.3. Difficultés numériques

Bien que l'approche numérique du problème semble séduisante, elle se heurte à la difficulté que constitue le volume des calculs à effectuer :

- le problème dépend de 3 dimensions (2 dimensions d'espace + le temps).
- la discrétisation en espace du problème nécessite le calcul de l'état vibratoire en un grand nombre de points.

L'étude présentée dans ce rapport montre que, pour obtenir une bonne approximation de la solution, il faut choisir un pas de discrétisation en espace égal au dixième de la longueur d'onde. Cette longueur d'onde étant d'environ 40 mètres, il faut 250 000 points pour discrétiser un domaine de 5 km x 4 km.

- la discrétisation en temps du problème nécessite également l'introduction d'un grand nombre de points ; environ 2 000 pas de temps sont nécessaires pour le calcul d'un sismogramme synthétique de 4 secondes.

Enfin remarquons que les équations à résoudre (1.1), (1.2) sont relativement compliquées par rapport à l'équation des ondes par exemple.

Compte tenu de ces difficultés, il est essentiel de sélectionner, en vue de la réalisation d'un code de simulation les schémas numériques les plus performants et de pouvoir répondre à la question suivante ;

" Pour des paramètres physiques donnés, quel est le schéma numérique permettant d'atteindre une précision donnée en un temps calcul minimum ?".

### 0.4. Travaux en cours

Nous indiquons une liste de travaux que nous sommes en train d'effectuer ou que nous projetons de faire en collaboration avec d'autres. Ces travaux compléteront cette première partie et feront l'objet de prochains rapports.

#### 0.4.1. Prolongements des travaux de la première partie

Nous comptons étudier d'autres schémas numériques en considérant des discrétisations en espace et en temps différentes :

- éléments finis  $P_2$
- éléments finis mixtes, etc...
- schémas de Newmark ...

Il serait important de considérer l'ensemble de ces questions en dimension 3 d'espace ainsi qu'en coordonnées cylindriques.

#### 0.4.2. Etude des réflexions et réfraction d'ondes planes sur un interface plan

Nous examinons actuellement :

- les ondes de surface numériques (ondes de Rayleigh numériques).
- la réflexion d'une onde P ou d'une onde S sur une surface "libre".
- la réflexion et la réfraction d'ondes P et S numériques à l'interface plan entre deux milieux homogènes de paramètres  $(\rho, \lambda, \mu)$  différents.

Concernant ce dernier point nous posons le problème : comment raccorder au mieux deux demi-espaces avec des maillages de taille différente ? En effet, la différence de taille du maillage, même dans le cas d'un milieu homogène (milieux 1 et 2 ayant les mêmes coefficients) introduit à elle seule des réflexions et des réfractions numériques. L'interface joue donc un rôle. Ainsi peut-on sur l'exemple figuré ci-dessous dire si une des solutions est meilleure que l'autre ?

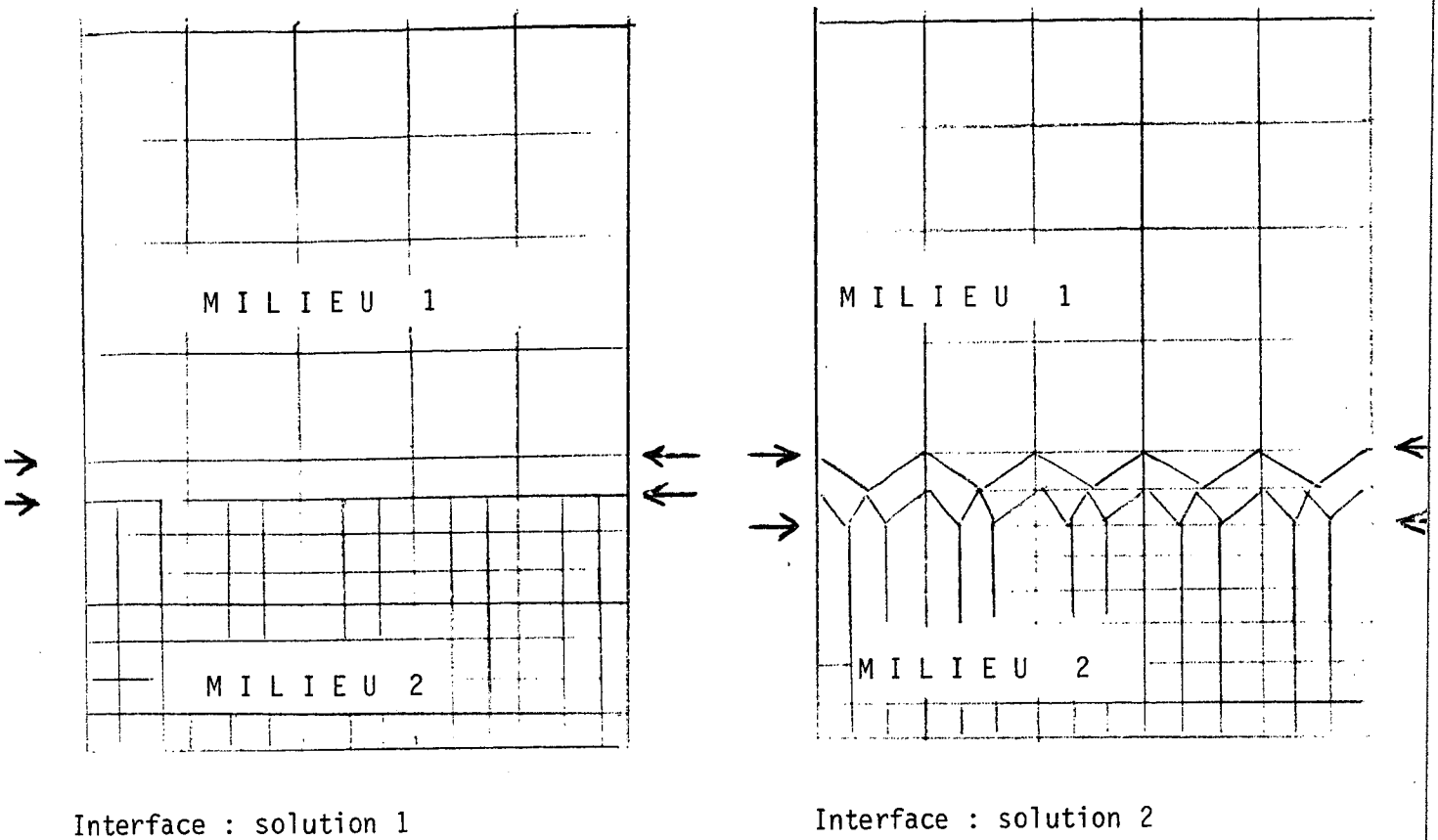


FIGURE 0.4

#### 0.4.3. Etude de la diffraction due à une distorsion du maillage

Toutes les études effectuées ou envisagées précédemment peuvent être traitées à l'aide d'ondes planes car les milieux considérés sont périodiques. Ceci n'est plus le cas si le maillage est irrégulier dans une partie du domaine (cf. Figure 0.5.)

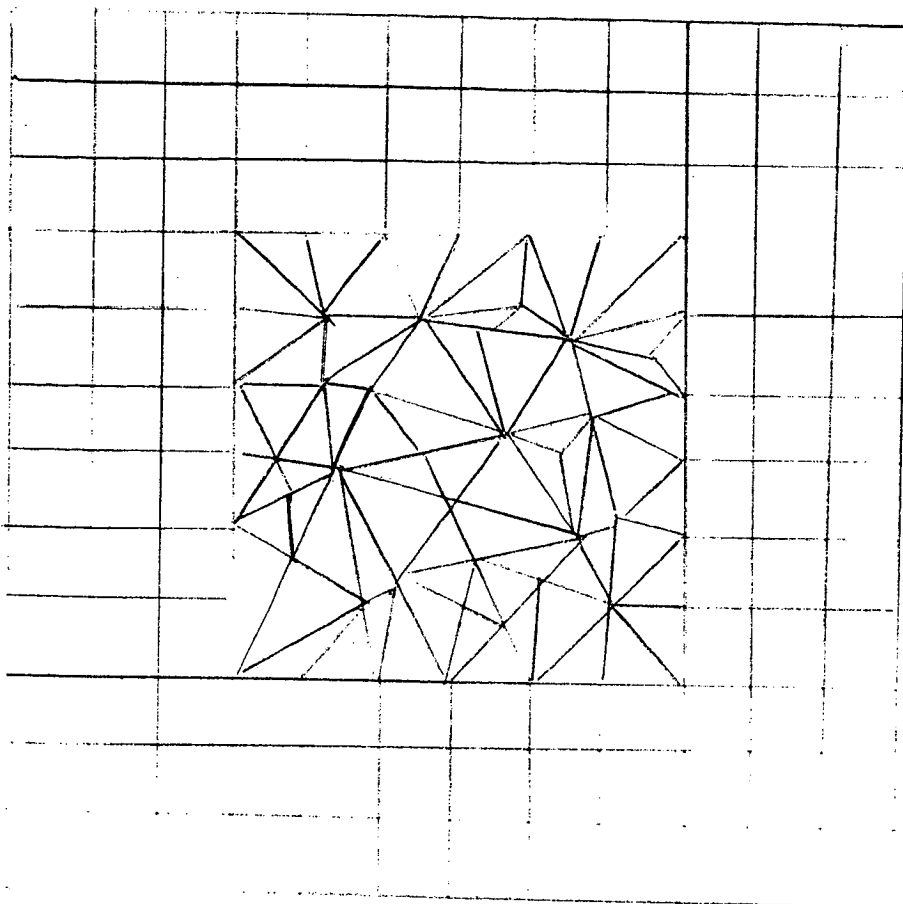


FIGURE 0.5.

Cette situation est très fréquente : elle intervient dès que le milieu n'est plus stratifié en couches planes et possède une structure complexe (dôme, faille, poche, ..., cf. Figure 0.2.). De tels milieux peuvent être caractérisés par la donnée des différentes interfaces : c'est à partir du découpage de ces dernières que de nombreux programmes informatiques génèrent automatiquement un maillage.

Il est important pour notre problème de savoir estimer cette distorsion due à la distorsion du maillage, et qui constitue un phénomène

numérique parasite. Une approche consiste à considérer la partie du maillage irrégulière comme un obstacle dans un milieu discret et à transposer la théorie de la diffraction. On peut aussi envoyer une onde plane numérique sur cet obstacle et calculer la partie diffractée. L'étude mathématique et la résolution numérique du problème ainsi posé est actuellement en cours.

## CHAPITRE 1

QUELQUES RAPPELS SUR LES EQUATIONS DE  
L'ELASTODYNAMIQUE LINEAIRE

## 1. QUELQUES RAPPELS SUR LES EQUATIONS DE L'ELASTODYNAMIQUE LINEAIRE

Nous rappelons ici juste quelques résultats que nous utiliserons dans toute la suite. Nous adaptions la présentation des livres de J.D. ACHENBACH [ 2 ] ou J. MIKLOWITZ [25] qui contiennent une étude très complète du sujet.

### 1.1. Dérivation des équations

On se place dans le plan de coordonnées  $x, z$ . On note :

$u(x, z, t)$  : le déplacement par rapport à la position d'équilibre, du point de coordonnées  $(x, z)$  dans la direction de l'axe des  $x$  (direction horizontale) à l'instant  $t$ .

$w(x, z, t)$  : le déplacement par rapport à la position d'équilibre du point de coordonnées  $(x, z)$  dans la direction de l'axe des  $z$  (direction verticale) à l'instant  $t$ .

$\begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{zx} & \Sigma_{zz} \end{pmatrix} (x, z, t)$  : le tenseur des déformations au point de coordonnées  $(x, z)$  à l'instant  $t$ . Les déformations sont définies à partir des dérivées des déplacements à l'aide des expressions suivantes :

$$(1.3) \quad \begin{cases} \Sigma_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \Sigma_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \Sigma_{xz} = \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{zx} & \Sigma_{zz} \end{pmatrix} (x, z, t)$  : le tenseur des contraintes au point  $(x, z)$  à l'instant  $t$  (cf. figure 1.1).

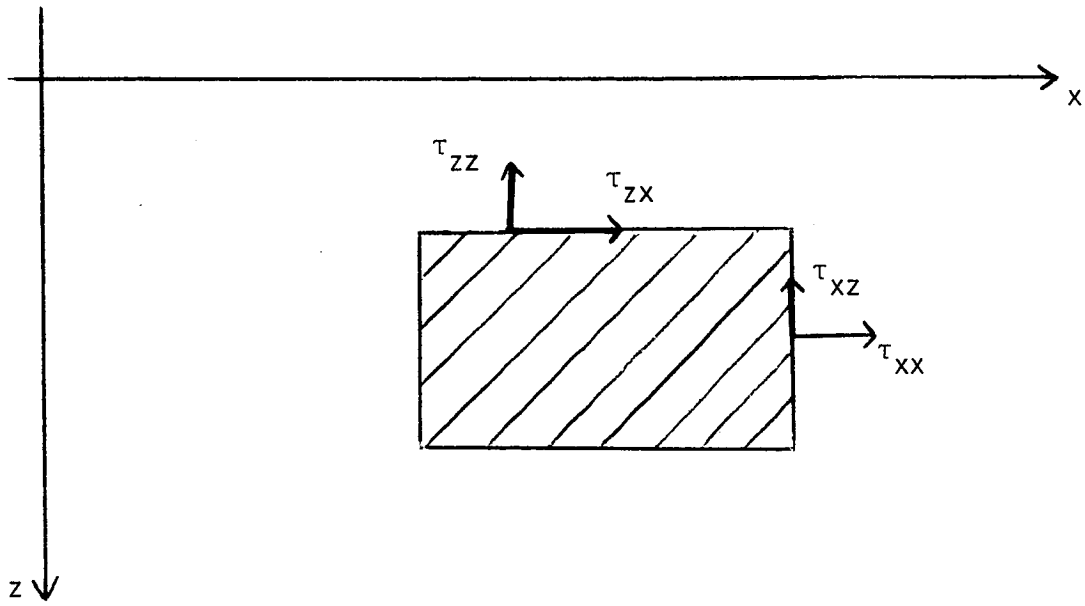


Figure 1.1



On sait que l'on a :  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

On envisage ici comme relation contrainte déformation la loi des milieux homogènes isotropes, linéaires élastiques :

$$(1.4) \quad \begin{cases} \tau_{xx} = \lambda(\Sigma_{xx} + \Sigma_{zz}) + 2\mu\Sigma_{xx} \\ \tau_{zz} = \lambda(\Sigma_{xx} + \Sigma_{zz}) + 2\mu\Sigma_{zz} \\ \tau_{xz} = 2\mu\Sigma_{xz} \end{cases}$$

où  $\lambda, \mu$  désignent les paramètres de Lamé du milieu considéré.

On déduit facilement de (1.3) et (1.4) l'expression des contraintes en fonction des déplacements :

$$(1.5) \quad \begin{cases} \tau_{xx} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{zz} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{cases}$$

Les équations de la dynamique s'écrivent, en l'absence de forces extérieures :

$$(1.6) \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \end{cases}$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique du milieu.

On obtient alors les équations (1.1) et (1.2) en remplaçant dans (1.6) les contraintes par leur expression en fonction des déplacements donnée par (1.5).

## 1.2. Principe de conservation de l'énergie

Supposons qu'aucune force extérieure n'agit sur le milieu : il n'évolue donc que sous le seul effet des conditions initiales qui lui ont été imprimées. Il y a alors conservation de l'énergie. Les équations (1.1) et (1.2) traduisent bien cette propriété : en effet les hypothèses effectuées entraînent que les équations (1.1) et (1.2) sont vraies dans tout l'espace. Multiplions l'équation (1.1) par  $\frac{\partial w}{\partial t}$ , intégrons en espace les égalités obtenues et sommons. Après intégration par partie on a :

$$(1.7) \quad \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} (\rho (\frac{\partial u}{\partial t})^2 + \rho (\frac{\partial w}{\partial t})^2) dx dz + \\ + \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} (\tau_{xx} \Sigma_{xx} + \tau_{zz} \Sigma_{zz} + 2\tau_{xz} \Sigma_{xz}) dx dz = 0$$

Posons :

$$(1.8) \quad \hat{K}(x, z, t) = \frac{1}{2} \rho (\frac{\partial u}{\partial t})^2 + \frac{1}{2} \rho (\frac{\partial w}{\partial t})^2$$

$$(1.9) \quad \hat{U}(x, z, t) = \frac{1}{2} (\tau_{xx} \Sigma_{xx} + \tau_{zz} \Sigma_{zz} + 2\tau_{xz} \Sigma_{xz})$$

$\hat{K}$  représente la densité d'énergie cinétique

$\hat{U}$  représente la densité d'énergie de déformation.

Introduisons les énergies totales

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} K(t) = \int \hat{K} dx dz : \text{énergie cinétique totale} \\ U(t) = \int \hat{U} dx dz : \text{énergie de déformation totale} \\ W(t) = K(t) + U(t) : \text{énergie totale} \end{array} \right.$$

L'égalité (1.7) s'écrit alors :

$$(1.11) \quad \frac{dW(t)}{dt} = 0$$

ce qui n'exprime rien d'autre que la conservation de l'énergie.

### 1.3. Propagation d'ondes planes

Il s'agit de déterminer les solutions de (1.1) et (1.2) qui sont de la forme :

$$(1.12) \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \vec{d} y(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \text{ où}$$

- $\vec{x}$  est le vecteur de composantes  $(x, z)$ .
- $\vec{k}$  est le vecteur d'onde, de composantes  $(k_1, k_2)$  : il indique la direction de propagation.
- $\omega$  est la pulsation.
- $\frac{\omega}{|\vec{k}|}$  est la vitesse de phase de l'onde.
- $\vec{d}$  est un vecteur qui donne la direction du déplacement.
- $\lambda \rightarrow y(\lambda)$  est une fonction régulière a priori quelconque. Lorsqu'on choisit la fonction  $y$  de la forme

$$y(\lambda) = \exp i \lambda$$

on envisage alors une onde plane harmonique.

Rappelons que l'onde est plane puisque les points pour lesquels le déplacement est le même à un instant donné sont des droites.

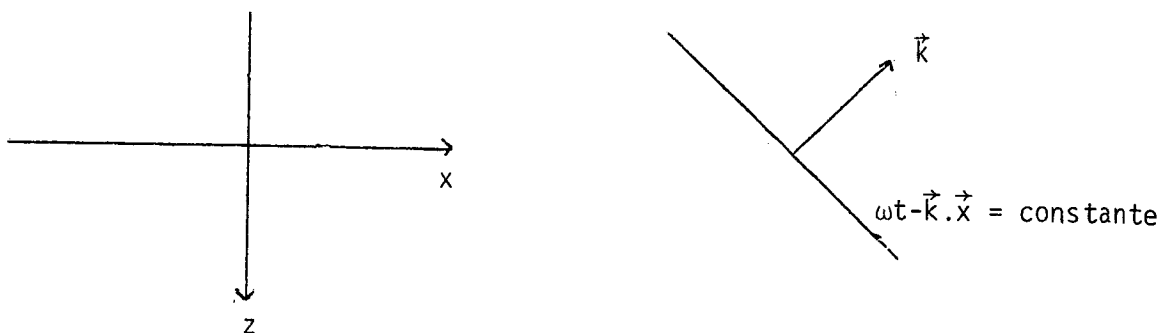


Figure 1.2

Un calcul simple montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction donnée par (1.12) soit solution de (1.1) et (1.2) est que l'équation suivante soit vérifiée :

$$(1.13) \quad \rho\omega^2 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)k_1^2 + \mu k_2^2 & (\lambda + \mu) k_1 k_2 \\ (\lambda + \mu) k_1 k_2 & (\lambda + 2\mu) k_2^2 + \mu k_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Posons :

$$(1.14) \quad \hat{B}_0(\vec{k}) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) k_1^2 + \mu k_2^2 & (\lambda + \mu) k_1 k_2 \\ (\lambda + \mu) k_1 k_2 & (\lambda + 2\mu) k_2^2 + \mu k_1^2 \end{pmatrix}$$

La matrice  $B_0(\vec{k})$  est symétrique définie positive.

L'équation (1.13) implique que :

$$(1.15) \quad -\rho\omega^2 \text{ est valeur propre de } \hat{B}_0(\vec{k})$$

$$(1.16) \quad -\vec{d} \text{ est vecteur propre associé}$$

### 1.3.1. Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de $\hat{B}_0(\vec{k})$

Montrons le

Lemme 1.1. :

Les valeurs propres de  $\hat{B}_0(\vec{k})$  sont égales à :

$$(1.17) \quad s_1^0(\vec{k}) = (\lambda + 2\mu)(k_1^2 + k_2^2)$$

$$(1.18) \quad s_2^0(\vec{k}) = \mu(k_1^2 + k_2^2)$$

Les directions propres correspondantes sont données par :

$$(1.19) \quad \vec{d}_1^0(\vec{k}) \parallel \vec{k}$$

$$(1.20) \quad \vec{d}_2^0(\vec{k}) \perp \vec{k}$$

Démonstration du lemme 1.1.

L'équation :  $\hat{B}_0(\vec{k})\vec{d} = s\vec{d}$ , s'écrit :

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)k_1^2 d_1 + \mu k_2^2 d_1 + (\lambda + \mu) \cdot k_1 k_2 d_2 = s d_1 \\ (\lambda + \mu) k_1 k_2 d_1 + (\lambda + 2\mu) k_2^2 d_2 + \mu k_1^2 d_2 = s d_2 \end{cases}$$

Soit encore :

$$\begin{cases} \mu (k_1^2 + k_2^2) d_1 + (\lambda + \mu) (k_1 d_1 + k_2 d_2) k_1 = s d_1 \\ \mu (k_1^2 + k_2^2) d_2 + (\lambda + \mu) (k_1 d_1 + k_2 d_2) k_2 = s d_2 \end{cases}$$

$$(\mu |\vec{k}|^2 - s) \vec{d} + (\lambda + \mu) (\vec{k} \cdot \vec{d}) \vec{k} = 0$$

d'où le lemme 1.1.

### 1.3.2. La relation de dispersion

L'équation (1.15) admet deux solutions données par :

$$(1.21) \quad \rho \omega_1^2 = s_1^0(\vec{k}) = (\lambda + 2\mu)(k_1^2 + k_2^2)$$

$$(1.22) \quad \rho \omega_2^2 = s_2^0(\vec{k}) = \mu(k_1^2 + k_2^2)$$

Ces deux égalités constituent la relation de dispersion. Elle donne une condition nécessaire et suffisante sur  $\vec{k}$  et  $\omega$  pour qu'il y ait des solutions de la forme (1.12) avec  $\vec{d}$  non nul.

### 1.3.3. Les ondes P et S

Les deux familles de solutions correspondent à deux types d'ondes notées respectivement ondes P et ondes S.

Ondes P (P comme "pressure" au "primary")

Elles correspondent au couple  $(s_1^0(\vec{k}), \vec{d}_1^0(\vec{k}))$ . La direction du déplacement  $\vec{d}_1^0(\vec{k})$  est parallèle à la direction de propagation  $\vec{k}$  :

$$\vec{d}_1^0(\vec{k}) // \vec{k}$$

Le module de la vitesse de phase est donné par :

$$(1.23) \quad v_1 = \frac{|\omega_1|}{|\vec{k}|} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{1/2} = v_p$$

Il est indépendant du vecteur d'onde  $\vec{k}$ . On dit qu'il n'y a pas dispersion des ondes P. La vitesse de groupe (cf. §1.7.) a la direction du vecteur de propagation  $k$  et sa norme est égale à  $v_p$ .

$$(1.24) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega_1}{\partial k_1} = \frac{k_1}{|\vec{k}|} v_p \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial k_2} = \frac{k_2}{|\vec{k}|} v_p \end{cases}$$

(on a considéré ici la solution positive de (1.21)).

Ces ondes P sont des ondes longitudinales ou de pression. Pour s'en persuader, il suffit de représenter à un instant donné le déplacement en un certain nombre de points, dans le cas d'une onde P harmonique par exemple.

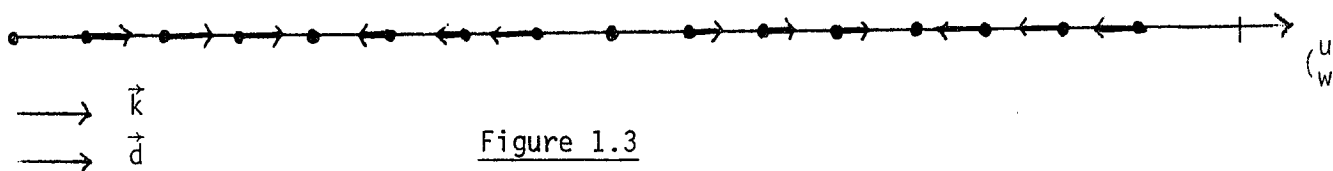


Figure 1.3

On vérifie aisément que le rotationnel d'une onde P est nul

$$(1.25) \quad -\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Ondes S (S comme "shear" ou "secondary")

Elles correspondent au couple  $(s_2^0(\vec{k}), d_2^0(\vec{k}))$ . La direction du déplacement  $\vec{d}_2^0(\vec{k})$  est perpendiculaire à la direction de propagation  $\vec{k}$  :

$$\vec{d}_2^0(\vec{k}) \perp \vec{k}$$

Le module de la vitesse de phase est donné par :

$$(1.26) \quad v_2 = \frac{|\omega_2|}{|\vec{k}|} = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2} = v_S$$

Il est indépendant du vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Là aussi il n'y a pas de dispersion des ondes S. La vitesse de groupe des ondes S a la direction du vecteur de propagation  $\vec{k}$  et sa norme est égale à  $v_S$  :

$$(1.27) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega_2}{\partial k_1} = \frac{k_1}{|\vec{k}|} v_S \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial k_2} = \frac{k_2}{|\vec{k}|} v_S \end{cases}$$

(on a considéré de même la solution positive de (1.22)).

Ces ondes S sont des ondes transversales ou de cisaillement. Pour s'en persuader, il suffit de représenter à un instant donné le déplacement en un certain nombre de points, dans le cas d'une onde S harmonique par exemple.

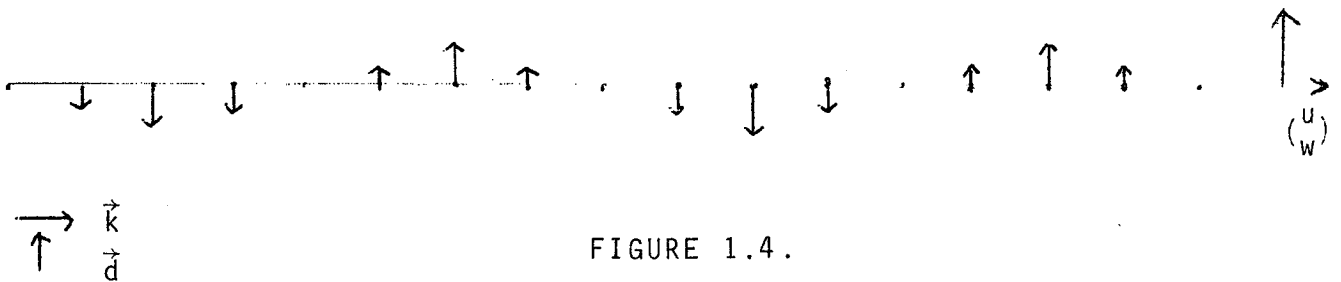


FIGURE 1.4.

On vérifie aisément que la divergence d'une onde S est nulle

$$(1.28) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Remarquons que nous avons supposé le vecteur  $\vec{k}$  réel, c'est-à-dire que nous n'avons pas envisagé les ondes évanescentes dans une direction.

#### 1.4. Equations vérifiées par les potentiels

Soit  $\vec{u} = (u, w)$  une solution de (1.1)-(1.2). On peut l'écrire sous la forme :

$$(1.29) \quad \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

où  $\phi$  et  $\psi$  désignent les potentiels. On montre alors aisément le

#### Lemme 1.2

La fonction  $\phi$  vérifie l'équation des ondes avec la vitesse de propagation  $V_p$

$$(1.30) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - V_p^2 \Delta \phi = 0$$

La fonction  $\psi$  vérifie l'équation des ondes avec la vitesse de propagation  $V_S$

$$(1.31) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - V_S^2 \Delta \psi = 0 \quad \square$$

On effectue la démonstration en dérivant les équations (1.1) et (1.2) par rapport aux différentes variables : rappelons que nous avons supposé les coefficients  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  constants.

Posons :

$$(1.32) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ \operatorname{rot} \vec{u} = - \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$



De (1.30) on déduit le

Corollaire 1.1.

La divergence d'une solution  $\vec{u}$  de (1.1), (1.2) vérifie

$$(1.33) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{div} \vec{u}) - V_p^2 \Delta(\operatorname{div} \vec{u}) = 0$$

Le rotationnel d'une solution  $\vec{u}$  de (1.1), (1.2) vérifie

$$(1.34) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{rot} \vec{u}) - V_S^2 \Delta(\operatorname{rot} \vec{u}) = 0 \quad \square$$

Il est bien connu que la divergence de  $u$  mesure la dilatation : on retrouve bien que les ondes de pression se propagent avec la vitesse  $V_p$ . Ce résultat est cohérent avec (1.25) et (1.28).

1.5. Vitesse de Propagation finie

On sait que, pour le modèle (1.1), (1.2), un ébranlement se propage au maximum avec la vitesse  $V_p$ . Supposons par exemple que les conditions initiales soient nulles en dehors d'un compact  $C$ . A l'instant  $t$ , le déplacement  $(\frac{u}{w})$  sera nul à l'extérieur de  $C_t$  ensemble des points de l'espace à une distance  $V_p t$  du compact  $C$ .

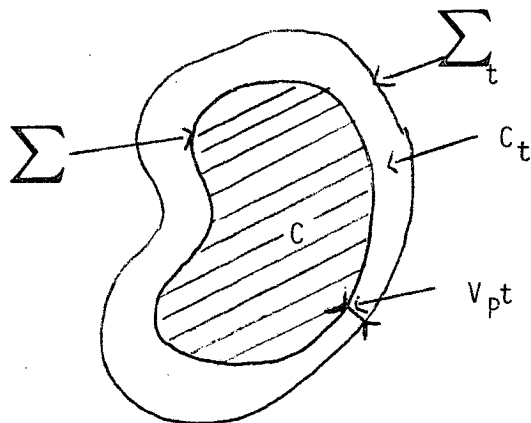


Figure 1.5

$\sum_t$  Notons qu'à deux dimensions d'espace, il existe un front d'onde avant mais pas de front d'onde arrière.

1.6. Valeur des coefficients  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  envisagés

Remarquons d'abord que dans cette première étude, nous raisonnons dans un milieu homogène. Nous pouvons donc diviser les équations (1.1) et (1.2) par  $\rho$ . Seuls interviennent donc deux paramètres  $\frac{\lambda}{\rho}$  et  $\frac{\mu}{\rho}$  ou encore les deux vitesses  $V_P$  et  $V_S$  définies en (1.23) et (1.26).

$$(1.35) \quad \begin{cases} V_P = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2} \\ V_S = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2} \end{cases}$$

On peut alors effectuer un changement d'échelle en temps et choisir comme unité de temps, le temps mis par une onde P pour parcourir la longueur unité. En conclusion, l'étude des équations (1.1) et (1.2) dans un milieu homogène dépend uniquement du rapport des vitesses des ondes P et des ondes S. Ce rapport peut s'exprimer à partir du coefficient de Poisson

$$(1.36) \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} ; \quad 0 < \nu < 0.5$$

On a :

$$(1.37) \quad \nu = \frac{\lambda / \mu}{2(1+\lambda/\mu)} ; \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1-2\nu} ; \quad \frac{V_P}{V_S} = \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right)^{1/2} = \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\right)^{1/2}$$

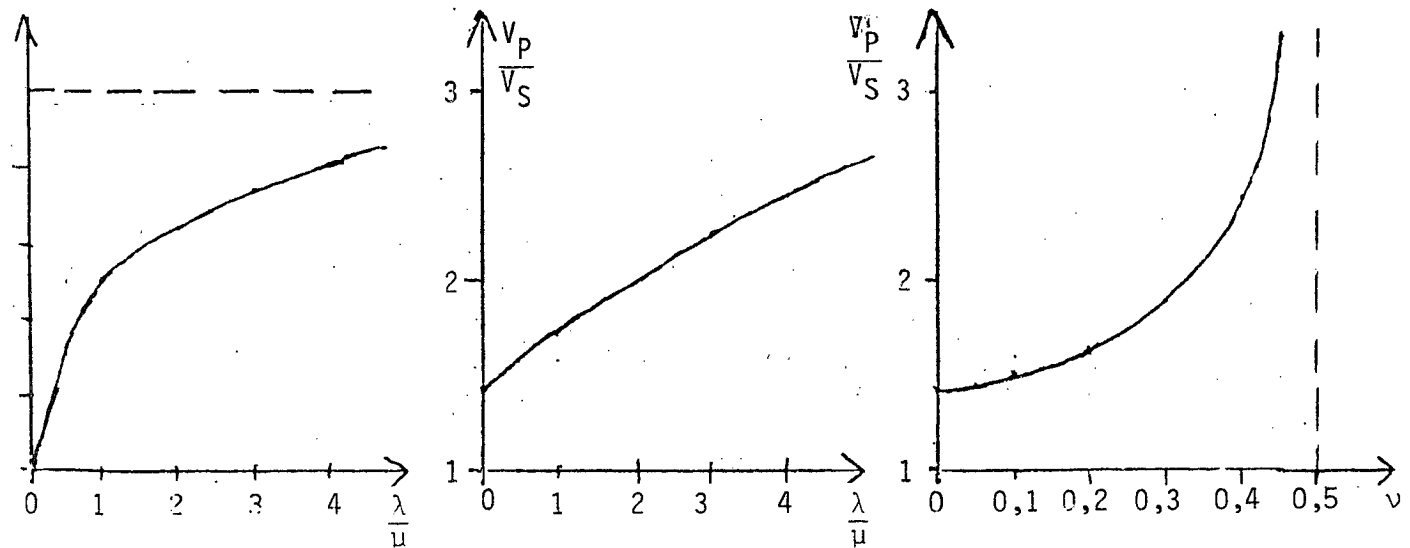


Figure 1.6

Dans le tableau 1.1 nous indiquons les valeurs des coefficients de Poisson qui interviennent dans les problèmes de sismique. On constate qu'elles s'étalent suivant l'intervalle  $[0, 0.5]$ .

Milieu Géologique	Coefficient de Poisson $\nu$		$\frac{V_P}{V_S}$	
	Min	Max	Min	Max
Sable à gaz	0	0,2	1,41	1,7
Roches compactes	0,18	0,37	1,6	2,2
Granite, roches intrusives	0,18	0,33	1,6	2
Calcaire, sel massif	0,22	0,35	1,7	2,1
Grès	0,25	0,37	1,7	2,2
Craie, Tuf	0,36	0,43	2,1	2,9
Argile	0,36	0,44	2,1	3
Sable sec	0,38	0,42	2,3	2,9
Roches non consolidées	0,37	0,5	2,2	$\infty$
Sable saturé d'eau	0,42	0,5	2,7	$\infty$
Argile saturée d'eau	0,44	0,5	3	$\infty$

Tableau 1.1. : valeurs du coefficient de Poisson  $\nu$  et du rapport des vitesses  $\frac{V_P}{V_S}$  pour différents milieux géologiques.

### 1.7. Rappel sur la notion de vitesse de groupe

Pour introduire la notion de vitesse de groupe, nous suivons la démarche adoptée dans [ 21 ]. Nous considérons à l'instant  $t = 0$  un paquet d'ondes centré autour d'un vecteur d'onde  $\vec{k}_0$ .

$$(1.40) \quad \vec{u}_0(\vec{x}) = \int a(\vec{k}) d(\vec{k}) \exp -i \vec{k} \cdot \vec{x} d\vec{k}$$

Nous distinguons l'amplitude  $a(\vec{k})$  et la direction  $d(\vec{k})$ . Nous supposons donc

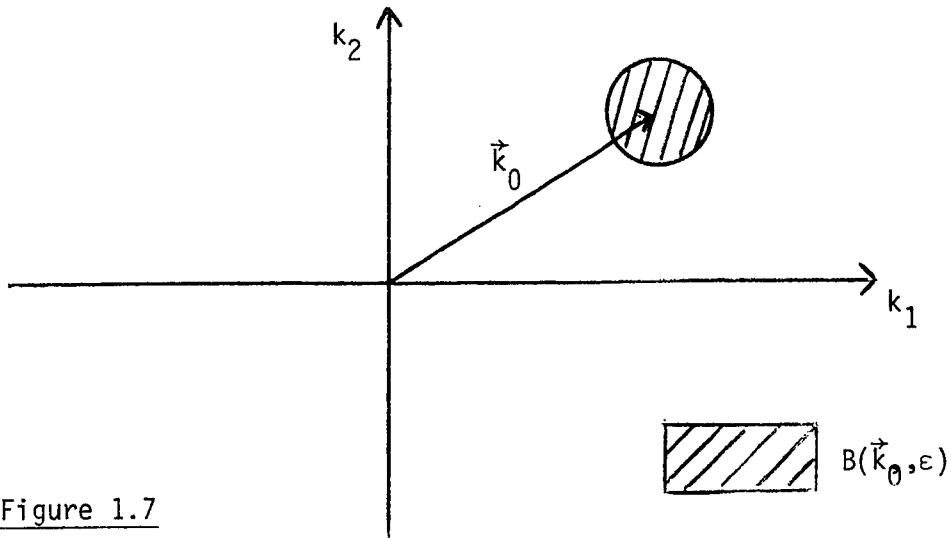


Figure 1.7

$$(1.41) \quad a(\vec{k}) = 0 \quad \forall \vec{k} \notin B(\vec{k}_0, \epsilon)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre positif petit par rapport aux variations secondes de l'application

$$(1.42) \quad \vec{k} \rightarrow \omega(k)$$

Chaque composante  $\exp -i \vec{k} \cdot \vec{x}$  évolue avec la pulsation  $\omega(\vec{k})$  et par superposition on obtient la solution de (1.1) (1.2) correspondant à la donnée initiale (1.40). Le paquet d'onde  $\vec{u}_0(x)$  évolue alors comme :

$$(1.43) \quad \vec{u}(\vec{x}, t) = \int a(\vec{k}) d(\vec{k}) \exp i (\omega(\vec{k}) t - \vec{k} \cdot \vec{x}) d\vec{k}$$

Nous développons  $\omega(\vec{k})$  autour de  $\vec{k}_0$

$$(1.44) \quad \omega(\vec{k}) = \omega(\vec{k}_0) + \text{grad } \omega(\vec{k}_0) \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0) + O(|\vec{k} - \vec{k}_0|^2)$$

Nous portons cette expression dans (1.43) :

$$\left| \begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}, t) &= \exp i (\omega(\vec{k}_0) - \text{grad } \omega(\vec{k}_0) \cdot \vec{k}_0) t \\ &\times \int a(\vec{k}) d(\vec{k}) \exp - i [(\vec{x} - \text{grad } \omega(\vec{k}_0) t) \vec{k} - O(|\vec{k} - \vec{k}_0|^2) t] d\vec{k} \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}, t) &= \exp i (\omega(\vec{k}_0) - \text{grad } \omega(\vec{k}_0) \cdot \vec{k}_0) t \\ &\times \int a(\vec{k}) d(\vec{k}) (\exp - i(\vec{x} - \text{grad } \omega(\vec{k}_0) t) \vec{k}) d\vec{k} + t O(|\vec{k} - \vec{k}_0|^2) \end{aligned} \right.$$

$$(1.45) \quad \left| \begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}, t) &= (\exp i (\omega(\vec{k}_0) - \text{grad } \omega(\vec{k}_0) \cdot \vec{k}_0) t) \vec{u}_0(\vec{x} - \text{grad } \omega(\vec{k}_0) \cdot t) + \\ &+ t \cdot O(|\vec{k} - \vec{k}_0|^2) \end{aligned} \right.$$

Considérons les modules :

$$(1.46) \quad \left| |\vec{u}(\vec{x}, t)| = |\vec{u}_0(\vec{x} - \text{grad } \omega(\vec{k}_0) \cdot t)| + t O(|\vec{k} - \vec{k}_0|^2) \right.$$

En première approximation, le module de  $\vec{u}$  se propage avec le vecteur vitesse  $\text{grad } \omega(\vec{k}_0)$  qui est par définition la vitesse de groupe. Cette approximation est d'autant meilleure que les termes supplémentaires dans les développements (1.44) et (1.45) sont petits ; ceci dépend :

- de la variation de la fonction  $\vec{k} \rightarrow \omega(\vec{k})$  sur la boule  $B(\vec{k}_0, \epsilon)$
- de l'intervalle de temps  $[0, t]$  considéré.

CHAPITRE 2

ETUDE D'UN SCHEMA NUMERIQUE  
AUX DIFFERENCES FINIES

## 2. ETUDE D'UN SCHEMA NUMERIQUE AUX DIFFERENCES FINIES

Nous présentons ici un schéma numérique aux différences finies pour approximer la solution  $(u, w)$  du système d'équations (1.1), (1.2). Ce schéma est très classique (cf. par exemple [1], [3], [4], [18], [19], [20] [22], [23]).

Nous commençons par étudier la stabilité du schéma. Dans le paragraphe 2.2. nous donnons une condition suffisante de stabilité. Dans le paragraphe 2.3. nous montrons que cette condition est aussi nécessaire. Nous examinons ensuite (paragraphe 2.4) la propagation d'ondes planes harmoniques dans le schéma numérique. Enfin dans le paragraphe 2.6 nous étudions la dispersion de ces ondes en fonction des paramètres de l'onde, des paramètres de discrétisation et des paramètres du milieu.

### 2.1. PRESENTATION DU SCHEMA NUMERIQUE (schéma 1)

Il s'agit d'un schéma aux différences finies. On construit dans le plan  $(x, z)$  une grille parallèle aux axes, uniforme, de pas  $(\Delta x, \Delta z)$

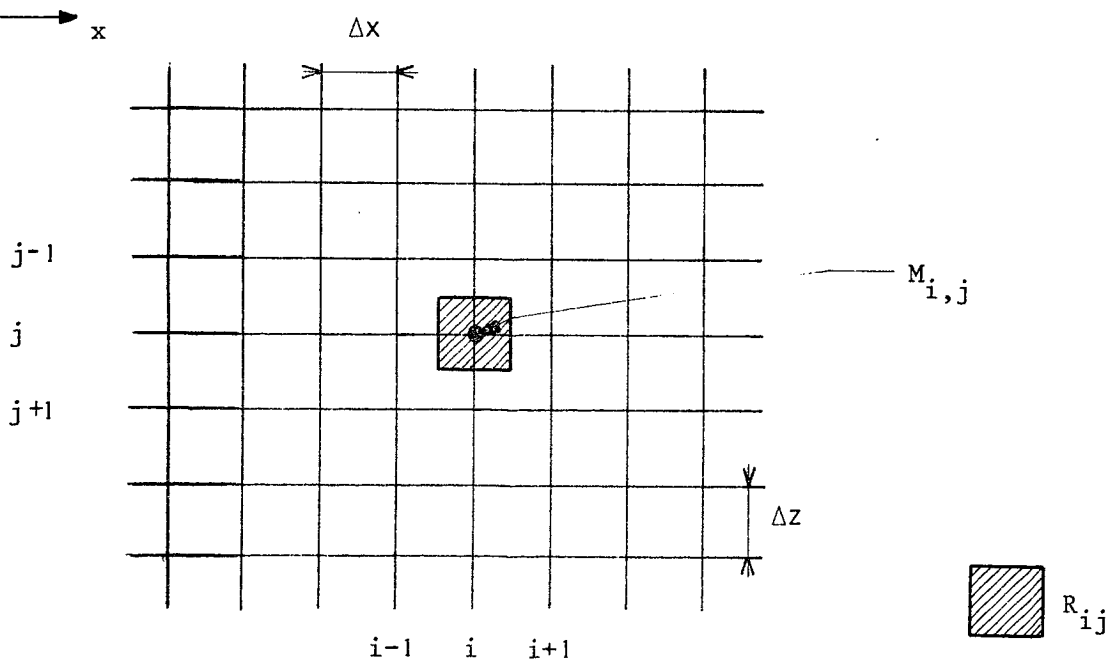


Figure 2.1

On indice par  $i$  et  $j$  les points  $M_{ij}$  de la grille. Le point  $M_{ij}$  a pour coordonnées  $(x_i, z_j)$

$$M_{ij}(x_i, z_j) ; x_i = i \Delta x ; z_j = j \Delta z$$

On désigne par  $R_{ij}$  le rectangle de centre  $M_{ij}$  et dont la longueur des côtés est égale à  $\Delta x$  et  $\Delta z$  :

$$R_{ij} = \{(x, z) \mid |x - x_i| \leq \frac{\Delta x}{2}, |z - z_j| \leq \frac{\Delta z}{2}\}$$

A toute suite (double)  $(u_{ij})$  de nombres réels, on peut associer la fonction réelle  $u$  constante par morceaux définie par :

$$u(x, z) = u_{ij} \quad \forall (x, z) \in R_{ij}$$

On dira que  $u_{ij}$  est la valeur de la fonction  $u$  au point  $M_{ij}$ .

On discrétise aussi le temps en introduisant un pas de temps  $\Delta t$  et les temps  $t^n$ .

$$t^n = n \Delta t \quad , \quad n = 1, 2 \dots$$

Le schéma numérique que nous introduisons permet de calculer une approximation de la solution  $(u, w)$  aux points  $M_{ij}$  et aux instants  $t_n$ . On notera :

$$u_{ij}^n \approx u(x_i, z_j, t^n)$$

$$w_{ij}^n \approx w(x_i, z_j, t^n)$$

Le schéma numérique consiste à remplacer les dérivées par des différences finies.



Discrétisation de l'équation 1.1

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & \rho \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \\
 & + (\lambda + \mu) \frac{w_{i+1,j+1}^n - w_{i+1,j-1}^n - w_{i-1,j+1}^n + w_{i-1,j-1}^n}{4 \Delta x \Delta z} + \\
 & + \mu \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2}
 \end{aligned}$$

Discrétisation de l'équation 1.2

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & \rho \frac{w_{i,j}^{n+1} - 2w_{i,j}^n + w_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{w_{i,j+1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} + \\
 & + (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n - u_{i-1,j+1}^n + u_{i-1,j-1}^n}{4 \Delta x \Delta z} + \\
 & + \mu \frac{w_{i+1,j}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2}
 \end{aligned}$$

Nous n'avons pas pour ce schéma l'équivalent de l'équation (1.33).

En effet posons :

$$(D_x u)_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x}$$

$$(D_x w)_{i,j}^n = \frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j}^n}{\Delta z}$$

Dérivons l'équation (2.1) par rapport à  $x$ , c'est-à-dire formons l'équation :

$$\frac{(2.1)_{i+1,j}^n - (2.1)_{i,j}^n}{\Delta x} = 0$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \rho \frac{(D_x u)_{i,j}^{n+1} - 2 (D_x u)_{i,j}^n + (D_x u)_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} = \\ & (\lambda + 2\mu) \frac{(D_x u)_{i+1,j}^n - 2 (D_x u)_{i,j}^n + (D_x u)_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \\ & + (\lambda + \mu) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2 \Delta x} \left( \frac{(D_z w)_{i+2,j}^n - (D_z w)_{i+1,j}^n}{\Delta x} - \frac{(D_z w)_{i,j}^n - (D_z w)_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right. \\ & + (\lambda + \mu) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2 \Delta x} \left( \frac{(D_z w)_{i+2,j-1}^n - (D_z w)_{i+1,j}^n}{\Delta x} \right. \\ & \left. \left. \frac{(D_z w)_{i,j-1}^n - (D_z w)_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right) + \right. \\ & \left. + \mu \frac{(D_x u)_{i,j+1}^n - 2 (D_x u)_{i,j}^n + (D_x u)_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) \end{aligned}$$

Formons de même l'équation :

$$\frac{(2.2)_{i,j+1}^n - (2.2)_{i,j}^n}{\Delta z} = 0$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{(D_x w)_{i,j}^{n+1} - 2(D_x w)_{i,j}^n + (D_x w)_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} = \\
& (\lambda + 2\mu) \frac{(D_z w)_{i,j+1}^n - 2(D_z w)_{i,j}^n + (D_z w)_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} + \\
& + (\lambda + \mu) \frac{1}{2} \times \frac{1}{2 \Delta z} \left( \frac{(D_x u)_{i,j+2}^n - (D_x u)_{i,j+1}^n}{\Delta z} - \right. \\
& \left. - \frac{(D_x u)_{i,j}^n - (D_x u)_{i,j-1}^n}{\Delta z} \right) \\
& + (\lambda + \mu) \frac{1}{2} \times \frac{1}{2 \Delta z} \left( \frac{(D_x u)_{i-1,j+2}^n - (D_x u)_{i-1,j+1}^n}{\Delta z} - \right. \\
& \left. - \frac{(D_x u)_{i-1,j}^n - (D_x u)_{i-1,j-1}^n}{\Delta z} \right) + \\
& + \mu \frac{(D_x u)_{i,j+1}^n - 2(D_x u)_{i,j}^n + (D_x u)_{i,j}^n}{(\Delta z)^2}
\end{aligned}$$

Nous constatons en ajoutant les deux équations que les termes ne se regroupent pas comme dans le cas continu. Ainsi le terme

$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  est discrétisé de deux façons différentes suivant qu'il provient de  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$  ou de  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right)$ .

Les équations (2.1) et (2.2) permettent de calculer directement les valeurs  $u_{ij}^{n+1}$  et  $w_{ij}^{n+1}$  en fonction des valeurs de  $u$  et  $w$ , aux instants  $n$  et  $n-1$  et aux points  $M_{i,j}$ ,  $M_{i-1,j}$ ,  $M_{i+1,j}$ ,  $M_{i,j-1}$ ,  $M_{i,j+1}$ ,  $M_{i+1,j-1}$ ,  $M_{i+1,j+1}$ ,  $M_{i-1,j+1}$ ,  $M_{i-1,j-1}$ .

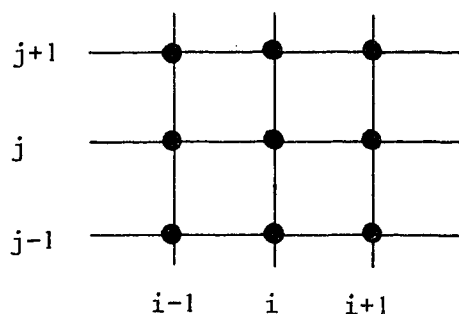


Figure 2.2

Le schéma en temps est explicite. Il est aussi centré, puisque dans les formules 2.1 et 2.2, qui sont les équations discrétisées à l'instant  $n$ , les instants  $n-1$  et  $n+1$  jouent un rôle symétrique.

Nous indiquons sur les figures ci-dessous les points qui interviennent dans l'approximation par différence finie de

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}.$$

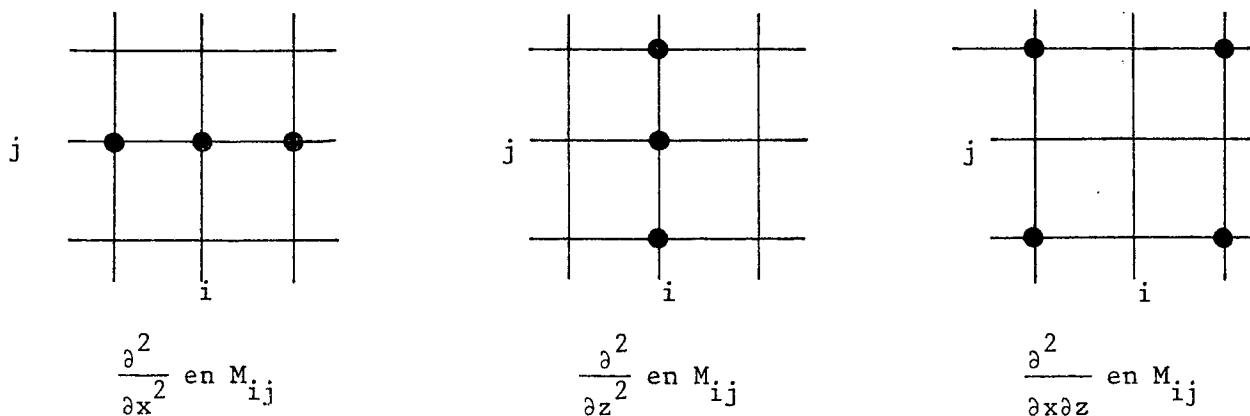


Figure 2.3

## 2.2. ETUDE DU SCHEMA PAR LES METHODES VARIATIONNELLES

Introduisons le sous-espace\*  $L_h^2$  de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  des fonctions  $u_h$  constantes sur chaque rectangle  $R_{ij}$

---

\* Par  $h$  on désigne le couple de paramètres  $\Delta x, \Delta z$ .

$$u_h(x,z) = u_{ij} \quad \forall (x,z) \in R_{ij} \quad \forall (i,j) \in Z^2$$

Ces fonctions sont entièrement définies par la suite double  $u_{ij}$ , et l'on a :

$$\int u_h^2(x,z) dx dz = \sum_{i,j} u_{ij}^2 \Delta x \cdot \Delta z < \infty$$

Nous noterons  $\vec{u}_h$  le couple  $(u_h, w_h)$

$$\vec{u}_h = (u_h, w_h) \in (L_h^2)^2$$

Nous introduisons l'opérateur  $B_h$  linéaire tel que :

$$(2.3) \quad (u_h, w_h) \in (L_h^2)^2 \xrightarrow{B_h} (u'_h, w'_h) \in (L_h^2)^2$$

où le couple  $(u', w')$  est défini par :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u'_{ij} = & - (\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \\ & - (\lambda + \mu) \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4 \Delta x \cdot \Delta z} + \\ & - \mu \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \end{aligned}$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} w'_{ij} = & - (\lambda + 2\mu) \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} + \\ & - (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4 \Delta x \Delta z} + \\ & - \mu \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

L'opérateur  $B_h$  est défini de telle sorte que les équations 2.1 et 2.2 s'écrivent :

$$(2.6) \quad \rho \frac{\vec{u}_h^{n+1} - 2 \vec{u}_h^n + \vec{u}_h^{n-1}}{(\Delta t)^2} + B_h \vec{u}_h^n = 0$$

On peut aussi considérer l'opérateur  $B_h$  comme opérant de  $(L^2(\mathbb{R}^2))^2$  dans lui même :

$$(2.7) \quad \vec{u} = (u, w) \in (L^2(\mathbb{R}^2))^2 \xrightarrow{B_h} \vec{u}' = (u', w') \in (L^2(\mathbb{R}^2))^2$$

$$(2.8) \quad \begin{aligned} u'(x, z) = & - (\lambda + 2\mu) \frac{u(x+\Delta x, z) - 2u(x, z) + u(x-\Delta x, z)}{(\Delta x)^2} \\ & - (\lambda + \mu) \frac{w(x+\Delta x, z+\Delta z) - w(x+\Delta x, z-\Delta z) - w(x-\Delta x, z+\Delta z) + w(x-\Delta x, z-\Delta z)}{4 \Delta x \cdot \Delta z} \\ & - \mu \frac{u(x, z+\Delta z) - 2u(x, z) + u(x, z-\Delta z)}{(\Delta z)^2} \end{aligned}$$

$$(2.9) \quad \begin{aligned} w'(x, z) = & - (\lambda + 2\mu) \frac{w(x, z+\Delta z) - 2w(x, z) + w(x, z-\Delta z)}{(\Delta z)^2} + \\ & + (\lambda + \mu) \frac{u(x+\Delta x, z+\Delta z) - u(x+\Delta x, z-\Delta z) - u(x-\Delta x, z+\Delta z) + u(x-\Delta x, z-\Delta z)}{4 \Delta x \Delta z} \\ & - \mu \frac{w(x+\Delta x, z) - 2w(x, z) + w(x-\Delta x, z)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

On désignera par  $\overline{B}_h$  l'opérateur ainsi prolongé.

### 2.2.1. QUELQUES PROPRIETES DES OPERATEURS $B_h$ ET $\overline{B}_h$

Démontrons en premier lieu le :

Lemme 2.1 - On a :

$$(2.10) \quad |B_h|_2 = |\overline{B}_h|_2$$

Démonstration du lemme 2.1

i) L'opérateur  $\overline{B}_h$  étant un prolongement de  $B_h$  on a :

$$|B_h| \leq |\overline{B}_h|$$

ii) Pour démontrer l'inégalité en sens inverse, considérons le rectangle  $R_{00}$  de centre  $(0,0)$  et de longueur de côtés  $\Delta x$  et  $\Delta z$ .

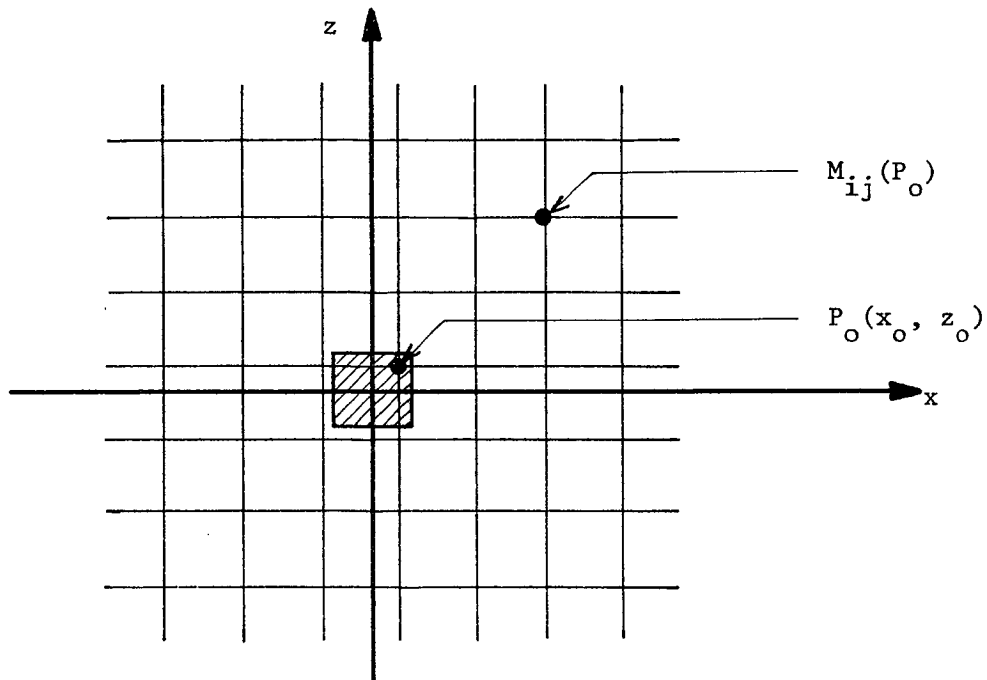


Figure 2.4

A tout point  $P_0$  de  $R_{00}$  associons la grille parallèle aux axes de période  $\Delta x$ ,  $\Delta z$  et passant par  $P_0$  : il s'agit de la grille translaturée de la grille initiale du vecteur  $\overrightarrow{OP_0}$ . Par définition même de l'opérateur  $B_h$  (cf. (2.8), (2.9)) les valeurs de la fonction  $B_h \vec{u}$  aux noeuds de la grille  $M_{ij}(P_0)$  ne dépendent que des valeurs de la fonction  $\vec{u}$  aux noeuds de la grille. Par définition de la norme de  $B_h$  on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} |B_h \vec{u}(M_{ij}(P_0))|_2^2 \Delta x \Delta z \\ & \leq \left( \sum_{i,j} |\vec{u}(M_{ij}(P_0))|_2^2 \Delta x \Delta z \right) \times \|B_h\|_2^2 \end{aligned}$$

Intégrons cette relation en  $P_0$  sur  $R_{00}$  et divisons par  $\Delta x \Delta z$ .  
On obtient :

$$\int |B_h \vec{u}|_2^2 dx dz \leq |B_h|_2^2 \int |\vec{u}|_2^2 dx dz$$

ce qui démontre bien le résultat annoncé.

Nous montrons maintenant le :

Lemme 2.2

Les opérateurs  $B_h$  et  $\overline{B_h}$  sont symétriques et semi-définis positifs.

Démonstration du lemme 2.2

Nous effectuons la démonstration uniquement pour l'opérateur  $B_h$ .  
Dans le cas de l'opérateur  $\overline{B_h}$  on adapte le raisonnement comme au ii) de la démonstration du lemme 2.1.

On vérifie aisément le caractère symétrique de l'opérateur  $B_h$ .  
En effet, montrons que l'on a :

$$(B_h \vec{u}_h, \vec{u}_h)_{(L_h^2)^2} \geq 0 \quad \forall \vec{u}_h \in (L_h^2)^2$$

Pour cela posons :

$$(B_h \vec{u}_h, \vec{u}_h)_{(L_h^2)^2} = S_1 + S_2 \text{ avec :}$$

$$S_1 = \left( \sum_{i,j} u_{ij}' u_{ij} \right) \Delta x \Delta z$$

$$S_2 = \left( \sum_{i,j} w_{ij}' w_{ij} \right) \Delta x \Delta z$$

Calcul de  $S_1$

D'après (2.4), le terme  $u_{ij}'$  est la somme de 3 termes. On peut donc décomposer  $S_1$  en trois sommes.



Des intégrations par parties discrètes donnent :

$$\sum_{i,j} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \cdot u_{ij} \cdot \Delta x \Delta z = \sum_{i,j} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \Delta z$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i,j} - \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4 \Delta x \Delta z} \cdot u_{ij} \Delta x \Delta z &= \\ &= \sum_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \Delta x} \cdot \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2 \Delta z} \Delta x \cdot \Delta z \end{aligned} \right\}$$

$$\sum_{i,j} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} u_{ij} \Delta x \Delta z = \sum_{i,j} \left( \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta z} \right)^2 \Delta x \Delta z$$

En multipliant ces égalités par les bons coefficients et en sommant, on obtient :

$$\begin{aligned} S_1 &= (\lambda + 2\mu) \sum_{i,j} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \Delta z + \\ &+ (\lambda + \mu) \sum_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \Delta x} \cdot \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2 \Delta z} \Delta x \Delta z + \\ &+ \mu \sum_{i,j} \left( \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta z} \right)^2 \Delta x \Delta z \end{aligned}$$

### Calcul de $S_2$

Pour calculer  $S_2$  on procède de façon identique. On décompose  $S_2$  en trois sommes que l'on transforme par intégration par partie discrète :

$$\sum_{i,j} - \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \cdot w_{i,j} \Delta x \Delta z = \sum_{i,j} \left( \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{\Delta z} \right)^2 \Delta x \Delta z$$

$$\sum_{i,j} - \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4 \Delta x \Delta z} w_{ij} \Delta x \Delta z =$$

$$= \sum_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \Delta x} \cdot \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2 \Delta z} \Delta x \Delta z$$

$$\sum_{i,j} \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \cdot w_{i,j} \Delta x \Delta z = \sum_{i,j} \left( \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \Delta z$$

En multipliant ces égalités par les bons coefficients et en sommant, on obtient :

$$\begin{aligned} S_2 &= (\lambda + 2\mu) \sum_{i,j} \left( \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{\Delta z} \right)^2 \Delta x \Delta z + \\ &+ (\lambda + \mu) \sum_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \Delta x} \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2 \Delta z} \Delta x \Delta z \\ &+ \mu \sum_{i,j} \left( \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \Delta z \end{aligned}$$

En ajoutant  $S_1$  et  $S_2$  puis en regroupant certains termes nous obtenons pour  $(B_h \vec{u}_h, \vec{u}_h)$  l'expression suivante :

$$\begin{aligned} (B_h \vec{u}_h, \vec{u}_h) &= \mu \sum_{i,j} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \Delta z + \mu \sum_{i,j} \left( \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta z} \right)^2 \Delta x \Delta z \\ &+ \mu \sum_{i,j} \left( \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \Delta z + \mu \sum_{i,j} \left( \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{\Delta z} \right)^2 \Delta x \Delta z \\ &+ (\lambda + \mu) \left( \sum_{i,j} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \Delta z + \sum_{i,j} \left( \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{\Delta z} \right)^2 \Delta x \Delta z + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \Delta x} \cdot \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2 \Delta z} \Delta x \Delta z \right) \end{aligned}$$

Nous montrons que l'expression qui est en facteur de  $\lambda + \mu$ , est positive en utilisant deux identités, qui se vérifient aisément :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})^2 \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i,j} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (w_{i,j+1} - w_{i,j})^2 &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i,j} (w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1})^2 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} (B_h \vec{u}_h, \vec{u}_h) &= \mu \sum_{i,j} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \Delta z + \\ &+ \mu \sum_{i,j} \left( \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta z} \right)^2 \Delta x \Delta z + \\ &+ \mu \sum_{i,j} \left( \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \Delta z + \\ &+ \mu \sum_{i,j} \left( \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{\Delta z} \right)^2 \Delta x \Delta z + \\ (2.11) \quad &+ (\lambda + \mu) \sum_{i,j} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \Delta x} + \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2 \Delta z} \right)^2 \Delta x \Delta z + \\ &+ (\lambda + \mu) \sum_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{4} \left( \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right)^2 \Delta x \Delta z + \\ &+ (\lambda + \mu) \sum_{i,j} \frac{(\Delta z)^2}{4} \left( \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \right)^2 \Delta x \Delta z + \end{aligned}$$

Remarque 2.1

Notons que  $\frac{1}{2} (B_h \vec{u}_h, \vec{u}_h) = \hat{U}_h$  constitue une approximation de l'énergie de déformation que l'on peut écrire sous la forme suivante (cf. (1.9)).

$$\begin{aligned} (2.12) \quad \hat{U} &= \frac{1}{2} \mu \int (|\vec{\text{grad}} u|_2^2 + |\vec{\text{grad}} w|_2^2) dx dz \\ &+ \frac{1}{2} (\lambda + \mu) \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dx dz. \end{aligned}$$

Si on compare  $\hat{U}_h$  et  $\hat{U}$  terme à terme on constate que  $\hat{U}_h$  comporte "en plus" deux termes, à savoir :

$$(\lambda+\mu) \sum_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{4} \left( \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right)^2 \Delta x \Delta z \quad \text{et,}$$

$$(\lambda+\mu) \sum_{i,j} \frac{(\Delta z)^2}{4} \left( \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \right)^2 \Delta x \Delta z$$

qui sont petits comme  $(\Delta x)^2$  et  $(\Delta z)^2$  à condition que :

$$\sum_{i,j} \left( \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right)^2 \Delta x \Delta z \quad \text{et,}$$

$$\sum_{i,j} \left( \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \right)^2 \Delta x \Delta z$$

soient bornés ! ■

De (2.11) on déduit immédiatement le

Corollaire 2.1 : On a :

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_h \vec{u}_h = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_{ij} = 0 & \forall i,j \\ w_{ij} = 0 & \forall i,j \end{cases} \\ \vec{u}_h \in (L_h^2)^2 \end{array} \right.$$
■

### 2.2.2. ETUDE DE LA STABILITE DU SCHEMA NUMERIQUE, CONDITION SUFFISANTE

Nous exprimons la condition de stabilité du schéma (2.6) à partir de la norme de  $B_h$ . Il s'agit là d'un résultat très classique.

Pour simplifier les notations nous posons :

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = h \quad \Delta x_0 \\ \Delta z = h \quad \Delta z_0 \end{array} \right.$$

où  $\Delta x_0$  et  $\Delta z_0$  sont de l'ordre de l'unité.

Un calcul simple montre :

$$(2.15) \quad |B_h| = \frac{1}{h^2} |B_0|$$

où  $B_0$  est l'opérateur correspondant à  $(\Delta x_0, \Delta z_0)$ .

Théorème 2.1 - Le schéma (2.6) est stable dès que :

$$(2.16) \quad \frac{\Delta t}{h} < \left( \frac{4\rho}{|B_0|} \right)^{1/2}$$

Plus précisément pour tout  $N$  appartenant à  $\mathbb{N}$  on a :

$$(2.17) \quad \left| \frac{\vec{u}_h^{N+1} - \vec{u}_h^N}{\Delta t} \right| \leq C(\gamma) \left( (B_h \vec{u}_h^0, \vec{u}_h^0) + \left| \frac{\vec{u}^1 - \vec{u}^0}{\Delta t} \right|^2 \right)$$

$$(2.18) \quad (B_h \vec{U}_h^N, \vec{U}_h^N) \leq C(\gamma) \left( (B_h \vec{u}_h^0, \vec{u}_h^0) + \left| \frac{\vec{u}^1 - \vec{u}^0}{\Delta t} \right|^2 \right)$$

où  $C(\gamma)$  désigne des constantes dépendant uniquement de  $\gamma$  égal à :

$$(2.19) \quad \gamma = \left( \frac{\Delta t}{h} \right) \times \left( \frac{4\rho}{|B_0|} \right)^{-1/2}$$

Nous présentons la démonstration, elle aussi très classique.

Démonstration du théorème 2.1

i) Multiplions scalairement l'égalité (2.6) par  $\frac{\vec{u}_h^{(n+1)} - \vec{u}_h^{n-1}}{2 \Delta t}$ . On obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{\rho}{\Delta t} \left| \frac{\vec{u}_h^{n+1} - \vec{u}_h^n}{\Delta t} \right|^2 - \frac{1}{2} \frac{\rho}{\Delta t} \left| \frac{\vec{u}_h^n - \vec{u}_h^{n-1}}{\Delta t} \right|^2 + (B_h \vec{u}_h^n, \frac{\vec{u}_h^{n+1} - \vec{u}_h^{n-1}}{2 \Delta t}) = 0$$

Sommons ces égalités de  $n = 1$  à  $n = N$  et multiplions par  $\Delta t$  :

$$\frac{1}{2} \rho \left| \frac{\vec{u}_h^{N+1} - \vec{u}_h^N}{\Delta t} \right|^2 - \frac{1}{2} \rho \left| \frac{\vec{u}_h^1 - \vec{u}_h^0}{\Delta t} \right|^2 + \frac{1}{2} (B_h \vec{u}_h^N, \vec{u}_h^{N+1}) - \frac{1}{2} (B_h \vec{u}_h^1, \vec{u}_h^0) = 0$$

ii) Mais l'opérateur  $B_h$  étant semi-défini positif on a :

$$|(B_h \vec{V}_h, \vec{V}'_h)| \leq (1-\alpha) (B_h \vec{V}_h, \vec{V}_h) + \frac{1}{4\alpha} (B_h (\vec{V}_h - \vec{V}'_h), \vec{V}_h - \vec{V}'_h)$$

$$\forall \vec{V}_h, \vec{V}'_h \text{ et } \forall \alpha > 0$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho \left| \frac{\vec{u}_h^{N+1} - \vec{u}_h^N}{\Delta t} \right|^2 - \frac{1}{8\alpha} (B_h (\vec{u}_h^{N+1} - \vec{u}_h^N), (\vec{u}_h^{N+1} - \vec{u}_h^N)) + \\ + \left( \frac{1-\alpha}{2} \right) (B_h \vec{u}_h^{N+1}, \vec{u}_h^{N+1}) \leq \frac{1}{2} \rho \left| \frac{\vec{u}_h^{+1} - \vec{u}_h^{+0}}{\Delta t} \right|^2 + \\ + \frac{1-\alpha'}{2} (B_h \vec{u}_h^{+0}, \vec{u}_h^{+0}) + \frac{1}{8\alpha'} (B_h (\vec{u}_h^{+1} - \vec{u}_h^{+0}), (\vec{u}_h^{+1} - \vec{u}_h^{+0})) \end{aligned}$$

soit encore en utilisant la majoration :

$$\begin{aligned} |(B_h \vec{V}_h, \vec{V}'_h)| \leq |B_h| |\vec{V}'_h|^2 \\ \left( \frac{1}{2} \rho - \frac{1}{8\alpha} |B_h| (\Delta t)^2 \right) \left| \frac{\vec{u}_h^{N+1} - \vec{u}_h^N}{\Delta t} \right|^2 + \frac{1-\alpha}{2} (B_h \vec{u}_h^{N+1}, \vec{u}_h^{N+1}) \leq \\ \frac{1-\alpha'}{2} (B_h \vec{u}_h^{+0}, \vec{u}_h^{+0}) + \frac{1}{8\alpha'} |B_h| (\Delta t)^2 \left| \frac{\vec{u}_h^{+1} - \vec{u}_h^{+0}}{\Delta t} \right|^2 \end{aligned}$$

iii) Pour en déduire une majoration sur  $\left| \frac{\vec{u}_h^{N+1} - \vec{u}_h^N}{\Delta t} \right|^2$  et  $(B_h \vec{u}_h^{N+1}, \vec{u}_h^{N+1})$  on doit avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \alpha > 0 \\ \frac{1}{2} \rho - \frac{1}{8\alpha} |B_h| (\Delta t)^2 > 0 \end{array} \right.$$

ce qui donne en éliminant  $\alpha$

$$|B_h| (\Delta t)^2 < 4 \rho$$

et en utilisant (2.15)

$$\left( \frac{\Delta t}{h} \right)^2 \leq \frac{4 \rho}{|B_0|}$$

### 2.3. ETUDE DU SCHEMA NUMERIQUE PAR LA TRANSFORMEE DE FOURIER

Pour mener une étude plus fine des propriétés du schéma numérique, nous utilisons la transformée de Fourier. Nous pourrions alors calculer exactement la norme de l'opérateur  $\overline{B}_h$  et donner une condition nécessaire de stabilité du schéma.

A toute fonction  $u$  de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  nous associons sa transformée de Fourier  $\hat{u}$

$$(2.20) \quad \hat{u}(\vec{k}) = \int \exp - i (k_1 x + k_2 z) u(x, z) dx dz$$

qui s'exprime en fonction du vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

Il est bien connu que la transformée de Fourier est une isométrie (à un facteur  $C_F$  multiplicatif près) de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  dans lui-même. Nous définissons l'opérateur  $\hat{B}_h$  comme la transformée de  $\overline{B}_h$  par cette isométrie.

$$(2.21) \quad \hat{B}_h \left( \frac{\hat{u}}{\hat{v}} \right) = \widehat{B_h \left( \frac{u}{w} \right)} ; \forall (u, w) \in (L^2)^2$$

Calculons l'opérateur  $\hat{B}_h$  : pour cela nous revenons aux définitions (2.8) et (2.9). Multiplions l'équation (2.8) par  $\exp - i(k_1 x + k_2 z)$  et intégrons la relation obtenue sur  $\mathbb{R}^2$ .

Après avoir effectué des changements de variables dans les intégrales, on a :

$$(2.22) \quad \left. \begin{aligned} \hat{u}'(\vec{k}) = & - (\lambda + 2\mu) \frac{\exp i k_1 \Delta x - 2 + \exp - i k_1 \Delta x}{(\Delta x)^2} \hat{u}(\vec{k}) + \\ & - (\lambda + \mu) \frac{\exp i(k_1 \Delta x + k_2 \Delta z) - \exp i(k_1 \Delta x - k_2 \Delta z) - \exp i(-k_1 \Delta x + k_2 \Delta z)}{4 \Delta x \Delta z} \\ & + \frac{\exp i(-k_1 \Delta x - k_2 \Delta z)}{\hat{v}(\vec{k})} \hat{u}(\vec{k}) + \\ & + \mu \frac{\exp i k_2 \Delta z - 2 + \exp - i k_2 \Delta z}{(\Delta z)^2} \hat{u}(\vec{k}) \end{aligned} \right\}$$

On obtient de même à partir de (2.9)

$$\begin{aligned}
 \hat{w}'(\vec{k}) = & -(\lambda+2\mu) \frac{\exp i k_2 \Delta z - 2 + \exp - i k_2 \Delta z}{(\Delta z)^2} \hat{w}(\vec{k}) \\
 & - (\lambda+\mu) \frac{\exp i(k_1 \Delta x + k_2 \Delta z) - \exp i(k_1 \Delta x - k_2 \Delta z) - \exp i(-k_1 \Delta x + k_2 \Delta z)}{4 \Delta x \Delta z} \\
 & + \frac{\exp i(-k_1 \Delta x - k_2 \Delta z)}{4 \Delta x \Delta z} \hat{u}(\vec{k}) + \\
 & + \mu \frac{\exp i k_1 \Delta x - 2 + \exp - i k_1 \Delta x}{(\Delta x)^2} \hat{w}(\vec{k})
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

On a donc pour tout vecteur  $\vec{k}$  la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \hat{u}'(\vec{k}) \\ \hat{w}'(\vec{k}) \end{pmatrix} = \hat{B}_h(\vec{k}) \begin{pmatrix} \hat{u}(\vec{k}) \\ \hat{w}(\vec{k}) \end{pmatrix}
 \tag{2.24}$$

où la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$  est définie par :

$$\begin{aligned}
 (\hat{B}_h(\vec{k}))_{11} &= 2(\lambda+2\mu) \frac{(1 - \cos k_1 \Delta x)}{(\Delta x)^2} + 2\mu \frac{(1 - \cos k_2 \Delta z)}{(\Delta z)^2} \\
 (\hat{B}_h(\vec{k}))_{22} &= 2(\lambda+2\mu) \frac{(1 - \cos k_2 \Delta z)}{(\Delta z)^2} + 2\mu \frac{(1 - \cos k_1 \Delta x)}{(\Delta x)^2} \\
 (\hat{B}_h(\vec{k}))_{12} &= (\lambda+\mu) \frac{\sin k_1 \Delta x \sin k_2 \Delta z}{\Delta x \cdot \Delta z} \\
 (\hat{B}_h(\vec{k}))_{21} &= (\hat{B}_h(\vec{k}))_{12}
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

Le lemme suivant donne des propriétés des matrices  $\hat{B}_h(\vec{k})$ .



Lemme 2.3

i) L'application

$$\vec{k} \rightarrow \hat{B}_h(\vec{k})$$

est périodique de période  $[\frac{2\Pi}{\Delta x}, \frac{2\Pi}{\Delta z}]$

ii) Pour tout  $\vec{k}$  la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$  est symétrique semi-définie positive.

■

Démonstration du lemme 2.3

i) La périodicité se vérifie directement sur les formules (2.25). Cette propriété est une conséquence du caractère périodique de la grille. Soient en effet deux vecteurs  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$  tels que :

$$k_1 \Delta x = k'_1 \Delta x \quad (\text{modulo } 2\Pi)$$

$$k_2 \Delta z = k'_2 \Delta z \quad (\text{modulo } 2\Pi)$$

alors les valeurs de  $\exp - i \vec{k} \cdot \vec{x}$  et  $\exp - i \vec{k}' \cdot \vec{x}$  sont les mêmes aux points de la grille. Nous dirons qu'ils sont équivalents pour le schéma. On pourra donc toujours supposer que  $\vec{k}$  appartient au domaine  $K_h$  défini par :

$$(2.26) \quad \vec{k} \in K_h \Leftrightarrow \begin{cases} -\Pi \leq k_1 \Delta x \leq \Pi \\ -\Pi \leq k_2 \Delta z \leq \Pi \end{cases}$$

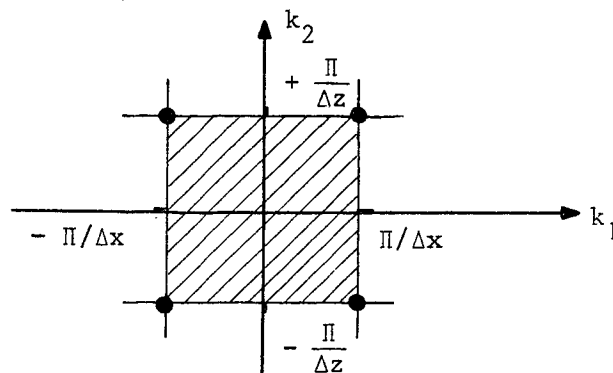


Figure 2.5

Domaine  $K_h$  de variation du vecteur d'onde  $\vec{k}$

On note  $\vec{k}_h^{(1)}$ ,  $\vec{k}_h^{(2)}$ ,  $\vec{k}_h^{(3)}$ ,  $\vec{k}_h^{(4)}$  les quatre vecteurs  $\vec{k}$  associés aux quatre sommets du rectangle  $K_h$ .

$$(2.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{k}_h^{(1)} = \left( \frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta z} \right) \\ \vec{k}_h^{(2)} = \left( -\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta z} \right) \\ \vec{k}_h^{(3)} = \left( -\frac{\pi}{\Delta x}, -\frac{\pi}{\Delta z} \right) \\ \vec{k}_h^{(4)} = \left( +\frac{\pi}{\Delta x}, -\frac{\pi}{\Delta z} \right) \end{array} \right.$$

Introduisons les longueurs d'onde.  $\lambda_x$  (resp  $\lambda_z$ ) dans la direction de l'axe des x (resp des z).

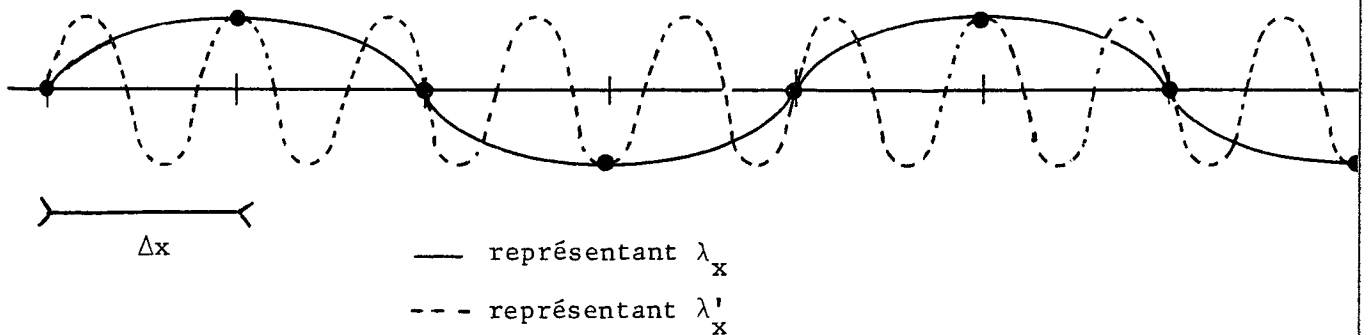
$$(2.28) \quad \lambda_x = \frac{2\pi}{k_1} \quad ; \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{k_2}$$

Les inégalités (2.26) se traduisent par :

$$(2.28)^{\text{bis}} \quad 2 \Delta x \leq |\lambda_x| \quad \text{et} \quad 2 \Delta z \leq |\lambda_z|$$

Nous choisissons donc le représentant  $\vec{k}$  dont la longueur d'onde dans chacune des directions x et z est supérieure à  $2 \Delta x$  et à  $2 \Delta z$ . Nous illustrons ce choix sur deux exemples :

Exemple 1  $\lambda_x' = \frac{4}{5} \Delta x \quad ; \quad \lambda_x = 4 \Delta x.$



Exemple 2  $\lambda'_x = \frac{6}{5} \Delta x$  ;  $\lambda_x = -6 \Delta x$

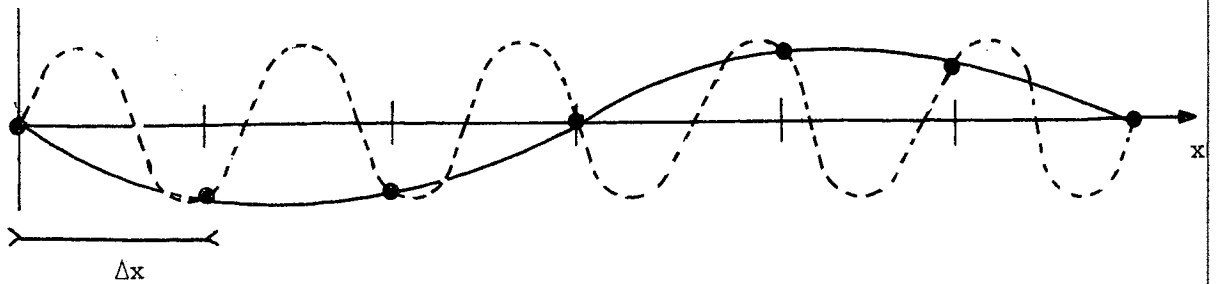


Figure 2.6

Exemples de longueurs d'onde équivalentes pour la grille en espace

- ii) Ces propriétés découlent immédiatement du fait que l'opérateur  $\overline{B}_h$  est lui-même symétrique semi-défini positif et que la transformée de Fourier conserve (à un facteur multiplicatif  $C_F$  près) le produit scalaire. En effet :

$$\int (\overline{B}_h \vec{u}, \vec{u}) dx dz = C_F \int (\widehat{B}_h(\vec{k}) \hat{u}, \hat{u}) dk_1 dk_2 ; \forall \vec{u}$$

mais grâce au lemme 2.2.

$$\int (\overline{B}_h \vec{u}, \vec{u}) dx dz \geq 0 \quad , \quad \forall \vec{u} \in (L^2)^2$$

et donc :

$$\int (\widehat{B}_h(\vec{k}) \hat{u}, \hat{u}) dk_1 dk_2 \geq 0 \quad ; \quad \forall \hat{u} \in (L^2)^2$$

On en déduit alors que l'on a ponctuellement :

$$\widehat{B}_h(k) \geq 0 \quad ; \forall \vec{k} \quad \blacksquare$$

### 2.3.1. CALCUL DES VALEURS PROPRES ET DES VECTEURS PROPRES DE LA MATRICE $\widehat{B}_h(\vec{k})$

Nous posons :

$$(2.29) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \beta_1(\vec{k}) = 1 - \cos k_1 \Delta x & ; \quad 0 \leq \beta_1 \leq 2 \\ \beta_2(\vec{k}) = 1 - \cos k_2 \Delta z & ; \quad 0 \leq \beta_2 \leq 2 \end{array} \right.$$

Lorsque  $\vec{k}$  parcourt le domaine  $K_h$  le vecteur  $(\beta_1(\vec{k}), \beta_2(\vec{k}))$  parcourt le carré  $C_2 = [0, 2] \times [0, 2]$ .

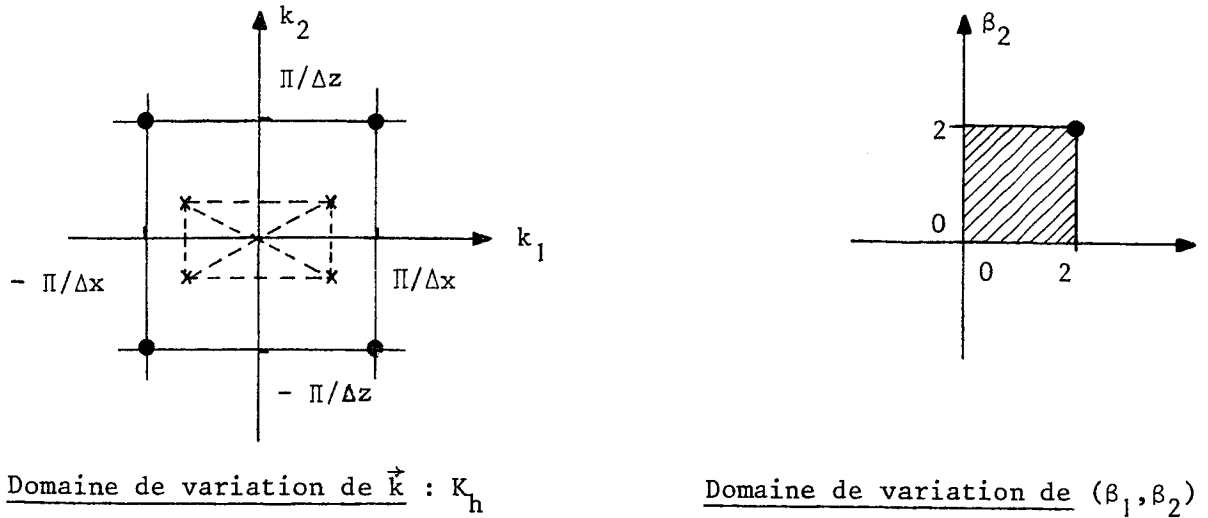


Figure 2.7

L'application  $\vec{k} \rightarrow (\beta_1(\vec{k}), \beta_2(\vec{k}))$  est symétrique par rapport à l'axe des  $k_1$  et l'axe des  $k_2$ .

Ainsi les quatre vecteurs  $\vec{k}_h^{(1)}, \vec{k}_h^{(2)}, \vec{k}_h^{(3)}, \vec{k}_h^{(4)}$  ont pour image le point  $(2, 2)$ .

$$(2.30) \quad \vec{k}_h^{(1)}, \vec{k}_h^{(2)}, \vec{k}_h^{(3)}, \vec{k}_h^{(4)} \rightarrow (2, 2).$$

Posons :

$$b_{ij} = (\hat{B}_h(\vec{k}))_{ij} \quad \text{pour } i, j = 1, 2$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$s^2 - (b_{11} + b_{22}) s + (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) = 0$$

Le discriminant  $\Delta$  est égal à :

$$\Delta = (b_{11} - b_{22})^2 + 4 b_{12}^2$$

Nous utilisons maintenant les formules (2.25) qui, avec les quantités introduites en (2.29) s'écrivent :

$$b_{11} = \frac{2(\lambda+2\mu)}{(\Delta x)^2} \beta_1 + \frac{2\mu}{(\Delta z)^2} \beta_2$$

$$b_{22} = \frac{2(\lambda+2\mu)}{(\Delta z)^2} \beta_2 + \frac{2\mu}{(\Delta x)^2} \beta_1$$

$$b_{12}^2 = \frac{(\lambda+\mu)^2}{(\Delta x)^2 (\Delta z)^2} \beta_1 (2-\beta_1) \beta_2 (2-\beta_2)$$

On en déduit la valeur de  $\Delta$  en fonction de  $\beta_1$  et  $\beta_2$

$$\Delta = 4(\lambda+\mu)^2 \left( \frac{\beta_1}{(\Delta x)^2} - \frac{\beta_2}{(\Delta z)^2} \right)^2 + \frac{4(\lambda+\mu)^2}{(\Delta x)^2 (\Delta z)^2} \beta_1 (2-\beta_1) \beta_2 (2-\beta_2)$$

$$\Delta = \frac{4(\lambda+\mu)^2}{(\Delta x)^2 (\Delta z)^2} \left( \beta_1^2 \left( \frac{\Delta z}{\Delta x} \right)^2 + \beta_2^2 \left( \frac{\Delta x}{\Delta z} \right)^2 - 2\beta_1\beta_2 + 4\beta_1\beta_2 + \right. \\ \left. - 2\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2) + \beta_1^2 \beta_2^2 \right)$$

$$\Delta = \frac{4(\lambda+\mu)^2}{(\Delta x)^2 (\Delta z)^2} \left( \left( \beta_1 \frac{\Delta z}{\Delta x} + \beta_2 \frac{\Delta x}{\Delta z} - \beta_1\beta_2 \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\beta_1\beta_2 \left( \beta_1 \left( \frac{\Delta z}{\Delta x} - 1 \right) + \beta_2 \left( \frac{\Delta x}{\Delta z} - 1 \right) \right) \right)$$

On en déduit les deux racines  $s_1(\vec{k})$  et  $s_2(\vec{k})$ .

$$(2.31) \quad s_1(\vec{k}) = \frac{(\lambda+3\mu)}{\Delta x \Delta z} \left( \beta_1 \frac{\Delta z}{\Delta x} + \beta_2 \frac{\Delta x}{\Delta z} \right) + \frac{\lambda+\mu}{\Delta x \Delta z} \times \\ \times \left( \left( \beta_1 \frac{\Delta z}{\Delta x} + \beta_2 \frac{\Delta x}{\Delta z} - \beta_1\beta_2 \right)^2 + 2\beta_1\beta_2 \left( \beta_1 \left( \frac{\Delta z}{\Delta x} - 1 \right) + \beta_2 \left( \frac{\Delta x}{\Delta z} - 1 \right) \right) \right)$$

$$(2.32) \quad s_2(\vec{k}) = \frac{(\lambda+3\mu)}{\Delta x \Delta z} \left( \beta_1 \frac{\Delta z}{\Delta x} + \beta_2 \frac{\Delta x}{\Delta z} \right) - \frac{\lambda+\mu}{\Delta x \Delta z} \times \\ \times \left( \left( \beta_1 \frac{\Delta z}{\Delta x} + \beta_2 \frac{\Delta x}{\Delta z} - \beta_1\beta_2 \right)^2 + 2\beta_1\beta_2 \left( \beta_1 \left( \frac{\Delta z}{\Delta x} - 1 \right) + \beta_2 \left( \frac{\Delta x}{\Delta z} - 1 \right) \right) \right)$$

Les deux valeurs propres  $s_1(\vec{k})$  et  $s_2(\vec{k})$  dépendent de  $\vec{k}$  par l'intermédiaire de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . L'application :

$$\vec{k} \rightarrow (s_1(\vec{k}), s_2(\vec{k}))$$

est donc symétrique par rapport à l'axe des  $k_1$  et l'axe des  $k_2$ .

① CAS PARTICULIER :  $\Delta x = \Delta z$

a) Calculons maintenant les valeurs propres dans le cas particulier important, car usuel, où

$$(2.33) \quad \Delta x = \Delta z$$

Les formules se simplifient :

$$(2.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1(\vec{k}) = \frac{\lambda+3\mu}{(\Delta x)^2} (\beta_1 + \beta_2) + \frac{\lambda+\mu}{(\Delta x)^2} (\beta_1 + \beta_2 - \beta_1 \beta_2) \\ s_2(\vec{k}) = \frac{\lambda+3\mu}{(\Delta x)^2} (\beta_1 + \beta_2) - \frac{\lambda+\mu}{(\Delta x)^2} (\beta_1 + \beta_2 - \beta_1 \beta_2) \end{array} \right.$$

On a bien :

$$(2.35) \quad 0 \leq s_2(\vec{k}) \leq s_1(\vec{k})$$

En effet :

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 - \beta_1 \beta_2 &\geq (\beta_1 + \beta_2) - \frac{1}{4} (\beta_1 + \beta_2)^2 = \\ &= (\beta_1 + \beta_2) \left(1 - \frac{1}{4} (\beta_1 + \beta_2)\right) \end{aligned}$$

d'où le résultat d'après (2.29).

De (2.35) on déduit :

$$|\hat{B}_h(\vec{k})|_2 = s_1(\vec{k})$$

Montrons le :

Lemme 2.4 : Avec l'hypothèse  $\Delta x = \Delta z$  on a :

$$(2.36) \quad \max_{\vec{k} \in K_h} |\hat{B}_h(\vec{k})|_2 = \max_{j=1,2,3,4} |\hat{B}_h(K_h^{(j)})|_2 = \frac{4(\lambda+3\mu)}{(\Delta x)^2}$$

Démonstration du lemme 2.4

D'après (2.35), (2.34) et (2.29) on a :

$$\max_{\vec{k}} |\hat{B}_h(\vec{k})|_2 = \max_{(\beta_1, \beta_2) \in [0,2]^2} s_1(\vec{\beta}) = \frac{\lambda+3\mu}{(\Delta x)^2} (\beta_1 + \beta_2) + \frac{\lambda+\mu}{(\Delta x)^2} (\beta_1 + \beta_2 - \beta_1 \beta_2)$$

Mais :

$$\frac{\partial s_1}{\partial \beta_1} = \frac{\lambda+3\mu}{(\Delta x)^2} + \frac{\lambda+\mu}{(\Delta x)^2} (1 - \beta_2) \geq \frac{\lambda+\mu}{(\Delta x)^2} (2 - \beta_2) \geq 0$$

On a donc :

$$\frac{\partial s_1}{\partial \beta_1} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial s_1}{\partial \beta_2} \geq 0 \quad \forall (\beta_1, \beta_2) \in [0,2]^2$$

d'où l'on déduit :

$$\max_{(\beta_1, \beta_2) \in [0,2]^2} s_1(\vec{\beta}) = s_1(2,2) = \frac{4(\lambda+3\mu)}{(\Delta x)^2}$$

ce qui avec les définitions (2.27) se traduit par (2.36)

La condition de stabilité (2.16) du théorème 2.1 s'écrit :

$$\left(\frac{\lambda+3\mu}{\rho}\right) \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$$

soit encore avec les notations (1.24) et (1.28)

$$\left(v_p^2 + v_s^2\right)^{1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$$

Nous avons démontré le :

Lemme 2.5 : Avec l'hypothèse  $\Delta x = \Delta z$  la condition suffisante de stabilité (2.16) du théorème 2.1 s'écrit :

$$(2.37) \quad (v_p^2 + v_s^2)^{1/2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad \blacksquare$$

b) Calculons maintenant, toujours dans le cas particulier (2.33), les directions propres. Nous noterons :

$$\left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \hat{u}_1(\vec{k}) \\ \hat{w}_1(\vec{k}) \end{pmatrix} \text{ la direction propre correspondant à } s_1(\vec{k}) \\ \begin{pmatrix} \hat{u}_2(\vec{k}) \\ \hat{w}_2(\vec{k}) \end{pmatrix} \text{ la direction propre correspondant à } s_2(\vec{k}) \end{array} \right.$$

La matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$  étant symétrique, les deux directions propres sont réelles et orthogonales :

$$\hat{u}_1(\vec{k}) \cdot \hat{u}_2(\vec{k}) + \hat{w}_1(\vec{k}) \cdot \hat{w}_2(\vec{k}) = 0$$

Il suffit donc de déterminer par exemple la direction  $\begin{pmatrix} \hat{u}_1(\vec{k}) \\ \hat{w}_1(\vec{k}) \end{pmatrix}$ .

Le calcul donne :

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_1(\vec{k}) \\ \hat{w}_1(\vec{k}) \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} b_{12} \\ s_1 - b_{11} \end{pmatrix}$$

$$b_{12} = \Sigma(\vec{k}) \frac{(\lambda + \mu)}{(\Delta x)^2} (\beta_1 (2 - \beta_1) \beta_2 (2 - \beta_2))^{1/2} \text{ avec}$$

$$(2.38) \quad \varepsilon(\vec{k}) = \pm 1 \text{ et dépend du vecteur } \vec{k} \text{ comme il est indiqué sur la figure 2.8}$$



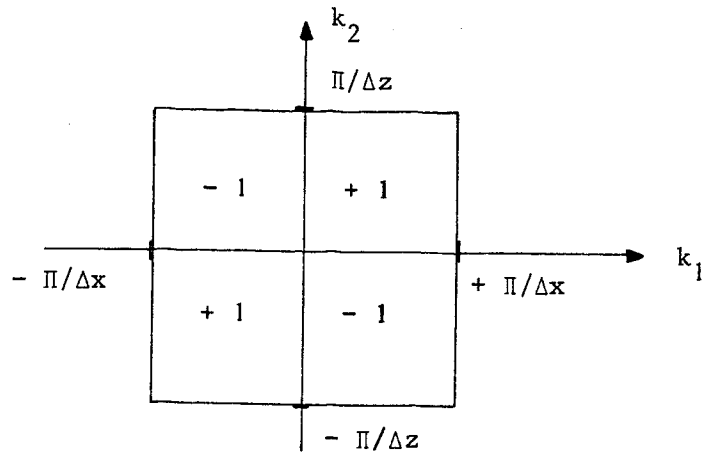


Figure 2.8

$$s_1 - b_{11} = \frac{(\lambda + \mu)}{(\Delta x)^2} (2\beta_2 - \beta_1\beta_2)$$

On a donc :

$$(2.39) \quad \begin{pmatrix} \hat{u}_1(\vec{k}) \\ \hat{u}_2(\vec{k}) \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} \varepsilon(\vec{k}) (\beta_1(2 - \beta_1) \beta_2(2 - \beta_2))^{1/2} \\ 2\beta_2 - \beta_1\beta_2 \end{pmatrix}$$

On constate donc que la direction propre ne dépend pas des caractéristiques du milieu  $(\lambda, \mu)$ . Cette propriété interviendra au moment de l'étude de la réflexion et la réfraction à l'interface plane entre deux milieux de paramètres différents.

Notons que cette propriété n'est plus vraie lorsque l'hypothèse (2.33) n'est pas vérifiée.

## ② CAS GENERAL $\Delta x \neq \Delta z$

La norme de l'opérateur  $B_h$  est égale à :

$$|B_h| = \max_{\vec{k} \in K_h} |\hat{B}_h(\vec{k})|_2 = \max_{\vec{k} \in K_h} s_1(\vec{k})$$

On peut écrire  $s_1(\vec{k})$  sous la forme :

$$s_1(\vec{k}) = \frac{4(\lambda + 3\mu)}{\Delta x \Delta z} F(\beta_1, \beta_2, q, \nu) \text{ avec}$$

$$4 F(\beta_1, \beta_2, q, \nu) = \beta_1 q + \beta_2 \frac{1}{q} - \frac{1}{3-4\nu} \left( (\beta_1 q + \beta_2 \frac{1}{q} - \beta_1 \beta_2)^2 + 2 \beta_1 \beta_2 (\beta_1 (q-1) + \beta_2 (\frac{1}{q} - 1)) \right)$$

où  $q = \frac{\Delta z}{\Delta x}$ .

En effet d'après (1.36)  $\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} = \frac{1}{3-4\nu}$

Nous avons préféré prendre comme paramètre le produit  $\Delta x \Delta z$  et le quotient  $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ . En effet, il mesure l'aire du rectangle élémentaire du maillage. Son inverse représente le nombre de points du maillage contenus dans la surface unité. On peut alors comparer la condition de stabilité à nombre de points en espace fixés.

Nous posons :

$$M^*(q, \nu) = \max_{(\beta_1, \beta_2) \in [0, 2]^2} F(\beta_1, \beta_2, q, \nu)$$

Nous avons montré (2.36) que :

$$M^*(1, \nu) = F(2, 2, 1, \nu) = 1$$

Le calcul de  $M^*(q, \nu)$  dans le cas  $q \neq 1$  ne peut selon nous être que numérique. Il s'agit de trouver le maximum global de la fonction  $F(\beta_1, \beta_2, q, \nu)$  sur le carré  $[0, 2]^2$ ; or, dans le cas envisagé la fonction peut posséder des minima locaux. Les résultats figureront dans la seconde édition du rapport ...

Il est par contre aisé de s'assurer que :

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} M^*(q, \nu) = \lim_{q \rightarrow 0} M^*(q, \nu) = +\infty$$

La condition suffisante (2.16) du théorème 2.1 s'écrit donc :

$$(2.40) \quad (M^*(q, \nu))^{1/2} (V_p^2 + V_s^2)^{1/2} \frac{\Delta t}{(\Delta x \cdot \Delta z)^{1/2}} < 1.$$

2.3.2. ETUDE DE LA SUITE  $\hat{u}^{(n)}(\vec{k})$ 

De (2.6) et (2.24) on déduit l'équation de récurrence vérifiée par  $\hat{u}^{(n)}(\vec{k})$  :

$$\frac{\rho}{(\Delta t)^2} (\hat{u}^{(n+1)}(\vec{k}) - 2 \hat{u}^{(n)}(\vec{k}) + \hat{u}^{(n-1)}(\vec{k})) + \hat{B}_h(\vec{k}) \hat{u}^{(n)}(\vec{k}) = 0$$

Cette relation montre que pour un  $\vec{k}$  donné le vecteur  $\hat{u}^{(n)}(\vec{k})$  ne dépend que de  $n$  et  $\hat{u}^{(0)}(\vec{k})$  et  $\hat{u}^{(1)}(\vec{k})$ .

On peut se ramener à l'étude de suites scalaires en introduisant :

$$(2.41) \quad a_j^{(n)}(\vec{k}) = (\hat{u}^{(n)}(\vec{k}), \hat{u}_j(\vec{k})) \quad j = 1, 2$$

où les vecteurs  $\hat{u}_j(\vec{k})$  ( $j = 1, 2$ ) sont les vecteurs propres de la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$  (cf. 2.3.1.). La suite  $a_j^{(n)}(\vec{k})$  vérifie :

$$(2.42) \quad \frac{\rho}{(\Delta t)^2} \left( a_j^{(n+1)}(\vec{k}) - 2 a_j^{(n)}(\vec{k}) + a_j^{(n-1)}(\vec{k}) \right) + s_j(\vec{k}) a_j^{(n)}(\vec{k}) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j = 1, 2 \\ \forall n \end{array} \right.$$

où les  $s_j(\vec{k})$  sont les valeurs propres de la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$  (cf. 2.3.1.).

On est donc ramené à l'étude de la suite scalaire  $a^{(n)}$

$$(2.43) \quad a^{(n+1)} - 2 a^{(n)} + a^{(n-1)} + r a^{(n)} = 0$$

avec

$$(2.44) \quad r = r_1(\vec{k}) = \frac{(\Delta t)^2}{\rho} s_1(\vec{k}) \quad \text{ou} \quad r_2 = r_2(\vec{k}) = \frac{(\Delta t)^2}{\rho} s_2(\vec{k})$$

On sait alors que l'on a :

$$a^{(n)} = \alpha_1 \sigma_1^n + \alpha_2 \sigma_2^n$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les racines de

$$(2.45) \quad \sigma^2 - 2\sigma + 1 + r\sigma = 0$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux constantes appartenant à  $\mathbb{C}$  qui dépendent de  $\sigma_1, \sigma_2$  ainsi que  $a^{(1)}$  et  $a^{(0)}$ .

Il est facile d'étudier les racines de l'équation (2.45).  
Calculons son discriminant :

$$\Delta = r(r - 4)$$

On a deux cas à envisager :

$$(2.46) \quad \underline{\text{Cas 1}} : 0 \leq r \leq 4$$

Les deux racines  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont complexes conjuguées et l'on a :

$$|\sigma_1| = |\sigma_2| = 1.$$

$$(2.47) \quad \underline{\text{Cas 2}} : r < 0 \text{ ou } r > 4$$

Les deux racines  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont réelles. Leur produit étant égal à 1 on a :

$$|\sigma_1| < 1 < |\sigma_2|$$

### 2.3.3. UNE CONDITION NECESSAIRE DE STABILITE

Nous sommes maintenant en mesure de donner une condition nécessaire de stabilité qui est à comparer avec la condition suffisante donnée par le lemme 2.3.

Lemme 2.6 - Avec l'hypothèse

$$(2.48) \quad \frac{\Delta t}{h} > \left( \frac{4\rho}{|B_0|} \right)^{1/2}$$

le schéma est instable lorsque  $h \rightarrow 0$ . ■

Démonstration du lemme 2.6

Elle est immédiate à partir des résultats précédents. De (2.48) on déduit qu'il existe une boule de centre  $\vec{k}_0$  et de rayon  $\delta_0$  tel que :

$$r_1(\vec{k}) \geq r^* > 4 \quad \forall \vec{k} \in B(\vec{k}_0, \delta_0)$$

si l'on suppose par exemple que  $s_1(\vec{k})$  est égale à la norme  $|\hat{B}_h(\vec{k})|_2$ . Attention ! :  $\vec{k}_0$  et  $\delta_0$  dépendent de  $h$ . D'après (2.47) on a donc

$$(2.49) \quad |\sigma_2(\vec{k})| \geq \sigma^* > 1 \quad \forall \vec{k} \in B(\vec{k}_0, \delta_0)$$

Introduisons alors la fonction  $\vec{u}$  définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{u}(\vec{k}) = \hat{u}_1(\vec{k}) & \text{pour } \vec{k} \in B(\vec{k}_0, \delta_0) \\ \hat{u}(\vec{k}) = 0 & \text{pour } \vec{k} \notin B(\vec{k}_0, \delta_0) \end{array} \right.$$

et considérons des conditions initiales proportionnelles à la fonction  $\vec{u}$ . D'après ce qui précède les composantes de Fourier de la solution pour  $\vec{k} \in B(\vec{k}_0, \delta_0)$  augmentent exponentiellement avec un facteur vérifiant (2.49). On en déduit le lemme 2.6 en raisonnant à  $T = n \Delta t$  fixé et en faisant tendre  $h \rightarrow 0$  la relation (2.49) étant vérifiée.

■

Remarquons que le théorème 2.1 et le lemme 2.6 n'envisagent pas le cas :

$$\frac{\Delta t}{h} = \left( \frac{4\rho}{|B_0|} \right)^{1/2}$$

Nous laissons au lecteur le soin de traiter ce cas particulier.

#### 2.4. ETUDE DES ONDES PLANES NUMERIQUES

Nous cherchons à déterminer les solutions de (2.1) et (2.2) qui sont de la forme :

$$(2.50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_{i,j}^n = \vec{u}(i \Delta x, j \Delta z, n \Delta t) \quad \forall (i, j, n) \in \mathbb{Z}^3 \\ \text{avec} \\ \vec{u}(x, z, t) = \vec{d} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \end{array} \right.$$

où

$$(2.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \vec{k} = (k_1, k_2) \text{ est le vecteur d'onde dont la direction est celle de la propagation, et le module le nombre d'onde.} \\ \cdot \omega \text{ est la pulsation.} \\ \cdot \vec{d} \text{ est le vecteur qui donne la direction du mouvement des particules matérielles.} \end{array} \right.$$

Nous comparons ensuite pour un vecteur  $\vec{k}$  donné les ondes planes harmoniques numériques avec les ondes planes harmoniques continues (cf. 1.3)

##### 2.4.1. DETERMINATION DE LA RELATION DE DISPERSION NUMERIQUE

Ecrivons l'équation (2.1) pour  $\vec{u}_{i,j}^n$  donné par (2.50). On obtient :

$$(2.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{2}{(\Delta t)^2} (\cos \omega \Delta t - 1) d_1 = (\lambda + 2\mu) \frac{2}{(\Delta x)^2} (\cos k_1 \Delta x - 1) d_1 + \\ - (\lambda + \mu) \frac{\sin k_1 \Delta x \cdot \sin k_2 \Delta z}{\Delta x \Delta z} d_2 + \\ + \mu \frac{2 (\cos k_2 \Delta z - 1)}{(\Delta z)^2} d_1 \end{array} \right.$$

On obtient de même à partir de (2.2)

$$(2.53) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho \frac{2}{(\Delta t)^2} (\cos \omega \Delta t - 1) d_2 &= (\lambda + 2\mu) \frac{2}{(\Delta z)^2} (\cos k_2 \Delta z - 1) d_2 + \\ &- (\lambda + \mu) \frac{\sin k_1 \Delta x \sin k_2 \Delta x}{\Delta x \cdot \Delta z} d_1 \\ &+ \mu \frac{2}{(\Delta z)^2} (\cos k_2 \Delta z - 1) d_2 \end{aligned} \right.$$

Les équations (2.52) et (2.53) peuvent s'écrire sous la forme :

$$(2.54) \quad \rho \frac{2}{(\Delta t)^2} (\cos \omega \Delta t - 1) \vec{d} + \hat{B}_h(\vec{k}) \vec{d} = 0$$

où  $\hat{B}_h(\vec{k})$  est la matrice définie au 2.3 (cf. 2.25).

L'égalité (2.54) exprime que :

$$(2.55) \quad \rho \frac{2}{(\Delta t)^2} (\cos \omega \Delta t - 1) \text{ est une valeur propre de } \hat{B}_h(\vec{k}).$$

$$(2.56) \quad \vec{d} \text{ est un vecteur propre correspondant.}$$

La matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$ , symétrique, a deux valeurs propres réelles que nous avons notées  $s_1(\vec{k})$  et  $s_2(\vec{k})$  (cf. (2.31) et (2.32)) et deux directions propres orthogonales  $\vec{d}_1(\vec{k})$  et  $\vec{d}_2(\vec{k})$ .

L'équation (2.54) pour  $\vec{k}$  fixé admet deux familles de solution  $\omega_1(\vec{k})$  et  $\omega_2(\vec{k})$  telles que :

$$(2.57) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \rho \frac{1 - \cos \omega_1 \Delta t}{(\Delta t)^2} &= s_1(\vec{k}) \end{aligned} \right.$$

$$(2.58) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \rho \frac{1 - \cos \omega_2 \Delta t}{(\Delta t)^2} &= s_2(\vec{k}) \end{aligned} \right.$$

Cette relation entre le vecteur d'onde  $\vec{k}$  et la pulsation  $\omega$  est la relation de dispersion numérique.

Nous montrons au paragraphe 2.4.4. que cette relation de dispersion numérique tend vers la relation de dispersion continue lorsque les paramètres de discrétisation tendent vers 0 en respectant l'inégalité (2.61) et la condition de stabilité (2.40).

#### 2.4.2. INTERVALLE DE DEFINITION DES PULSATIONS $\omega_1$ ET $\omega_2$

Nous imposons maintenant aux solutions  $\omega_1$  et  $\omega_2$  de (2.57) et (2.58) d'appartenir à un certain intervalle de telle sorte que ces deux équations définissent un couple unique  $(\omega_1(\vec{k}), \omega_2(\vec{k}))$ . Ceci est loisible car nous ne considérons les valeurs de l'onde plane qu'aux temps discrets  $t^n$ . On choisit le représentant  $\omega$  vérifiant :

$$-\pi < \omega \Delta t \leq \pi$$

De plus si  $\omega$  est solution,  $-\omega$  est aussi solution, ceci tient au fait que le schéma numérique est réversible en temps. Nous imposerons en plus la condition

$$(2.59) \quad 0 < \omega \Delta t \leq \pi$$

de telle sorte que la vitesse de phase et le vecteur d'onde  $\vec{k}$  ont le même sens.

Cette condition se traduit sur la période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$(2.60) \quad 2 \Delta t \leq T$$

#### 2.4.3. LA CONDITION DE STABILITE

Pour que le schéma numérique soit stable (au sens de  $L^2$ ) il faut et il suffit que les relations  $\omega_1(\vec{k})$  et  $\omega_2(\vec{k})$  de (2.57) et (2.58) soient réelles pour tout vecteur d'onde  $\vec{k}$ . En effet, si cette condition n'était pas vérifiée, l'un des  $\omega_j$  aurait une partie imaginaire non nulle et il lui correspondrait une onde plane harmonique exponentiellement croissante avec le temps (cf. 2.3.3.). Cette condition de stabilité s'écrit :

$$\frac{(\Delta t)^2 s_j(\vec{k})}{4 \rho^2} \leq 1 \quad j = 1, 2$$



On retrouve bien sûr la condition de stabilité (2.16).

Nous sommes dans le cas où il n'y a pas d'amortissement des ondes mais uniquement dispersion. Ceci tient au fait que le schéma est centré en temps et réversible.

#### 2.4.4. DEVELOPPEMENT LIMITE POUR LES PETITES VALEURS DES PARAMETRES DE DISCRETISATION

Nous supposons ici que le vecteur  $\vec{k}$  est fixé et que les paramètres  $\Delta x$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta t$  tendent vers 0 en vérifiant les inégalités :

$$(2.61) \quad 0 < q \leq \frac{\Delta x}{\Delta z} \leq q < +\infty$$

et la condition de stabilité (2.40) uniformément en  $q$ .

On calcule aisément le développement de la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$ .

$$(2.62) \quad \hat{B}_h(\vec{k}) = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu) k_1^2 + \mu k_2^2 & (\lambda+\mu) k_1 k_2 \\ (\lambda+\mu) k_1 k_2 & (\lambda+2\mu) k_2^2 + \mu k_1^2 \end{pmatrix} + \\ - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu) k_1^4 (\Delta x)^2 + \mu k_2^4 (\Delta z)^2 & 2 k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2) \Delta x \Delta z \\ 2 k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2) \Delta x \Delta z & (\lambda+2\mu) k_2^4 (\Delta z)^2 + \mu k_1^4 (\Delta x)^2 \end{pmatrix} + \\ + O(\max(\Delta x)^4, (\Delta z)^4)$$

On a en particulier :

$$(2.63) \quad \hat{B}_h(\vec{k}) = \hat{B}_0(\vec{k}) + O(|\Delta x|^2)$$

où  $\hat{B}_0(\vec{k})$  est la matrice définie en (1.14).

On en déduit :

$$(2.64) \quad \begin{cases} s_1(\vec{k}) = s_1^0 + 0((\Delta x)^2) = (\lambda + 2\mu)(k_1^2 + k_2^2) + 0((\Delta x)^2) \\ s_2(\vec{k}) = s_2^0 + 0((\Delta x)^2) = \mu(k_1^2 + k_2^2) + 0((\Delta x)^2) \end{cases}$$

$$(2.65) \quad \begin{cases} \vec{d}_1(\vec{k}) = \vec{d}_1^0 + 0((\Delta x)^2) = \vec{k} + 0((\Delta x)^2) \\ \vec{d}_2(\vec{k}) = \vec{d}_2^0 + 0((\Delta x)^2) = \vec{k}^\perp + 0((\Delta x)^2) \end{cases}$$

Mais on a aussi :

$$(2.66) \quad 2\rho \frac{(1 - \cos \omega_j \Delta t)}{(\Delta t)^2} = \rho \omega_j^2 - \rho \omega_j^4 \frac{(\Delta t)^2}{12} + 0(\Delta t)^4 \quad j = 1, 2$$

d'où l'on déduit :

$$\rho \omega_1^2(\vec{k}) = (\lambda + 2\mu)(k_1^2 + k_2^2) + 0((\Delta x)^2)$$

$$\rho \omega_2^2(\vec{k}) = \mu(k_1^2 + k_2^2) + 0((\Delta x)^2)$$

$$(2.67) \quad \begin{cases} \frac{\omega_1(\vec{k})}{|\vec{k}|} = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2} + 0((\Delta x)^2) \\ \frac{\omega_2(\vec{k})}{|\vec{k}|} = \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2} + 0((\Delta x)^2) \end{cases}$$

Rappelons que dans les formules (2.64) ... (2.67) les quantités 0 dépendent du vecteur  $\vec{k}$ .

2.4.5. MAJORATION DE LA VITESSE DE GROUPE

Nous montrons le :

Théorème 2.2 : Soient  $\Delta x$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta t$  tels que :

- $\Delta x = \Delta z$
- $\gamma = 1$  ; condition de stabilité directement vérifiée.

Au voisinage du vecteur d'onde  $\vec{k} = K_h^{(1)} = (\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta z})$  la direction des vitesses de groupe  $\vec{\text{grad}} \omega_1$  et  $\vec{\text{grad}} \omega_2$  admet une discontinuité. Le module des vitesses de groupe est continu et vaut en ce point :

$$(2.68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{|\vec{\text{grad}} \omega_1|}{v_1} = \frac{v_2}{v_1} < 1 \\ \frac{|\vec{\text{grad}} \omega_2|}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} > 1 \end{array} \right.$$

Les formules (2.68) montrent donc qu'au voisinage du point  $K_h^{(1)}$  le module de la vitesse de groupe des ondes P numériques est approché par défaut et que celui des ondes S numériques est approché par excès et que cet écart est d'autant plus important que le rapport  $\frac{v_1}{v_2}$  est grand.

Démonstration du théorème 2.2

Nous adoptons les notations introduites au paragraphe suivant.

① Calculons la vitesse de groupe  $\vec{\text{grad}} \omega_1(\vec{k})$ . Pour cela dérivons l'équation (2.57) par rapport à  $k_1$  et à  $k_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sin \omega_1 \Delta t) \Delta t \frac{\partial \omega_1}{\partial k_1} = \gamma^2 \frac{\partial \beta_1}{\partial k_1} \left( \xi^2 + \frac{1 - 2\xi^2}{2} \beta_2 \right) \\ (\sin \omega_2 \Delta t) \Delta t \frac{\partial \omega_1}{\partial k_2} = \gamma^2 \frac{\partial \beta_2}{\partial k_2} \left( \xi^2 + \frac{1 - 2\xi^2}{2} \beta_1 \right) \end{array} \right.$$

Mais, au signe près, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \beta_1}{\partial k_1} = \Delta x \beta_1^{1/2} (2 - \beta_1)^{1/2} \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial k_2} = \Delta x \beta_2^{1/2} (2 - \beta_2)^{1/2} \end{array} \right.$$

Nous cherchons à savoir si  $|\overrightarrow{\text{grad}} \omega_1(\vec{k})|$  reste borné lorsque  $\vec{k}$  varie. La seule possibilité pour que  $|\overrightarrow{\text{grad}} \omega_1(\vec{k})|$  ne soit pas borné est que  $\sin \omega_1 \Delta t$  s'annule. Ceci ne peut se produire que si la condition de stabilité est strictement vérifiée à savoir :

$$\gamma = 1$$

et si le vecteur  $\vec{k}$  est au voisinage du vecteur  $\vec{k}_h^{(1)}$ . Les formules précédentes montrent alors qu'on aboutit à une forme indéterminée, que l'on peut essayer de lever en effectuant un développement limité.

Posons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 2 - S_1 \\ \beta_2 = 2 - S_2 \end{array} \right.$$

où  $S_1$  et  $S_2$  sont petits. Les développements en fonction de  $S_1$  et  $S_2$  donnent, au signe près.

- $1 - \cos \omega_1 \Delta t \approx 2 - (S_1 + S_2) (1 - \xi^2)$
- $\sin \omega_1 \Delta t \approx 2^{1/2} (1 - \xi^2)^{1/2} (S_1 + S_2)^{1/2}$
- $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \beta_1}{\partial k_1} \approx \Delta x 2^{1/2} S_1^{1/2} \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial k_2} \approx \Delta x 2^{1/2} S_2^{1/2} \end{array} \right.$

d'où l'on déduit :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{V_1} \left| \frac{\partial \omega_1}{\partial k_1} \right| \approx \frac{V_2}{V_1} \frac{S_1^{1/2}}{(S_1 + S_2)^{1/2}} \\ \frac{1}{V_1} \left| \frac{\partial \omega_1}{\partial k_2} \right| \approx \frac{V_2}{V_1} \frac{S_2^{1/2}}{(S_1 + S_2)^{1/2}} \end{array} \right.$$

soit encore :

$$\frac{|\vec{\text{grad}} \omega_1(\vec{k})|}{V_1} \approx \frac{V_2}{V_1}$$

② Un calcul analogue pour  $\vec{\text{grad}} \omega_2(\vec{k})$  donne :

$$\frac{1}{V_2} \left| \frac{\partial \omega_2}{\partial k_1} \right| \approx \frac{V_1}{V_2} \frac{S_1^{1/2}}{(S_1 + S_2)^{1/2}}$$

$$\frac{1}{V_2} \left| \frac{\partial \omega_2}{\partial k_2} \right| \approx \frac{V_1}{V_2} \frac{S_2^{1/2}}{(S_1 + S_2)^{1/2}}$$

ce qui entraîne :

$$\frac{|\vec{\text{grad}} \omega_2(\vec{k})|}{V_2} \approx \frac{V_1}{V_2}$$

## 2.5. ONDES PLANES NUMERIQUES ET CONTINUES : CHOIX DES ELEMENTS DE COMPARAISON

Pour un vecteur d'onde  $\vec{k}$  nous nous sommes intéressés à comparer les paramètres des ondes P et S continues correspondantes à ceux des paramètres des ondes P et S numériques.

Nous définissons ou redéfinissons maintenant les paramètres et les quantités que nous utilisons et que nous comparons.

Le nombre de paramètres à faire varier étant grand nous avons choisi, pour l'étude numérique, de nous restreindre au cas particulier :

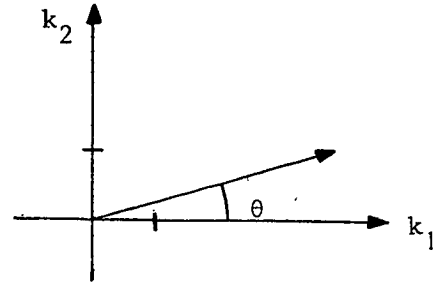
$$(2.70) \quad \Delta x = \Delta z$$

### 2.5.1. LES PARAMETRES DE L'ONDE

Nous posons pour le vecteur d'onde  $\vec{k} = (k_1, k_2)$

$$(2.71) \quad k = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$$

$$(2.72) \quad \begin{cases} k_1 = k \cos \theta \\ k_2 = k \sin \theta \end{cases}$$



$\theta$  est l'angle entre l'axe des  $k_1$  et la direction de propagation de l'onde.

La longueur d'onde  $\lambda$  est égale à :

$$(2.73) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Nous introduisons les quantités :

$$(2.74) \quad \bullet \quad G = \frac{\lambda}{\Delta x}$$

$$(2.75) \quad \bullet \quad H = \frac{1}{G} = \frac{\Delta x}{\lambda}$$

Nous dirons que  $G$  est le nombre de points par longueur d'onde et  $H$  l'inverse du nombre de points par longueur d'onde. Il faut faire attention au fait que pour une longueur donnée le nombre de points de la grille dans une direction dépend de la direction ! Il est maximum si la direction est celle d'un des deux axes. Il est minimum, divisé par un facteur  $\sqrt{2}$ , si la direction est à  $45^\circ$  des axes.

### 2.5.2. LE PARAMETRE DE DISCRETISATION EN TEMPS : CONDITION DE STABILITE

Pour un pas  $\Delta x$  fixé, la condition de stabilité (2.37) indique que le pas de temps  $\Delta t$  doit être choisi inférieur à un pas de temps maximal  $\Delta t^*$  égal à :

$$(2.76) \quad \Delta t^* = \frac{\Delta x}{(v_1^2 + v_2^2)^{1/2}}$$

Il est alors logique de rapporter le pas de temps  $\Delta t$  à ce pas  $\Delta t^*$  en introduisant le rapport :

$$(2.77) \quad \gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t^*} \quad 0 < \gamma < 1$$

### 2.5.3. LES PARAMETRES PHYSIQUES

Dans l'expression des vitesses de phase et de groupe adimensionnelles (cf (2.80), (2.81)) intervient uniquement le coefficient de Poisson :

$$(2.78) \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad 0 < \nu < 0,5$$

Nous utiliserons aussi le paramètre

$$(2.79) \quad \xi^2(\nu) = \frac{v_1^2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 3\mu} = \frac{1 - \nu}{\frac{3}{2} - 2\nu} \quad ; \quad \frac{2}{3} \leq \xi^2 \leq 1$$

Nous traçons le graphe de fonctions de  $\nu$  qui interviennent dans les formules.

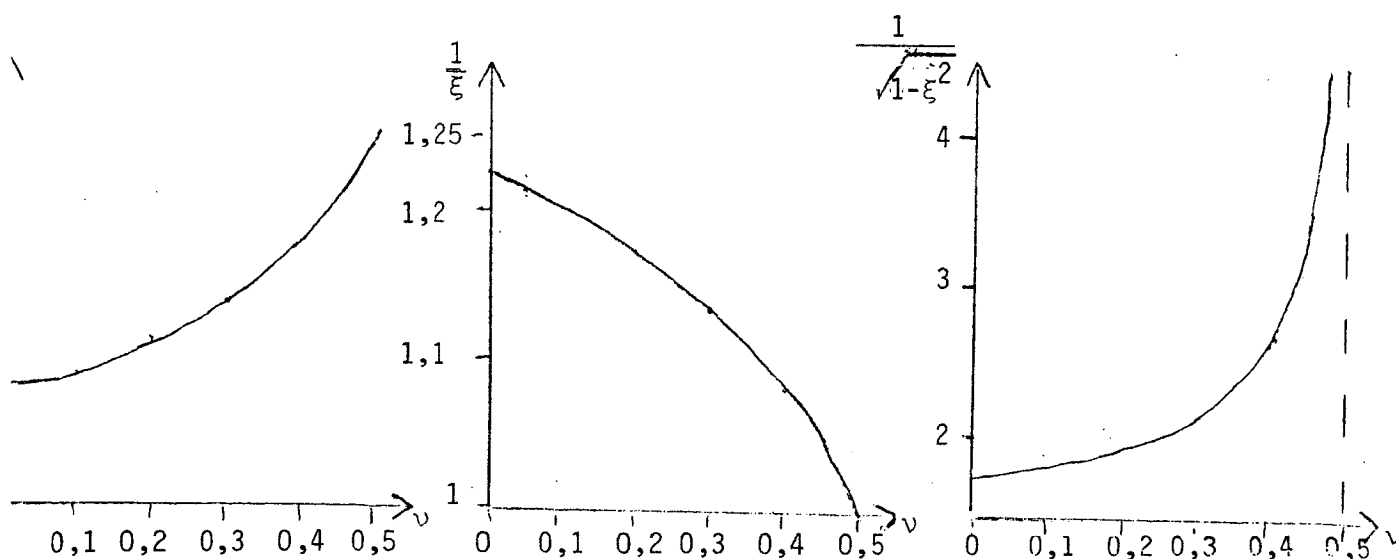


Figure 2.9

2.5.4. COMPARAISON DES VITESSES DE PHASE

Nous introduisons les quantités :

$$(2.80) \quad q_1(\vec{k}) = \frac{\omega_1(\vec{k})}{|\vec{k}|} \cdot \frac{1}{V_1} \quad \text{avec } V_1 = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2}$$

$$(2.81) \quad q_2(\vec{k}) = \frac{\omega_2(\vec{k})}{|\vec{k}|} \cdot \frac{1}{V_2} \quad \text{avec } V_2 = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}$$

Ce sont des quantités adimensionnelles qui mesurent le rapport entre le module de la vitesse de phase numérique  $\frac{\omega_i(\vec{k})}{|\vec{k}|}$  et la vitesse de phase continue  $V_i$ .

Remarquons que nous avons fait le choix (2.35)

$$s_2(\vec{k}) \leq s_1(\vec{k})$$

il est donc logique de comparer  $\frac{\omega_1(\vec{k})}{|\vec{k}|}$  à  $V_1$  et  $\frac{\omega_2(\vec{k})}{|\vec{k}|}$  à  $V_2$ . Le développement (2.67) pour les petites valeurs des paramètres de discrétisation apporte une justification supplémentaire.

De (2.34), (2.57), (2.58) on déduit :

$$(2.82) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - \cos \omega_1 \Delta t) = \gamma^2 \left( \xi^2 (\beta_1 + \beta_2) + \frac{(1 - 2\xi^2)}{2} \beta_1 \beta_2 \right) \\ (1 - \cos \omega_2 \Delta t) = \gamma^2 \left( (1 - \xi^2) (\beta_1 + \beta_2) + \frac{(2\xi^2 - 1)}{2} \beta_1 \beta_2 \right) \end{array} \right.$$

où rappelons-le on a posé (2.29)

$$(2.83) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 1 - \cos k_1 \Delta x \\ \beta_2 = 1 - \cos k_2 \Delta z \end{array} \right.$$

On choisit (cf. (2.59))  $\omega_1$  et  $\omega_2$  vérifiant

$$(2.84) \quad 0 < \omega_j \Delta t \leq \pi \quad j = 1, 2$$



Les rapports  $\vec{q}_1(k)$  et  $\vec{q}_2(k)$  sont égaux à :

$$(2.85) \left\{ \begin{array}{l} q_1(\vec{k}) = \frac{G}{2\pi} \frac{1}{\xi} \frac{1}{\gamma} (\omega_1 \Delta t) \\ q_2(\vec{k}) = \frac{G}{2\pi} \frac{1}{(1 - \xi^2)^{1/2}} \frac{1}{\gamma} (\omega_2 \Delta t) \end{array} \right.$$

### 2.5.5. COMPARAISON DES VITESSES DE GROUPE

On peut introduire des quantités adimensionnelles qui mesurent le rapport entre le module de la vitesse de groupe numérique et celui de la vitesse de groupe continue

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1(\vec{k}) = \frac{|\overrightarrow{\text{grad}} \omega_1(\vec{k})|}{v_1} \\ r_2(\vec{k}) = \frac{|\overrightarrow{\text{grad}} \omega_2(\vec{k})|}{v_2} \end{array} \right.$$

On peut de même mesurer l'écart entre la direction de propagation donnée par le vecteur  $\vec{k}$  et la direction de propagation de l'énergie donnée par le vecteur vitesse de groupe  $\overrightarrow{\text{grad}} \omega(\vec{k})$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \varphi_1 = \text{angle} (\vec{k}, \overrightarrow{\text{grad}} \omega_1(\vec{k})) \\ \delta \varphi_2 = \text{angle} (\vec{k}, \overrightarrow{\text{grad}} \omega_2(\vec{k})) \end{array} \right.$$

Pour réduire le volume des calculs à effectuer, nous avons préféré introduire les quantités :

$$(2.86) \left\{ \begin{array}{l} Q_1(\vec{k}) = \frac{1}{v_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial k} = \frac{1}{v_1} \overrightarrow{\text{grad}} \omega_1(\vec{k}) \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \\ Q_2(\vec{k}) = \frac{1}{v_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial k} = \frac{1}{v_2} \overrightarrow{\text{grad}} \omega_2(\vec{k}) \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \end{array} \right.$$

### 2.5.6. COMPARAISON DES DIRECTIONS DU MOUVEMENT

A l'onde P numérique est associée une direction du mouvement  $\vec{d}_1(\vec{k})$  qui est la direction propre de la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$  correspondant à la plus grande valeur propre  $s_1(\vec{k})$ . Cette direction est différente de la direction donnée par  $\vec{k}$  qui est celle du mouvement pour l'onde P continue. Nous noterons  $\delta\theta$  l'angle entre ces deux directions :

$$(2.87) \quad \delta\theta = \text{angle}(\vec{k}, \vec{d}_1(\vec{k}))$$

A l'onde S numérique est associée de même une direction du mouvement  $\vec{d}_2(\vec{k})$  qui est la direction propre de la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$  correspondant à la plus petite valeur propre  $s_2(\vec{k})$ .

Cette direction  $\vec{d}_2(\vec{k})$  est différente de la direction perpendiculaire à  $\vec{k}$ , qui est celle du mouvement pour l'onde S continue.

Les directions  $\vec{d}_1(\vec{k})$  et  $\vec{d}_2(\vec{k})$  étant perpendiculaires, on a :

$$(2.88) \quad \delta\theta = \text{angle}(\vec{k}, \vec{d}_1(\vec{k})) = \text{angle}(\vec{k}^\perp, \vec{d}_2(\vec{k})).$$

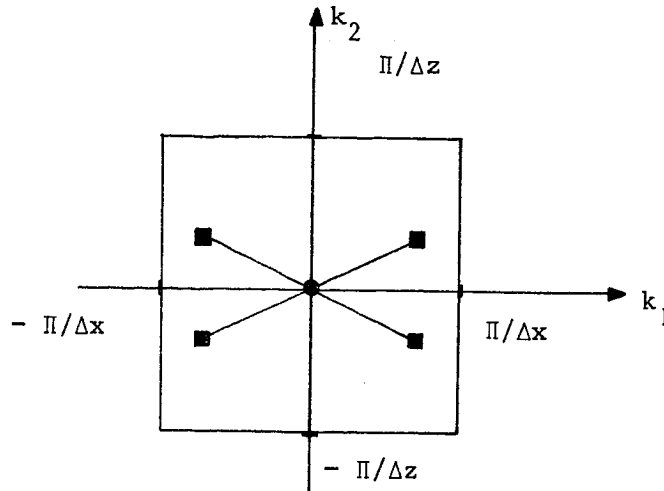
La direction  $\vec{d}_1(\vec{k})$  est donnée par la formule (2.39) que nous réécrivons :

$$(2.89) \quad \vec{d}_1(\vec{k}) // \begin{pmatrix} \varepsilon(\vec{k}) (\beta_1(2 - \beta_1) \beta_2(2 - \beta_2))^{1/2} \\ 2 \beta_2 - \beta_1 \beta_1 \end{pmatrix}$$

où  $\varepsilon(\vec{k}) = \pm 1$  est défini en (2.38). Soulignons encore une fois que les directions  $\vec{d}_1(\vec{k})$  et  $\vec{d}_2(\vec{k})$  ne dépendent que du vecteur  $\vec{k}$  et du paramètre de discrétisation en espace  $\Delta x$  ( $\Delta z = \Delta x$ ).

### 2.5.7. DOMAINE DE VARIATION DE $\vec{k}$

Nous avons montré au paragraphe 2.3.1 qu'à quatre vecteurs  $\vec{k}$  de  $K_h$  déduits les uns des autres par symétrie autour des axes  $k_1$  et  $k_2$  correspondaient les mêmes valeurs de  $s_1(\vec{k})$  et  $s_2(\vec{k})$  et donc de  $q_1(\vec{k})$ ,  $q_2(\vec{k})$ ,  $Q_1(\vec{k})$ ,  $Q_2(\vec{k})$ .



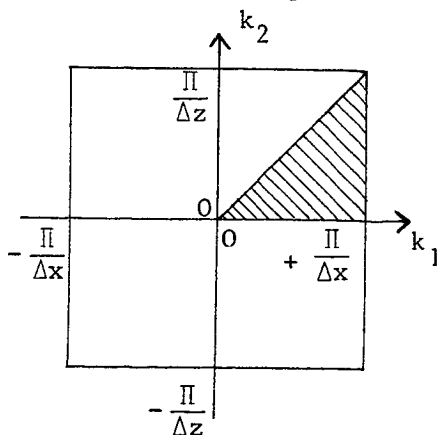
De (2.38) on déduit aisément qu'à deux vecteurs  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$  de  $K_h$  symétriques par rapport à l'axe des  $k_1$  (resp.  $k_2$ ) correspondent deux directions  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}'_1$  symétriques par rapport à l'axe des  $k_1$  (resp.  $k_2$ ). On a donc :

$$(2.90) \quad \text{angle}(\vec{k}, \vec{d}_1(\vec{k})) = - \text{angle}(\vec{k}', \vec{d}'_1(\vec{k}'))$$

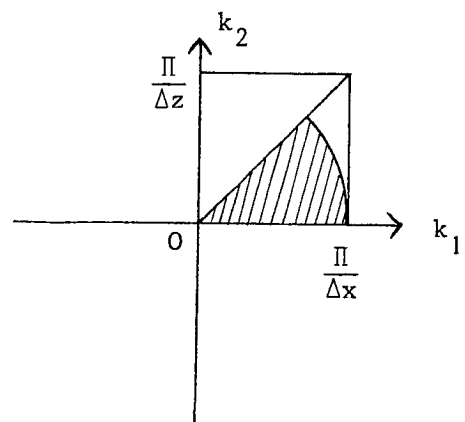
On peut donc réduire le domaine de variation de  $\vec{k}$  au quadrant positif de  $K_h$ .

En fait comme  $\Delta x = \Delta z$  les formules sont symétriques par rapport à  $k_1$  et  $k_2$ .

On peut restreindre le domaine de variation de  $\vec{k}$  au triangle hachuré sur la figure ci-dessous.



Domaine d'étude théorique



Domaine d'étude pratique

Figure 2.10

En fait nous n'avons envisagé qu'un sous-domaine circulaire de façon à obtenir une borne uniforme suivant les directions, sur le nombre de points par longueur d'onde, c'est-à-dire nous avons choisi :

$$(2.91) \quad 0 \leq H \leq \frac{1}{2}$$

et donc

$$(2.92) \quad 2 \leq G$$

## 2.6. EJUDE NUMERIQUE DE LA RELATION DE DISPERSION (CAS $\Delta X = \Delta Z$ )

Nous présentons les valeurs des vitesses de phase et des vitesses de groupe des ondes planes pouvant se propager dans le schéma ainsi que la différence entre la direction de propagation et la direction du déplacement pour différentes valeurs des paramètres  $H$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$  et  $\nu$  (cf. (2.75), (2.77), (2.72), (2.78)). Nous déduisons de ces résultats des conclusions sur les choix à faire pour les paramètres de discrétisation  $H$  et  $\gamma$  en vue d'une simulation utilisant le schéma 1.

### 2.6.1. ECART $\delta\theta$ ENTRE LA DIRECTION DE PROPAGATION ET LA DIRECTION DU DEPLACEMENT

On peut voir à partir de (2.89) que la direction du déplacement est la direction de propagation ( $\delta\theta = 0^\circ$ ) pour  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 45^\circ$ . Nous présentons sur la figure 2.11 l'écart entre ces deux directions pour  $\theta \in [10^\circ, 35^\circ]$  : l'écart augmente quand le nombre  $G$  de points de discrétisation par longueur d'onde diminue mais reste acceptable jusqu'à 5 points par longueur d'onde ( $\delta\theta < 2^\circ$ ). Enfin l'écart  $\delta\theta$  est maximum pour une valeur de  $\theta$  voisine de  $25^\circ$ .

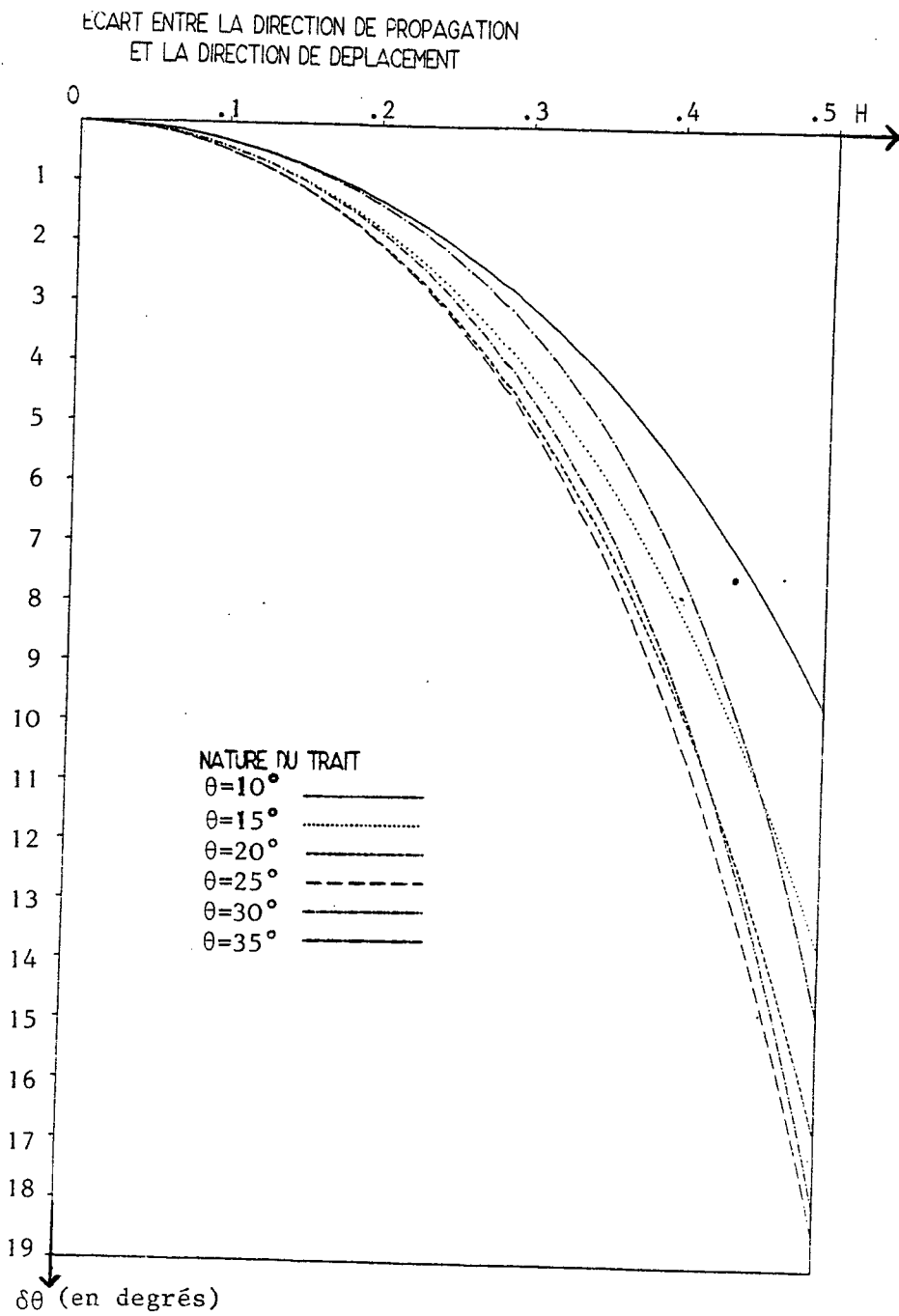


Figure 2.11 : Ecart entre la direction de propagation et la direction du déplacement.

### 2.6.2. DISPERSION DES ONDES P

Les figures 2.12 et 2.13 représentent respectivement la vitesse de phase adimensionnelle  $q_1$  et la vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes P numérique obtenues pour différentes valeurs des paramètres. On constate :

- que  $q_1$  dépend peu de  $\theta$  et de  $\nu$ ,
- que la vitesse de phase des ondes P numériques approche bien (par défaut) la vitesse des ondes P jusqu'à  $G=5$  points par longueur d'onde (erreur relative  $|1-q_1|$  inférieure à 7 % ; l'approximation est d'autant plus précise que le nombre de points par longueur d'onde est grand (erreur relative  $|1-q_1|$  de l'ordre de 2 % pour 10 points par longueur d'onde).
- que l'approximation s'améliore sensiblement quand  $\gamma$  augmente au-dessus de 0,5 (pour  $\gamma=1$  et 5 points par longueur d'onde l'erreur relative sur la vitesse de phase des ondes P est inférieure à 2 %).

La vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  dans la direction  $k$  des ondes P numériques (cf. (2.86)) dépend de  $\gamma$ ,  $\theta$  et  $\nu$  sensiblement de la même façon que  $q_1$  ; l'erreur relative  $|1-Q_1|$  sur la vitesse des ondes P est environ trois fois supérieure à  $|1-q_1|$ .

#### Remarque 2.2 :

On peut voir que les courbes  $q_1(H)$  (resp.  $Q_1(H)$ ) sont tangentes à  $q_1=1$  (resp.  $Q_1=1$ ) en  $H=0$  : ceci est la conséquence du résultat (2.67) montrant que le schéma réalise une approximation au second ordre de la vitesse de propagation des ondes P.

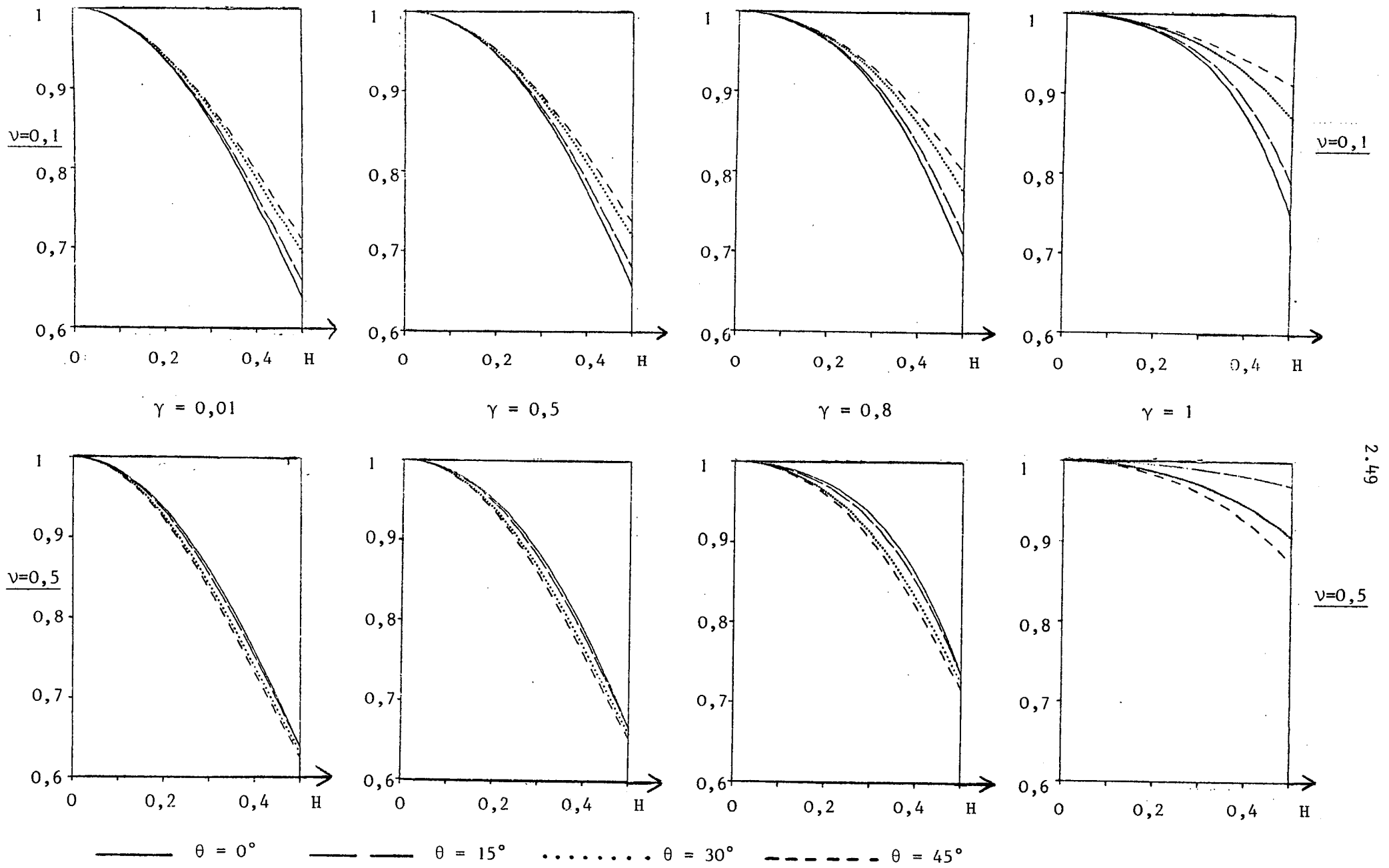


Figure 2.12 : Vitesse de phase adimensionnelle  $q_1$  des ondes P numériques

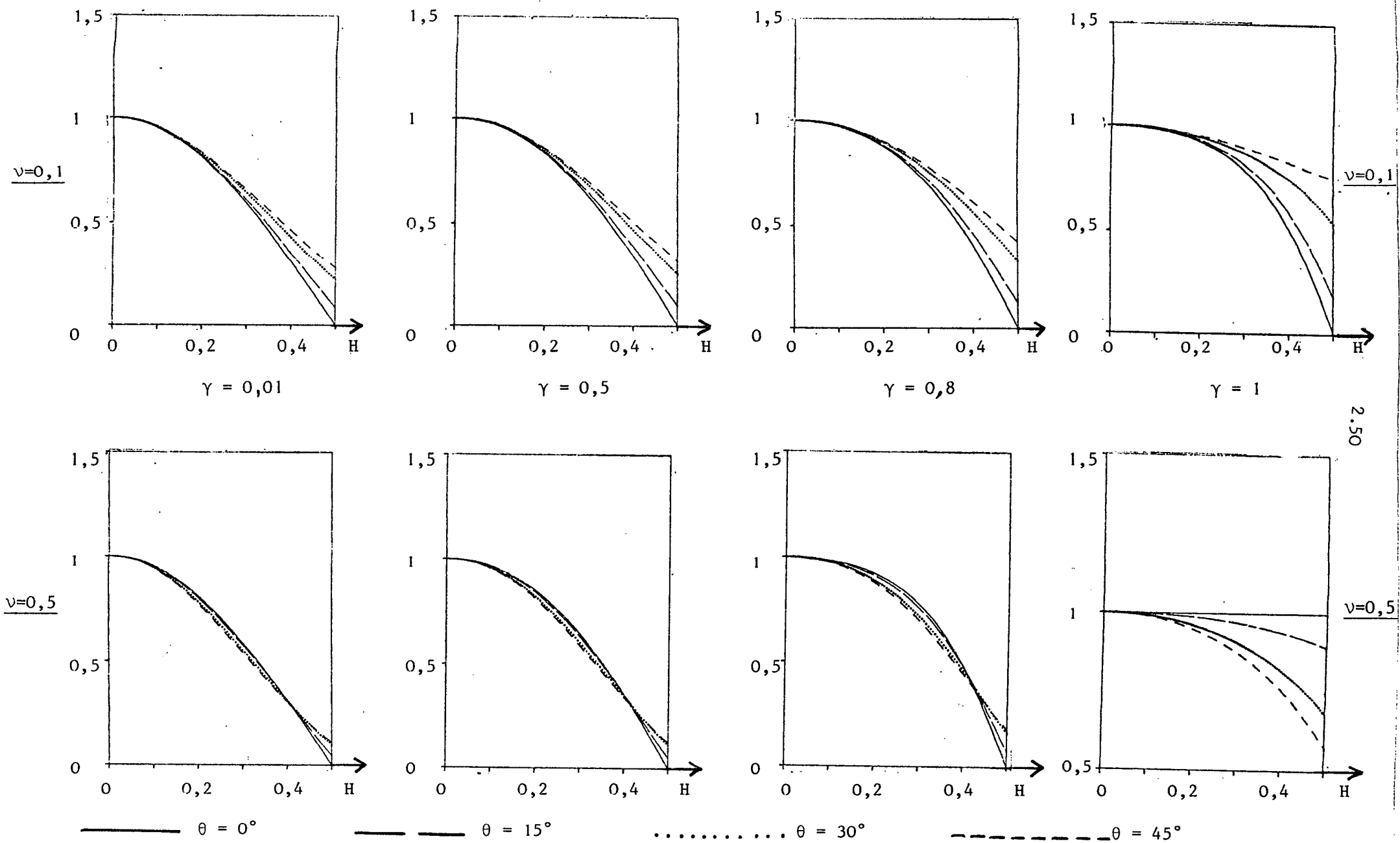


Figure 2.13 : Vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes P numériques



### 2.6.3. DISPERSION DES ONDES S

Les figures 2.14 et 2.15 représentent respectivement la vitesse de phase adimensionnelle  $q_2$  et la vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_2$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes S numériques obtenues pour différentes valeurs des paramètres.

On constate que  $q_2$  dépend peu de  $\gamma$  mais beaucoup de  $\nu$  ;  $q_2$  dépend également beaucoup de  $\theta$  : les valeurs de  $\theta$  voisines de  $20^\circ$  sont les directions de propagation où la vitesse continue des ondes S est la mieux approchée.

Schématiquement on peut distinguer 2 cas :

-  $\theta$  petit ( $0^\circ$  et  $15^\circ$ )

Dans ce cas et pour toutes les valeurs de  $\nu$  la vitesse de phase des ondes S numériques approche bien (en général par défaut) la vitesse des ondes S jusqu'à  $G=5$  points par longueur d'onde (erreur relative inférieure à 10 %) : la dispersion des ondes S est assez semblable à la dispersion des ondes P.

-  $\theta$  grand ( $30^\circ$  et  $45^\circ$ )

Dans ce cas l'approximation (en général par excès) de la vitesse des ondes S par la vitesse de phase des ondes S numériques est très bonne pour  $\nu$  petit et devient progressivement mauvaise pour les grandes valeurs de  $\nu$  (20 % d'erreur pour  $G=5$  points par longueur d'onde et  $\nu=0,4$ ).

La vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_2$  (cf. (2.86)) dépend de  $\gamma$ ,  $\theta$  et  $\nu$  sensiblement de la même façon que  $q_2$  ; l'erreur relative  $|1-Q_2|$  sur la vitesse des ondes S est environ trois fois supérieure à  $|1-q_2|$ .

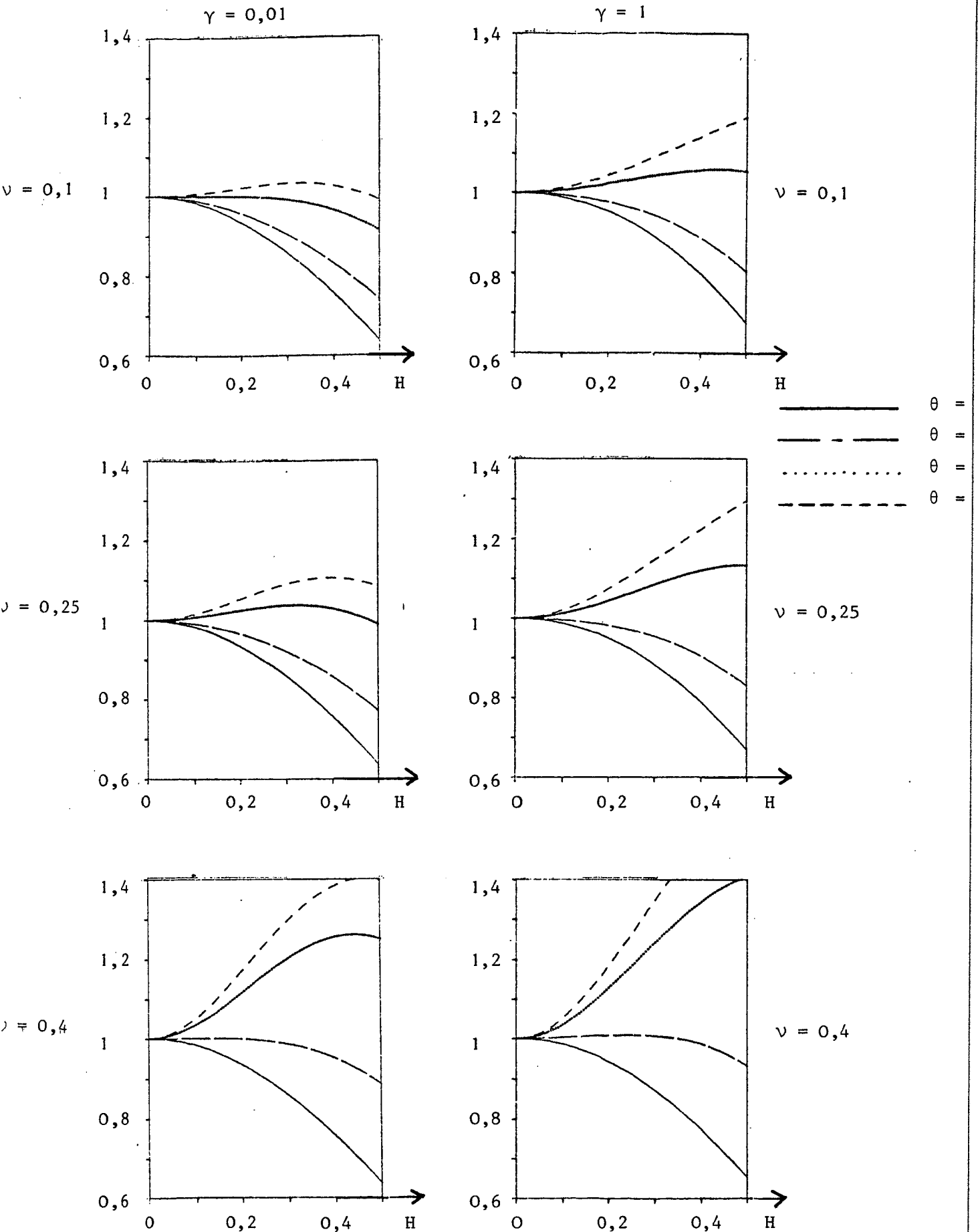


Figure 2.14 : Vitesse de phase adimensionnelle  $q_2$  des ondes S numériques

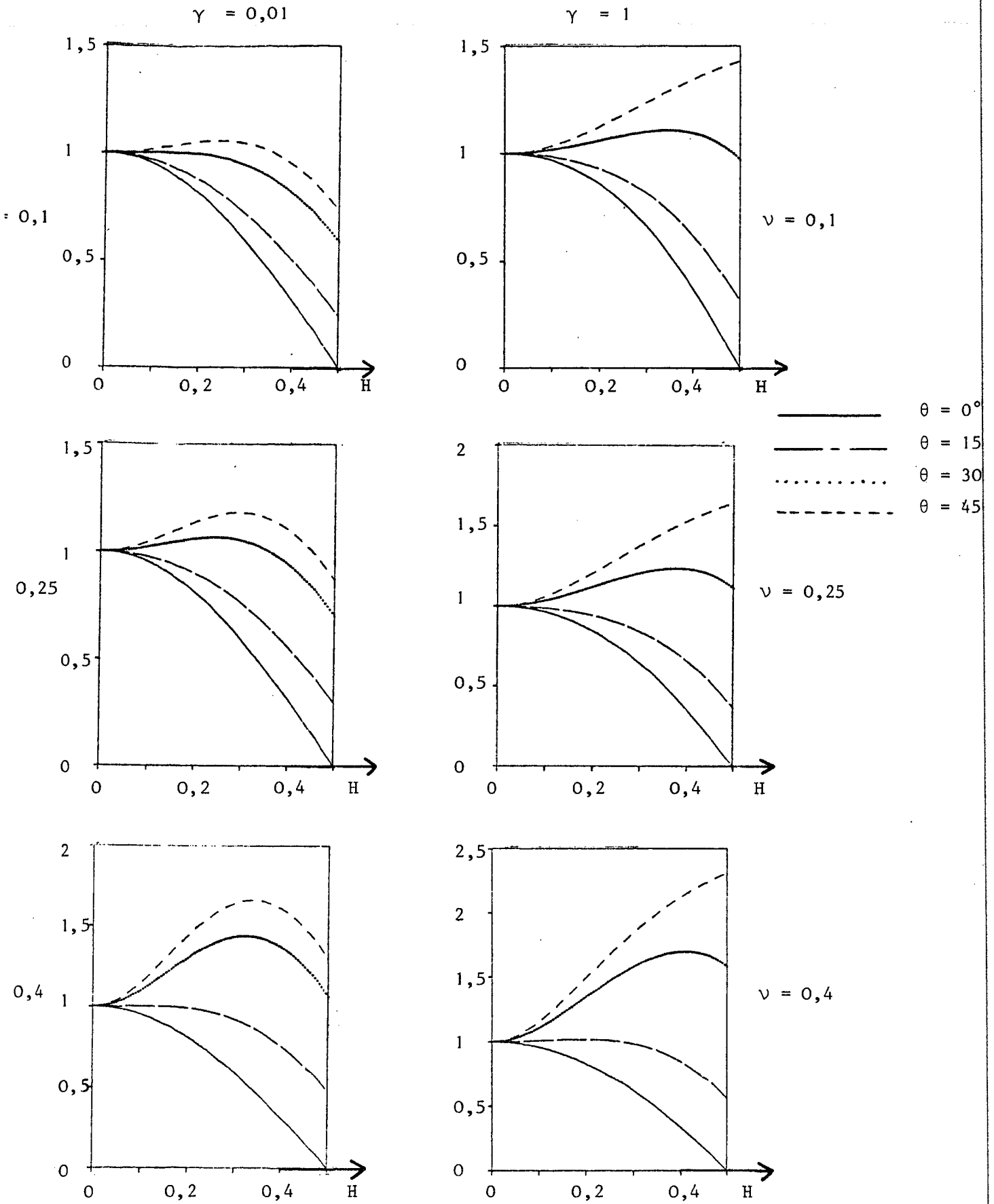


Figure 2.15 : Vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_2$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes S numériques.

Remarque 2.3 :

Si on suppose  $\omega$  (cf. (2.51)) et  $\Delta x$  donnés, le nombre de points par longueur d'onde S sera inférieur au nombre de points par longueur d'onde P. En conséquence, dans un programme simulant la propagation d'ondes P et d'ondes S, la dispersion des ondes S sera plus forte que la dispersion des ondes P (sauf pour les valeurs de  $\theta$  voisines de  $20^\circ$ ).

Remarque 2.4 :

Rappelons que grâce à (2.35) la vitesse de phase des ondes S numériques est toujours inférieure à la vitesse de phase des ondes P numériques.

Remarque 2.5 :

On peut voir que les courbes  $q_2(H)$  (resp.  $Q_2(H)$ ) sont tangentes à  $q_2=1$  (resp.  $Q_2=1$ ) en  $H=0$  ceci est la conséquence du résultat (2.67) montrant que le schéma réalise une approximation au second ordre de la vitesse de propagation des ondes S.

Ces 3 dernières remarques ont un caractère général et s'appliqueront également aux différents schémas que nous étudierons dans la suite.

#### 2.6.4. MODE D'EMPLOI D'UN PROGRAMME DE SIMULATION UTILISANT LE SCHEMA

##### 1°) Choix du nombre G de points par longueur d'onde

Le paragraphe précédent a montré que la part la plus importante de l'erreur entre la solution exacte de (1.1), (1.2) et la solution numérique (de (2.1), (2.2)) provenait de la vitesse des ondes S. C'est donc elle qui va nous servir de guide pour le choix du nombre G de points de discrétisation par longueur d'onde.

Le tableau 2.1 ci-dessous donne l'erreur relative sur la vitesse de phase des ondes S ( $=|1-q_2|$ ) ainsi que sur la vitesse de groupe ( $=|1-Q_2|$ ).

Nombre de pts par long. d'onde $\nu$	G=5		G=10		G=20	
	$\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$	$\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$	$\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$	$\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$	$\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$	$\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$
$\nu = 0,1$	6% (18%)	3% (7%)	1,5%(4,5%)	0,8%(2,3%)	0,4%(1,1%)	0,2%(0,6%)
$\nu = 0,25$	6% (18%)	6% (15%)	1,5%(4,5%)	1,7%(4,8%)	0,4%(1,1%)	0,4%(1,2%)
$\nu = 0,4$	6% (18%)	17% (45%)	1,5%(4,5%)	5% (14%)	0,4%(1,1%)	1,3%(3,8%)

Tableau 2.1 : Erreur relative sur la vitesse de phase des ondes S( $1-q_2$ ) et, mentionnée entre parenthèses, erreur relative sur la vitesse de groupe des ondes S( $1-Q_2$ ) pour  $\gamma = 0,5$ .

En conclusion, on notera que l'utilisation du schéma (2.1), (2.2) est coûteuse (nécessité de 10 points par longueur d'onde) si l'on veut approcher correctement la vitesse de groupe des ondes S pour toutes les valeurs de  $\theta$  dès que  $\nu$  est supérieur à 0,3.

## 2°) Influence de $\gamma$

Le tableau ci-après donne l'erreur relative sur la vitesse de phase des ondes P numériques ( $|1-q_1|$ ) ainsi que sur la vitesse de groupe ( $=|1-Q_1|$ ) en fonction de  $\gamma$ .

G (nb de pts par longueur d'onde) $\gamma$	G=5	G=10	G=20
$\gamma = 0,01$	6,5 % (19,0 %)	1,6 % (4,8 %)	0,4 % (1,3 %)
$\gamma = 0,1$	6,4 % (18,8 %)	1,6 % (4,7 %)	0,4 % (1,3 %)
$\gamma = 0,5$	5,4 % (16,2 %)	1,3 % (3,9 %)	0,3 % (1,0 %)
$\gamma = 0,8$	3,7 % (11,3 %)	0,8 % (2,5 %)	0,2 % (0,6 %)
$\gamma = 1.$	1,8 % (5,9 %)	0,4 % (1,2 %)	0,1 % (0,3 %)

Tableau 2.2 : Erreur relative sur la vitesse de phase des ondes P numériques ( $|1-q_1|$ ) et, mentionnée entre parenthèses, erreur relative sur la vitesse de groupe ( $|1-Q_1|$ ) pour  $\nu = 0,25$ .

Ayant choisi un pas de discrétisation en espace  $\Delta x$  convenable, on prendra donc un pas de discrétisation en temps  $\Delta t$  tel que  $\gamma$  soit le plus proche possible de 1, ce qui permet des économies de calcul et optimise la propagation des ondes P numériques sans altérer la propagation des ondes S numériques. Notons que ceci ne sera pas réalisable lorsque le milieu fait apparaître de forts contrastes de la quantité  $V_P^2 + V_S^2$  car  $\Delta t$  et  $\Delta x$  sont fixés dans tout le domaine : cet inconvénient disparaît quand on utilise un schéma provenant d'une discrétisation en éléments finis.

### 3°) Influence des paramètres physiques

Les 2 paramètres physiques  $\theta$  et  $\nu$  influent sur le coût d'une simulation à précision donnée, sauf lorsqu'il n'y a pas d'onde S. Retenons que un cas est particulièrement difficile à bien simuler : celui d'ondes S se propageant dans des directions proches de la diagonale du maillage pour des valeurs de  $\nu$  supérieures à 0,3.

## CHAPITRE\_3

ETUDE DE SCHEMAS NUMERIQUES PROVENANT DE LA DISCRETISATION

PAR ELEMENTS FINIS  $Q_1$  DES EQUATIONS DE L'ELASTODYNAMIQUE



Nous reprenons dans ce Chapitre l'étude faite au Chapitre 2 mais dans le cas d'une discrétisation par éléments finis  $Q_1$  des équations de l'élastodynamique (1.1)(1.2). Nous rappelons au § 3.1 la formulation variationnelle du problème aux limites associé aux équations de l'élastodynamique. Après avoir présenté l'élément fini  $Q_1$ , (§ 3.2), nous présentons au § 3.3 2 approximations envisageables des différents produits scalaires intervenant dans la formulation variationnelle. Le paragraphe 3.4 précise le schéma d'approximation en temps utilisé et le paragraphe 3.5 récapitule les 2 schémas obtenus.

On étudiera la capacité de ces schémas à rendre compte du caractère propagatoire des solutions du modèle : une étude de la relation de dispersion, menée pour chaque schéma respectivement aux paragraphes 3.6 et 3.8, permet d'établir, en fonction des paramètres du milieu et des paramètres de discrétisation, les ondes (P numériques et S numériques) qui peuvent se propager dans le schéma et la vitesse de phase de ces ondes.

Les paragraphes 3.7 et 3.9 présentent, pour chaque schéma, une étude numérique de la dispersion des ondes.

L'étude présentée aux paragraphes 3.6 et 3.7 a été effectuée par B. JAPIOT.

On utilisera dans ce Chapitre les mêmes notations que dans les Chapitres 1 et 2.

### 3.1. RAPPEL DE LA FORMULATION VARIATIONNELLE DES EQUATIONS DE L'ELASTODYNAMIQUE

Soit  $\Omega$  le rectangle de  $\mathbb{R}^2$   $]0, L[ \times ]0, Z[$  de frontière  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  (cf. Figure 3.1).

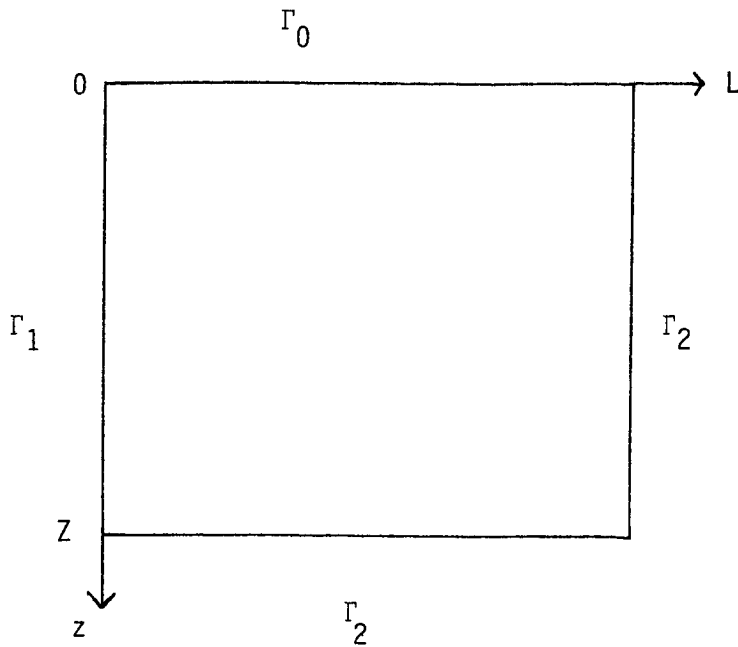


FIGURE 3.1.

On considère le système des équations de l'élastodynamique

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (\lambda (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial z} (\mu (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z})) = 0 \\ (3.2) \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} (\lambda (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z})) = 0 \end{array} \right.$$

et les conditions aux limites suivantes qui interviennent souvent dans les applications :

sur  $\Gamma_0$  :

$$(3.3) \quad \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = - \mathcal{F}_x$$

$$(3.4) \quad \tau_{zz} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = - \mathcal{F}_z$$

on exerce sur  $\Gamma_0$  une force de composantes  $\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_z$ .

sur  $\Gamma_1$  :

$$(3.5) \quad \left. \begin{aligned} u &= 0 \\ (3.6) \quad \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{conditions de symétrie} \\ \text{par rapport à } \Gamma_1. \end{array}$$

sur  $\Gamma_2$  :

$$(3.7) \quad \left. \begin{aligned} u &= 0 \\ (3.8) \quad w &= 0 \end{aligned} \right\} \text{par exemple}$$

avec comme valeurs initiales :

$$(3.9) \quad u(x, z, 0) = u_0(x, z)$$

$$(3.10) \quad w(x, z, 0) = w_0(x, z)$$

$$(3.11) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, z, 0) = u_1(x, z)$$

$$(3.12) \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, z, 0) = w_1(x, z)$$

On introduit l'espace  $V$  :

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = V_x \times V_z \text{ avec :} \\ V_x = \{v \in H^1(\Omega) \text{ vérifiant (3.5) et (3.7)}\} \\ V_z = \{v \in H^1(\Omega) \text{ vérifiant (3.8)}\}. \end{array} \right.$$

Soit  $v \in V_x$  ; multiplions (3.1) par  $v$  et intégrons sur  $\Omega$ . On obtient après intégration par parties et prise en compte des conditions aux limites (3.3) :

$$(3.14) \quad \int_{\Omega} \left( \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega =$$

$$= \int_{\Gamma_0} \mathfrak{F}_x v \, d\Gamma$$

De même soit  $v \in V_z$  ; multiplions (3.2) par  $v$  et intégrons sur  $\Omega$ . On obtient après intégration par parties et prise en compte des conditions aux limites (3.4), (3.5) et (3.6) :

$$(3.15) \quad \int_{\Omega} \left( \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega =$$

$$= \int_{\Gamma_0} \mathfrak{F}_z v \, d\Gamma$$

Le système (3.14), (3.15), écrit pour tout  $v$  appartenant respectivement à  $V_x$  et  $V_z$ , est la formulation variationnelle du problème aux limites (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7). On peut montrer sous les hypothèses du théorème 3.1 l'équivalence du problème variationnel et du problème aux limites. (cf. par exemple DUVAUT-LIONS [14]) et préciser l'espace fonctionnel auquel appartient la solution  $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$  du problème :

### Théorème 3.1.

Sous les hypothèses suivantes :

$$(3.16) \quad 0 < \rho^- \leq \rho(x) \leq \rho^+ ; 0 < \lambda^- \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ ; 0 < \mu^- \leq \mu(x) \leq \mu^+ ;$$

$$\forall x \in \Omega$$

$$(3.17) \quad \mathfrak{F}_x \text{ et } \mathfrak{F}_z \in L^2(]0, T[ \times \Gamma) \text{ et } \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial t} \in L^2(]0, T[ \times \Gamma)$$

$$(3.18) \quad \begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in V \text{ et } \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \in [L^2(\Omega)]^2 = H$$

Le problème variationnel défini par (3.14)(3.15), (3.9)...(3.12) et le problème aux limites défini par (3.1)...(3.7), (3.9)...(3.12) sont équivalents, la solution  $(\frac{u}{w})$  de ces problèmes étant telle que :

$$(3.19) \quad u \in L^\infty(0,T;V) ; \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T;H) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^\infty(0,T;V') \text{ où } V'$$

est le dual de  $V$ . ■

### Orientation :

Les 3 paragraphes suivants décrivent la façon dont on obtient un schéma numérique réalisant l'approximation du problème variationnel (3.14)(3.15) par des éléments finis  $Q_1$ . Ceci se fait en 2 étapes. La première étape (semi discrétisation en espace), qui fait l'objet des § 3.2 et 3.3, consiste à établir l'approximation des différents produits scalaires dans  $L^2(\Omega)$  des fonctions ou des dérivées en espace de ces fonctions apparaissant dans la formulation variationnelle (3.14)(3.15) en supposant le temps fixé.

A l'issue de cette étape, on est conduit à un (grand) système d'équations différentielles du second ordre en temps portant sur les fonctions  $u_{ij}(t)$  et  $w_{ij}(t)$  approchant  $u(x,z,t)$  et  $w(x,z,t)$  au noeud référencé par les indices  $i$  et  $j$ . On approche alors de la solution de ce système différentiel par une discrétisation en temps : ceci est l'objet de la seconde étape. (§ 3.4). ■

### 3.2. APPROXIMATION DE L'ESPACE $V$ PAR DES ELEMENTS FINIS $Q_1$

On découpe le domaine  $\Omega$  par un maillage régulier dont la grille est formée (cf. Figure 3.2.) des droites d'équation  $x = i\Delta x$  et  $z = j\Delta z$  ; l'intersection de ces droites détermine le noeud  $M_{ij}$ . On suppose  $\Delta x$  et  $\Delta z$  choisis de telle sorte que l'on ait :

$$(3.20) \quad L = I\Delta x \text{ et } Z = J\Delta z \text{ avec } I \text{ et } J \text{ entiers.}$$

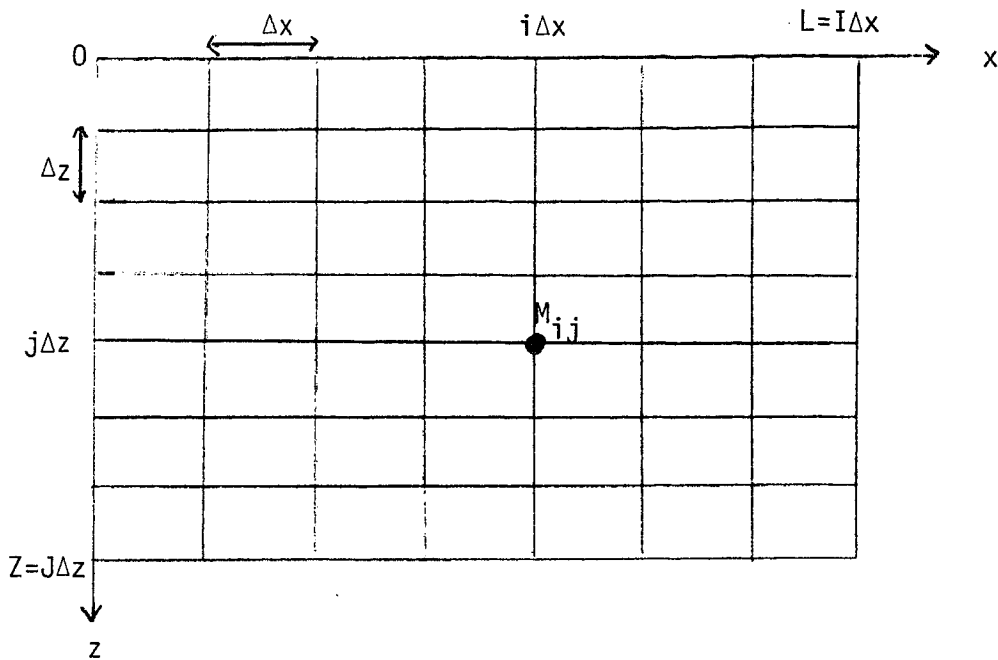


FIGURE 3.2

On appelle  $h$  le couple de nombres  $(\Delta x, \Delta z)$  et  $Q_h$  l'ensemble des quadrilatères de côtés  $\Delta x, \Delta z$  formés par la grille précédemment définie.

On considère l'espace  $W_h$  (des éléments finis Q1 définis sur  $Q_h$ ) :

$W_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ dont la restriction à chaque quadrilatère } Q \text{ de } Q_h \text{ est en polynôme de degré 1 séparément en } x \text{ et en } z\}$ .

On peut montrer qu'une base de l'espace vectoriel  $W_h$  est formée par les fonctions  $p_{ij}$  définies par :

$$(3.21) \quad p_{ij}(M_{i',j'}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i' \text{ et } j = j' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq i, i' \leq I \\ 0 \leq j, j' \leq J \end{matrix}$$

En conséquence les fonctions  $v_h$  de  $W_h$  peuvent s'écrire :

ETUDE DE SCHEMAS NUMERIQUES POUR LES EQUATIONS  
DE L'ELASTODYNAMIQUE LINEAIRE

1ère partie : Comparaison des propriétés de propagation à partir des relations de dispersion.

Alain BAMBERGER\*

Guy CHAVENT\*\*

Patrick LAILLY\*\*\*

\* Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique,  
Route de Saclay, 91128 PALAISEAU CEDEX.  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, 78150 LE CHESNAY

\*\* Université Paris IX Dauphine,  
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75016 PARIS.  
et  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, 78150 LE CHESNAY.

\*\*\* INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, 78150 LE CHESNAY.

Cette étude a été effectuée dans le cadre de la convention de recherche  
IFP (n° 5027) - SNEA(P) (n° 3324) - INRIA (n°032-79).

$$(3.22) \quad v_h = \sum_{\substack{i=0,I \\ j=0,J}} v_h(M_{ij}) p_{ij} = \sum_{\substack{i=0,I \\ j=0,J}} v_{ij} p_{ij}$$

(les  $v_{ij}$  sont des nombres, les  $p_{ij}$  sont des fonctions)

On considère maintenant l'espace  $V_h$  :

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_h = V_{hx} \times V_{hz} \\ \text{avec} \\ V_{hx} = \{v_h \in W_h \text{ telles que } v_{ij} = 0 \quad \forall j = 0, J \text{ si } i = 0 \text{ ou } I \\ \text{et } v_{ij} = 0 \quad \forall i = 0, I\} \\ V_{hz} = \{v_h \in W_h \text{ telles que } v_{Ij} = 0 \quad \forall j = 0, \dots, J \text{ et} \\ v_{ij} = 0 \quad \forall i = 0, I\} \end{array} \right.$$

L'espace  $V_h$  approche l'espace  $V$  défini en (3.13) et on peut énoncer le résultat classique suivant (cf. par exemple RAVIART [28]).

### Théorème 3.2

Pour toute fonction  $v$  de  $V$  on a :

$$\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\| \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0 \text{ où } \| \cdot \| \text{ désigne la norme habituelle dans } (H^1(\Omega))^2. \quad \blacksquare$$

Conclusion : Il sera donc raisonnable de chercher à approcher à tout instant  $t$  la solution du problème variationnel (3.14)(3.15) par une fonction de l'espace  $V_h$  ; cette fonction sera solution d'un problème approché que nous allons définir maintenant.



### 3.3. DEFINITION DES PROBLEMES APPROCHES (SEMI DISCRETISATION EN ESPACE)

La méthode des éléments finis consiste à établir un problème approché obtenu en remplaçant dans le problème variationnel continu les fonctions (solution et fonction test) de  $V$  par des fonctions de l'espace  $V_h$ . Dans une variante (méthode des éléments finis avec intégration numérique) présentée au § 3.3.2., on calcule certains produits scalaires de la formulation variationnelle de façon approchée à l'aide d'une formule d'intégration numérique.

On suppose dans la suite  $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_z = 0$ .

#### 3.3.1. OBTENTION DES EQUATIONS SEMI DISCRETISEES EN ESPACE

Nous appelons  $\begin{pmatrix} u_h \\ w_h \end{pmatrix}$  la solution du problème approché obtenu en

écrivant la formulation variationnelle (3.14)(3.15) pour toute fonction de la base de  $V_h$  c'est-à-dire pour tout vecteur de la forme  $\begin{pmatrix} p_{ij} \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $p_{ij}$  appartenant à la base de  $V_{hx}$  ou  $\begin{pmatrix} 0 \\ p_{ij} \end{pmatrix}$ ,  $p_{ij}$  appartenant à la base de  $V_{hz}$ .

Après avoir introduit les composantes  $u_{i'j'}$  et  $w_{i'j'}$  du vecteur  $\begin{pmatrix} u_h \\ w_h \end{pmatrix}$  sur les vecteurs de la base de  $V_h$  (cf. (3.22)) :

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_h = \sum_{\substack{i'=1,I \\ j'=0,J}} u_{i'j'} p_{i'j'} \\ w_h = \sum_{\substack{i'=0,I \\ j'=0,J}} w_{i'j'} p_{i'j'} \end{array} \right.$$

Le problème approché consiste à résoudre le système d'équations différentielles suivantes :

$$(3.25) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{i'=1,I \\ j'=0,J}} \frac{d^2 u_{i'j'}}{dt^2} \int_{\Omega} \rho p_{ij} p_{i'j'} + \sum_{\substack{i'=1,I \\ j'=0,J}} u_{i'j'} \int_{\Omega} (\lambda + 2\mu) \\ \left( \frac{\partial p_{ij}}{\partial x} \frac{\partial p_{i'j'}}{\partial x} + \mu \frac{\partial p_{ij}}{\partial z} \frac{\partial p_{i'j'}}{\partial z} \right) + \sum_{\substack{i'=0,I \\ j'=0,J}} w_{i'j'} \int_{\Omega} \lambda \\ \left( \frac{\partial p_{ij}}{\partial x} \frac{\partial p_{i'j'}}{\partial z} + \mu \frac{\partial p_{ij}}{\partial z} \frac{\partial p_{i'j'}}{\partial x} \right) = 0 \end{array} \right. \begin{cases} \forall i = 1, I \\ \forall j = 0, J \end{cases}$$

$$(3.26) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{i'=0,I \\ j'=0,J}} \frac{d^2 w_{i'j'}}{dt^2} \int_{\Omega} \rho p_{ij} p_{i'j'} + \sum_{\substack{i'=0,I \\ j'=0,J}} w_{i'j'} \int_{\Omega} (\lambda + 2\mu) \\ \left( \frac{\partial p_{ij}}{\partial z} \frac{\partial p_{i'j'}}{\partial z} + \mu \frac{\partial p_{ij}}{\partial x} \frac{\partial p_{i'j'}}{\partial x} \right) + \sum_{\substack{i'=1,I \\ j'=0,J}} u_{i'j'} \int_{\Omega} \lambda \\ \left( \frac{\partial p_{i'j'}}{\partial x} \frac{\partial p_{ij}}{\partial z} + \mu \frac{\partial p_{i'j'}}{\partial z} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x} \right) = 0 \end{array} \right. \begin{cases} \forall i = 0, I \\ \forall j = 0, J \end{cases}$$

Ayant adopté une renumérotation, dépendant d'un seul indice, des noeuds  $M_{ij}$  et ayant posé :

$$(3.27) \left\{ \begin{array}{l} U(t) = \begin{bmatrix} u_{ij}(t) \\ w_{ij}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{vecteur des fonctions discrètes inconnues}) \\ \text{où } j = 0, \dots, J \text{ et } i = 1, \dots, I \text{ pour } u \text{ et } 0, \dots, I \text{ pour } w \end{array} \right.$$

Le système (3.25)(3.26) peut s'écrire :

$$(3.28) \quad R \frac{d^2 U}{dt^2} + KU = 0$$

Les matrices R et K s'appellent respectivement matrice de masse et matrice de rigidité.

Les matrices R et K s'obtiennent en explicitant dans (3.25)(3.26) les produits scalaires  $L^2$  des fonctions de la base des éléments finis  $Q_1$  ou de leurs dérivées en espace. Nous allons expliciter ces produits scalaires en utilisant la méthode des contributions (cf. par exemple MERCIER-PIRONNEAU [24]) : on calcule d'abord (assemblage des sous matrices de masse et de rigidité) les contributions de chaque quadrilatère dans les produits scalaires ; puis pour un noeud donné (c'est-à-dire ayant fixé le  $i$  et le  $j$  apparaissant dans (3.25) et (3.26)) on somme (assemblage des matrices de masse et de rigidité) les contributions de chaque quadrilatères pour obtenir les différents termes de la ligne, associée à (3.25) ou (3.26) et au noeud  $M_{i,j}$ , des matrices R et K. Compte tenu du support des fonctions de base les seules contributions non nulles sont celles correspondant aux produits scalaires de la fonction de base (ou de ses dérivées) associée au noeud  $M_{i,j}$  avec une fonction de base (ou avec une de ses dérivées) associée à un noeud  $M_{i',j'}$ , sommet d'un quadrilatère ayant également  $M_{i,j}$  pour sommet. En conséquence il y a lieu, pour l'assemblage des sous matrices, d'effectuer les produits scalaires  $L^2$  uniquement des fonctions de base (ou de leurs dérivées) associée aux sommets d'un même quadrilatère de  $Q_h$ .

#### 1° Assemblage des sous matrices

Etant donné un quadrilatère de  $Q_h$ , on numérote ses sommets comme indiqué sur la figure 3.3 et on note  $p_i$  la fonction de forme (\*) associée au sommet  $i$

---

(\*) restriction au quadrilatère Q de la fonction de base associée au sommet  $i$

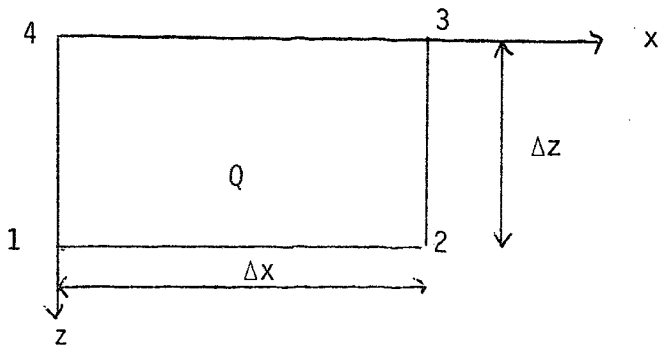


FIGURE 3.3 : Numérotation des sommets d'un quadrilatère  $Q$  pour l'assemblage des sous matrices.

On va calculer des produits scalaires du type :

$$(3.29) \quad \int_Q \rho p_i p_j$$

(ou des produits scalaires analogues obtenus en remplaçant  $\rho$  par  $\lambda$  ou  $\mu$  et les fonctions de forme par leurs dérivées).

$$(3.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{On suppose les coefficients } \rho, \lambda, \text{ et } \mu \text{ constants sur chaque} \\ \text{quadrilatère.} \end{array} \right.$$

Dans ces conditions il est facile d'obtenir les valeurs des produits scalaires du type (3.29) à partir des produits scalaires  $L^2$  des fonctions de forme ou de leurs dérivées.

Ces produits scalaires sont résumés dans le Tableau 3.1.

	$p_1$	$\frac{\sigma p_1}{\partial x}$	$\frac{\sigma p_1}{\partial z}$	$p_2$	$\frac{\sigma p_2}{\partial x}$	$\frac{\sigma p_2}{\partial z}$	$p_3$	$\frac{\sigma p_3}{\partial x}$	$\frac{\sigma p_3}{\partial z}$	$p_4$	$\frac{\sigma p_4}{\partial x}$	$\frac{\sigma p_4}{\partial z}$
$p_1$	$\frac{1}{9} \Delta x \Delta z$			$\frac{\Delta x \Delta z}{18}$			$\frac{\Delta x \Delta z}{36}$			$\frac{\Delta x \Delta z}{18}$		
$\frac{\partial p_1}{\partial x}$		$\frac{\Delta z}{3\Delta x}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{\Delta z}{3\Delta x}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{\Delta z}{6\Delta x}$			$\frac{\Delta z}{6\Delta x}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{\partial p_1}{\partial z}$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{\Delta x}{3\Delta z}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{\Delta x}{6\Delta z}$		$\frac{1}{4}$	$-\frac{\Delta x}{6\Delta z}$		$-\frac{1}{4}$	$-\frac{\Delta x}{3\Delta z}$
$p_2$	$\frac{\Delta x \Delta z}{18}$			$\frac{1}{9} \Delta x \Delta z$			$\frac{\Delta x \Delta z}{18}$			$\frac{\Delta x \Delta z}{36}$		
$\frac{\partial p_2}{\partial x}$		$-\frac{\Delta z}{3\Delta x}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{\Delta z}{3\Delta x}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{\Delta z}{6\Delta x}$			$-\frac{\Delta z}{6\Delta x}$	$-\frac{1}{4}$
$\frac{\partial p_2}{\partial z}$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{\Delta x}{6\Delta z}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{\Delta x}{3\Delta z}$		$\frac{1}{4}$	$-\frac{\Delta x}{3\Delta z}$		$-\frac{1}{4}$	$-\frac{\Delta x}{6\Delta z}$
$p_3$	$\frac{\Delta x \Delta z}{36}$			$\frac{\Delta x \Delta z}{18}$			$\frac{1}{9} \Delta x \Delta z$			$\frac{\Delta x \Delta z}{18}$		
$\frac{\partial p_3}{\partial x}$		$-\frac{\Delta z}{6\Delta x}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{\Delta z}{6\Delta x}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{\Delta z}{3\Delta x}$			$-\frac{\Delta z}{3\Delta x}$	$-\frac{1}{4}$
$\frac{\partial p_3}{\partial z}$		$\frac{1}{4}$	$-\frac{\Delta x}{6\Delta z}$		$-\frac{1}{4}$	$-\frac{\Delta x}{3\Delta z}$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{\Delta x}{3\Delta z}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{\Delta x}{6\Delta z}$
$p_4$	$\frac{\Delta x \Delta z}{18}$			$\frac{\Delta x \Delta z}{36}$			$\frac{1}{9} \Delta x \Delta z$			$\frac{1}{9} \Delta x \Delta z$		
$\frac{\partial p_4}{\partial x}$		$\frac{\Delta z}{6\Delta x}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{\Delta z}{6\Delta x}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{\Delta z}{3\Delta x}$			$\frac{\Delta z}{3\Delta x}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{\partial p_4}{\partial z}$		$\frac{1}{4}$	$-\frac{\Delta x}{3\Delta z}$		$-\frac{1}{4}$	$-\frac{\Delta x}{6\Delta z}$		$-\frac{1}{4}$	$+\frac{\Delta x}{6\Delta z}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{\Delta x}{3\Delta z}$

2° Assemblage des matrices R et K

$$(3.31) \left\{ \begin{array}{l} \text{On suppose maintenant que les coefficients } \rho, \lambda \text{ et } \mu \text{ sont constants dans les domaines } C_j, \text{ que l'on appellera } \underline{\text{couches}} : \\ C_j = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 0 \leq x \leq L \text{ et} \\ j \Delta z < z < (j + 1) \Delta z, j \in \mathbb{IN}\} \end{array} \right.$$

De plus, afin de simplifier l'exposé, nous allons seulement établir les lignes des matrices R et K correspondant à des fonctions de bases  $p_{ij}$  avec  $M_{ij}$  noeud intérieur à  $\Omega$  (c'est-à-dire  $M_{ij} \notin \Gamma$ ).

Soit donc  $M_{ij}$  noeud intérieur et  $v$  la fonction de base qui lui est associée. On va utiliser une numérotation locale attachée à  $M_{ij}$  dans laquelle  $M_{ij}$  aura pour numéro 0 et on numérote 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 les noeuds voisins de  $M_{ij}$  (cf. Figure 3.4.).

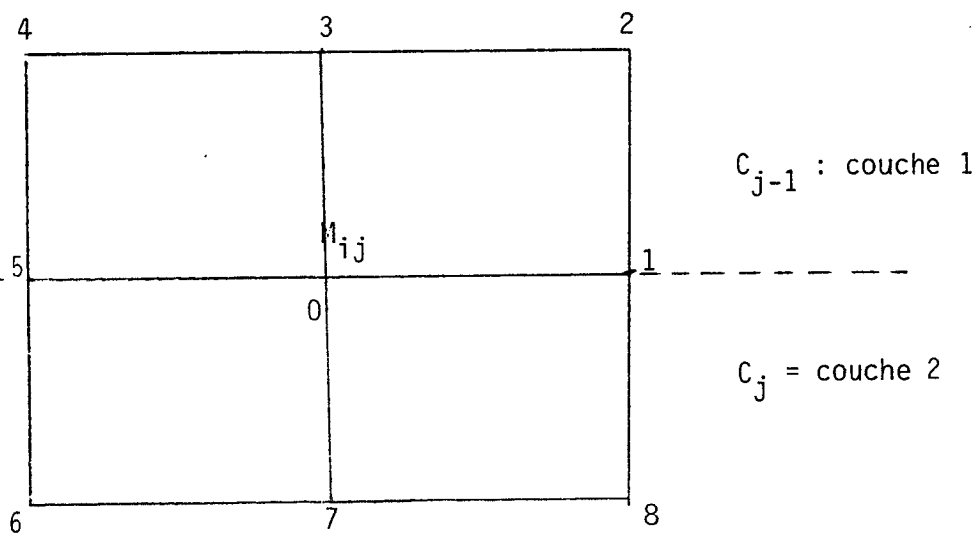


Figure 3.4 : Numérotation locale des noeuds voisins de  $M_{ij}$  utilisée pour l'assemblage des matrices R et K.

On adopte également une numérotation locale pour les couches et les coefficients :

on appelle couche 1, la couche  $C_{j-1}$  et couche 2, la couche  $C_j$ , les coefficients dans les couches 1 et 2 s'appellent respectivement  $\rho_1, \lambda_1, \mu_1$  et  $\rho_2, \lambda_2, \mu_2$ .

En notant respectivement  $u_k$  et  $w_k$  les approximations des fonctions inconnues  $u$  et  $w$  au noeud numéro  $k$  (dans le repère local lié au noeud  $M_{ij}$ ), on peut expliciter, à l'aide du tableau 3.1. les différents produits scalaire apparaissant dans (3.25) et obtenir l'équation (en  $u$ ) semi discrétisée en espace associée au noeud  $M_{ij}$

$$(3.37) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Delta x \Delta x}{9} \left[ (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_5}{\partial t^2} \right) + \rho_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \rho_2 \frac{\partial^2 u_7}{\partial t^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \rho_1 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{4} \rho_2 \left( \frac{\partial^2 u_8}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_6}{\partial t^2} \right) \right] \\ & + \frac{\Delta z}{\Delta x} (\lambda + 2\mu)_1 \left[ \frac{2}{3} u_0 - \frac{1}{6} (u_2 + u_4) + \frac{1}{3} u_3 - \frac{1}{3} (u_1 + u_5) \right] \\ & + \frac{\Delta z}{\Delta x} (\lambda + 2\mu)_2 \left[ \frac{2}{3} u_0 - \frac{1}{6} (u_6 + u_8) + \frac{1}{3} u_7 - \frac{1}{3} (u_1 + u_5) \right] \\ & + \frac{\Delta x}{\Delta z} \mu_1 \left[ \frac{2}{3} u_0 - \frac{1}{6} (u_2 + u_4) - \frac{2}{3} u_3 + \frac{1}{6} (u_1 + u_5) \right] \\ & + \frac{\Delta x}{\Delta z} \mu_2 \left[ \frac{2}{3} u_0 - \frac{1}{6} (u_6 + u_8) - \frac{2}{3} u_7 + \frac{1}{6} (u_1 + u_5) \right] \\ & + \frac{\lambda_1}{4} (w_2 - w_4 + w_5 - w_1) + \frac{\lambda_2}{4} (w_6 - w_8 + w_1 - w_5) \\ & + \frac{\mu_1}{4} (w_2 - w_4 + w_1 - w_5) + \frac{\mu_2}{4} (w_6 - w_8 + w_5 - w_1) = 0 \end{aligned} \right.$$

De même, en explicitant (3.26), on obtient pour tout noeud intérieur :

$$\begin{aligned}
 (3.38) \quad & \left. \begin{aligned}
 & \frac{\Delta x \Delta z}{9} \left[ 2(\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_5}{\partial t^2} \right) + \rho_1 \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} + \rho_2 \frac{\partial^2 w_7}{\partial t^2} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{4} \rho_1 \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_4}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{4} \rho_2 \left( \frac{\partial^2 w_6}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_8}{\partial t^2} \right) \right] \\
 & + \frac{\Delta x}{\Delta z} (\lambda + 2\mu)_1 \left[ \frac{2}{3} w_0 - \frac{1}{6} (w_2 + w_4) - \frac{2}{3} w_3 + \frac{1}{6} (w_1 + w_5) \right] \\
 & + \frac{\Delta x}{\Delta z} (\lambda + 2\mu)_2 \left[ \frac{2}{3} w_0 - \frac{1}{6} (w_6 + w_8) - \frac{2}{3} w_7 + \frac{1}{6} (w_1 + w_5) \right] \\
 & + \mu_1 \frac{\Delta z}{\Delta x} \left[ \frac{2}{3} w_0 - \frac{1}{6} (w_2 + w_4) + \frac{1}{3} w_3 - \frac{1}{3} (w_1 + w_5) \right] \\
 & + \mu_2 \frac{\Delta z}{\Delta x} \left[ \frac{2}{3} w_0 - \frac{1}{6} (w_6 + w_8) + \frac{1}{3} w_7 - \frac{1}{3} (w_1 + w_5) \right] \\
 & + \frac{\lambda_1}{4} (u_2 - u_4 + u_1 - u_5) + \frac{\lambda_2}{4} (u_6 - u_8 + u_5 - u_1) \\
 & + \frac{\mu_1}{4} (u_2 - u_4 + u_5 - u_1) + \frac{\mu_2}{4} (u_6 - u_8 + u_1 - u_5) = 0
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

La semi discrétisation en espace par éléments finis Q1 conduit donc au système d'équations différentielles (3.37)(3.38) à écrire pour tout noeud intérieur à  $\Omega$  auquel il faut ajouter les équations (3.25) écrites pour  $M_{ij} \in \Gamma_0$  et (3.26) pour  $M_{ij} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ .

Remarque :

Le schéma pour les noeuds de la frontière  $\Gamma_0$  peut être obtenu à partir de (3.37) et (3.38) en prenant  $\rho_1 = \lambda_1 = \mu_1 = 0$



### 3.3.2. EQUATIONS SEMI DISCRETISEES EN ESPACE AVEC CONDENSATION DE LA MATRICE DE MASSE

On utilise ici la même démarche qu'au § 3.3.1., la différence venant de l'utilisation d'une formule d'intégration numérique pour évaluer certains produits scalaires apparaissant dans (3.25) et (3.26).

#### 1° Assemblage des sous matrices

Les noeuds (et les fonctions de base associées) du quadrilatère  $Q$  étant numérotés comme exposé sur la figure 3.3, on évalue les produits scalaires des fonctions de forme  $\int_Q p_i p_j dx dz$  par la formule d'intégration numérique

(valable pour toute fonction  $f$  suffisamment régulière) :

$$\int_Q f dx dz = \frac{1}{4}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) \Delta x \Delta z + O(h^4)$$

où  $f_i$   $i = 1, 2, 3, 4$  désigne la valeur de  $f$  au noeud  $i$ .

#### 2° Assemblage des matrices R et K

Seule la matrice  $R$  va être modifiée ; nous aurons maintenant :

$$(3.40) \quad \sum_{\substack{i'=1,I \\ j'=0,J}} \frac{d^2 u_{i',j'}}{dt^2} \int_{\Omega} \rho p_{ij} p_{i',j'} = \Delta x \Delta z \frac{d^2 u_0}{dt^2} \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right) + O(h^4)$$

En utilisant la numérotation locale des sommets exposée sur la figure 3.4, on obtient donc (analogue de (3.37)(3.38)) le système d'équations différentielles suivant, à écrire en tout noeud intérieur à  $\Omega$  :

$$(3.41) \left\{ \begin{aligned} & \Delta x \Delta z \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{\Delta z}{\Delta x} (\lambda + 2\mu)_1 \left[ \frac{2}{3} u_0 - \frac{1}{6}(u_2 + u_4) + \frac{1}{3} u_3 - \frac{1}{3}(u_1 + u_5) \right] \\ & + \frac{\Delta z}{\Delta x} (\lambda + 2\mu)_2 \left[ \frac{2}{3} u_0 - \frac{1}{6}(u_6 + u_8) + \frac{1}{3} u_7 - \frac{1}{3} (u_1 + u_5) \right] \\ & + \frac{\Delta x}{\Delta z} \mu_1 \left[ \frac{2}{3} u_0 - \frac{1}{6}(u_2 + u_4) \quad \frac{2}{3} u_3 + \frac{1}{6}(u_1 + u_5) \right] \\ & + \frac{\Delta x}{\Delta z} \mu_2 \left[ \frac{2}{3} u_0 - \frac{1}{6}(u_6 + u_8) \quad \frac{2}{3} u_7 + \frac{1}{6}(u_1 + u_5) \right] \\ & + \frac{\lambda_1}{4} (w_2 - w_4 + w_5 - w_1) + \frac{\lambda_2}{4} (w_6 - w_8 + w_1 - w_5) \\ & + \frac{\mu_1}{4} (w_2 - w_4 + w_1 - w_5) + \frac{\mu_2}{4} (w_6 - w_8 + w_5 - w_1) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(3.42) \left\{ \begin{aligned} & \Delta x \Delta z \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \frac{\Delta x}{\Delta z} (\lambda + 2\mu)_1 \left[ \frac{2}{3} w_0 - \frac{1}{6}(w_2 + w_4) - \frac{2}{3} w_3 + \frac{1}{6} (w_1 + w_5) \right] \\ & + \frac{\Delta x}{\Delta z} (\lambda + 2\mu)_2 \left[ \frac{2}{3} w_0 - \frac{1}{6}(w_6 + w_8) - \frac{2}{3} w_7 + \frac{1}{6} (w_1 + w_5) \right] \\ & + \mu_1 \frac{\Delta z}{\Delta x} \left[ \frac{2}{3} w_0 - \frac{1}{6}(w_2 + w_4) + \frac{1}{3} w_3 - \frac{1}{3}(w_1 + w_5) \right] \\ & + \mu_2 \frac{\Delta z}{\Delta x} \left[ \frac{2}{3} w_0 - \frac{1}{6} (w_6 + w_8) + \frac{1}{3} w_7 - \frac{1}{3} (w_1 + w_5) \right] \\ & + \frac{\lambda_1}{4} (u_2 - u_4 + u_1 - u_5) + \frac{\lambda_2}{4} (u_6 - u_8 + u_5 - u_1) \\ & + \frac{\mu_1}{4} (u_2 - u_4 + u_5 - u_1) + \frac{\mu_2}{4} (u_6 - u_8 + u_1 - u_5) = 0 \end{aligned} \right.$$

3.3.3. CONTRAINTES DISCRETES

Si l'on décide d'approcher l'équation continue :

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}$$

par (approximation centrée au milieu du segment (0,1) de la figure 3.4.) :

$$(3.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xx}^h = \frac{1}{3\Delta x} [ (\lambda + 2\mu)_1 + (\lambda + 2\mu)_2 ] (u_1 - u_0) + \frac{1}{6\Delta x} (\lambda + 2\mu)_1 (u_2 - u_3) \\ + \frac{1}{6\Delta x} (\lambda + 2\mu)_2 (u_8 - u_7) + \frac{\lambda_1}{4\Delta z} (w_1 - w_2 + w_0 - w_3) + \frac{\lambda_2}{4\Delta z} (w_8 - w_1 + w_7 - w_0) \end{array} \right.$$

et l'équation :

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

par (approximation centrée au milieu du segment (0,3) de la figure 3.4.) :

$$(3.44) \quad \tau_{xz}^h = \frac{2}{3\Delta z} \mu_1 (u_0 - u_3) + \frac{1}{6\Delta z} \mu_1 (u_1 - u_2 + u_5 - u_4) + \frac{\mu_1}{4\Delta x} (w_2 - w_4 + w_1 - w_5)$$

l'équation (3.37) apparaît comme l'approximation (obtenue en remplaçant les dérivées en espace par des différences centrées) de l'équation continue :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

De même, si l'on décide d'approcher les équations continues :

$$\tau_{zz} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z}$$

et

$$\tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

respectivement par :

$$(3.45) \quad \begin{cases} \tau_{zz}^h = \frac{1}{3\Delta z} (\lambda + 2\mu)_1 [2(w_0 - w_3) + \frac{1}{2}(w_1 - w_2 + w_5 - w_4)] \\ + \frac{\lambda_1}{4\Delta x} (u_1 - u_5 + u_2 - u_4) \end{cases}$$

(approximation centrée au milieu du segment (0,3) de la figure 3.4)

et

$$(3.46) \quad \begin{cases} \tau_{zx}^h = \frac{1}{6\Delta x} [2(w_1 - w_0) + w_2 - w_3] + \frac{\mu_2}{6\Delta x} [2(w_1 - w_0) + w_8 - w_7] \\ + \frac{\mu_1}{4\Delta z} (u_0 - u_3 + u_1 - u_2) + \frac{\mu_2}{4\Delta z} (u_7 - u_0 + u_8 - u_1) \end{cases}$$

(approximation centrée au milieu du segment (0,1) de la figure 3.4.) l'équation (3.38) apparaît comme l'approximation (obtenue en remplaçant les dérivées en espace par des différences centrées) de l'équation continue :

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz}$$

Conclusion :

On peut associer aux déplacements  $u$  et  $w$  du schéma (3.37)(3.38) des contraintes discrètes  $\tau_{xx}^h, \tau_{xz}^h, \tau_{zx}^h, \tau_{zz}^h$  centrées (comme indiqué sur la figure 3.5) au milieu des côtés d'une grille décalée d'un demi pas  $(\Delta x, \Delta z)$  par rapport à la grille initiale. L'introduction de ces contraintes discrètes permet d'interpréter le schéma (3.37)(3.38) comme un schéma saute-mouton réalisant l'approximation du système (du premier ordre) des 5 équations de l'élastodynamique (analogue de (1.5)(1.6) en remplaçant  $u$  et  $w$  par leur dérivée en temps : le schéma obtenu (formé de 6 équations) n'offre pas d'intérêt pratique car il ne fait que détailler les calculs effectués dans le schéma (3.37)(3.38).

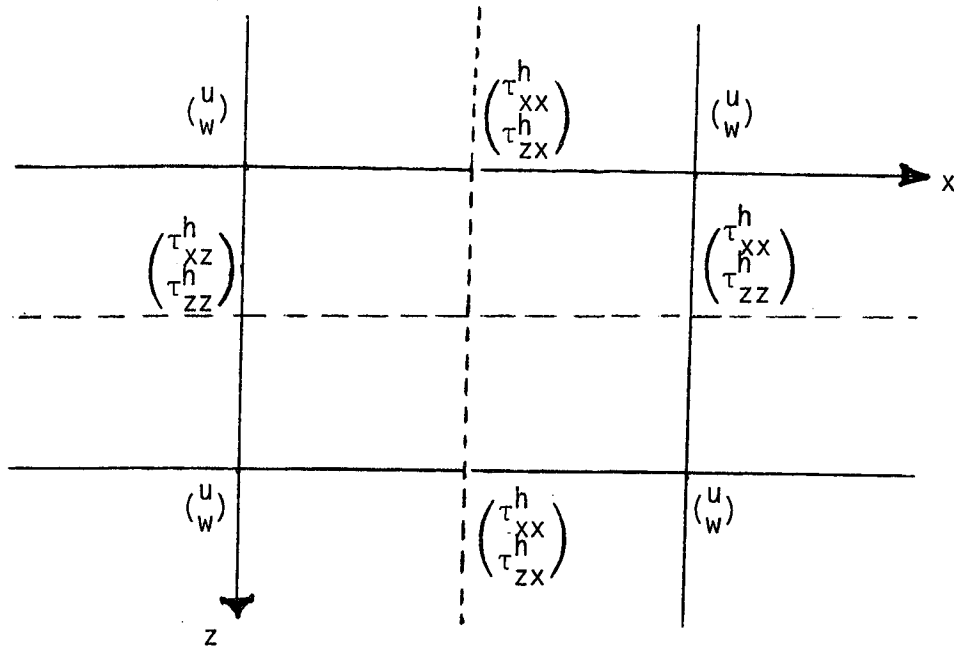


FIGURE 3.5.

Remarque : on a, pour les contraintes discrètes, utilisé 2 notations différentes  $\tau_{xz}^h$  et  $\tau_{zx}^h$  simplement pour préciser l'emplacement du point où est réalisée l'approximation de la contrainte .

#### 3.4. SCHEMA D'APPROXIMATION EN TEMPS

On a résolu le système d'équations différentielles (3.28) de façon approchée en utilisant un schéma numérique "explicite" aux différences finies :

On se donne un pas de temps  $\Delta t$  et on approche le vecteur  $U$ , solution de (3.28) à l'instant  $n\Delta t$  par un vecteur  $U^n$  en remplaçant dans (3.28)

$$(3.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 U}{dt^2}(n\Delta t) \text{ par } \frac{1}{\Delta t^2} (U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}) \\ \text{et} \\ U(n\Delta t) \text{ par } U^n \end{array} \right.$$

On obtient alors le schéma :

$$(3.47) \quad \frac{1}{\Delta t^2} (R U^{n+1} - 2R U^n + R U^{n-1}) + KU^n = 0$$

qui permet le calcul successif des  $U^n$  à partir de  $U^1$  et  $U^0$  que l'on obtient à l'aide des conditions initiales (3.9)(3.10)(3.11)(3.12).

Le schéma ne sera informatiquement explicite que si la matrice  $R$  est diagonale ce qui est le cas de l'approximation en espace avec condensation de la matrice de masse (schéma (3.41)(3.42)).

### 3.5. SCHEMAS DISCRETISES EN ESPACE ET EN TEMPS

On explicite ici, dans le cas d'un milieu homogène et de  $\Delta z = \Delta x$ , les schémas numériques obtenus en utilisant les approximations en espace et en temps présentées respectivement aux paragraphes 3.3. et 3.4.

On appelle

(3.48)  $\rho, \lambda, \mu$ : la valeur(constante) des coefficients du milieu

(3.49)  $u_i^n$  et  $w_i^n$  l'approximation à l'instant  $n\Delta t$  des fonctions  $u$  et  $w$  au noeud numéroté  $i$  dans la numérotation présentée à la figure 3.4.

#### 3.5.1. SCHEMA AVEC CALCUL EXACT DE LA MATRICE DE MASSE (SCHEMA 2)

On obtient en utilisant le schéma (3.47) pour le système (3.37)

(3.38) :

$$\begin{aligned}
 (3.50) \left\{ \right. & \rho \frac{\Delta x^2}{3\Delta t^2} \left[ 4(u_0^{n+1} - 2u_0^n + u_0^{n-1}) + u_1^{n+1} - 2u_1^n + u_1^{n-1} + u_3^{n+1} - \right. \\
 & - 2u_3^n + u_3^{n-1} + u_5^{n+1} - 2u_5^n + u_5^{n-1} + u_7^{n+1} - 2u_7^n + u_7^{n-1} + \\
 & + \frac{1}{4}(u_2^{n+1} - 2u_2^n + u_2^{n-1} + u_4^{n+1} - 2u_4^n + u_4^{n-1} + u_6^{n+1} - 2u_6^n + \\
 & \left. + u_6^{n-1} + u_8^{n+1} - 2u_8^n + u_8^{n-1}) \right] \\
 & + (\lambda + 2\mu) \left[ 4u_0^n - \frac{1}{2}(u_2^n + u_4^n + u_6^n + u_8^n) + u_3^n + u_7^n - 2(u_1^n + u_5^n) \right] \\
 & + \mu \left[ 4u_0^n - \frac{1}{2}(u_2^n + u_4^n + u_6^n + u_8^n) - 2(u_3^n + u_7^n) + u_1^n + u_5^n \right] \\
 & \left. + \frac{3}{4}(\lambda + \mu) [w_2^n - w_4^n + w_6^n - w_8^n] = 0 \right.
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (3.51) \left\{ \right. & \rho \frac{\Delta x^2}{3\Delta t^2} \left[ 4(w_0^{n+1} - 2w_0^n + w_0^{n-1}) + w_1^{n+1} - 2w_1^n + w_1^{n-1} + w_3^{n+1} - 2w_3^n + \right. \\
 & + w_3^{n-1} + w_5^{n+1} - 2w_5^n + w_5^{n-1} + w_7^{n+1} - 2w_7^n + w_7^{n-1} + \frac{1}{4}(w_2^{n+1} - 2w_2^n + \\
 & + w_2^{n-1} + w_4^{n+1} - 2w_4^n + w_4^{n-1} + w_6^{n+1} - 2w_6^n + w_6^{n-1} + w_8^{n+1} - 2w_8^n + w_8^{n-1} \\
 & \left. + (\lambda + 2\mu) \left[ 4w_0^n - \frac{1}{2}(w_2^n + w_4^n + w_6^n + w_8^n) - 2(w_3^n + w_7^n) + w_1^n + w_5^n \right] \right. \\
 & + \mu \left[ 4w_0^n - \frac{1}{2}(w_2^n + w_4^n + w_6^n + w_8^n) + w_3^n + w_7^n - 2(w_1^n + w_5^n) \right] \\
 & \left. + \frac{3}{4}(\lambda + \mu) [u_2^n - u_4^n + u_6^n - u_8^n] = 0 \right.
 \end{aligned}$$

Le schéma (3.50)(3.51) n'est pas explicité : l'obtention de  $u^{n+1}$  et de  $w^{n+1}$  à partir de  $u^n, w^n, u^{n-1}, w^{n-1}$  nécessite la résolution d'un système linéaire. La matrice associée à ce système linéaire est creuse : elle possède au plus 8 termes hors diagonale non nuls.

Le calcul du deuxième membre du système linéaire est plus compliqué que pour le schéma aux différences finies (2.1)(2.2). La figure 3.6. indique les points qui interviennent dans l'approximation des dérivées en espace

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}$$

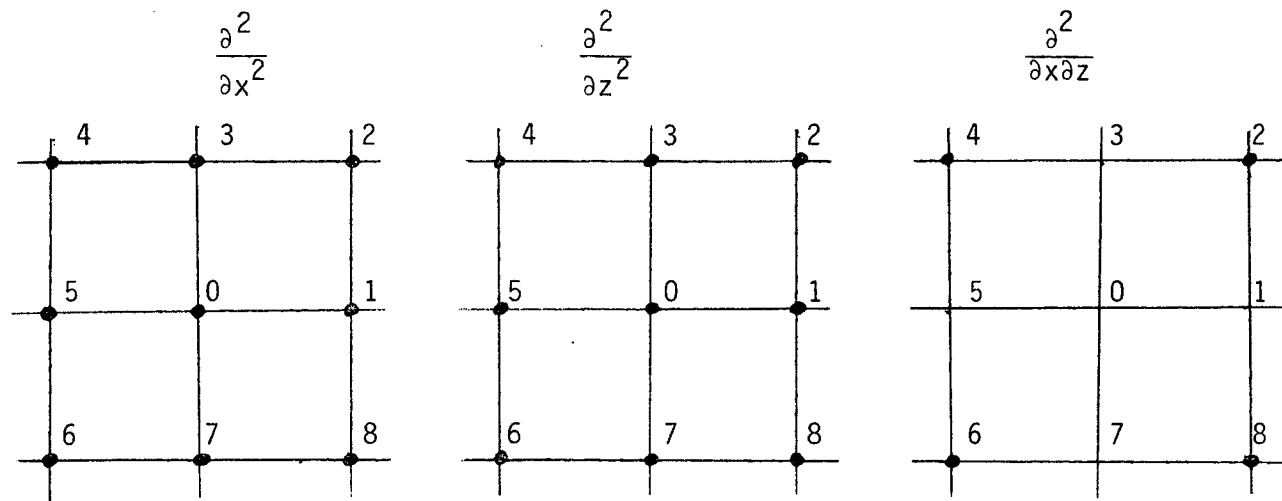


FIGURE 3.6.

(les points intervenant dans le calcul des dérivées discrètes sont marqués ●.)



## 3.5.2. SCHEMA AVEC CONDENSATION DE LA MATRICE DE MASSE (SCHEMA 3)

On obtient en utilisant le schéma (3.47) pour le système (3.41)

(3.42) :

$$(3.52) \left\{ \begin{aligned} & \rho \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} [u_0^{n+1} - 2u_0^n + u_0^{n-1}] + \frac{\lambda+2\mu}{3} \left[ 4u_0^n - \frac{1}{2}(u_2^n + u_4^n + u_6^n + u_8^n) + \right. \\ & \left. + u_3^n + u_7^n - 2(u_1^n + u_5^n) \right] + \frac{\mu}{3} \left[ 4u_0^n - \frac{1}{2}(u_2^n + u_4^n + u_6^n + u_8^n) - 2(u_3^n + \right. \\ & \left. + u_1^n + u_5^n) \right] + \frac{\lambda+\mu}{4} [w_2^n + w_6^n - w_4^n - w_8^n] = 0 \end{aligned} \right.$$

et

$$(3.53) \left\{ \begin{aligned} & \rho \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} [w_0^{n+1} - 2w_0^n + w_0^{n-1}] + \frac{\lambda+2\mu}{3} \left[ 4w_0^n - \frac{1}{2}(w_2^n + w_4^n + w_6^n + w_8^n) \right. \\ & \left. - 2(w_3^n + w_7^n) + w_1^n + w_5^n \right] + \frac{\mu}{3} \left[ 4w_0^n - \frac{1}{2}(w_2^n + w_4^n + w_6^n + w_8^n) + w_3^n + w_7^n \right. \\ & \left. - 2(w_1^n + w_5^n) \right] + \frac{\lambda+\mu}{4} [u_2^n + u_6^n - u_4^n - u_8^n] = 0 \end{aligned} \right.$$

Le schéma (3.52)(3.53) est explicite : on obtient  $u^{n+1}$  et  $w^{n+1}$  à partir de  $u^n, w^n, u^{n-1}, w^{n-1}$  par l'application de simples formules.

## 3.6. ETUDE DES ONDES PLANES NUMERIQUES ASSOCIEES AU SCHEMA 2

Nous reprenons dans ce paragraphe l'étude (et les notations) des § 2.4 et 2.5 : on suppose  $\Omega = \mathbb{R}^2$  et on cherche les solutions de (3.50)(3.51) qui sont des ondes planes harmoniques (c'est-à-dire de la forme (2.50)).

Nous nous intéressons particulièrement au problème suivant : étant donné un vecteur d'onde  $\vec{k}$  déterminer les pulsations  $\omega$  et vecteurs  $\vec{d}$  directio

du déplacement possibles. Ce problème est résolu par l'examen de la relation de dispersion associée au schéma et nous permet de caractériser les ondes P numériques et S numériques ainsi que leur vitesse de propagation.

### 3.6.1. DETERMINATION DE LA RELATION DE DISPERSION

En écrivant les relations (3.50) et (3.51) pour  $\begin{pmatrix} u_{ij}^n \\ w_{ij}^n \end{pmatrix}$  de la forme

(2.50) on obtient la relation de dispersion associée au schéma (2) :

$$(3.56) \quad \frac{2\rho}{3\Delta t^2} (\cos \Delta t - 1) \alpha(\vec{k}) \vec{d} + \hat{B}_h(\vec{k}) \vec{d} = 0$$

où  $\hat{B}_h(\vec{k})$  est la matrice (2 2) définie par :

$$(3.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\hat{B}_h(\vec{k}))_{11} = \frac{(\lambda+2\mu)}{\Delta x^2} [4 - 2 \cos k_1 \Delta x \cos k_2 \Delta x + 2 \cos k_2 \Delta x - 4 \cos k_1 \Delta x] \\ \quad + \frac{\mu}{\Delta x^2} [4 - 2 \cos k_1 \Delta x \cos k_2 \Delta x - 4 \cos k_2 \Delta x + 2 \cos k_1 \Delta x] \\ (\hat{B}_h(\vec{k}))_{22} = \frac{(\lambda+2\mu)}{\Delta x^2} [4 - 2 \cos k_1 \Delta x \cos k_2 \Delta x - 4 \cos k_2 \Delta x + 2 \cos k_1 \Delta x] \\ \quad + \frac{\mu}{\Delta x^2} [4 - 2 \cos k_1 \Delta x \cos k_2 \Delta x + 2 \cos k_2 \Delta x - 4 \cos k_1 \Delta x] \\ (\hat{B}_h(\vec{k}))_{21} = (\hat{B}_h(\vec{k}))_{12} = \frac{3(\lambda+\mu)}{\Delta x^2} \sin k_1 \Delta x \sin k_2 \Delta x \end{array} \right.$$

et  $\alpha(\vec{k})$  est le nombre (toujours positif) :

$$(3.58) \quad \alpha(\vec{k}) = (2 + \cos k_1 \Delta x)(2 + \cos k_2 \Delta x)$$

La relation (3.56) exprime que, pour que le schéma (3.50), (3.51) admette des solutions de la forme (2.50), il faut que

1°  $\frac{2\rho}{3\Delta t^2} (1 - \cos \omega\Delta t) \alpha(\vec{k})$  soit valeur propre de la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$

2°  $\vec{d}$  soit le vecteur propre associé à cette valeur propre.

Le calcul de  $\omega$  et de  $\vec{d}$  à partir de  $\vec{k}$  demande donc le calcul des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$ . Remarquons tout de suite que la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$  étant symétrique réelle, ses valeurs propres seront réelles et ses vecteurs propres orthogonaux.

### 3.6.2. CALCUL DES VALEURS PROPRES DE LA MATRICE $\hat{B}_h(\vec{k})$

Pour les raisons exposées au Lemme 2.3. on impose au vecteur d'onde  $\vec{k}$  les conditions :

$$(2.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq k_1 \Delta x \leq \pi \\ -\pi \leq k_2 \Delta x \leq \pi \end{array} \right.$$

Appelons  $s_1(\vec{k})$  et  $s_2(\vec{k})$  les valeurs propres de  $\hat{B}_h(\vec{k})$  et introduisons les notations :

$$(3.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{ij} = (\hat{B}_h(\vec{k}))_{ij} \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \\ \beta_1 = \cos k_1 \Delta x \\ \beta_2 = \cos k_2 \Delta x \end{array} \right.$$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$s^2 - (b_{11} + b_{22}) s + b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = 0$$

et le discriminant  $\Delta$  est égal à :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (b_{11} - b_{22})^2 + 4 b_{12}^2 \\
&= 36 \frac{(\lambda + \mu)^2}{\Delta x^4} [(\beta_1 - \beta_2)^2 + (1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)] \\
&= 36 \frac{(\lambda + \mu)^2}{\Delta x^4} (1 - \beta_1 \beta_2)^2
\end{aligned}$$

Comme on a d'autre part :

$$b_{11} + b_{22} = 2 \frac{(\lambda + 3\mu)}{\Delta x^2} (4 - 2\beta_1 \beta_2 - \beta_1 - \beta_2)$$

les valeurs propres de  $\hat{B}_h(\vec{k})$  sont :

$$s = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ (\lambda + 3\mu)(4 - 2\beta_1 \beta_2 - \beta_1 - \beta_2) \pm 3(\lambda + \mu)(1 - \beta_1 \beta_2) \right]$$

### 3.6.3. UNE CONDITION NECESSAIRE DE STABILITE DU SCHEMA

Pour que le schéma soit stable il est nécessaire que le de l'onde plane harmonique (2.50) soit réel, et par conséquent, que l'on ait :

$$s_1(\vec{k}) \text{ et } s_2(\vec{k}) \in \left[ 0, \frac{4\rho}{3\Delta t^2} \alpha(\vec{k}) \right] \quad \forall \vec{k}$$

Vérifions d'abord la positivité des valeurs propres ; il suffit de vérifier que :

$$(\lambda + 3\mu)(4 - 2\beta_1 \beta_2 - \beta_1 - \beta_2) - 3(\lambda + \mu)(1 - \beta_1 \beta_2) \geq 0$$

$$\forall (\beta_1, \beta_2) \in [-1, 1]^2 \text{ et } \forall \lambda, \mu \geq 0$$

On obtient :

$$\lambda(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) + 3\mu(3 - \beta_1 \beta_2 - \beta_1 - \beta_2) \geq 0$$

ce qui est toujours vérifié.

Examinons maintenant le 2ème condition :

$$f(\beta_1, \beta_2) = \frac{(\lambda+3\mu)(4 - 2\beta_1\beta_2 - \beta_1 - \beta_2) + 3(\lambda+\mu)(1 - \beta_1\beta_2)}{\rho(2 + \beta_1)(2 + \beta_2)} \leq \frac{4}{3} \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}$$

$$\forall (\beta_1, \beta_2) \in [-1, 1]^2$$

Il faut donc rechercher le maximum de  $f(\beta_1, \beta_2)$ .

Le calcul des dérivées  $\frac{\partial f}{\partial \beta_1}$  et  $\frac{\partial f}{\partial \beta_2}$  donne :

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\rho(2+\beta_1)^2(2+\beta_2)} \left[ -15\mu(\beta_2 + \frac{7}{5}) - 9\lambda(\beta_2 + 1) \right]$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_2} = \frac{1}{\rho(2+\beta_2)^2(2+\beta_1)} \left[ -15\mu(\beta_1 + \frac{7}{5}) - 9\lambda(\beta_1 + 1) \right]$$

$\frac{\partial f}{\partial \beta_1}$  et  $\frac{\partial f}{\partial \beta_2}$  sont donc négatifs pour  $(\beta_1, \beta_2) \in [-1, 1]^2$  ; le maximum de  $f(\beta_1, \beta_2)$  est donc atteint pour  $\beta_1 = \beta_2 = -1$  et vaut :

$$f(-1, -1) = 4 \left( \frac{\lambda+3\mu}{\rho} \right) = 4 (V_P^2 + V_S^2)$$

D'où la condition nécessaire de stabilité du schéma :

$$(3.60) \quad \sqrt{V_P^2 + V_S^2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

#### 3.6.4. OBTENTION DE $\omega$ A PARTIR DE $\vec{k}$ (VITESSE DES ONDES NUMERIQUES)

Comme exposé au § 2.4.2. on impose à  $\omega$  la condition  $0 < \omega \Delta t \leq \pi$ . Si la condition de stabilité (3.60) est réalisée, on peut facilement obtenir les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  des ondes planes numériques harmoniques associées aux valeurs propres  $s_1(\vec{k})$  et  $s_2(\vec{k})$ . En convenant, comme au § 2.4.2.  $s_2(\vec{k}) \leq s_1(\vec{k})$  on peut exprimer les vitesses de phase adimensionnelles  $q_1(\vec{k})$  et  $q_2(\vec{k})$  (cf. (2.80)(2.81)) respectivement des ondes P numériques et des ondes S numériques en fonction des paramètres introduits au § 2.5.

Soit donc  $H, \theta, \gamma, \xi$  définis (2.75), (2.72), (2.77), (2.79). On obtient pour  $q_1$  et  $q_2$  :

$$(3.61) \quad q_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi H \gamma \xi} \text{Arc cos} \left[ 1 - \gamma^2 \frac{6\xi^2(1-\beta_1\beta_2) + (1-\beta_1)(1-\beta_2)}{2(\beta_1+2)(\beta_2+2)} \right]$$

$$(3.62) \quad q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi H \gamma \sqrt{1-\xi^2}} \text{Arc cos} \left[ 1 - \gamma^2 \frac{7-5\beta_1\beta_2-\beta_1-\beta_2-6\xi^2(1-\beta_1\beta_2)}{2(\beta_1+2)(\beta_2+2)} \right]$$

avec

$$(3.63) \quad \begin{cases} \beta_1 = \cos(2\pi H \cos\theta) \text{ et} \\ \beta_2 = \cos(2\pi H \sin\theta) \end{cases}$$

Remarque : Comme exposé au §2.5.7, nous restreignons l'étude à  $H \in [0, \frac{1}{2}]$  mais n'explorons donc pas tout le carré défini par (2.91).

Remarque : la fonction  $\theta \rightarrow q_1$  ou  $q_2$  est périodique de période  $\frac{\pi}{2}$  et paire ; il suffit donc de l'étudier sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$ . Ceci est une conséquence de la symétrie du schéma.

Conclusion : comme pour le schéma 1, il n'y a pas amortissement mais seulement dispersion des ondes.

### 3.6.5. CALCUL DE $\vec{d}$ A PARTIR DE $\vec{k}$ (ECART ENTRE LA DIRECTION DU DEPLACEMENT ET LA DIRECTION DE PROPAGATION)

Nous ne nous intéressons qu'au premier vecteur propre  $\vec{d}_1$  car nous savons déjà que  $\vec{d}_2$  est perpendiculaire à  $\vec{d}_1$ .

Nous obtenons  $\vec{d}_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$  en exprimant :

$$(b_{11} - s_1) u_1 + b_{12} w_1 = 0$$

$\vec{d}_1$  est donc parallèle au vecteur  $\begin{pmatrix} -b_{12} \\ b_{11}-s_1 \end{pmatrix}$ .

En supposant, ce que nous justifions dans la remarque ci-après :

$$(3.64) \quad \begin{cases} 0 \leq k_1 \Delta x \leq \pi \\ 0 \leq k_2 \Delta x \leq \pi \end{cases}$$

on peut exprimer  $b_{12}$  en fonction de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  par :

$$b_{12} = \frac{3(\lambda+\mu)}{\Delta x^2} \sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}.$$

D'autre part :

$$b_{11} - \alpha_1 = \frac{3(\lambda+\mu)}{\Delta x^2} (\beta_1 + 1)(\beta_2 - 1).$$

Donc  $\vec{d}_1$  est parallèle au vecteur  $\begin{pmatrix} \sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)} \\ (1+\beta_1)(1-\beta_2) \end{pmatrix}$

On constate donc qu'il y a identité (cf. (2.89)) avec le 1er vecteur propre de la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$  associée au schéma 1. (Attention les  $\beta_1$  et  $\beta_2$  ne sont pas les mêmes : comparer (3.59) à (2.29)).

Remarque : (justification de (3.64)) : l'application qui à  $\theta$  associe les directions propres possède les propriétés suivantes :

- périodicité (période  $\pi$ )
- symétrie par rapport à  $\frac{\pi}{4}$
- imparité.

### 3.7. ETUDE NUMERIQUE DE LA RELATION DE DISPERSION POUR LE SCHEMA 2 (CAS $\Delta x = \Delta z$ )

Ce paragraphe reprend l'analyse faite au § 2.6 ainsi que les notations utilisées dans ce paragraphe. Nous avons vu que l'écart entre la direction du déplacement et la direction de propagation était le même que pour le schéma aux différences finies. Nous renvoyons donc au § 2.6. pour cette étude et étudions seulement la vitesse de phase et la vitesse de groupe des ondes P et des ondes S numériques.

### 3.7.1. DISPERSION DES ONDES P

La figure 3.7. représente les valeurs de la vitesse de phase adimensionnelle  $q_1$  (définie en (2.80)) des ondes P numériques obtenues pour différentes valeurs des paramètres.

On constate :

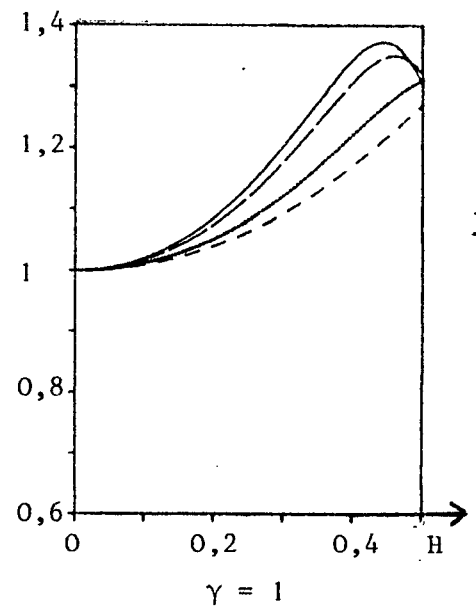
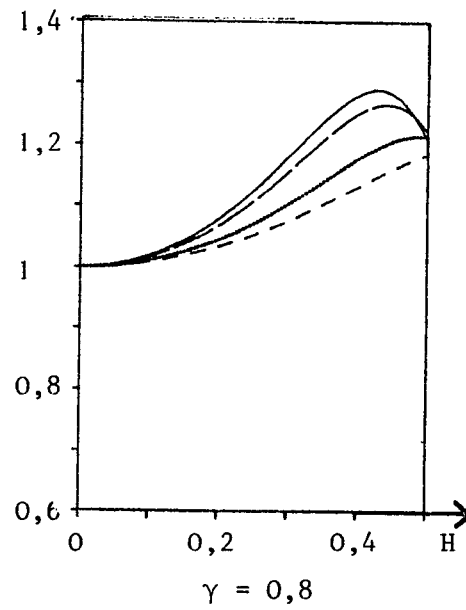
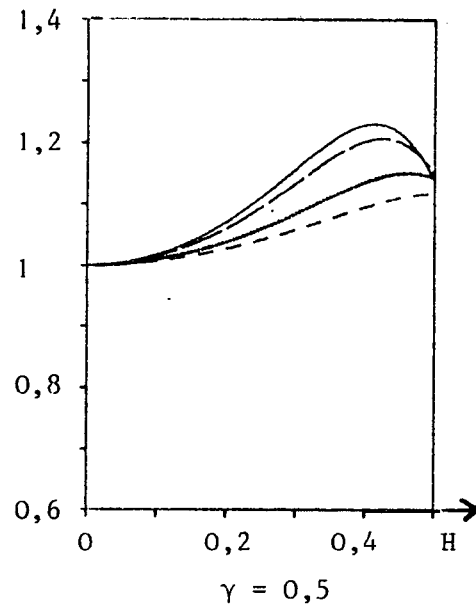
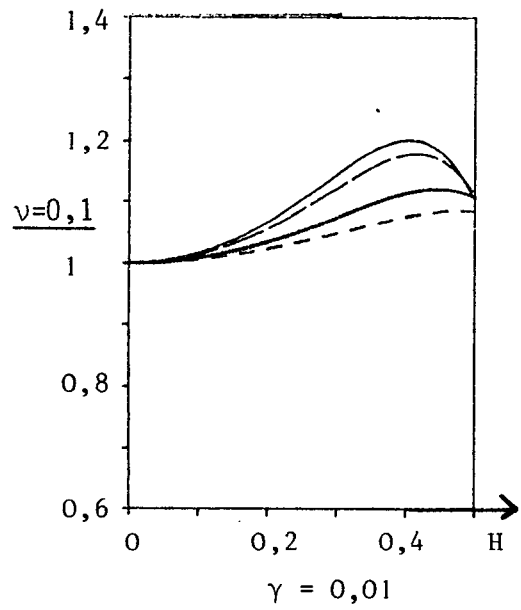
- que  $q_1$  dépend sensiblement de  $\theta$  : le schéma (3.50)(3.51) ne conserve donc pas le caractère isotrope du modèle pour la propagation des ondes P. Les directions les plus favorables pour la propagation des ondes P sont les directions proches des diagonales du maillage .
- que  $q_1$  dépend peu de  $\nu$
- que la vitesse de phase des ondes P numériques approche bien (par excès) la vitesse des ondes P jusqu'à  $G = 5$  points par longueur d'onde (erreur relative inférieure à 10 %) ; l'approximation est d'autant plus précise que le nombre  $G$  de points par longueur d'onde est grand (erreur relative de l'ordre de 2 % pour 10 points par longueur d'onde) .
- que  $q_1$  dépend peu de  $\gamma$  . On notera cependant que l'approximation s'améliore quand  $\gamma$  diminue .

Comme au § 2.6. nous nous intéressons également à la composante dans la direction  $\vec{k}$  de la vitesse de groupe  $\text{grad}(\omega(\vec{k}))$  et avons représenté (figure 3.8) la vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  dans la direction  $k$  des ondes P numériques (cf. (2.86)) :  $Q_1$  dépend de  $\theta$ ,  $\gamma$  et  $\nu$  sensiblement de la même façon que  $q_1$  ; mais l'erreur normalisée  $|1 - Q_1|$  sur la vitesse de groupe des ondes P est environ trois fois supérieure à l'erreur normalisée  $|1 - q_1|$  sur la vitesse de phase des ondes P.

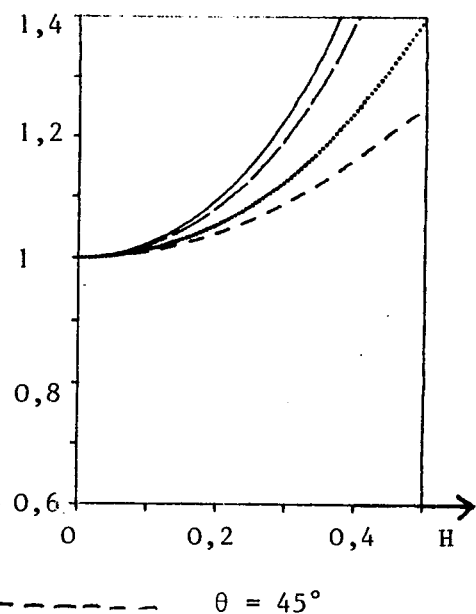
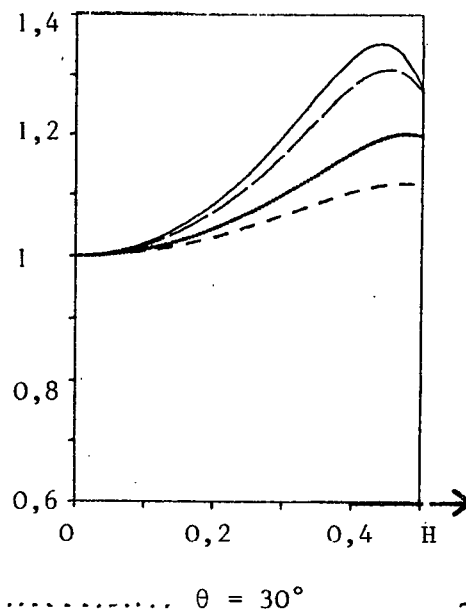
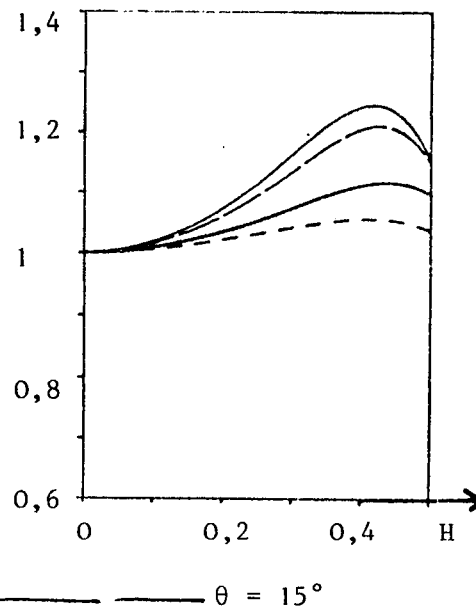
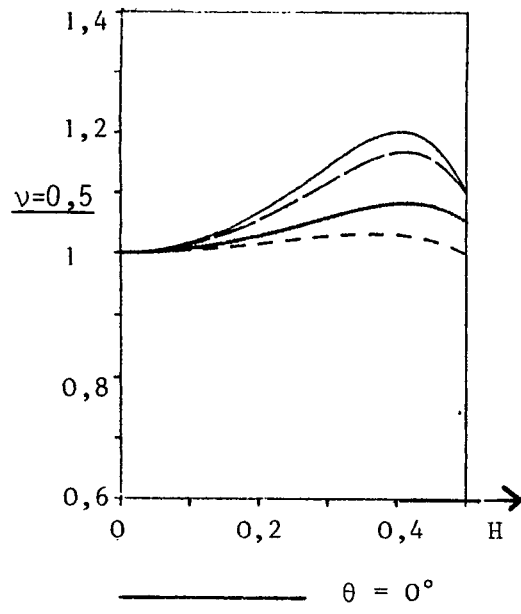
### 3.7.2. DISPERSION DES ONDES S

La figure 3.9. représente les valeurs de la vitesse de phase adimensionnelle  $q_2$  (définie en (2.81)) des ondes S numériques obtenues pour différentes valeurs des paramètres.





$\nu=0,1$



$\nu=0,5$

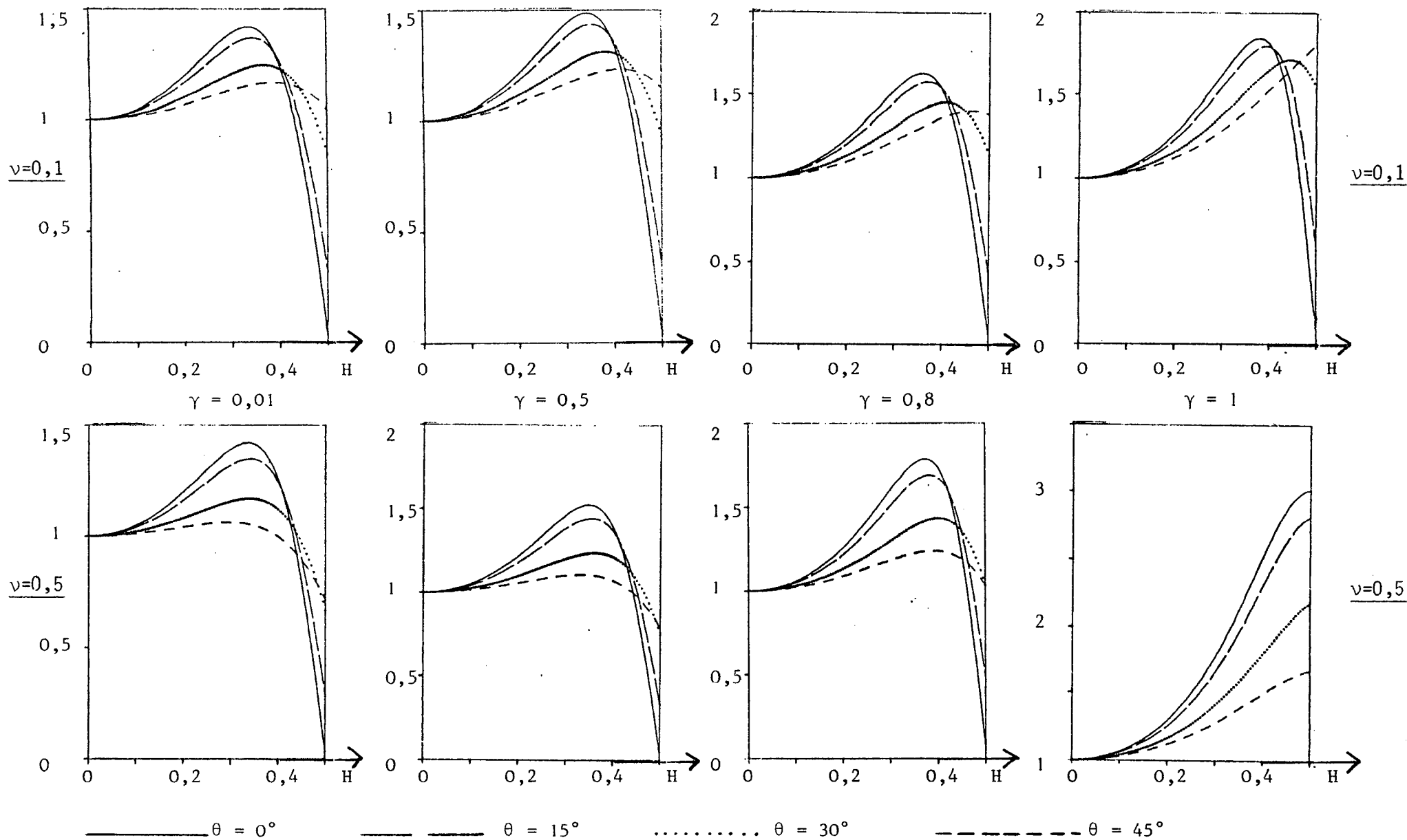


Figure 3.8 : Vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  (dans la direction  $\vec{k}$ ) des ondes P numériques solutions du schéma 2

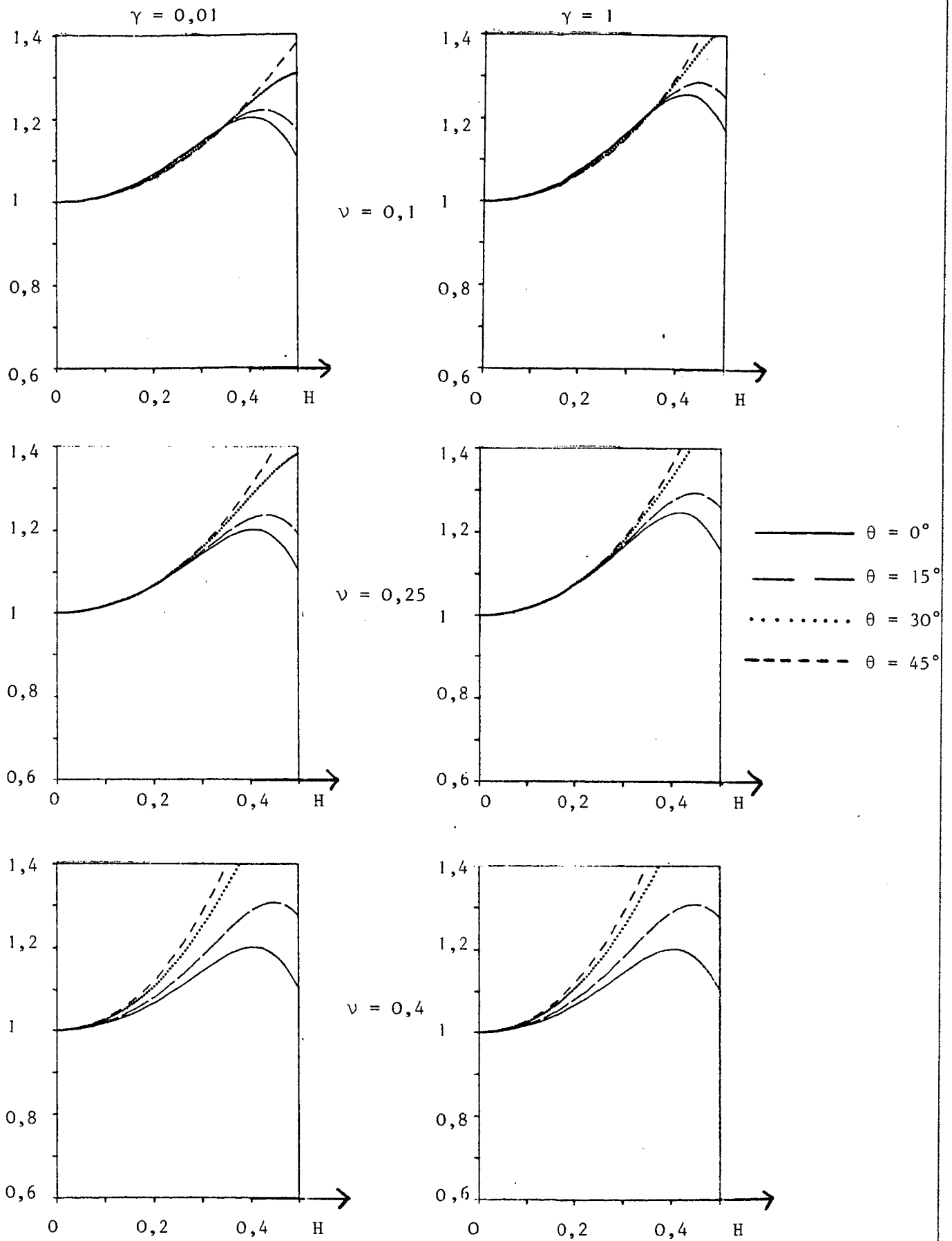


Figure 3.9 : Vitesse de phase adimensionnelle  $q_2$  des ondes S numériques du schéma 2

On constate :

- que  $q_2$  dépend peu de  $\gamma$ ,
- que  $q_2$  dépend sensiblement de  $\nu$  : l'approximation est d'autant meilleure que  $\nu$  est petit. Aussi, pour un nombre de points  $G$  par longueur d'onde égale à 10 et pour  $\gamma = 0,5$  l'erreur relative sur la vitesse de phase des ondes  $S$  se propageant suivant la diagonale du maillage ( $\theta = 45^\circ$ ) passe de 0,6 % pour  $\nu = 0,1$  à 1,4 % pour  $\nu = 0,4$ . La dégradation de l'approximation pour les valeurs de  $\nu$  proches de 0,5 est donc moins forte que pour le schéma aux différences finies pour une valeur de  $G$  raisonnable (supérieure à 5).
- que le caractère isotrope (indépendance de  $q_2$  en  $\theta$ ) du modèle est bien conservé pour les valeurs de  $\nu$  inférieures à 0,4. Pour les valeurs de  $\nu$  proches de 0,5  $q_2$  dépend sensiblement de  $\theta$ , les directions les moins favorables à la propagation des ondes  $S$  étant les directions proches des diagonales du maillage : il y a donc inversion des directions de propagation privilégiées pour les ondes  $P$  et pour les ondes  $S$ ,
- qu'en moyenne ( sur les valeurs de  $\theta$  ) la vitesse de phase des ondes  $S$  est moins bien approchée que la vitesse de phase des ondes  $P$  à nombre de points par longueur d'onde fixé.

La figure 3.10 représente la vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_2$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes  $S$  numériques (cf. (2.86)) :  $Q_2$  dépend de  $\gamma$ ,  $\theta$  et  $\nu$  sensiblement de la même façon que  $q_2$  ; mais l'erreur normalisée  $|1 - Q_2|$  sur la vitesse de groupe des ondes  $S$  est environ trois fois supérieure à l'erreur normalisée  $|1 - q_2|$  sur la vitesse de phase des ondes  $S$ .

### 3.7.3. MODE D'EMPLOI D'UN PROGRAMME DE SIMULATION UTILISANT LE SCHEMA 2

#### 1° Choix du nombre $G$ de points par longueur d'onde

La propagation des ondes  $S$  étant moins bien approchée que la propagation des ondes  $P$ , il faudra choisir le nombre  $G$  de points par longueur d'onde d'après l'étude de l'erreur relative sur la vitesse de phase des ondes  $S$

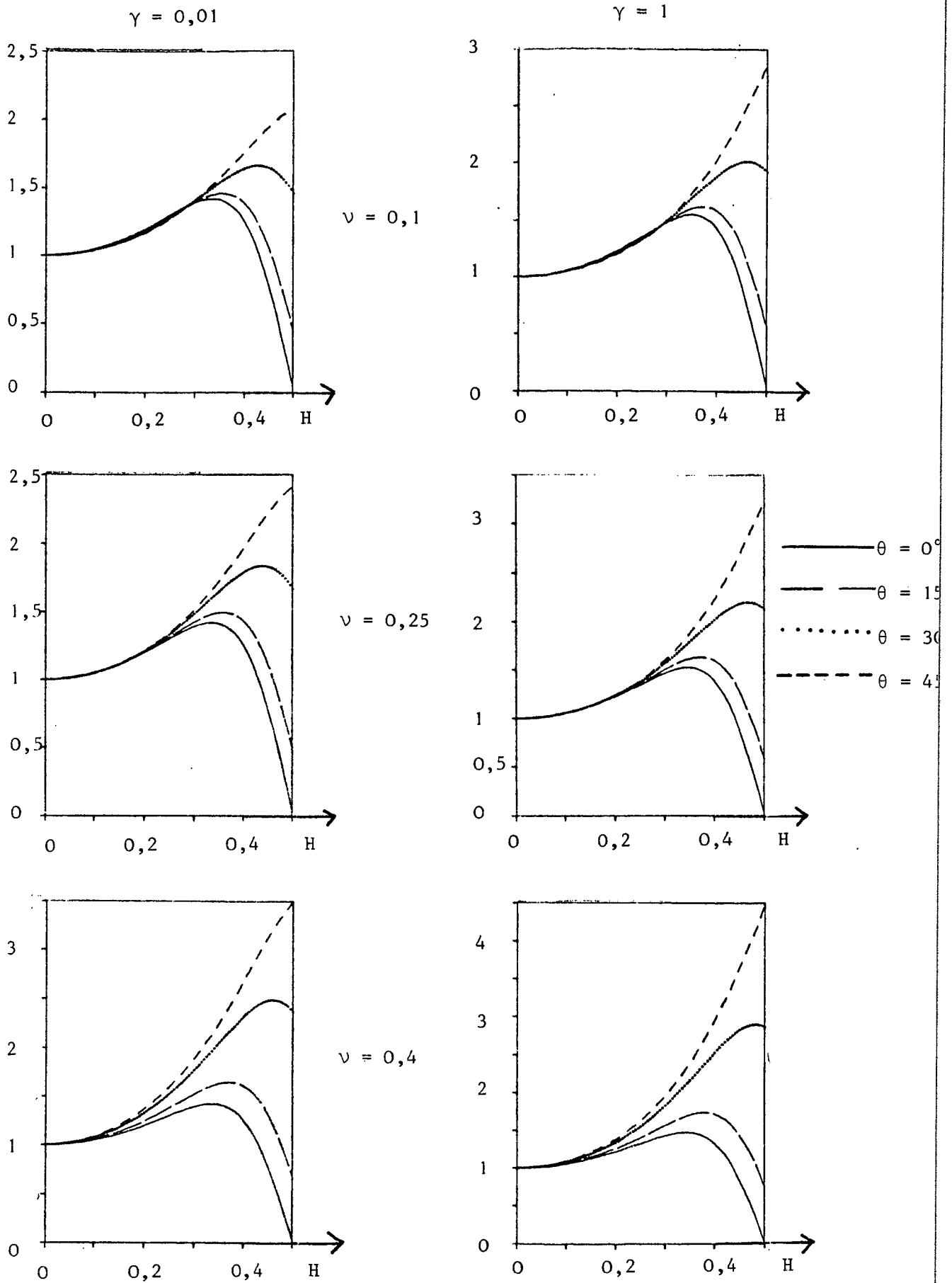


Figure 3.10 : Vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_2$  (dans la direction  $\vec{k}$ ) des ondes S numériques solutions du schéma 2.

( $|1 - q_2|$ ) et de l'erreur relative sur la vitesse de groupe des ondes S ( $|1 - Q_2|$ ). (cf. Tableau 3.2)

(nombre points par lon- gueur d' onde) $\nu$	G = 5		G = 10		G = 20	
	$\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$	$\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$	$\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$	$\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$	$\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$	$\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$
0,1	7 % (20 %)	6 % (18 %)	1,7% (5,0%)	1,5% (4,5%)	0,4% (1,2%)	0,4% (1,1%)
0,25	7 % (21 %)	7 % (22 %)	1,7% (5,0%)	1,7% (5,0%)	0,4% (1,2%)	0,4% (1,2%)
0,4	9 % (28 %)	12 % (37 %)	2,4% (7,0%)	2,9% (8,7%)	0,6% (1,7%)	0,7% (2,1%)

Tableau 3.2 : Erreur relative sur la vitesse de phase des ondes S ( $|1 - q_2|$ ) et, mentionnée entre parenthèses, erreur relative sur la vitesse de groupe des ondes S ( $|1 - Q_2|$ ) pour  $\gamma = 0,8$ .

En conclusion, l'utilisation du schéma 2 nécessite de prendre un nombre G de points par longueur d'onde au moins égal à 10.

## 2° Choix de $\gamma$

Le tableau 3.3. ci-dessous donne l'erreur relative sur la vitesse de phase des ondes P numériques ( $|1 - q_1|$ ) ainsi que sur la vitesse de groupe ( $|1 - Q_1|$ ) en fonction de  $\gamma$  pour  $\nu = 0,25$ .

G (nombre de points par longueur d'onde) $\gamma$	G = 5	G = 10	G = 20
$\gamma = 0,01$	6,6 % (19,7 %)	1,6 % (4,9 %)	0,4 % (1,2 %)
$\gamma = 0,1$	6,7 % (19,7 %)	1,7 % (4,9 %)	0,4 % (1,2 %)
$\gamma = 0,8$	7,9 % (24,1 %)	1,9 % (5,7 %)	0,5 % (1,4 %)

Tableau 3.3 : Erreur relative sur la vitesse de phase des ondes P numérique ( $|1-q_1|$ ) et, mentionnée entre parenthèses, erreur relative sur la vitesse de groupe ( $|1-Q_1|$ ) en fonction de  $\gamma$  pour  $\nu = 0,25$ .

L'examen de ce tableau montre que, quitte à multiplier le temps calculé par 8, il vaut beaucoup mieux diviser  $\Delta x$  et  $\Delta t$  par 2 (en conservant ainsi le même  $\gamma$ ) plutôt que de garder le même  $\Delta x$  et diviser  $\Delta t$  par 8. En conséquence on aura intérêt à utiliser le schéma (3.50)(3.51) avec un pas de discrétisation en temps  $\Delta t$  tel que  $\gamma$  soit le plus proche possible de 1.

### 3° Influence de $\theta$ et $\nu$

Le schéma 2 est globalement moins sensible aux paramètres physiques  $\theta$  et  $\nu$  que le schéma 1 aux différences finies. Le cas le plus difficile à simuler reste la propagation d'ondes S se propageant dans des directions proches de la diagonale du maillage dans des milieux à fort coefficient de Poisson.

### 3.8. ETUDE DES ONDES PLANES NUMERIQUES ASSOCIEES AU SCHEMA 3

Nous reprenons ici l'étude faite au § 3.6. pour le schéma 2.

#### 3.8.1. DETERMINATION DE LA RELATION DE DISPERSION

En écrivant les relations (3.52) et (3.53) pour  $\begin{pmatrix} u_{ij}^n \\ w_{ij}^n \end{pmatrix}$  de la forme (2.50) on obtient la relation de dispersion associée au schéma 3 :

$$(3.67) \quad \frac{6\rho}{\Delta t^2} (\cos \omega \Delta t - 1) \vec{d} + \hat{B}_h(\vec{k}) \vec{d} = 0$$

où  $\hat{B}_h(\vec{k})$  est la matrice définie en (3.57).

La relation (3.67) exprime que, pour que le schéma (3.52)(3.53) admette des solutions de la forme (2.50), il faut que :

$$1^\circ \frac{6\rho}{\Delta t^2} (1 - \cos \omega \Delta t) \text{ soit valeur propre de la matrice } \hat{B}_h(\vec{k}),$$

2°  $\vec{d}$  soit le vecteur propre associé à cette valeur propre.

Nous avons déjà calculé les valeurs propres de la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$  au § 3.6.2., nous allons en déduire :

#### 3.8.2. UNE CONDITION NECESSAIRE DE STABILITE DU SCHEMA

Pour que le schéma soit stable, il est nécessaire que le  $\omega$  de l'onde plane harmonique (2.50) soit réel et, par conséquent, que l'on ait :

$$s_1(\vec{k}) \text{ et } s_2(\vec{k}) \in \left[ 0, \frac{12\rho}{\Delta t} \right]$$

La positivité des valeurs propres a été vérifiée au § 3.6.3. ; examinons donc la même condition que l'on peut écrire :



$$f(\beta_1, \beta_2) = \frac{(\lambda + 3\mu)}{\rho} (4 - 2\beta_1\beta_2 - \beta_1 - \beta_2) + 3\frac{(\lambda + \mu)}{\rho} (1 - \beta_1\beta_2) \leq 12 \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}$$

Un raisonnement simple montre que le maximum de  $f(\beta_1, \beta_2)$  est atteint en un des sommets du carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . Ce maximum vaut

$$f(1, -1) = 12 \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} = 12V_p^2$$

D'où la condition nécessaire de stabilité du schéma :

$$(3.68) \quad \boxed{V_p \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1}$$

### 3.8.3. OBTENTION DE $\omega$ A PARTIR DE $\vec{k}$ (VITESSE DES ONDES NUMERIQUES)

Comme exposé au § 2.4.2. on impose à  $\omega$  la condition  $0 < \omega \Delta t \leq \pi$   
Si la condition de stabilité (3.68) est réalisée, on peut facilement obtenir les vitesses de phase adimensionnelles  $q_1(\vec{k})$  et  $q_2(\vec{k})$  (cf. (2.80)(2.81)) respectivement des ondes P numériques et des ondes S numériques en fonction de paramètres  $H, \theta, \gamma, \xi$  définis par (2.75), (2.72), (2.77), (2.79) :

$$(3.69) \quad q_1 = \frac{1}{2\pi H \gamma} \text{Arc cos} \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{6} (7 - 5\beta_1\beta_2 - \beta_1 - \beta_2) - \frac{(1-\xi^2)\gamma^2}{6\xi^2} (1-\beta_1)(1-\beta_2) \right]$$

$$(3.70) \quad q_2 = \frac{1}{2\pi H \gamma} \sqrt{\frac{\xi^2}{1-\xi^2}} \text{Arc cos} \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{6} (1-\beta_1)(1-\beta_2) - \frac{\gamma^2(1-\xi^2)}{6\xi^2} (7 - 5\beta_1\beta_2 - \beta_1 - \beta_2) \right]$$

avec  $\beta_1$  et  $\beta_2$  définis en (3.63).

Remarques diverses :

- 1° Comme pour le schéma 2, il suffit d'étudier les fonctions  $\theta \rightarrow q_1$  ou  $q_2$  pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$
- 2° Comme pour les schémas 1 et 2, il n'y a pas amortissement mais seulement dispersion des ondes.
- 3° La matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$  étant la même que pour le schéma 2, ses vecteurs propres (direction des déplacements des ondes P numériques et S numériques) sont les mêmes que pour le schéma 2.

3.9. ETUDE NUMERIQUE DE LA RELATION DE DISPERSION POUR LE SCHEMA 3  
(CAS  $\Delta X = \Delta Z$ )

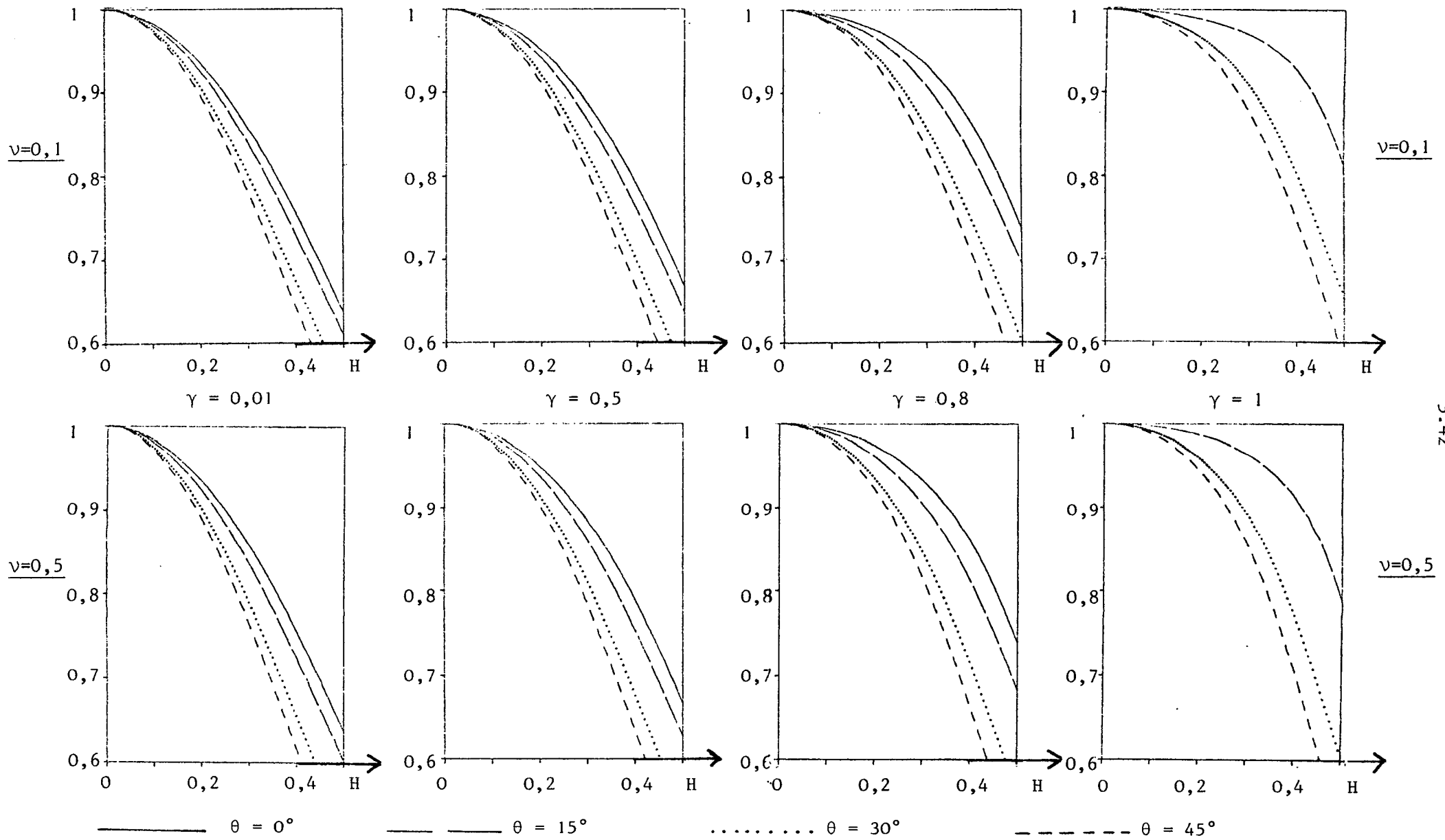
3.9.1. ETUDE DE LA VITESSE DE PHASE ET DE LA VITESSE DE GROUPE DES  
ONDES P NUMERIQUES

La figure 3.11 représente la vitesse de phase adimensionnelle  $q_1$  (définie en (2.80)) des ondes P numériques obtenues pour différentes valeurs des paramètres.

On constate :

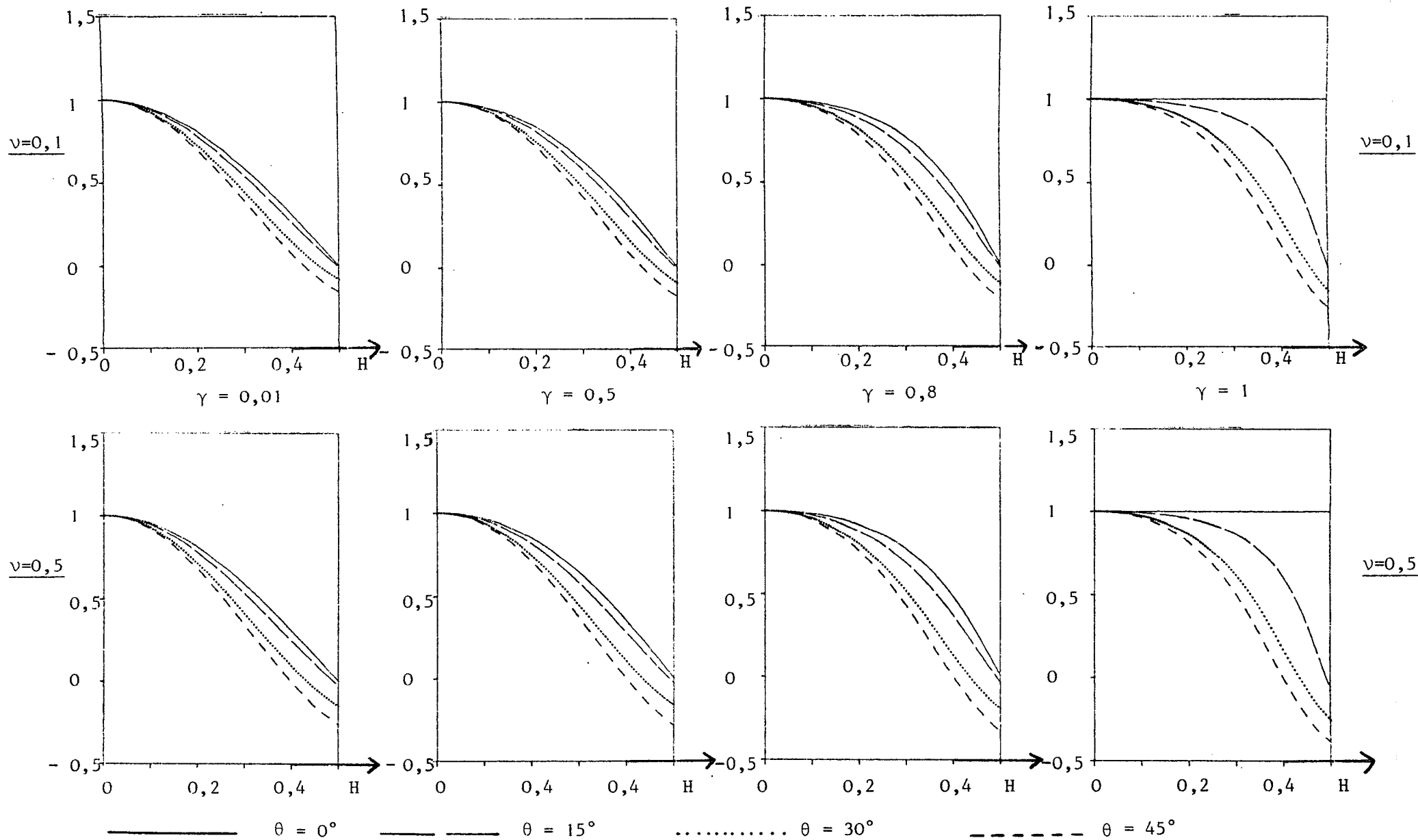
- que  $q_1$  dépend peu de  $\nu$ ,
- que  $q_1$  dépend sensiblement de  $\theta$ , les directions les plus favorables à la propagation des ondes P sont les directions proches des axes du maillage,
- que la vitesse de phase des ondes P numériques approche bien (par défaut) la vitesse des ondes P jusqu'à  $G = 5$  points par longueur d'onde (erreur relative inférieure à 10 %) ; cette erreur tombe à 2 % pour  $G = 10$  points par longueur d'onde) ;
- que l'approximation s'améliore sensiblement quand  $\gamma$  augmente au-dessus de  $\gamma = 0,5$  (pour  $\gamma = 1$  et 5 points par longueur d'onde l'erreur relative sur la vitesse des ondes P est inférieure à 5 %).

La vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  (figure 3.12) dans la direction  $\vec{k}$  des ondes P numériques (cf. (2.86)) dépend de  $\gamma$ ,  $\theta$  et  $\nu$  sensiblement de la même façon que  $q_1$  ; l'erreur normalisée  $|1 - Q_1|$  est environ 3 fois supérieure à  $|1 - q_1|$ . Remarquons que  $Q_1$  prend des valeurs négatives quand  $H$  est proche de 0,5.



3.42

Figure 3.11 : Vitesse de phase adimensionnelle  $q_1$  des ondes P numériques solutions du schéma 3



3.43

Figure 3.12 : Vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes P numériques solutions du schéma 3

### 3.9.2. ETUDE DE LA VITESSE DE PHASE $q_2$ (FIGURE 3.13) ET DE LA VITESSE DE GROUPE $Q_2$ (FIGURE 3.14) DES ONDES S NUMERIQUES

On constate que :

- que  $q_2$  et  $Q_2$  dépendent un peu de  $\gamma$  : l'approximation s'améliore quand  $\gamma$  augmente au-dessus de 0,5, (l'amélioration est d'environ 10 % quand  $\gamma$  passe de 0,5 à 0,8) ;
- que  $q_2$  et  $Q_2$  dépendent peu de  $\nu$  pour  $\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$  ; quand  $\nu$  se rapproche de 0,5 la propagation des ondes S dans des directions proches de la diagonale du maillage s'améliore sensiblement ;
- que, sauf pour le cas très particulier  $\gamma = 1$ , l'erreur normalisée  $|1 - q_2|$  (resp.  $|1 - Q_2|$ ) sur la vitesse de propagation des ondes S est, en moyenne sur  $\theta$  et à nombre  $G$  de points par longueur d'onde fixé, plus petite que l'erreur normalisée  $|1 - q_1|$  (resp.  $|1 - Q_1|$ ) sur la vitesse de propagation des ondes P. En fait à  $\Delta x$  fixé, les erreurs normalisées seront approximativement équivalentes. ;
- que l'erreur normalisée  $|1 - Q_2|$  sur la vitesse de groupe des ondes S est environ 3 fois supérieure à l'erreur normalisée  $|1 - q_2|$  sur la vitesse de phase des ondes S.

### 3.9.3. MODE D'EMPLOI D'UN PROGRAMME DE SIMULATION UTILISANT LE SCHEMA 3

#### 1° Choix du nombre $G$ de points par longueur d'onde

Les tableaux 3.4 et 3.5 donnent les erreurs normalisées sur les vitesses de phase et de groupe respectivement des ondes S numériques et des ondes P numériques.

On constate que le schéma 3 permet des simulations économiques ; par exemple pour des milieux où  $\frac{V_S}{V_P}$  est voisin de 0,5 (soit un coefficient de

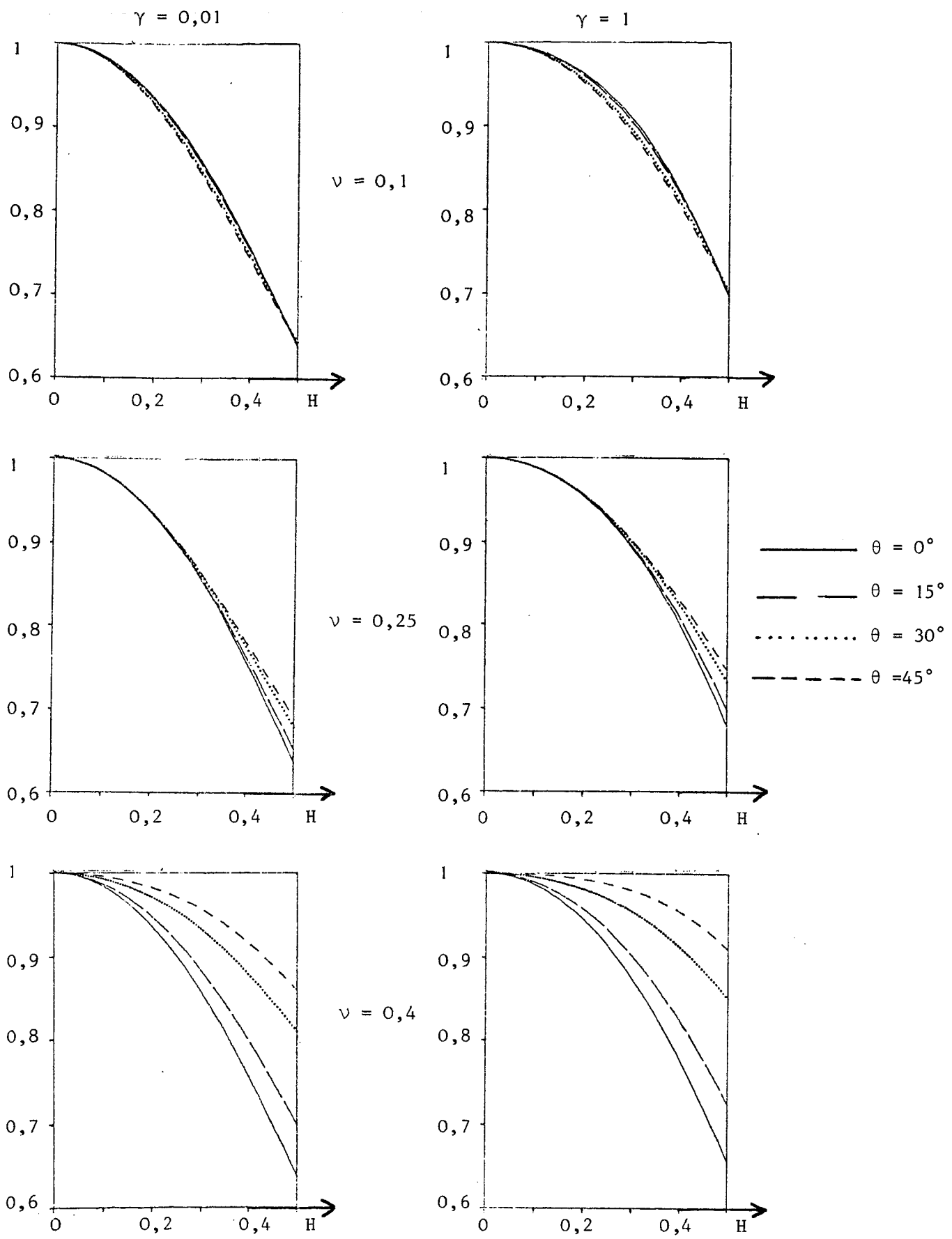


Figure 3.13 : Vitesse de phase adimensionnelle  $q_2$  des ondes S numériques solutions du schéma 3

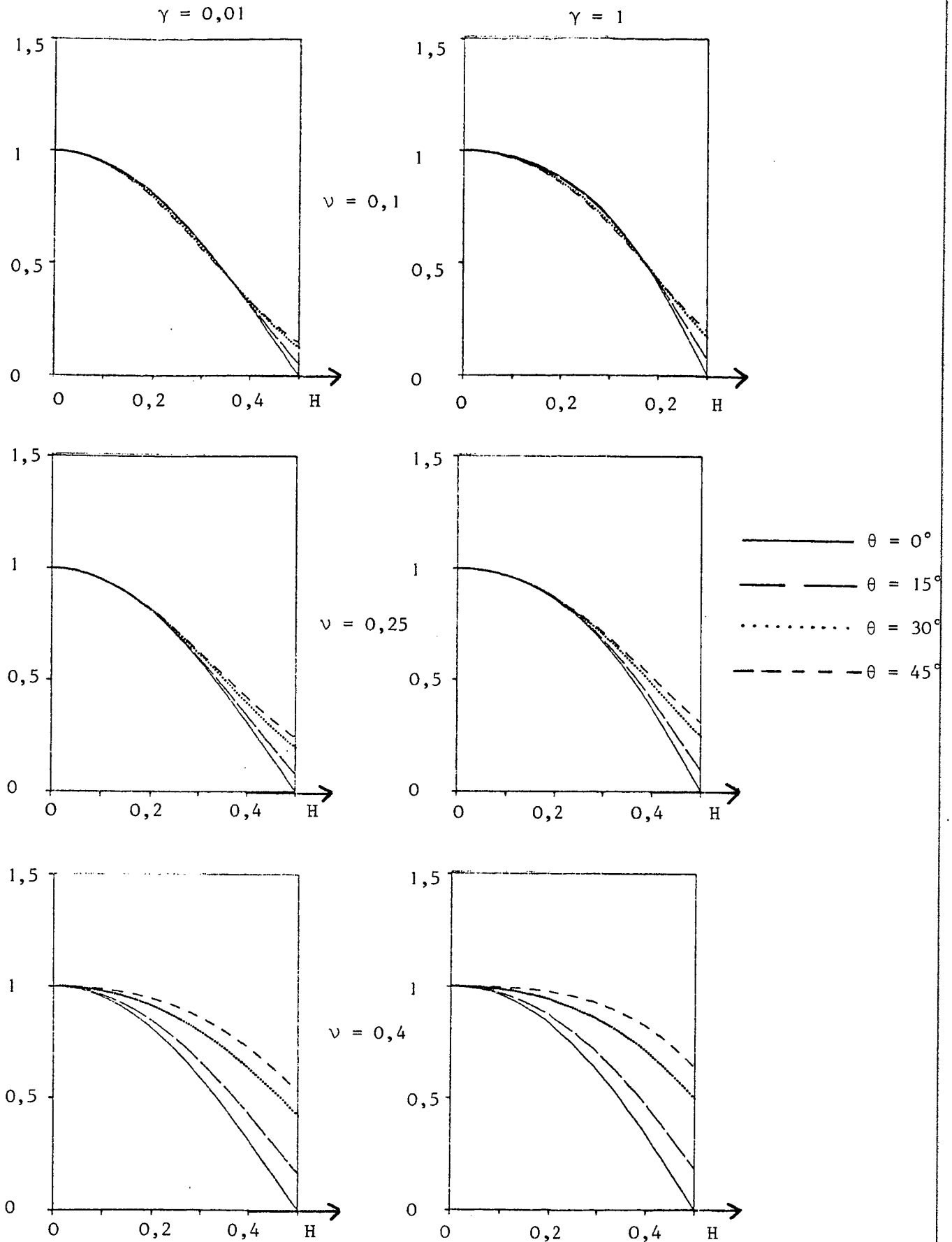


Figure 3.14 : Vitesse de groupe numérique  $Q_2$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes S numériques solutions du schéma 3

(nombre points r lon- eur d' de) $\nu$	G = 5		G = 10		G = 20	
	$\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$	$\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$	$\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$	$\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$	$\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$	$\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$
0,1	6 % (16%)	6 % (17%)	1,4 % (4,0%)	1,5 % (4,4%)	0,3 % (1,0%)	0,4 % (1,1%)
0,25	6 % (16%)	6 % (15%)	1,3 % (3,8%)	1,3 % (3,8%)	0,3 % (0,9%)	0,3 % (0,9%)
0,4	6 % (16%)	3 % (9%)	1,5 % (4,3%)	0,7 % (2,1%)	0,4 % (1,1%)	0,2 % (0,6%)

bleau 3.4 : erreur relative sur la vitesse de phase des ondes S ( $|1-q_2|$ ) et, mentionnée entre parenthèses, erreur relative sur la vitesse de groupe des ondes S ( $|1-Q_2|$ ) pour  $\gamma = 0,8$

nombre points lon- eur d' e) $\gamma$	G = 5		G = 10		G = 20	
	$\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$	$\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$	$\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$	$\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$	$\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$	$\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$
0,01	10,5 % (25,5%)	11,0 % (30,2%)	2,3 % (6,7%)	2,7 % (7,9%)	0,6 % (1,6%)	0,7 % (2,0%)
0,1	8,7 % (25,4%)	10,4 % (30,1%)	2,3 % (6,6%)	2,7 % (7,9%)	0,6 % (1,6%)	0,7 % (2,0%)
0,5	7,5 % (23,2%)	9,3 % (27,3%)	1,9 % (5,6%)	2,3 % (6,9%)	0,5 % (1,3%)	0,6 % (1,7%)
0,8	5,3 % (16,2%)	7,1 % (21,9%)	1,3 % (3,8%)	1,7 % (5,1%)	0,3 % (0,9%)	0,4 % (1,2%)
1	2,9 % (9,0%)	4,9 % (15,7%)	0,6 % (2,0%)	1,1 % (3,4%)	0,2 % (0,5%)	0,3 % (0,8%)

bleau 3.5 : erreur relative sur la vitesse de phase des ondes P ( $|1-q_1|$ ) et mentionnée entre parenthèses, erreur relative sur la vitesse de groupe des ondes P ( $|1-Q_1|$ ) pour  $\nu = 0,25$



Poisson  $\nu$  voisin de 0,33) on peut envisager une simulation en prenant 5 points par longueur d'onde S, soit 10 points par longueur d'onde P. Dans ce cas l'erreur sur la vitesse de phase des ondes S sera inférieure à 6 % tandis que l'erreur sur la vitesse de phase des ondes P sera inférieure à 2 %.

## 2° Choix de $\gamma$

Il est clair que l'on aura intérêt à choisir  $\gamma$  aussi proche que possible de 1 ce qui permet une propagation des ondes S et surtout des ondes P optimale tout en minimisant le temps calcul. Malheureusement ceci ne sera pas toujours réalisable par exemple dans le cas où la structure du domaine a conduit à l'utilisation d'éléments de taille très différente sans que les contrastes de vitesse ne compensent l'irrégularité des rapports  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  ainsi obtenus.

## 3° Influence de $\theta$ et $\nu$

On notera que le schéma 3 est relativement peu sensible aux paramètres  $\theta$  et  $\nu$ .

## CHAPITRE 4

### COMPARAISON DES SCHEMAS 1, 2 ET 3

Nous comparons dans ce chapitre les performances (temps calcul, précision,...) des différents schémas étudiés : schéma aux différences finies (schéma 1), schéma en élément fini Q1 avec matrice de masse exacte (schéma 2), schéma en élément fini Q1 avec condensation de masse (schéma 3). Ceci nous permet de préconiser l'utilisation du schéma 1 ou du schéma 3 selon que l'on est ou non intéressé par les propagations d'ondes S dans des milieux à fort coefficient de Poisson  $\nu$ . Nous commençons par la comparaison des schémas 2 et 3 qui est la plus facile.

#### 4.1. COMPARAISON DES SCHEMAS EN ELEMENTS FINIS Q1 AVEC MATRICE DE MASSE EXACTE (SCHEMA 2) ET AVEC CONDENSATION DE MASSE (SCHEMA 3)

##### 4.1.1. COMPARAISON DES TEMPS DE CALCUL

Le schéma 3 permet un calcul explicite de  $u_{i,j}^{n+1}$  et  $w_{i,j}^{n+1}$  à l'aide des formules (3.52) et (3.53). En revanche l'utilisation du schéma 2 ((3.50) et (3.51)) conduit à la résolution d'un système linéaire pour l'obtention de  $u^{n+1}$  et  $w^{n+1}$ . Le temps de calcul nécessaire à l'exploitation du schéma 2 dépend de la façon dont on résoud le système linéaire mais est de toute façon nettement supérieure au temps de calcul nécessaire à l'exploitation du schéma 3.

##### 4.1.2. COMPARAISON DES SCHEMAS POUR LA PROPAGATION DES ONDES P

L'examen des tableaux 3.3 et 3.5 montre que le schéma 3 permet une aussi bonne approximation de la vitesse de propagation des ondes P que le schéma 2 dès que  $\gamma$  est assez grand (compris entre 0,5 et 1). Pour  $\gamma$  petit (inférieur à 0,1) le schéma 2 donne un meilleur résultat.

Le tableau 4.1 ci-dessous synthétise le comportement des schémas 2 et 3 en fonction des différents paramètres.

erreur normalisée sur la vitesse de phase des ondes P ( $ 1 - q_1 $ )	dépendance en $v$	dépendance en $\theta$	dépendance en $\gamma$
Schéma 2	pratiquement indépendante de $v$	fonction décroissante de $\theta$ sur $[0^\circ, 45^\circ]$	fonction légèrement croissante en $\gamma$ ; schéma plus précis que le schéma 3 pour $\gamma < 0,5$
Schéma 3	pratiquement indépendante de $v$	fonction croissante de $\theta$ sur $[0^\circ, 45^\circ]$	fonction décroissante de $\gamma$ sur $[0,1]$ ; précision meilleure que celle du schéma 2 pour $\gamma > 0,5$

TABEAU 4.1. : Comportement des schémas 2 et 3 en fonction des paramètres pour la propagation des ondes P.

Remarque 4.1. : Dans les simulations la direction verticale est en général prépondérante par rapport aux directions horizontales et obliques (de là l'intérêt de certains modèles à une dimension d'espace) ; le fait que le schéma 3 ait, à l'inverse du schéma 2, un comportement meilleur pour les petites valeurs de  $\theta$  ne fait que renforcer son intérêt.

#### 4.1.3. COMPARAISON DES SCHEMAS POUR LA PROPAGATION DES ONDES S

L'examen des tableaux 3.2 et 3.4. montre que, pour l'approximation de la vitesse de propagation des ondes S, le schéma 3 est en général aussi bon que le schéma 2 et nettement meilleur que celui-ci dès que  $v$  est supérieur à 0,3.

erreur normalisée sur la vitesse de phase des ondes S ( $ 1 - q_2 $ )	dépendance en $\gamma$	dépendance en $\nu$	dépendance en $\theta$
Schéma 2	pratiquement indépendante	dépend peu de $\nu$ pour $\nu < 0,3$ ; forte dégradation pour les valeurs de $\nu > 0,3$	la dégradation de l'erreur pour $\nu > 0,3$ est d'autant plus forte que $\theta$ est grand
Schéma 3	fonction légèrement décroissante en $\gamma$ sur $[0,1]$	dépend peu de $\nu$ pour $\nu < 0,3$ ; amélioration pour $\nu > 0,3$ et $\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$	dépend peu de $\theta$ pour $\nu < 0,3$ . Pour $\nu > 0,3$ l'amélioration est d'autant meilleure que $\theta$ est grand

TABLEAU 4.2. : Comportement des schémas 2 et 3 en fonction des paramètres pour la propagation des ondes S

#### 4.1.4. CONCLUSIONS

Le schéma 3 est nettement plus intéressant que le schéma 2 qui demande un temps de calcul nettement supérieur sans apporter d'amélioration sensible sur la propagation des ondes numériques. Le schéma 2 pourra éventuellement être supérieur au schéma 3 dans le cas très particulier où l'on est obligé d'utiliser de petites valeurs de  $\gamma$  ( $\gamma \leq 0,1$ ) et où  $\nu$  est inférieur à 0,3.

#### 4.2. COMPARAISON DES SCHEMAS AUX DIFFERENCES FINIES (SCHEMA 1) ET EN ELEMENTS FINIS Q1 AVEC CONDENSATION DE MASSE (SCHEMA 3)

##### 4.2.1. COMPARAISON DES TEMPS CALCUL A $\Delta t$ ET $\Delta x$ FIXES

Le temps calcul des schémas 1 et 3 dépend sensiblement de l'agencement des calculs associés à ces schémas.

Nous envisageons 2 organisations possibles des calculs :

- la programmation utilisant le caractère homogène du milieu : il s'agit alors de la programmation naturelle des schémas (2.1 ) (2.2 ) et (3.52) (3.53).

- la programmation dans le cas général d'un milieu non homogène (et éventuellement d'éléments finis de taille différente).

Il est clair que la deuxième organisation des calculs est la plus intéressante en pratique ; malheureusement l'analyse du temps calcul dans ce cas sera moins fine que pour la programmation à milieu homogène.

#### 1° Programmation utilisant le caractère homogène du milieu et du maillage

En sachant que les résultats intermédiaires peuvent être réutilisés par la suite

- la programmation du schéma 1 (2.1) (2.2) demande 24 additions et 6 multiplications.
- la programmation du schéma 3 (3.52) (3.53) demande 38 additions et 8 multiplications.

En supposant qu'une multiplication est équivalente, du point de vue temps, à 5 additions :

- le schéma 1 demande, pour une valeur donnée de  $i$ ,  $j$  et  $n$ , l'équivalent de 54 additions.
- le schéma 3 demande l'équivalent de 78 additions.

On constate donc que si  $\Delta t$  et  $\Delta x$  sont identiques le schéma 3 demande environ 1,5 fois plus de temps que le schéma 1.

#### 2° Programmation dans le cas d'un milieu quelconque et d'un maillage non uniforme

Dans ce cas les schémas 1 et 3 s'écrivent sous la forme :

$$(4.1) \quad u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1} + Au^n + Bw^n$$

$$(4.2) \quad w^{n+1} = 2w^n - w^{n-1} + A'w^n + B'u^n$$

Même en ne tenant pas compte du temps d'assemblage des matrices  $A$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $B'$ , le temps calcul du schéma (4.1) (4.2) dépend sensiblement de la façon dont on a stocké les matrices (creuses)  $A$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $B'$  (méthode du profil, stockage des adresses des éléments non nuls, ...).

Dans ces conditions, la comparaison des temps calculs des schémas 1 et 3 n'est pas facile à faire. On peut cependant remarquer que les matrices associées au schéma 3 étant généralement moins creuses que les matrices associées au schéma 1, le temps calcul du schéma 3 sera entre 1 et 1,5 fois supérieur au temps calcul du schéma 1 si les pas de discrétisation en espace  $\Delta x$  et en temps  $\Delta t$  sont identiques pour les 2 schémas.

#### 4.2.2. INFLUENCE DES CONDITIONS DE STABILITE

Ces conditions de stabilité sont :

$$\left( v_p^2 + v_s^2 \right) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \leq 1 \text{ pour le schéma 1}$$

$$v_p \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad \text{pour le schéma 3.}$$

Le schéma 3 permet donc, à  $\Delta x$  fixé, l'utilisation de pas de temps plus grands que le schéma 1. Ce résultat joint à la conclusion du paragraphe précédent montre que, du moins dans le cas d'un milieu quelconque, les temps calculs des schémas 1 et 3 sont à peu près identiques quand  $\Delta x$  et  $\gamma$  sont fixés.

#### 4.2.3. COMPARAISON DES SCHEMAS POUR LA PROPAGATION DES ONDES P

L'examen des tableaux 2.2. et 3.5. montre que la vitesse de propagation des ondes P est environ de 1,5 fois (pour  $\theta$  compris entre  $0^\circ$  et  $25^\circ$ ) à 3,5 fois (pour  $\theta$  compris entre  $25^\circ$  et  $45^\circ$ ) mieux approchée par le schéma 1 que par le schéma 3.

Le tableau 4.3. ci-dessous synthétise le comportement des schémas 1 et 3 en fonction des différents paramètres.

erreur normalisée sur la vitesse de phase des ondes P ( $ 1 - q_1 $ )	dépendance en $\nu$	dépendance en $\theta$	dépendance en $\gamma$
Schéma 1	pratiquement indépendante de $\nu$	pratiquement indépendante de $\theta$	fonction décroissante de $\gamma$ sur $[0,1]$
Schéma 3	pratiquement indépendante de $\nu$	fonction croissante de $\theta$ sur $[0^\circ, 45^\circ]$	fonction décroissante de $\gamma$ sur $[0,1]$

TABLEAU 4.3. : Comportement des schémas 1 et 3 en fonction des paramètres pour la propagation des ondes P.

#### 4.2.4. COMPARAISON DES SCHEMAS POUR LA PROPAGATION DES ONDES S

L'examen des tableaux 2.1. et 3.4. montre que la vitesse de propagation des ondes S est approchée avec la même précision par les schémas 1 et 3 pour  $\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$ . Pour  $\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$  et  $\nu$  supérieur à 0,25, le schéma est nettement préférable au schéma 1 car il permet d'obtenir, à  $\Delta x$  donné, une erreur sur la propagation des ondes S sensiblement identique à l'erreur sur la propagation des ondes P pour des ondes P et S de même fréquence temporelle.

Précisons ceci : Soit  $G_P$  (nombre de points par longueur d'onde P) = 10 et appelons  $G_S$  le nombre de points par longueur d'onde S. On suppose que les ondes P et S ont la même pulsation  $\omega$ .  $G_S$  dépend de  $\nu$  et on a :

$$G_S = G_P \frac{V_S}{V_P} .$$

Le tableau 4.4. ci-dessous donne en fonction de  $\nu$  l'erreur relative  $|1 - q_2|$  sur la vitesse de propagation des ondes S numériques, pour  $\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$  et  $G_P = 10$ .



$\nu$	$V_p/V_s$	$G_s$	$ 1 - q_2 $ (schéma 1)	$ 1 - q_2 $ (schéma 3)
0,1	1,5	7	1,5%	3,5%
0,25	1,7	6	4%	4%
0,4	2,5	4	30%	5%

TABLEAU 4.4.

Le tableau 4.5. ci-dessous synthétise le comportement des schémas 1 et 3 en fonction des différents paramètres.

erreur normalisée sur la vitesse de phase des ondes S ( $ 1 - q_2 $ )	dépendance en $\gamma$	dépendance en $\nu$	dépendance en $\theta$
Schéma 1	pratiquement indépendante de $\gamma$	dépend peu de $\nu$ pour $\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$ forte dégradation au delà de $\nu = 0,3$ pour $\theta \in [25^\circ, 45^\circ]$	la dégradation au delà de $\nu = 0,3$ est d'autant plus forte que $\theta$ est grand
Schéma 3	fonction légèrement décroissante en $\gamma$ sur $[0,1]$	dépend peu de $\nu$ pour l'angle $\theta$ le plus défavorable	dépend peu de $\theta$ pour $\nu < 0,3$ ; amélioration de la précision quand $\theta$ croît sur $[0^\circ, 45^\circ]$ pour $\nu > 0,3$

TABLEAU 4.5. : Comportement des schémas 1 et 3 en fonction des paramètres pour la propagation des ondes S

#### 4.2.5. CONCLUSIONS

Le schéma 3 sera supérieur au schéma 1 dans le cas (qui n'est pas rare en pratique) où l'on est intéressé par la propagation d'ondes S suivant des directions faisant un angle supérieur à  $25^\circ$  avec l'une des directions du maillage dès que le coefficient de Poisson du milieu dans lequel s'effectue la propagation à une valeur voisine de 0,3.

CHAPITRE 5

ETUDE DE SCHEMAS NUMERIQUES PROVENANT  
DE LA DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS P1  
DES EQUATIONS DE L'ELASTODYNAMIQUE

Nous reprenons, dans ce chapitre, l'étude faite au chapitre 2 mais dans le cas d'une discrétisation par éléments finis P1 de la formulation variationnelle (3.14) (3.15). Après avoir présenté au § 5.1 l'élément fini P1, nous envisageons au § 5.2 deux semi-discrétisations en espace du problème variationnel (3.14) (3.15) correspondant à deux triangulations différentes du domaine  $\Omega$ . Les deux schémas numériques (schémas 4 et 5) obtenus après discrétisation en temps sont présentés au § 5.3. Puis nous étudions les ondes numériques qui peuvent se propager dans chaque schéma : au § 5.4 nous établissons la condition de stabilité et caractérisons les ondes numériques, solutions du schéma 4; puis nous étudions numériquement au § 5.5. comment ces ondes dépendent des paramètres physiques du milieu et des paramètres de discrétisation. La même étude est reprise, pour le schéma 5 aux § 5.6 et 5.7.

On utilise, dans ce chapitre, les notations et certains résultats introduits au chapitre 3.

### 5.1. APPROXIMATION DE L'ESPACE V PAR DES ELEMENTS FINIS P1

Considérons le domaine  $\Omega$  de la figure 3.1 et l'espace V défini en (3.13). Nous effectuons un découpage (triangulation) de  $\Omega$  par des triangles comme indiqué sur la figure 5.1 : on appelle  $T_h$  l'ensemble des triangles ainsi formés et on numérote par 2 indices i et j les noeuds  $M_{ij}$  de la triangulation.

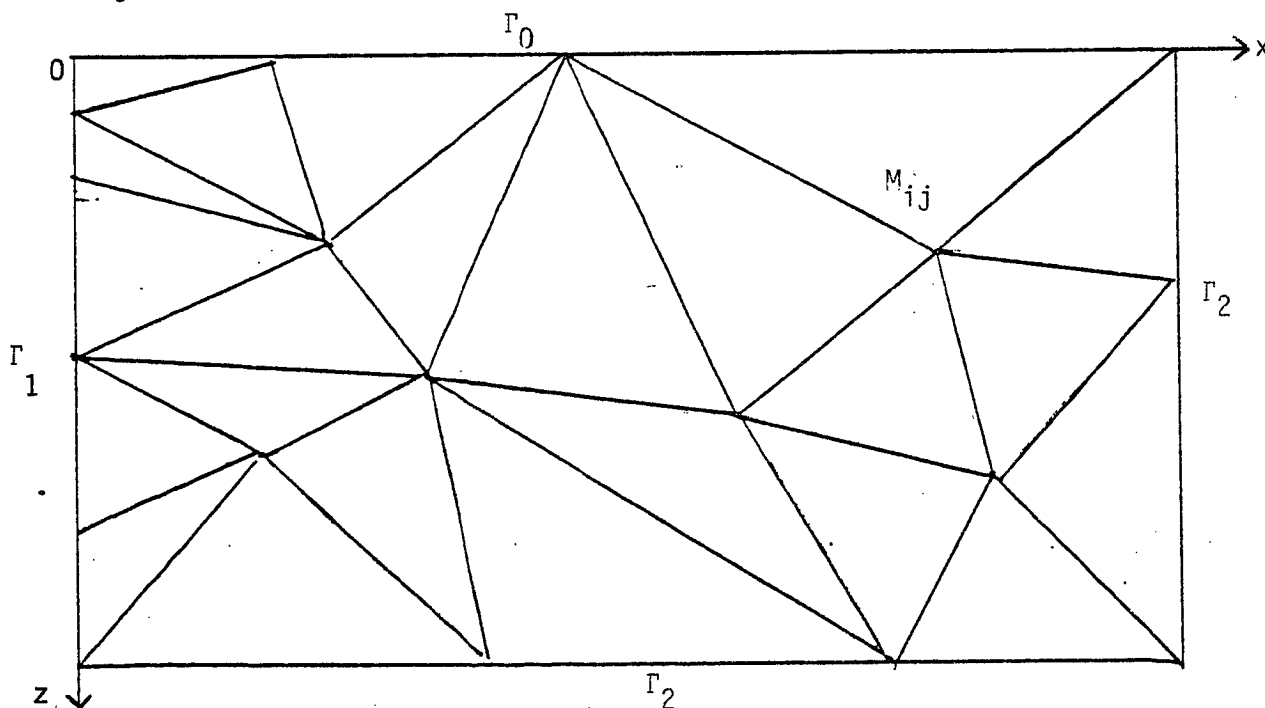


Fig. 5.1 : Triangulation du domaine  $\Omega$

On appelle  $h$  le rayon du plus grand cercle circonscrit aux différents triangles et on considère l'espace  $W_h$  (des éléments finis P1 définis sur la triangulation  $T_h$ ) :

$W_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ dont la restriction à chaque triangle de } T_h \text{ est un polynôme de degré 1 globalement en } x \text{ et } z\}$ .

On peut montrer qu'une base de l'espace vectoriel  $W_h$  est formée par les fonctions  $p_{ij}$  définies par :

$$(5.1) \quad p_{ij}(M_{i',j'}) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j' \text{ et } i = i' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En conséquence, les fonctions  $v_h$  de  $W_h$  peuvent s'écrire :

$$(5.2) \quad v_h = \sum_{i,j} v_h(M_{ij}) p_{ij} = \sum_{i,j} v_{ij} p_{ij}$$

(les  $v_{ij}$  étant des nombres et les  $p_{ij}$  des fonctions).

On considère maintenant l'espace  $V_h$  :

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_h = V_{hx} \times V_{hz} \\ \text{avec} \\ V_{hx} = \{v_h \in W_h \text{ telles que } v_{ij} = 0 \text{ si } M_{ij} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2\} \\ V_{hz} = \{v_h \in W_h \text{ telles que } v_{ij} = 0 \text{ si } M_{ij} \in \Gamma_2\} \end{array} \right.$$

L'espace  $V_h$  approche l'espace  $V$  (cf. par exemple RAVIART [28]) :

### Théorème 5.1

Pour toute fonction  $v$  de  $V$  on a :

$$\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\| \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0$$

où  $\| \cdot \|$  désigne la norme habituelle dans  $(H^1(\Omega))^2$ .

## 5.2. DEFINITION DES PROBLEMES APPROCHES (SEMI-DISCRETISATION EN ESPACE)

Après avoir défini une triangulation du domaine  $\Omega$ , nous obtenons le problème semi-discrétisé en espace en utilisant la méthode exposée au § 3.3.2. On remplace dans la formulation variationnelle (3.14) (3.15) les fonctions (solution et fonction test) de  $V$  par des fonctions de  $V_h$ . Compte tenu de la supériorité du schéma 3 sur le schéma 2 (cf. chapitre 4) nous n'avons développé que la méthode de condensation de la matrice de masse, c'est-à-dire que les produits scalaires  $L^2$  des fonctions seront évalués à l'aide d'une formule d'intégration numérique.

Nous n'envisageons ici que deux triangulations particulières du domaine  $\Omega$  dans lesquelles tous les noeuds ont les mêmes caractéristiques géométriques ceci afin que la relation de dispersion soit formée seulement de deux équations comme aux § 3.6 et 3.8.

On suppose dans la suite  $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_z = 0$ .

### 5.2.1. EQUATIONS SEMI DISCRETISEES EN ESPACE POUR UNE TRIANGULATION DU DOMAINE EN TRIANGLES RECTANGLES

On considère une triangulation du domaine  $\Omega$  semblable à celle de la figure 5.2. Le choix d'une telle triangulation est expliqué dans la remarque suivante :

Remarque : Tous les noeuds intérieurs ont les mêmes caractéristiques géométriques c'est-à-dire qu'ils sont liés à leurs voisins comme indiqué sur la figure 5.4 : ceci est une particularité de la triangulation que nous avons adoptée. En conséquence, nous obtiendrons des équations semi-discrétisées en espace indépendantes du noeud intérieur choisi d'où une relation de dispersion réduite à deux équations.

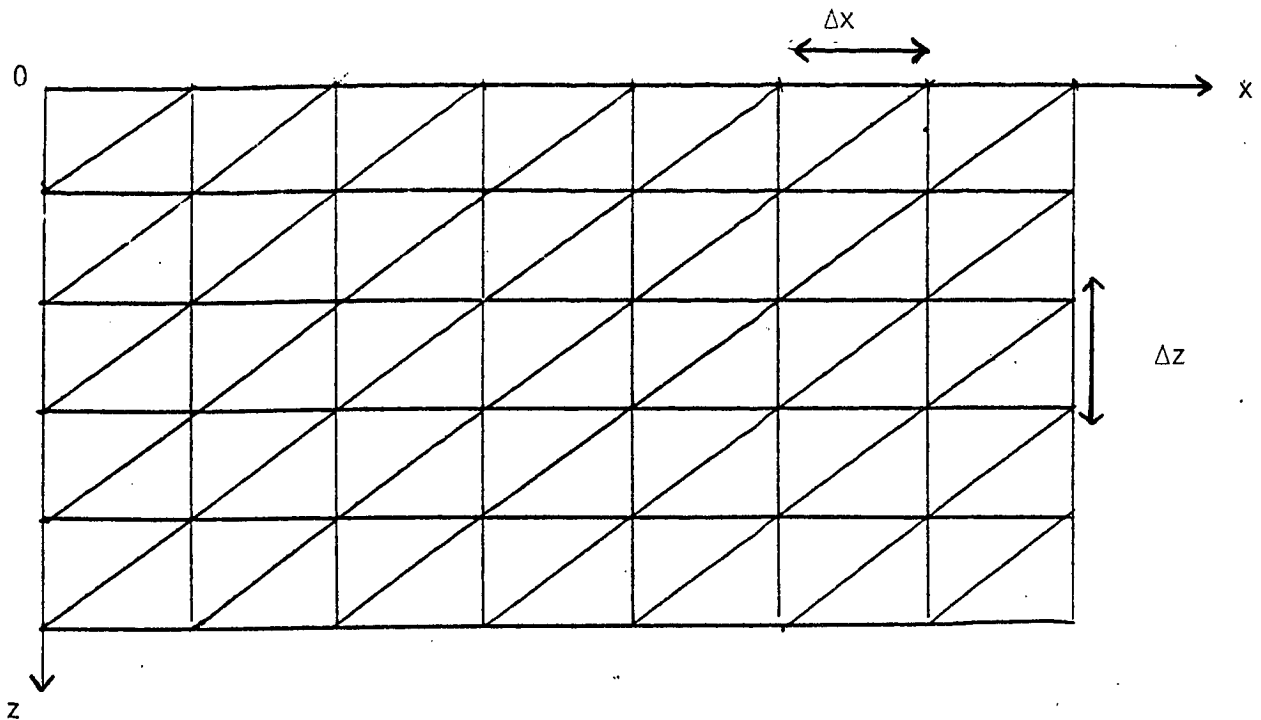


Figure 5.2 : Triangulation du domaine  $\Omega$  par des triangles rectangles

Dans cette triangulation on note  $M_{ij}$  le noeud situé en  $x = i\Delta x$  et  $z = j\Delta z$ .

On peut alors suivre exactement la démarche utilisée au § 3.3.1 et introduire les matrices de masse R et de rigidité K (cf. 3.28) que nous allons établir maintenant par la méthode des contributions.

#### 1°) ASSEMBLAGE DES SOUS-MATRICES

Il faut considérer 2 types de triangles (appelés T et T') et pour chaque triangle T ou T' on numérote les sommets comme indiqué sur la figure 5.3. On note  $p_i$  la fonction de forme associée au sommet i.

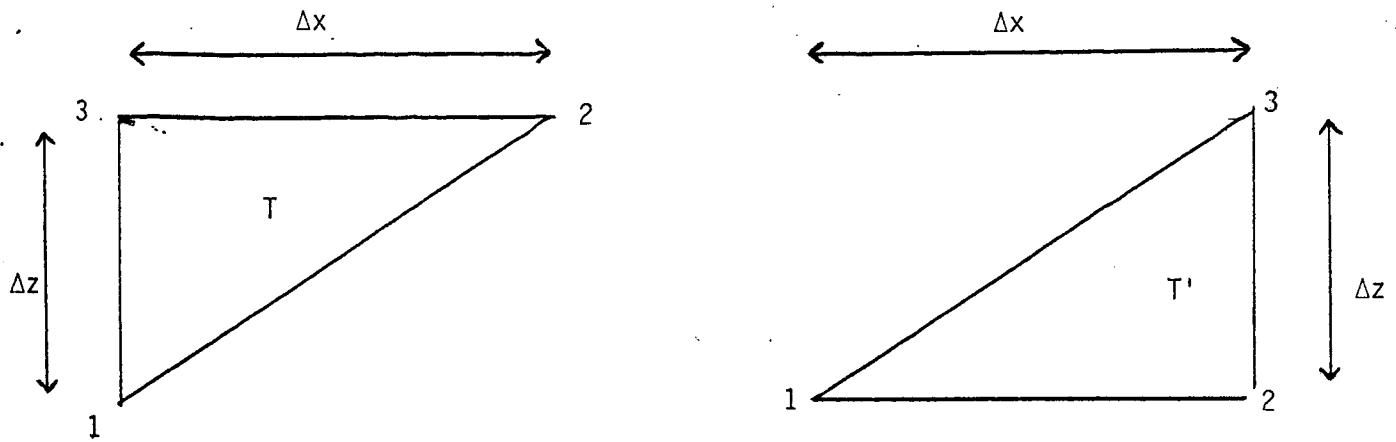


Figure 5.3 : Numérotation des sommets des triangles T et T' pour l'assemblage des sous-matrices

Si on suppose que :

(5.4) Les coefficients  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  sont constants sur chaque triangle.

On peut facilement réaliser l'assemblage des sous-matrices en calculant les produits scalaires  $L^2$  des fonctions de forme ou de leurs dérivées. Les produits scalaires des fonctions de forme ont été calculés en utilisant la formule d'intégration numérique :

$$(5.5) \quad \int_T f \, dx \, dz = \frac{1}{6} (f_1 + f_2 + f_3) \Delta x \Delta z + O(h^4)$$

où  $f_i$   $i = 1, 2, 3$  désigne la valeur de  $f$  au noeud  $i$ .

Les valeurs obtenues des produits scalaires figurent dans les tableaux 5.1 et 5.2.

triangle T	$p_1$	$\frac{\partial p_1}{\partial x}$	$\frac{\partial p_1}{\partial z}$	$p_2$	$\frac{\partial p_2}{\partial x}$	$\frac{\partial p_2}{\partial z}$	$p_3$	$\frac{\partial p_3}{\partial x}$	$\frac{\partial p_3}{\partial z}$
$p_1$	$\frac{\Delta x \Delta z}{6}$			0			0		
$\frac{\partial p_1}{\partial x}$		0	0		0	0		0	0
$\frac{\partial p_1}{\partial z}$		0	$\frac{\Delta x}{2\Delta z}$		$\frac{1}{2}$	0		$-\frac{1}{2}$	$\frac{\Delta x}{2\Delta z}$
$p_2$	0			$\frac{\Delta x \Delta z}{6}$			0		
$\frac{\partial p_2}{\partial x}$		0	$\frac{1}{2}$		$\frac{\Delta z}{2\Delta x}$	0		$-\frac{\Delta z}{2\Delta x}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{\partial p_2}{\partial z}$		0	0		0	0		0	0
$p_3$	0			0			$\frac{\Delta x \Delta z}{6}$		
$\frac{\partial p_3}{\partial x}$		0	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{\Delta z}{2\Delta x}$	0		$\frac{\Delta z}{2\Delta x}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\partial p_3}{\partial z}$		0	$-\frac{\Delta x}{2\Delta z}$		$-\frac{1}{2}$	0		$\frac{1}{2}$	$\frac{\Delta x}{2\Delta z}$

Tableau 5.1 : Valeur du produit scalaire des fonctions de forme associées à un triangle T et de leurs dérivées.



Triangle T'	$P_1$	$\frac{\partial P_1}{\partial x}$	$\frac{\partial P_1}{\partial z}$	$P_2$	$\frac{\partial P_2}{\partial x}$	$\frac{\partial P_2}{\partial z}$	$P_3$	$\frac{\partial P_3}{\partial x}$	$\frac{\partial P_3}{\partial z}$
$P_1$	$\frac{\Delta x \Delta z}{6}$			0			0		
$\frac{\partial P_1}{\partial x}$		$\frac{\Delta z}{2\Delta x}$	0		$-\frac{\Delta z}{2\Delta x}$	$-\frac{1}{2}$		0	$\frac{1}{2}$
$\frac{\partial P_1}{\partial z}$		0	0		0	0		0	0
$P_2$	0			$\frac{\Delta x \Delta z}{6}$			0		
$\frac{\partial P_2}{\partial x}$		$-\frac{\Delta z}{2\Delta x}$	0		$\frac{\Delta z}{2\Delta x}$	$\frac{1}{2}$		0	$-\frac{1}{2}$
$\frac{\partial P_2}{\partial z}$		$-\frac{1}{2}$	0		$\frac{1}{2}$	$\frac{\Delta x}{2\Delta z}$		0	$-\frac{\Delta x}{2\Delta z}$
$P_3$	0			0			$\frac{\Delta x \Delta z}{6}$		
$\frac{\partial P_3}{\partial x}$		0	0		0	0		0	0
$\frac{\partial P_3}{\partial z}$		$\frac{1}{2}$	0		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\Delta x}{2\Delta z}$		0	$\frac{\Delta x}{2\Delta z}$

Tableau 5.2 : Valeur du produit scalaire des fonctions de forme associées à un triangle T' et de leurs dérivées

2°) ASSEMBLAGE DES MATRICES R ET K

Nous allons seulement établir les équations semi-discrétisées à partir de (3.25) et (3.26) pour  $i$  et  $j$  indexant un noeud intérieur.

Nous supposons, comme en (3.31) que les coefficients  $\rho, \lambda, \mu$  sont constants par couche horizontale et nous utilisons, étant donné un noeud  $M_{ij}$ , une numérotation locale des noeuds voisins et des couches (cf. figure 5.4).

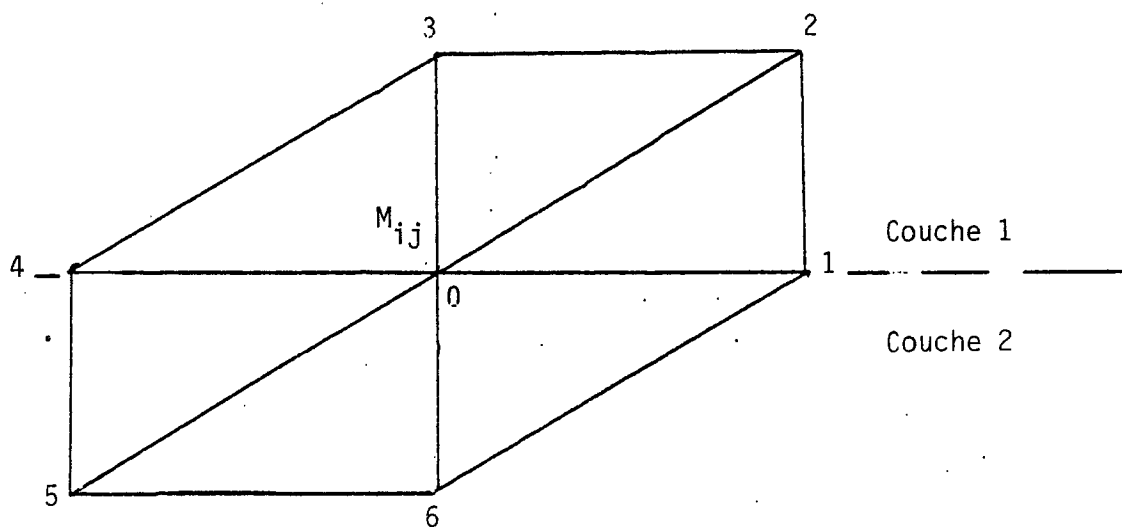


Figure 5.4

Numérotation locale des noeuds voisins de  $M_{ij}$   
pour l'assemblage des matrices R et K

On appelle  $\rho_1, \lambda_1, \mu_1$  et  $\rho_2, \lambda_2, \mu_2$  les valeurs des coefficients du milieu respectivement dans les couches 1 et 2.

En notant  $u_k$  et  $w_k$  les approximations des fonctions inconnues  $u$  et  $w$  au noeud numéro  $k$  (dans le repère local lié au noeud  $M_{ij}$ ), on peut expliciter, à l'aide des tableaux 5.1 et 5.2, les différents produits scalaires apparaissant dans (3.25) et obtenir l'équation semi-discrétisée en espace associée au noeud  $M_{ij}$ .

$$\begin{aligned}
 (5.6) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right) \Delta x \Delta z \frac{d^2 u_0}{dt^2} + [(\lambda + 2\mu)_1 + (\lambda + 2\mu)_2] \frac{\Delta z}{2\Delta x} (2 u_0 - u_1 - u_4) \\
 & + \mu_1 \frac{\Delta x}{\Delta z} (u_0 - u_3) - \mu_2 \frac{\Delta x}{\Delta z} (u_6 - u_0) \\
 & + \frac{\lambda_1}{2} (w_2 - w_1 + w_0 - w_3) + \frac{\lambda_2}{2} (w_5 - w_4 + w_0 - w_6) \\
 & + \frac{\mu_1}{2} (w_0 - w_4 + w_2 - w_3) + \frac{\mu_2}{2} (w_0 - w_1 + w_5 - w_6) = 0
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

De même, en explicitant (3.26), on obtient pour tout noeud intérieur :

$$\begin{aligned}
 (5.7) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \Delta x \Delta z \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right) \frac{d^2 w_0}{dt^2} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \frac{\Delta z}{\Delta x} (2 w_0 - w_1 - w_4) \\
 & + \frac{\Delta x}{\Delta z} (\lambda + 2\mu)_1 (w_0 - w_3) + \frac{\Delta x}{\Delta z} (\lambda + 2\mu)_2 (w_0 - w_6) \\
 & + \frac{\lambda_1}{2} (u_0 - u_4 - u_2 - u_3) + \frac{\lambda_2}{2} (u_0 - u_1 + u_5 - u_6) \\
 & + \frac{\mu_1}{2} (u_2 - u_1 + u_0 - u_3) + \frac{\mu_2}{2} (u_5 - u_4 + u_0 - u_6) = 0
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

La semi-discrétisation en espace par éléments finis P1 conduit donc, pour la triangulation choisie au système d'équations différentielles (5.6) (5.7) à écrire pour tout noeud intérieur à  $\Omega$  auquel il faut ajouter les équations (3.25) décrites pour  $M_{ij} \in \Gamma_0$  et (3.26) pour  $M_{ij} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ , équations que nous n'avons pas explicitées.

5.2.2. EQUATIONS SEMI-DISCRETISEES EN ESPACE POUR UNE TRIANGULATION DU DOMAINE EN TRIANGLES EQUILATERAUX

Il n'est pas possible de trianguler le rectangle  $\Omega$  uniquement par des triangles équilatéraux. Comme nous ne nous intéressons qu'aux équations semi-discretisées en espace à l'intérieur de  $\Omega$ , nous considérons cependant des triangulations de  $\Omega$  semblables à celle de la figure 5.5 et appelons noeuds intérieurs les noeuds à l'intérieur du domaine  $\Omega'$  représenté sur cette même figure en traits épais.

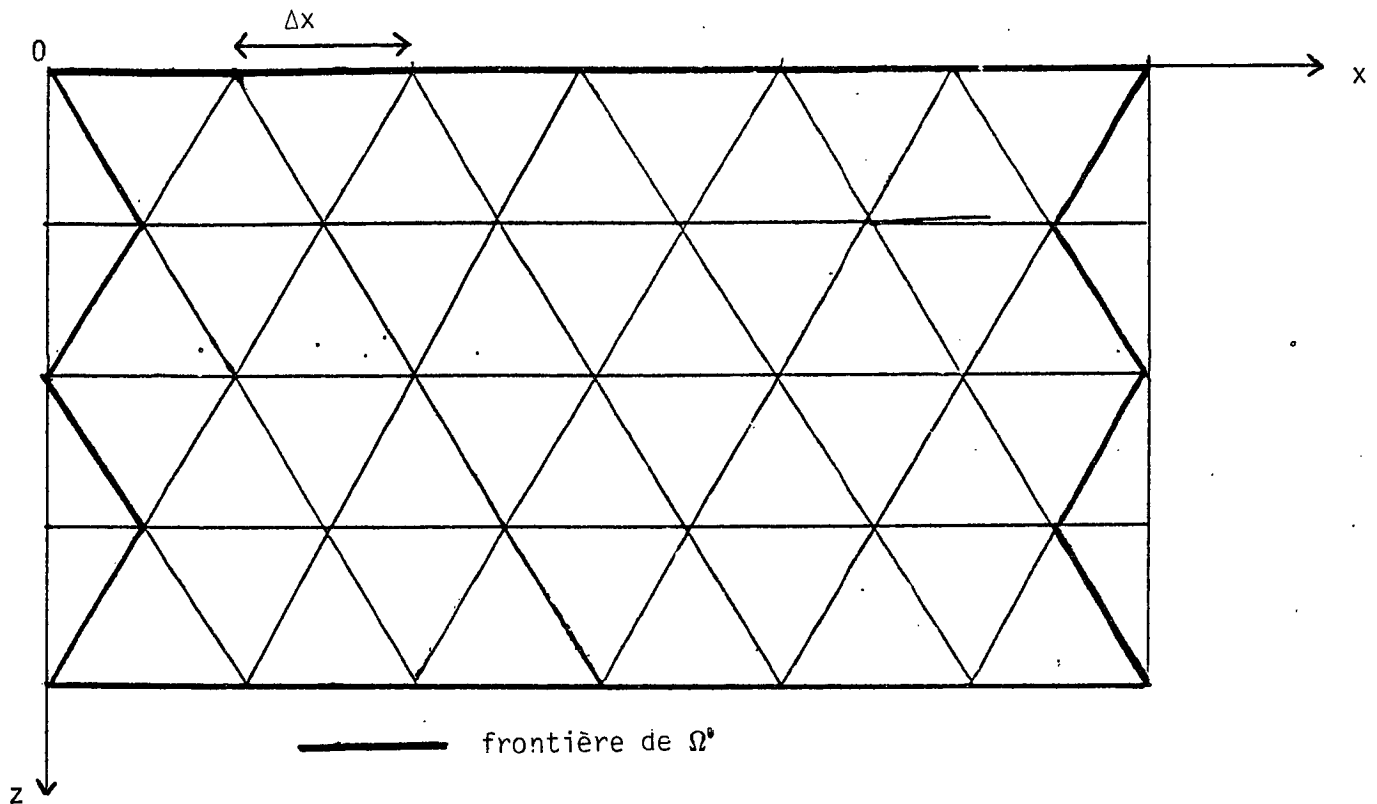


Fig. 5.5 : Triangulation de  $\Omega'$  par des triangles équilatéraux

Remarque : Comme pour la triangulation envisagée au § 5.2.1, les noeuds intérieurs (à  $\Omega'$ ) ont les mêmes caractéristiques géométriques : ils sont liés à leurs voisins comme indiqué sur la figure 5.7.

Dans cette triangulation on note  $M_{ij}$  le noeud de coordonnées ( $i$  et  $j \in \mathbb{N}$ ) :

$$z = j \Delta x \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x = \begin{cases} i \Delta x & \text{si } j \text{ est pair} \\ (i + \frac{1}{2}) \Delta x & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases}$$

En utilisant la démarche utilisée au § 3.3.1, nous allons établir les matrices de masse R et de rigidité K définies en (3.58).

### 1°) ASSEMBLAGE DES SOUS-MATRICES

La triangulation de la figure 5.5 possède 2 types de triangles (appelés T et T'). On numérote pour chaque triangle T ou T' les sommets comme indiqué sur la figure 5.6 et on note  $p_i$  la fonction de forme associée au sommet i.

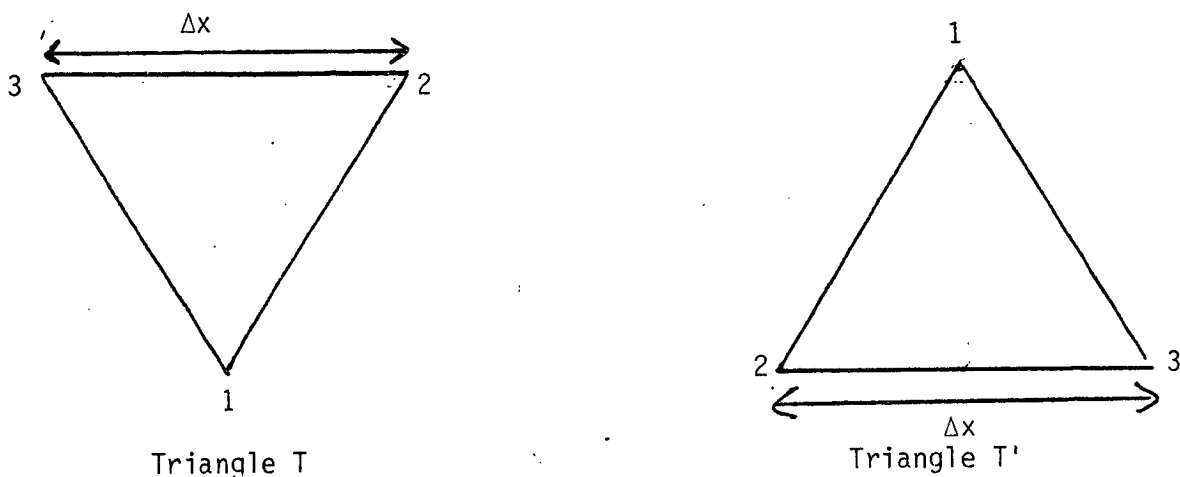


Figure 5.6 : Numérotation des sommets des triangles T et T' pour l'assemblage des sous-matrices

Si on suppose que les coefficients du milieu  $\rho$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  sont constants sur chaque triangle on peut facilement réaliser l'assemblage des sous-matrices à partir des produits scalaires des fonctions de base et de leur dérivées calculés dans le tableau 5.3.

Les produits scalaires des fonctions de base ont été obtenus en utilisant la formule d'intégration numérique :

$$(5.8) \quad \int_T f \, dx \, dz = (f_1 + f_2 + f_3) \Delta x^2 \frac{\sqrt{3}}{12} + O(\Delta x^4)$$

où  $f_i$   $i = 1, 2, 3$  désigne la valeur de  $f$  au noeud  $i$ .

Triangle T	$p_1$	$\frac{\partial p_1}{\partial x}$	$\frac{\partial p_1}{\partial z}$	$p_2$	$\frac{\partial p_2}{\partial x}$	$\frac{\partial p_2}{\partial z}$	$p_3$	$\frac{\partial p_3}{\partial x}$	$\frac{\partial p_3}{\partial z}$
$p_1$	$\Delta x^2 \frac{\sqrt{3}}{12}$			0			0		
$\frac{\partial p_1}{\partial x}$		0	0		0	0		0	0
$\frac{\partial p_1}{\partial z}$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$
$p_2$	0			$\Delta x^2 \frac{2\sqrt{3}}{12}$			0		
$\frac{\partial p_2}{\partial x}$		0	$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$\frac{\partial p_2}{\partial z}$		0	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{12}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{12}$
$p_3$	0			0			$\Delta x^2 \frac{\sqrt{3}}{12}$		
$\frac{\partial p_3}{\partial x}$		0	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{\partial p_3}{\partial z}$		0	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{12}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{12}$

Tableau 5.3 : Valeurs du produit scalaire des fonctions de forme associées à un triangle T et de leurs dérivées.

Pour le triangle T', on note que les dérivées d'une fonction de base sont les opposés des dérivées de la fonction de base de même numéro du triangle T : les produits scalaires sont donc les mêmes.

2°) ASSEMBLAGE DES MATRICES R ET K

Nous supposons, comme en (3.31) que les coefficients du milieu  $\rho, \lambda, \mu$  sont constants par couche horizontale et nous utilisons, étant donné un noeud intérieur  $M_{ij}$ , une numérotation locale des noeuds voisins et des couches (Fig. 5.7)

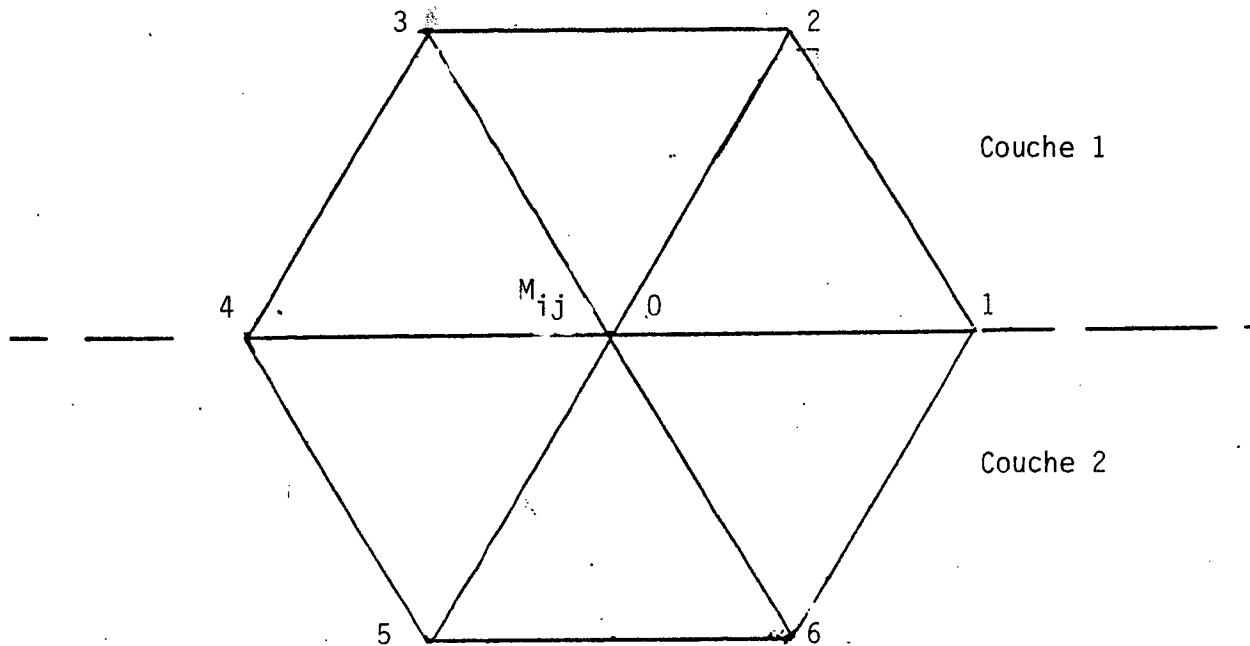


Fig. 5.7 : Numérotation locale des noeuds voisins de  $M_{ij}$  utilisée pour l'assemblage des matrices R et K

On appelle  $\rho_1, \lambda_1, \mu_1$  et  $\rho_2, \lambda_2, \mu_2$  les valeurs des coefficients du milieu respectivement dans les couches 1 et 2.

En notant  $u_h$  et  $w_h$  les approximations des fonctions inconnues  $u$  et  $w$  du noeud numéro  $h$  (dans le repère local lié au noeud  $M_{ij}$ ) on peut expliciter, à l'aide du tableau 5.3, les différents produits scalaires apparaissant dans (3.25) et obtenir l'équation semi-discrétisée en espace associée au noeud  $M_{ij}$  :

$$(5.9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} \frac{\sqrt{3}}{4} (\rho_1 + \rho_2) \frac{d^2 u_0}{dt^2} + [(\lambda + 2\mu)_1 + (\lambda + 2\mu)_2] \frac{\sqrt{3}}{4} (2 u_0 - u_1 - u_4) \\ & + \mu_1 \frac{\sqrt{3}}{2} [u_0 + \frac{1}{6}(u_1 + u_4) - \frac{2}{3}(u_2 + u_3)] + \mu_2 \frac{\sqrt{3}}{2} [u_0 + \frac{1}{6}(u_1 + u_4) - \frac{2}{3}(u_5 + u_6)] \\ & + \frac{\lambda_1}{4} (2 w_2 - 2 w_3 + w_4 - w_1) + \frac{\lambda_2}{4} (2 w_5 - 2 w_6 + w_1 - w_4) \\ & + \frac{\mu_1}{4} (2 w_2 - 2 w_3 + w_1 - w_4) + \frac{\mu_2}{4} (2 w_5 - 2 w_6 + w_4 - w_1) = 0 \end{aligned} \right.$$

De même, en explicitant (3.26), on obtient pour tout noeud intérieur :

$$(5.10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} \frac{\sqrt{3}}{4} (\rho_1 + \rho_2) \frac{d^2 w_0}{dt^2} + (\mu_1 + \mu_2) \frac{\sqrt{3}}{4} (2 w_0 - w_1 - w_4) \\ & + (\lambda + 2\mu)_1 \frac{\sqrt{3}}{2} [w_0 + \frac{1}{6}(w_1 + w_4) - \frac{2}{3}(w_2 + w_3)] \\ & + (\lambda + 2\mu)_2 \frac{\sqrt{3}}{2} [w_0 + \frac{1}{6}(w_1 + w_4) - \frac{2}{3}(w_5 + w_6)] \\ & + \frac{\lambda_1}{4} (2 u_2 - u_3 + u_1 - u_4) + \frac{\lambda_2}{4} (2 u_5 - 2 u_6 + u_4 - u_1) \\ & + \frac{\mu_1}{4} (2 u_2 - 2 u_3 + u_4 - u_1) + \frac{\mu_2}{4} (2 u_5 - 2 u_6 + u_1 - u_4) = 0 \end{aligned} \right.$$



La semi-discrétisation en espace par éléments finis P1 conduit donc, pour la triangulation choisie, au système d'équations différentielles (5.9) (5.10) à écrire pour tout noeud intérieur à  $\Omega'$  auquel il faut ajouter les équations (3.25) et (3.26) pour les autres noeuds, équations que nous n'avons pas explicitées.

### 5.3. SCHEMAS DISCRETISES EN ESPACE ET EN TEMPS

Nous explicitons ici, dans le cas d'un milieu homogène, les schémas numériques obtenus en utilisant le schéma d'approximation en temps présenté au § 3.4 pour résoudre le système différentiel constitué les équations semi-discrétisées en espace.

On appelle :

(5.11)  $\rho, \lambda, \mu$  : la valeur (constante) des coefficients du milieu

(5.12)  $u_i^n$  et  $w_i^n$  l'approximation à l'instant  $n \Delta t$  des fonctions  $u$  et  $w$  au noeud numéro  $i$  dans la numérotation locale présentée à la figure 5.4 ou 5.7.

5.3.1. PRESENTATION DU SCHEMA 4 (élément fini P1, triangulation à l'aide de triangles rectangles, condensation de masse, schéma explicite en temps)

Le schéma obtenu est constitué des deux équations :

$$(5.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho \Delta x \Delta z}{\Delta t^2} (u_0^{n+1} - 2 u_0^n + u_0^{n-1}) + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta z}{\Delta x} (2 u_0^n - u_1^n - u_4^n) \\ + \frac{\mu \Delta x}{\Delta z} (2 u_0^n - u_3^n - u_6^n) + \left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right) (2 w_0^n + w_2^n - w_1^n - w_3^n + w_5^n - w_4^n - w_6^n) = 0 \end{array} \right.$$

$$(5.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho \Delta x \Delta z}{\Delta t^2} (w_0^{n+1} - 2 w_0^n + w_0^{n-1}) + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta x}{\Delta z} (2 w_0^n - w_3^n - w_6^n) \\ + \frac{\mu \Delta z}{\Delta x} (2 w_0^n - w_1^n - w_4^n) + \left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right) (2 u_0^n + u_2^n - u_1^n - u_3^n + u_5^n - u_4^n - u_6^n) = 0 \end{array} \right.$$

Commentaires sur le schéma :

1°) Le schéma est explicite : on obtient  $u_0^{n+1}$  et  $w_0^{n+1}$  à partir de  $u^n, w^n, u^{n-1}, w^{n-1}$  par une simple formule.

2°) L'approximation des dérivées en espace fait intervenir les points indiqués sur la figure 5.8.

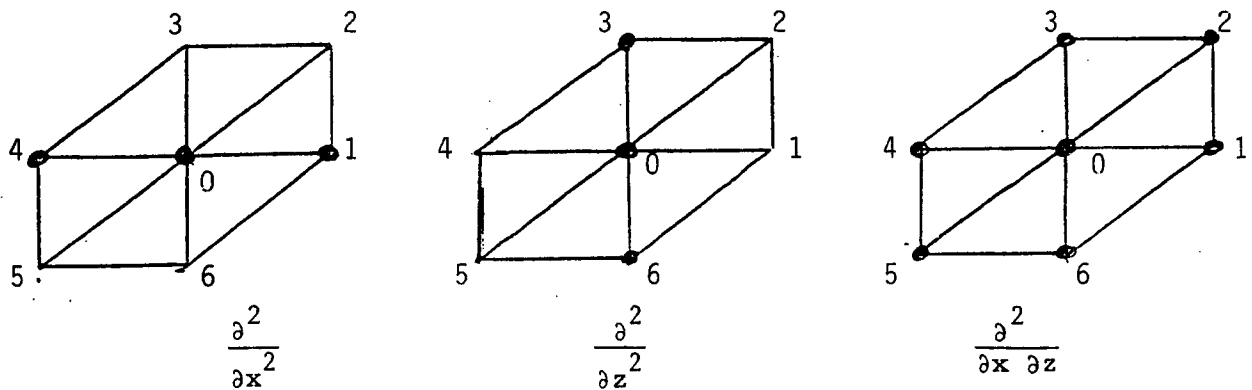


Fig. 5.8 : Approximation des dérivées en espace dans le schéma 4

(les points intervenant dans ces approximations sont marqués ●).

5.3.2. PRESENTATION DU SCHEMA 5 (élément fini P1, triangulation à l'aide de triangles équilatéraux, condensation de masse, schéma explicite en temps)

Le schéma obtenu est constitué deux équations :

$$(5.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho \Delta x^2 \sqrt{3}}{\Delta t^2} (u_0^{n+1} - 2 u_0^n + u_0^{n-1}) + (\lambda + 2\mu) \sqrt{3} (2 u_0^n - u_1^n - u_4^n) \\ + \mu \sqrt{3} \left[ 2 u_0^n + \frac{1}{3} (u_1^n + u_4^n) - \frac{2}{3} (u_2^n + u_3^n + u_5^n + u_6^n) \right] \\ + (\lambda + \mu) (w_2^n - w_3^n + w_5^n - w_6^n) = 0 \end{array} \right.$$

$$(5.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho \Delta x^2 \sqrt{3}}{\Delta t^2} (w_0^{n+1} - 2 w_0^n + w_0^{n-1}) + \mu \sqrt{3} (2 w_0^n - w_1^n - w_4^n) \\ + (\lambda + 2\mu) \sqrt{3} \left[ 2 w_0^n + \frac{1}{3} (w_1^n + w_4^n) - \frac{2}{3} (w_2^n + w_3^n + w_5^n + w_6^n) \right] \\ + (\lambda + \mu) (u_2^n - u_3^n + u_5^n - u_6^n) = 0 \end{array} \right.$$

Commentaires sur le schéma :

1°) Le schéma est explicite : on obtient  $u_0^{n+1}$  et  $w_0^{n+1}$  à partir du  $u^n, w^n, u^{n-1}, w^{n-1}$  par l'application d'une simple formule.

2°) L'approximation des dérivées en espace fait intervenir les points indiqués sur la figure 5.9.

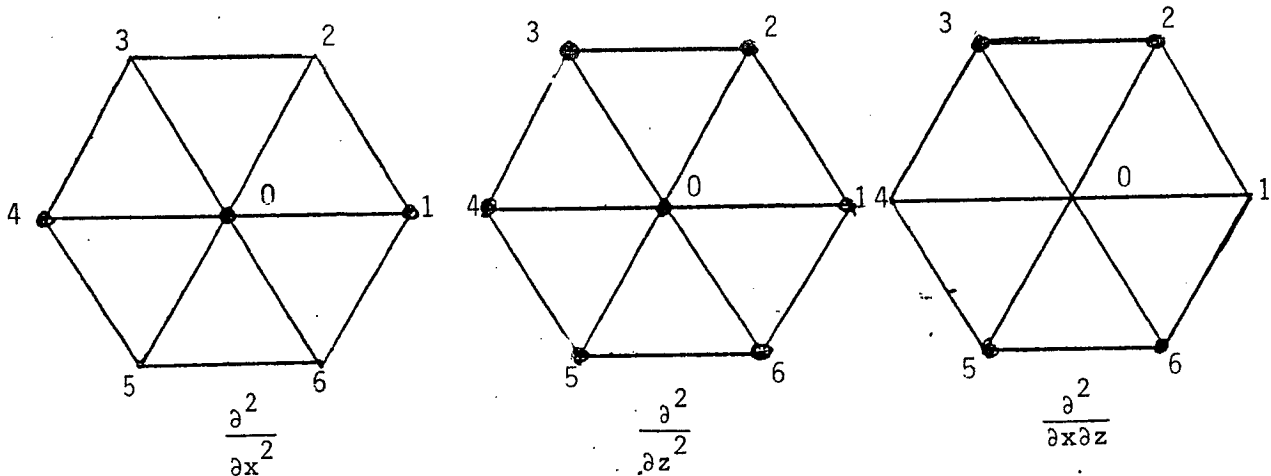


Fig. 5.9 : Approximation des dérivées en espace dans le schéma 5

(les points utilisés dans ces approximations sont marqués ●).

#### 5.4. ÉTUDE DES ONDES PLANES NUMÉRIQUES ASSOCIÉES AU SCHEMA 4 (cas $\Delta x = \Delta z$ )

Nous reprenons dans ce paragraphe l'étude (et les notations) des § 2.4 et 2.5 : on suppose  $\Omega = \mathbb{R}^2$  et on cherche les solutions de (5.13) (5.14) qui sont de la forme (2.50).

A partir de la relation de dispersion nous déterminons, étant donné un vecteur  $\vec{k}$ , les pulsations  $\omega$  et les vecteurs  $\vec{d}$  direction du déplacement possibles. On suppose  $\Delta x = \Delta z$ .

5.4.1. DETERMINATION DE LA RELATION DE DISPERSION

En écrivant les relations (5.13) et (5.14) pour  $\begin{pmatrix} u_{ij}^n \\ w_{ij}^n \end{pmatrix}$  de la forme (2.50) on obtient :

$$(5.17) \quad \frac{2 \rho}{\Delta t^2} (\cos \omega \Delta t - 1) \vec{d} + \hat{B}_h(\vec{k}) \vec{d} = 0$$

où  $\hat{B}_h(\vec{k})$  est la matrice (2,2) définie par :

$$(5.18) \quad \left\{ \begin{aligned} \hat{B}_h(\vec{k})_{11} &= 2 \frac{(\lambda+2\mu)}{\Delta x^2} (1 - \cos k_1 \Delta x) + \frac{2 \mu}{\Delta x^2} (1 - \cos k_2 \Delta x) \\ \hat{B}_h(\vec{k})_{22} &= 2 \frac{(\lambda+2\mu)}{\Delta x^2} (1 - \cos k_2 \Delta x) + \frac{2 \mu}{\Delta x^2} (1 - \cos k_1 \Delta x) \\ \hat{B}_h(\vec{k})_{12} &= \hat{B}_h(\vec{k})_{21} = \frac{(\lambda+\mu)}{\Delta x^2} (1 - \cos k_1 \Delta x - \cos k_2 \Delta x + \\ &\quad \cos(k_1 - k_2) \Delta x) \end{aligned} \right.$$

Le calcul de  $\omega$  et de  $\vec{d}$  à partir de  $\vec{k}$  demande donc le calcul des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$ . On peut remarquer que la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$  est symétrique réelle; ses valeurs propres seront donc réelles et ses vecteurs propres orthogonaux.

5.4.2. CALCUL DES VALEURS PROPRES DE LA MATRICE  $\hat{B}_h(\vec{k})$ 

Pour les raisons exposées au lemme 2.3 on impose au vecteur d'onde  $\vec{k}$  les conditions :

$$(2.26) \quad \left\{ \begin{aligned} -\pi &\leq k_1 \Delta x \leq \pi \\ -\pi &\leq k_2 \Delta x \leq \pi \end{aligned} \right.$$

Appelons  $s_1(\vec{k})$  et  $s_2(\vec{k})$  les valeurs propres de  $\hat{B}_h(\vec{k})$  et introduisons les notations :

$$(5.19) \quad \left\{ \begin{aligned} b_{ij} &= (\hat{B}_h(\vec{k}))_{ij} \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \\ \beta_1 &= \cos k_1 \Delta x, \quad \beta_2 = \cos k_2 \Delta x \quad \text{et} \quad \beta_3 = \cos(k_1 - k_2) \Delta x \end{aligned} \right.$$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$s^2 - (b_{11} + b_{22})s + b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = 0$$

et le discriminant réduit  $\Delta'$  est égal à :

$$\begin{aligned} \Delta' &= \frac{1}{4} (b_{11} - b_{22})^2 + b_{12}^2 \\ &= \frac{(\lambda + \mu)^2}{\Delta x^4} [(\beta_2 - \beta_1)^2 + (1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_3)^2] \end{aligned}$$

Comme on a d'autre part :

$$b_{11} + b_{22} = 2 \frac{(\lambda + 3\mu)}{\Delta x^2} (2 - \beta_1 - \beta_2)$$

les valeurs propres de  $\hat{B}_h(\vec{k})$  sont :

$$s = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ (\lambda + 3\mu) (2 - \beta_1 - \beta_2) \pm (\lambda + \mu) \sqrt{(\beta_2 - \beta_1)^2 + (1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_3)^2} \right]$$

#### 5.4.3. UNE CONDITION NECESSAIRE DE STABILITE DU SCHEMA

Pour que le schéma soit stable, il est nécessaire que le  $\omega$  de l'onde plane harmonique (2.50) soit réel et, par conséquent, que l'on ait :

$$s_1(\vec{k}) \text{ et } s_2(\vec{k}) \in \left[0, \frac{4\rho}{\Delta t}\right]$$

ou encore, en convenant :

$$(5.20) \quad s_2(\vec{k}) \leq s_1(\vec{k})$$

les deux conditions :

$$(5.21) \quad 0 \leq s_2(\vec{k}) = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ (\lambda + 3\mu) (2 - \beta_1 - \beta_2) - (\lambda + \mu) \sqrt{(\beta_2 - \beta_1)^2 + (1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_3)^2} \right]$$

et

$$(5.22) \quad s_1(\vec{k}) = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ (\lambda + 3\mu) (2 - \beta_1 - \beta_2) + (\lambda + \mu) \sqrt{(\beta_2 - \beta_1)^2 + (1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_3)^2} \right] \leq \frac{4\rho}{\Delta t}$$

L'étude de ces deux conditions fait l'objet des lemmes suivants.

Lemme 5.1 (positivité des valeurs propres)

La relation (5.21) est vérifiée pour tout couple  $(\lambda, \mu)$  positif de paramètres de Lamé et tout vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

Démonstration du lemme 5.1

Etudions l'inégalité :

$$(\lambda + 3\mu) (2 - \beta_1 - \beta_2) \geq (\lambda + \mu) \sqrt{(\beta_2 - \beta_1)^2 + (1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_3)^2}$$

que nous pouvons élever au carré et n'étudier que dans le cas le plus défavorable  $\mu = 0$  :

$$(2 - \beta_1 - \beta_2)^2 - (\beta_2 - \beta_1)^2 \geq (1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_3)^2$$

$$\text{En exprimant : } \beta_3 = \beta_1 \beta_2 + \varepsilon \sqrt{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}$$

où  $\varepsilon = \pm 1$  on obtient, en développant l'inégalité précédente :

$$1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_1^2 \beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^2 + \beta_1 \beta_2^2 \geq \varepsilon (1 - \beta_1)(1 - \beta_2) \sqrt{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}$$

ou encore :

$$(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)(1 - \beta_1 \beta_2) \geq \varepsilon (1 - \beta_1)(1 - \beta_2) \sqrt{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}$$

inéquation que l'on vérifie aisément. ▣

Lemme 5.2 (condition nécessaire de stabilité du schéma)

L'inégalité (5.22) est vérifiée si l'on a :

(5.23)

$$\boxed{v_p \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Démonstration :

L'inégalité (5.22) s'écrit encore :

$$f_{\varepsilon}(\beta_1, \beta_2) = (\lambda + 3\mu)(2 - \beta_1 - \beta_2) + (\lambda + \mu) \sqrt{(\beta_1 - \beta_2)^2 + [(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) + \varepsilon \sqrt{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}]}^2$$

$$\leq 4\rho \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}$$

Inégalité que l'on doit vérifier  $\forall (\beta_1, \beta_2) \in [-1, 1]^2$  et  $\varepsilon = \pm 1$ .

Etudions le cas le plus défavorable  $\varepsilon = +1$  et recherchons le maximum sur  $[-1, 1]^2$  de  $f_1(\beta_1, \beta_2)$ . On pose :

$$(5.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 2 - \beta_1 - \beta_2 \\ \psi = \sqrt{(\beta_1 - \beta_2)^2 + [(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) + \sqrt{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}]}^2 \end{array} \right.$$

et (cf. fig. 5.10)

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \{(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0 \leq \psi \leq \varphi \text{ et } 0 \leq \varphi \leq 4 = \varphi(\beta_1 = -1, \beta_2 = -1)\} \\ E_0 = \{(\varphi, \psi) \text{ obtenus quand } (\beta_1, \beta_2) \text{ parcourt } [-1, 1]^2\} \end{array} \right.$$

On a donc :  $E_0 \subset E$  d'après le lemme 5.1.

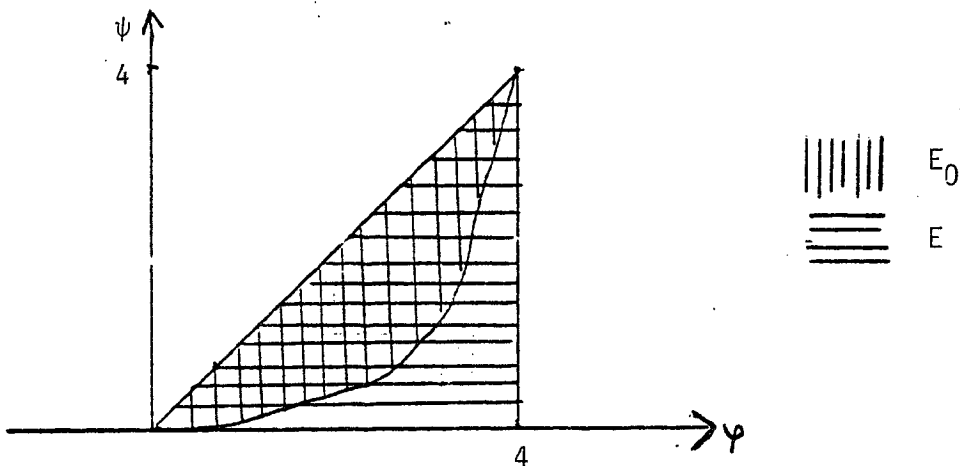


Fig. 5.10

La fonction  $f_1(\beta_1, \beta_2)$  s'écrit :

$$f_1(\beta_1, \beta_2) = (\lambda + 2\mu) (\varphi + \psi) + \mu(\varphi - \psi)$$

Le maximum de  $f_1$  sur  $E$  est atteint pour  $\varphi = \psi = 4$ . Comme ce point appartient également à  $E_0$ , c'est également le maximum sur  $E_0$  qui vaut :

$$f_1(-1, -1) = 8(\lambda + 2\mu)$$

d'où la condition de stabilité (5.23).

#### 5.4.4. OBTENTION DE $\omega$ A PARTIR DE $\vec{k}$ (VITESSE DES ONDES NUMERIQUES)

Comme exposé au § 2.4.2 on impose à  $\omega$  la condition  $0 < \omega \Delta t \leq \pi$ . Si la condition de stabilité (5.23) est réalisée, on peut facilement obtenir les vitesses de phase adimensionnelles  $q_1(\vec{k})$  et  $q_2(\vec{k})$  (cf. (2.80) (2.81) respectivement des ondes P numériques et des ondes S numériques en fonction des paramètres  $H$ ,  $\theta$ ,  $\gamma$  définis par (2.75) (2.72) (2.77).

$$(5.26) \quad q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2\pi H \gamma} \text{Arc cos} \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{4} (\varphi + \psi + \xi^2(\varphi - \psi)) \right]$$

$$(5.27) \quad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\pi H \gamma} \text{Arc cos} \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{4} (\varphi - \psi + \xi^2(\varphi + \psi)) \right]$$

avec

$$(5.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 2 - \cos(2\pi H \cos \theta) - \cos(2\pi H \sin \theta) \\ \psi = \left( [\cos(2\pi H \cos \theta) - \cos(2\pi H \sin \theta)]^2 \right. \\ \quad \left. + \left[ 1 - \cos(2\pi H \cos \theta) - \cos(2\pi H \sin \theta) \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \cos(2\pi H(\cos \theta - \sin \theta)) \right]^2 \right)^{1/2} \\ \xi = \frac{v_s}{v_p} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}} \quad \text{avec } \nu \text{ coefficient de Poisson} \end{array} \right.$$



Remarque : La fonction  $\theta \rightarrow q_1$  ou  $q_2$  est périodique de période  $\pi$  et symétrique par rapport à  $\theta = \frac{\pi}{4}$  : on l'étudiera donc dans  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ .

Remarque : Comme exposé au §2.5.7, nous restreignons l'étude à  $H \in [0, \frac{1}{2}]$  mais n'explorons pas tout le carré défini par (2.91).

#### 5.4.5. CALCUL DE $\vec{d}$ A PARTIR DE $\vec{k}$ (ECART ENTRE LA DIRECTION DE PROPAGATION ET LA DIRECTION DU DEPLACEMENT)

Nous ne nous intéressons qu'au premier vecteur propre  $\vec{d}_1$  car nous savons déjà que  $\vec{d}_2$  est perpendiculaire à  $\vec{d}_1$ .

Nous obtenons  $\vec{d}_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$  en exprimant :

$$(b_{11} - s_1)u_1 + b_{12} w_1 = 0$$

ou encore :

$$\vec{d}_1 \text{ est parallèle au vecteur } \begin{pmatrix} -b_{12} \\ b_{11} - s_1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons exprimer ce résultat en fonction des paramètres  $H$  et  $\theta$

$\vec{d}_1$  est parallèle au vecteur

$$(5.29) \quad \begin{pmatrix} 1 - \cos(2\pi H \cos \theta) - \cos(2\pi H \sin \theta) + \cos(2\pi H(\cos \theta - \sin \theta)) \\ \cos(2\pi H \cos \theta) - \cos(2\pi H \sin \theta) + \psi \end{pmatrix}$$

où  $\psi$  est défini en (5.28).

Nous pouvons définir comme en (2.88) l'écart  $\delta\theta$  entre la direction de propagation et la direction du déplacement :

$$(5.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\theta = \theta_1 - \theta \text{ avec} \\ \theta_1 = \text{angle formé par } \vec{d}_1 \text{ avec l'axe } \vec{Ox} \end{array} \right.$$

Nous constatons que cette fonction ne dépend ni de  $\gamma$ , ni du coefficient de Poisson  $\nu$ . Compte-tenu des propriétés de périodicité (période  $\pi$ ) et de symétrie (par rapport à  $\frac{\pi}{4}$ ) de la fonction  $\theta \rightarrow \delta\theta$ , nous étudierons cette fonction de  $H$  pour  $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ .

#### Remarques diverses

- On peut voir à partir de (5.29) que la direction du déplacement est la direction de propagation pour  $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ . Pour  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  l'angle de la direction du déplacement est  $-\frac{\pi}{4}$  ( $\delta\theta = 0^\circ$ ) pour  $H < \frac{1}{2\sqrt{2}}$  et  $+\frac{\pi}{4}$  ( $\delta\theta = 90^\circ$ ) pour  $H > \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

- L'écart entre la direction du déplacement des ondes S numériques et la direction du déplacement des ondes S continues est encore donné par (5.30) en n'oubliant pas que  $H$  est, dans ce cas, le nombre de points par longueur d'onde  $S$  (dans la direction  $x$  ou la direction  $z$ ).

#### 5.5. ETUDE NUMERIQUE DE LA RELATION DE DISPERSION POUR LE SCHEMA 4 (cas $\Delta x = \Delta z$ )

Ce paragraphe reprend l'analyse faite au § 2.6 ainsi que les notations utilisées dans ce paragraphe.

5.5.1. ETUDE DE L'ECART  $\delta\theta$  ENTRE LA DIRECTION DE PROPAGATION ET LA DIRECTION DU DEPLACEMENT (FIG. 5.11)

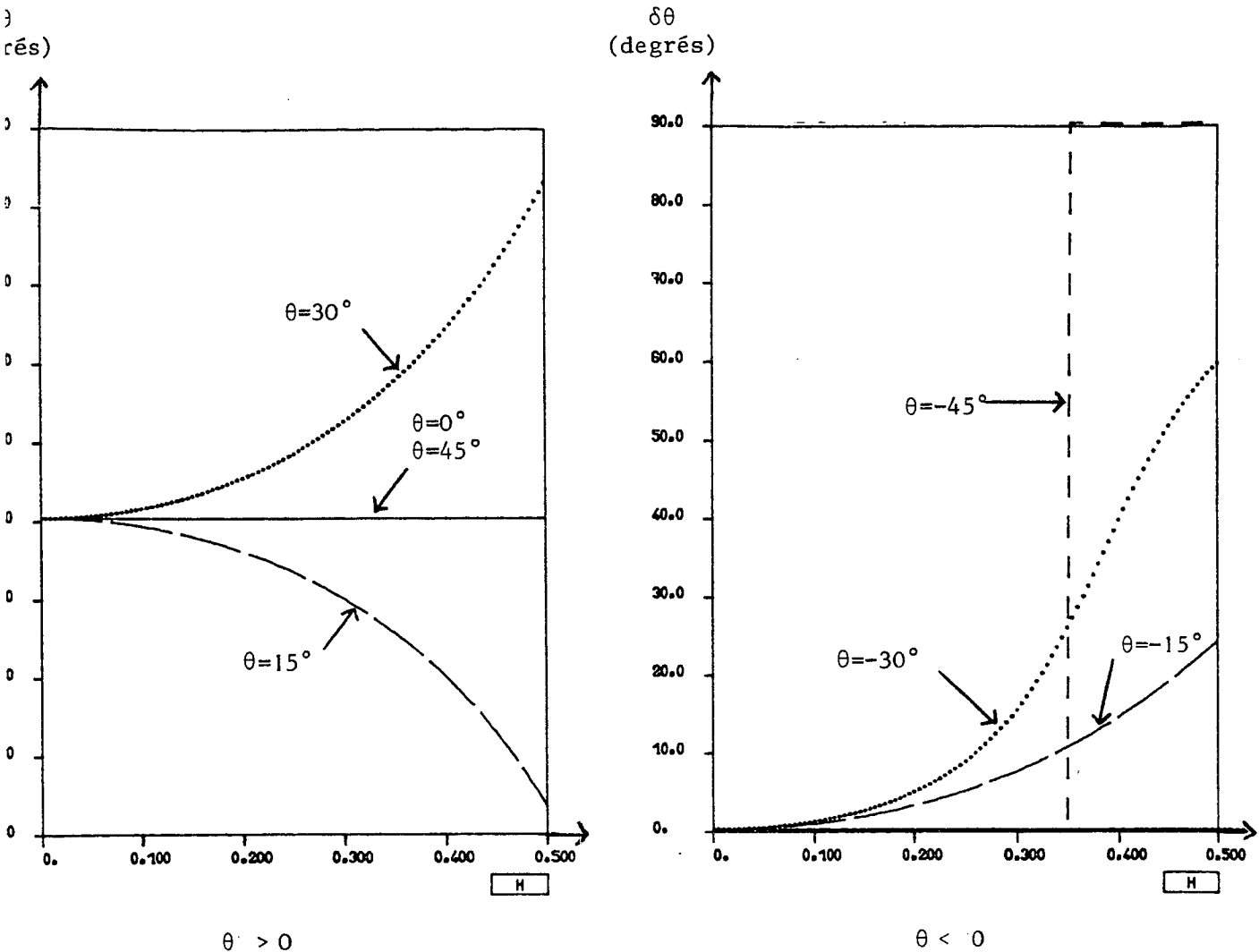


Figure 5.11 : Erreur sur l'angle du déplacement

L'écart  $\delta\theta$  est nul pour  $\theta = 0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $-45^\circ$  (du moins pour des valeurs raisonnables de  $H$ ). Pour les autres valeurs de  $\theta$  il faut distinguer deux cas :

-  $\theta$  positif : l'écart entre la direction du déplacement et la direction de propagation est faible; il reste inférieur à 1 degré jusqu'à  $H = 0,25$ , soit  $G = 4$  points par longueur d'onde.

-  $\theta$  négatif : la direction de propagation est sensiblement différente de la direction du déplacement;  $\delta\theta$  étant de l'ordre de 6 degrés pour  $G = 5$  points par longueur d'onde.

Le comportement du schéma est donc sensiblement différent selon la direction du vecteur  $\vec{k}$  : la figure 5.12 schématise la qualité de l'approximation de la direction du déplacement des ondes continues par des ondes numériques.

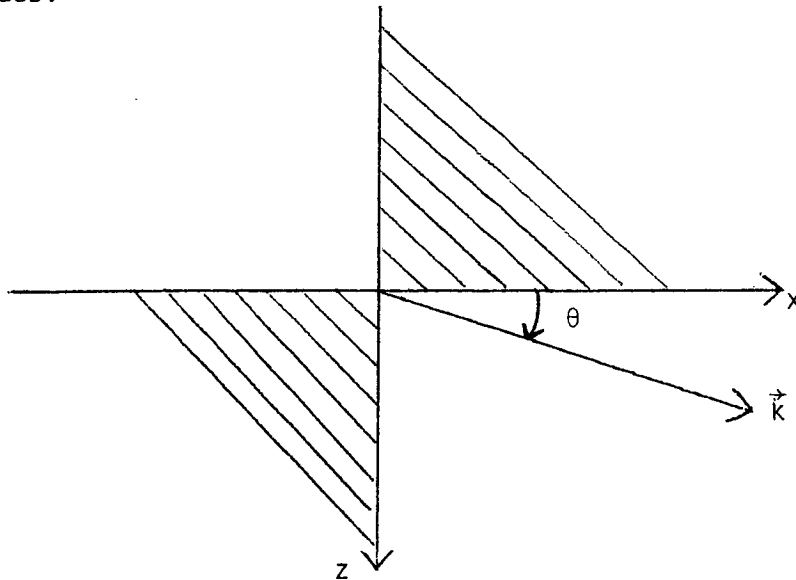


Fig. 5.12 : Approximation de la direction du déplacement en fonction du vecteur d'onde  $\vec{k}$  (on a hachuré les quadrants où l'approximation est difficile à réaliser).

Le tableau 5.4 donne les valeurs de l'écart  $\delta\theta$  obtenues pour  $G = 5, 10$  ou  $20$  points par longueur d'onde en fonction de l'angle  $\theta$ .

	$G = 5$	$G = 10$	$G = 20$
$\theta = -45^\circ$	0	0	0
$\theta = -30^\circ$	$4,76^\circ$	$0,99^\circ$	$0,24^\circ$
$\theta = -15^\circ$	$3,04^\circ$	$0,73^\circ$	$0,18^\circ$
$\theta = 0^\circ$	0	0	0
$\theta = 15^\circ$	$-0,43^\circ$	$-0,10^\circ$	$-0,03^\circ$
$\theta = 30^\circ$	$0,51^\circ$	$0,12^\circ$	$0,03^\circ$
$\theta = 45^\circ$	0	0	0

Tableau 5.4 : Valeurs de  $\delta\theta$  obtenues pour différentes valeurs de  $\theta$  et  $H$

5.5.2. DISPERSION DES ONDES P

Nous distinguons deux cas suivant le signe de  $\theta$

1°)  $\theta$  positif

Les figures 5.13 et 5.14 représentent respectivement la vitesse de phase adimensionnelle  $q_1$  et la vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes P numériques, obtenues pour différentes valeurs des paramètres. On constate :

- que  $q_1$  dépend peu de  $v$ .

- que  $q_1$  dépend sensiblement de  $\theta$  : les directions les plus favorables à la propagation sont obtenues pour  $\theta$  voisin de  $45^\circ$ .

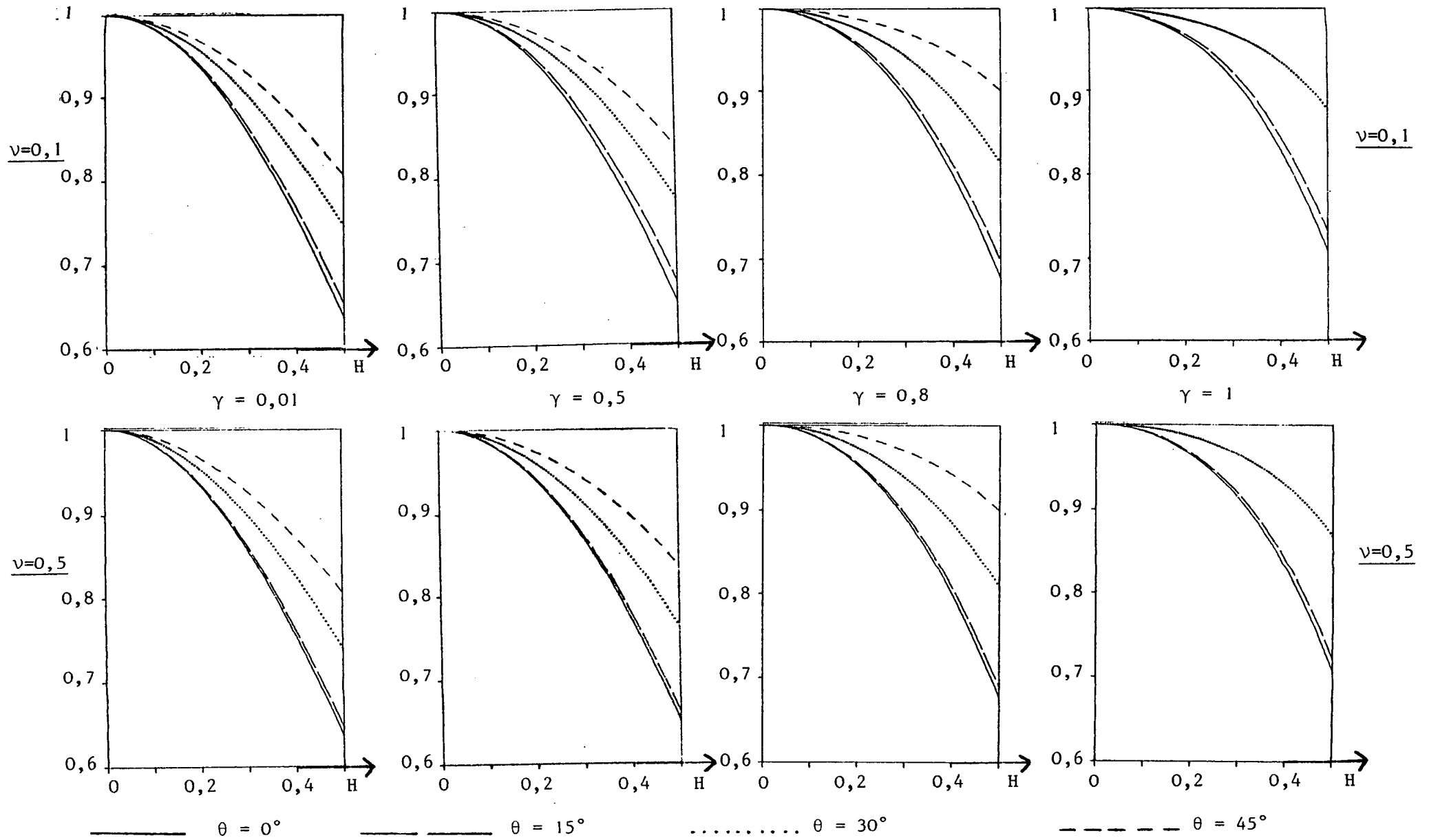


Figure 5.13 : Vitesse de phase adimensionnelle  $q_1$  des ondes P numériques solutions du schéma 4 (pour  $\theta$  positif)

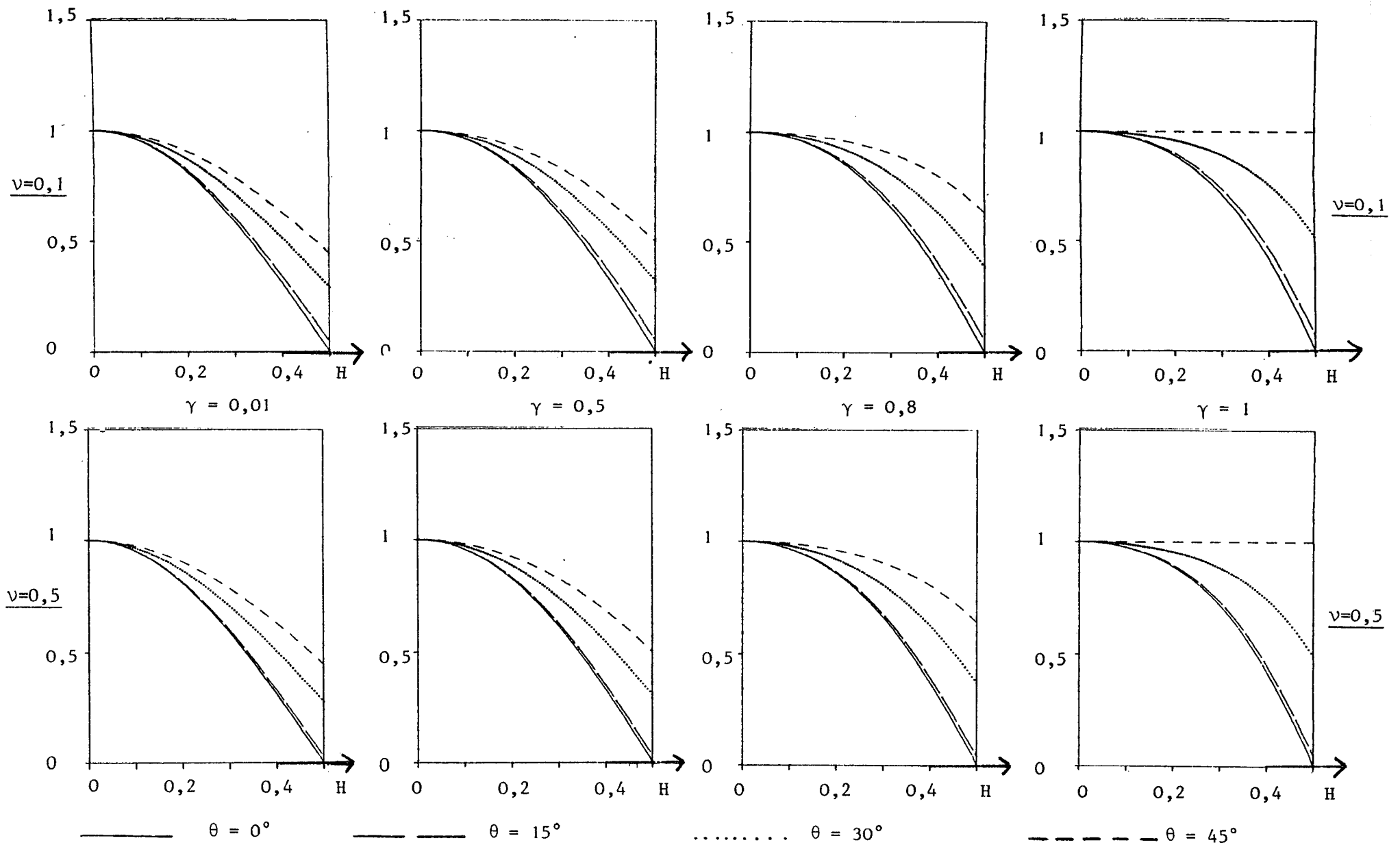


Figure 5.14 : Vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes  
 P numériques solutions du schéma 4 (pour  $\theta$  positif)

- que la vitesse de phase des ondes P numériques approche bien (par défaut) la vitesse des ondes P jusqu'à  $G = 5$  points par longueur d'onde (erreur relative inférieure à 6 %); cette erreur tombe à 1,5 % pour  $G = 10$  points par longueur d'onde.

- que l'approximation s'améliore sensiblement quand  $\gamma$  augmente au-dessus de 0,5 (pour  $\gamma = 1$  et 5 points par longueur d'onde l'erreur relative sur la vitesse des ondes P est inférieure à 3 %).

La vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  dépend de  $\gamma$ ,  $\theta$  et  $v$  sensiblement de la même façon que  $q_1$ ; l'erreur normalisée  $|1 - Q_1|$  est environ 3 fois supérieure à  $|1 - q_1|$ .

## 2°) $\theta$ négatif

L'examen de la vitesse de phase adimensionnelle  $q_1$  des ondes P numériques (fig. 5.15) montre que :

- dans tous les cas l'approximation est plus mauvaise que pour  $\theta$  positif; l'approximation se dégrade au fur et à mesure que  $\theta$  se rapproche de  $-45$  degrés.

- la vitesse de phase des ondes P numériques approche relativement bien (par défaut) la vitesse des ondes P jusqu'à 5 points par longueur d'onde (erreur relative inférieure à 10%); cette erreur tombe à 2% pour  $G = 10$  points par longueur d'onde.

- que l'approximation s'améliore un peu quand  $\gamma$  augmente au-dessus de 0,5 (pour  $\gamma = 1$  et 5 points par longueur d'onde l'erreur relative sur la vitesse des ondes P est inférieure à 8%).



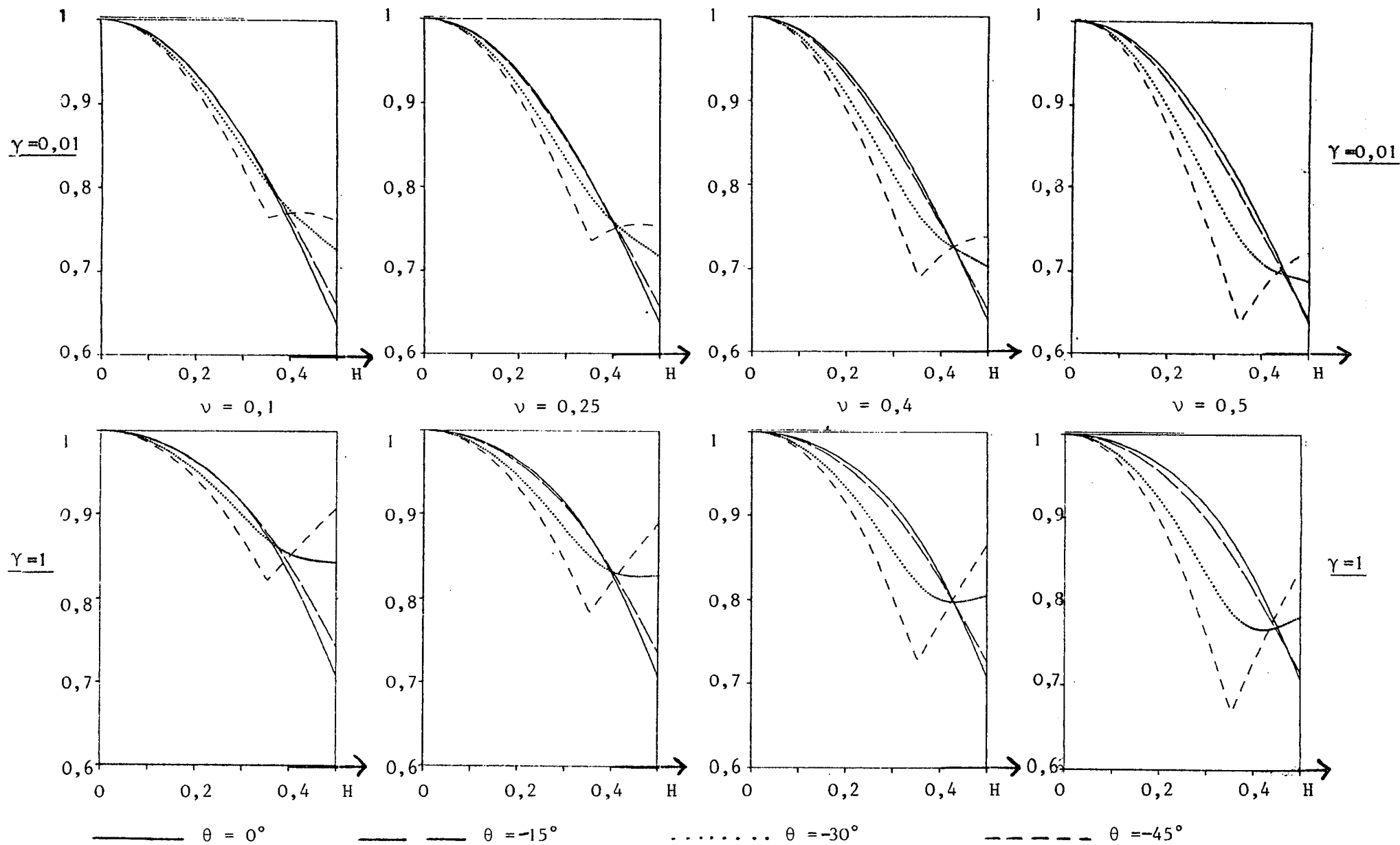


Figure 5.15 : Vitesse de phase adimensionnelle  $q_1$  des ondes P numériques solutions du schéma 4 (pour  $\theta$  négatif)

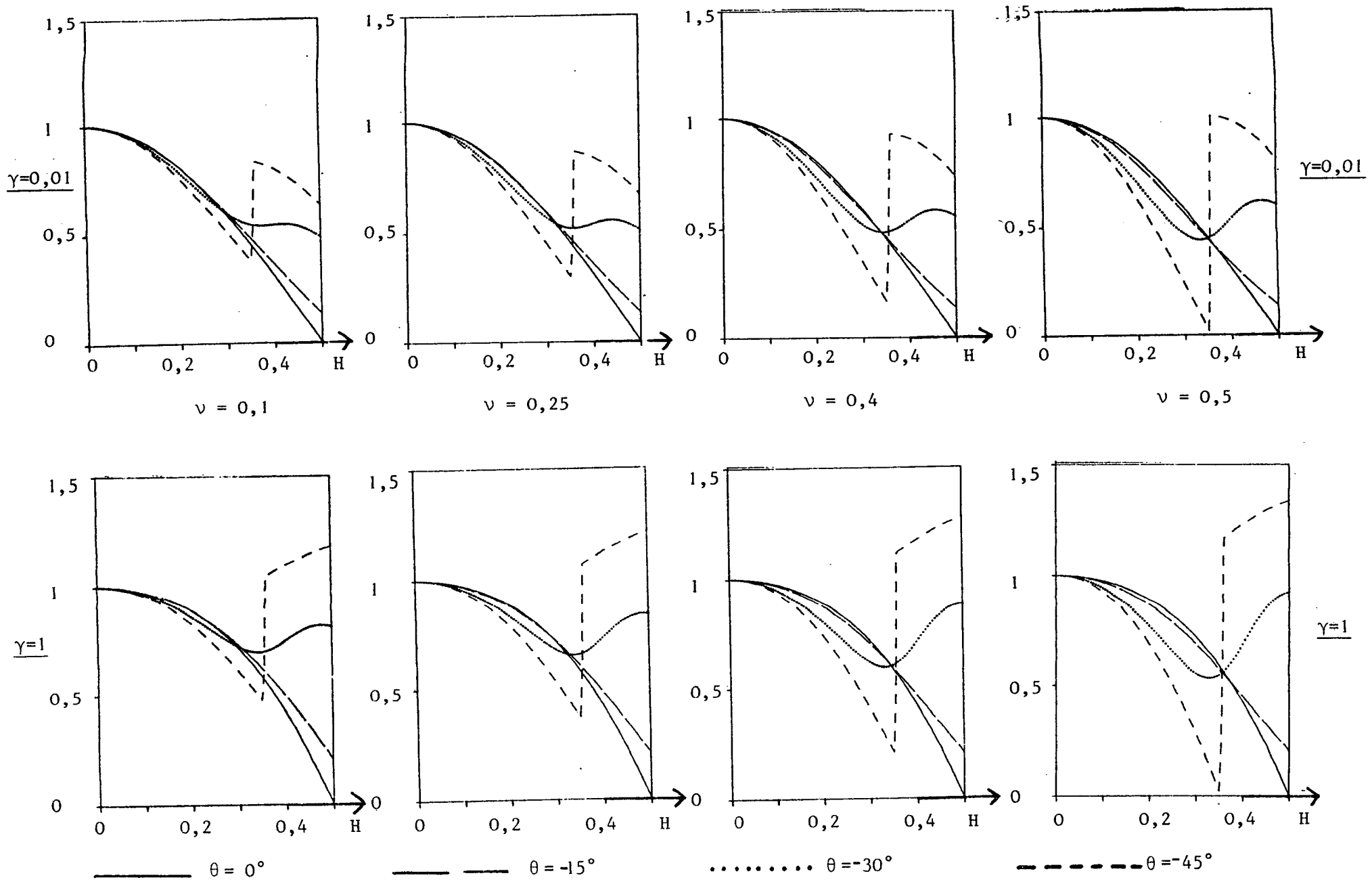


Figure 5.16 : Vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes P numériques solutions du schéma 4 (pour  $\theta$  négatif)

- que  $q_1$  dépend peu de  $\nu$  pour  $\theta \in [-20^\circ, 0^\circ]$ ; mais l'approximation se dégrade sensiblement quand  $\nu$  augmente pour  $\theta$  compris entre  $-45^\circ$  et  $-20^\circ$ . Notons que cette dégradation au voisinage de  $\nu = 0,5$  est très gênante compte tenu de l'importance quantitative des ondes P dans ce cas.

La vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes P numériques (fig. 5.16) dépend de  $\gamma$ ,  $\theta$  et  $\nu$  sensiblement de la même façon que  $q_1$ ; l'erreur normalisée  $|1 - Q_1|$  est pour  $G$  supérieur à 5 points par longueur d'onde, environ 3 fois supérieure à  $|1 - q_1|$ .

### 5.5.3. DISPERSION DES ONDES S

Nous distinguons à nouveau deux cas suivant le signe de  $\theta$ .

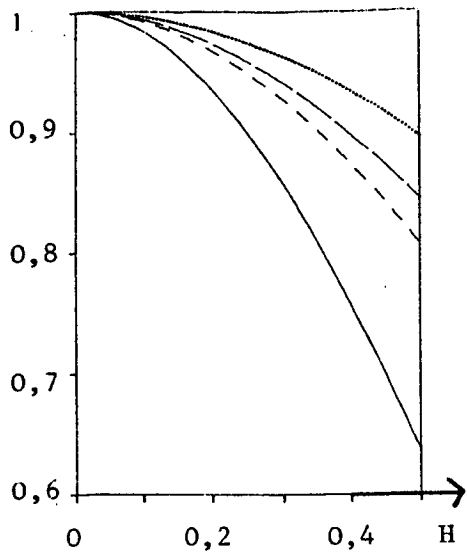
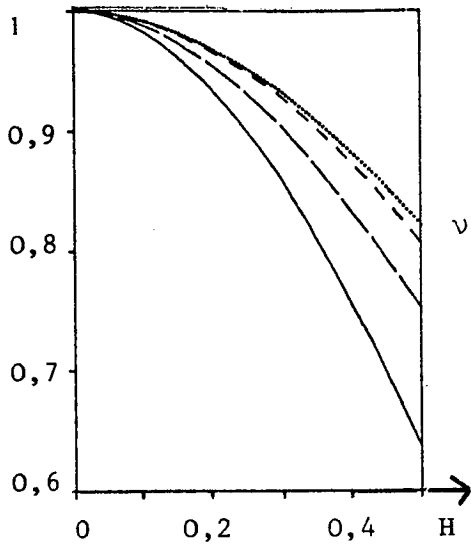
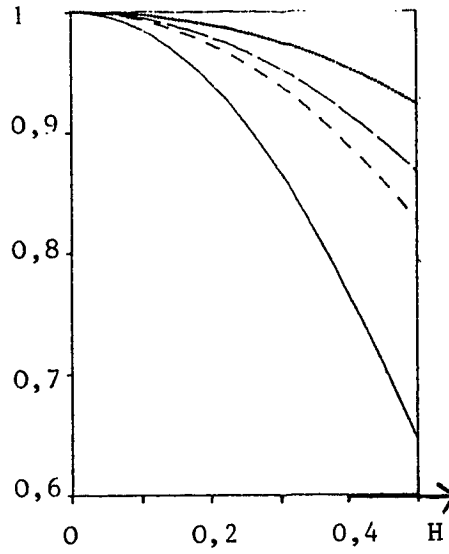
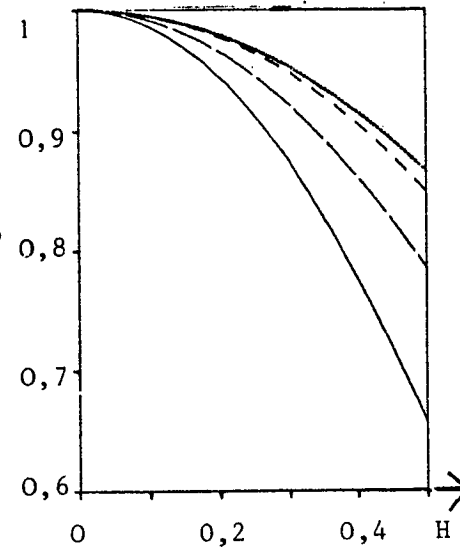
#### 1°) $\theta$ positif

L'examen de la vitesse de phase adimensionnelle  $q_2$  des ondes S numériques (fig. 5.17) montre que :

-  $q_2$  dépend peu de  $\nu$

-  $q_2$  dépend peu de  $\gamma$ : on a cependant une légère amélioration quand  $\gamma$  augmente.

-  $q_2$  dépend sensiblement de  $\theta$ : les directions favorables sont celles voisines de  $\theta = 30^\circ$  et les directions défavorables sont celles voisines de  $\theta = 0^\circ$ . Notons que le coefficient de Poisson  $\nu$  influe sur les directions privilégiées.

$\gamma = 0,01$  $\gamma = 1$  $\nu = 0,1$  $\nu = 0,25$ 

———  $\theta = 0^\circ$   
 ———  $\theta = 15^\circ$   
 .....  $\theta = 30^\circ$   
 - - - -  $\theta = 45^\circ$

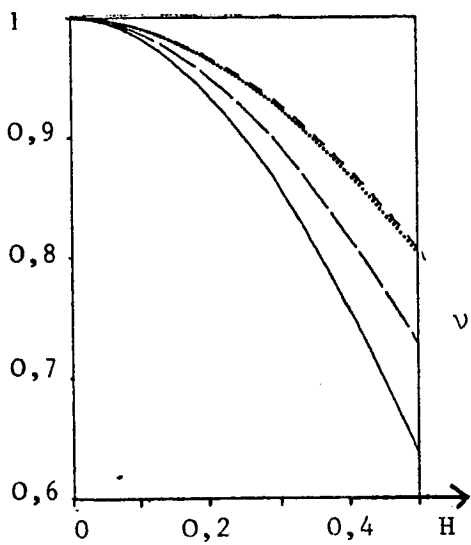
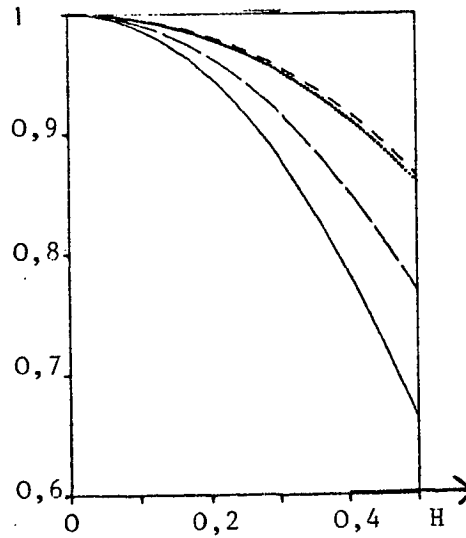
 $\nu = 0,4$ 

Figure 5.17 : Vitesse de phase adimensionnelle  $q_2$  des ondes S numériques solutions du schéma 4 (pour  $\theta$  positif)

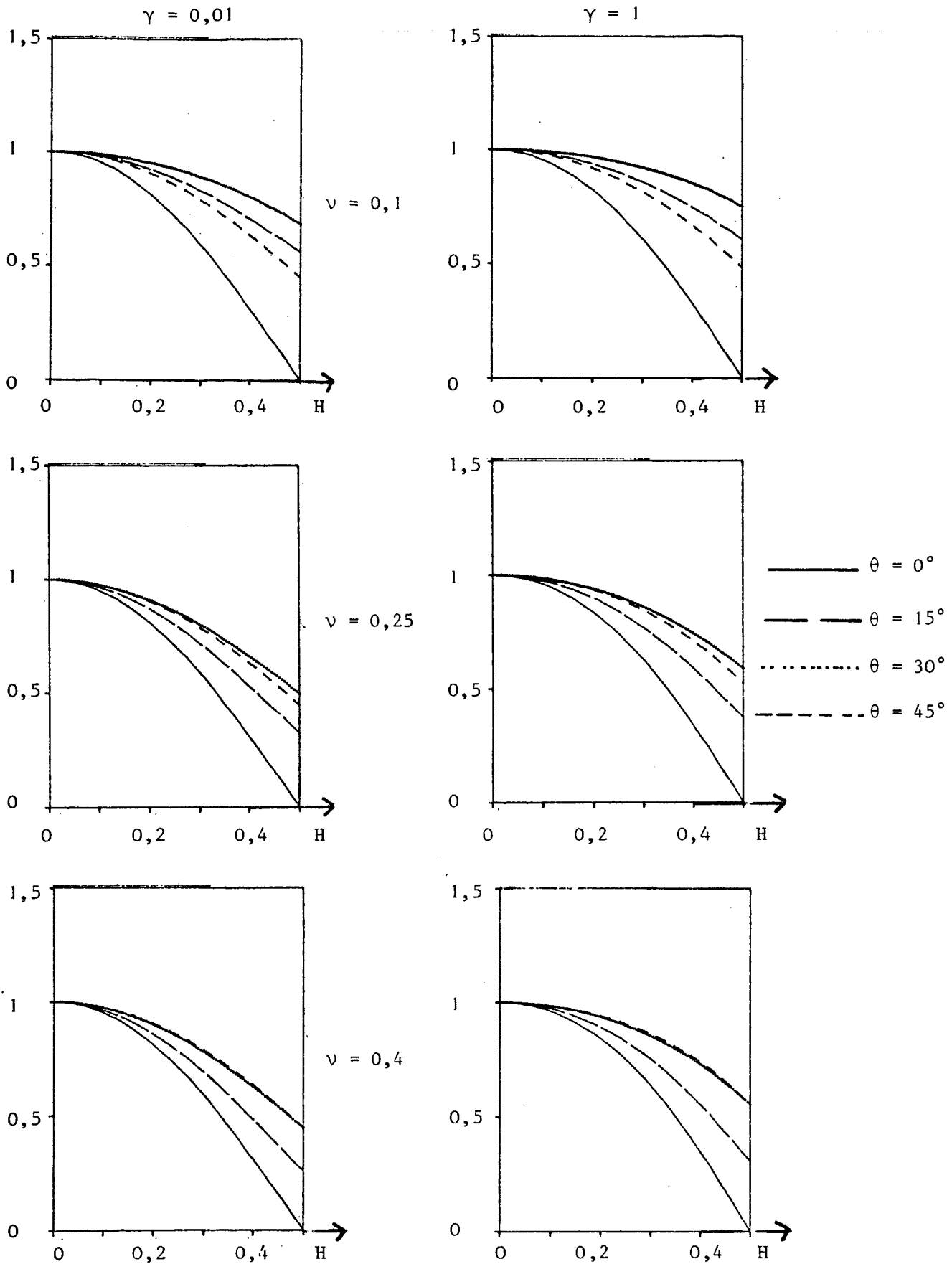


Figure 5.18 : Vitesse de groupe adimensionnelle  $\Omega_2$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes S numériques solutions du schéma 4 (pour  $\theta$  positif)

- que la vitesse de phase des ondes S numériques approche bien (par défaut) la vitesse des ondes S jusqu'à  $G = 5$  points par longueur d'onde (erreur relative inférieure à 7 %); cette erreur tombe à 1,6 % pour  $G = 10$  points par longueur d'onde.

La vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_2$  dépend de  $\gamma$ ,  $\theta$  et  $\nu$  (cf. fig. 5.18) sensiblement de la même façon que  $q_2$ , l'erreur normalisée  $|1 - Q_2|$  est environ 3 fois supérieure à  $|1 - q_2|$ .

### 2°) $\theta$ négatif

La figure 5.19 représente les valeurs de la vitesse de phase adimensionnelle  $q_2$  des ondes S numériques obtenues pour différentes valeurs des paramètres.

On constate que  $q_2$  dépend peu de  $\gamma$  mais beaucoup de  $\theta$  et de  $\nu$  ; il faut distinguer deux cas :

-  $\theta$  compris entre  $-20^\circ$  et  $0^\circ$  : le coefficient de Poisson influe peu et l'approximation est de bonne qualité jusqu'à  $G = 5$  points par longueur d'onde (erreur relative  $|1 - q_2|$  inférieure à 10%).

-  $\theta$  compris entre  $-20^\circ$  et  $-45^\circ$  : dans ce cas l'approximation est d'autant moins bonne que  $\theta$  est proche de  $-45^\circ$ . Le coefficient de Poisson influe considérablement : l'approximation est bonne pour  $\nu = 0,1$  moyenne pour  $\nu = 0,25$  et très mauvaise (pire que celle du schéma 1) pour  $\nu = 0,4$ .

La vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_2$  dépend de  $\gamma$ ,  $\theta$  et  $\nu$  (cf. fig. 5.20) sensiblement de la même façon que  $q_2$ . L'erreur normalisée  $|1 - Q_2|$  est, pour  $G$  supérieur à 5 points par longueur d'onde, environ 3 fois supérieure à  $|1 - q_2|$ .

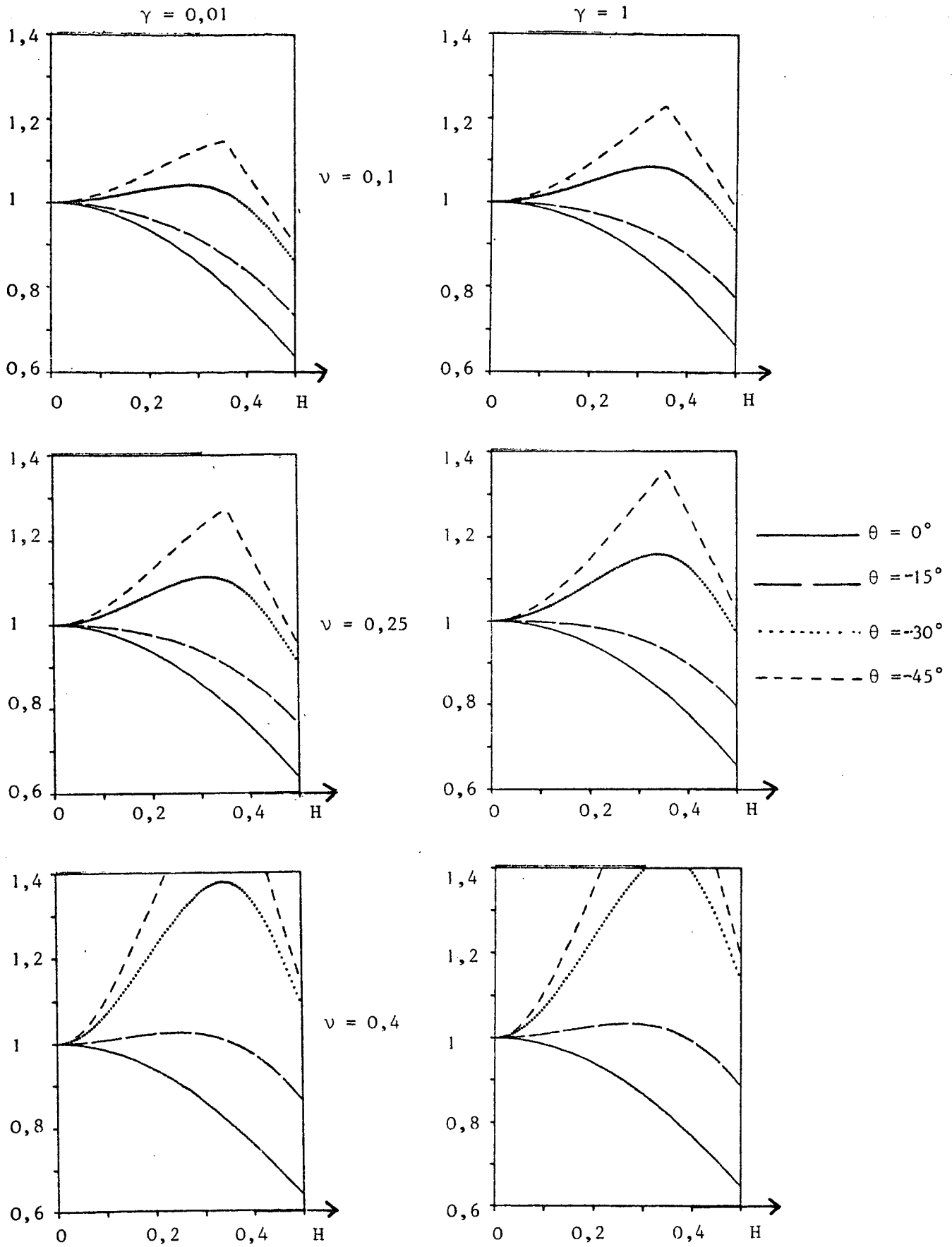


Figure 5.19 : Vitesse de phase adimensionnelle  $q_2$  des ondes S numériques solutions du schéma 4 (pour  $\theta$  négatif)

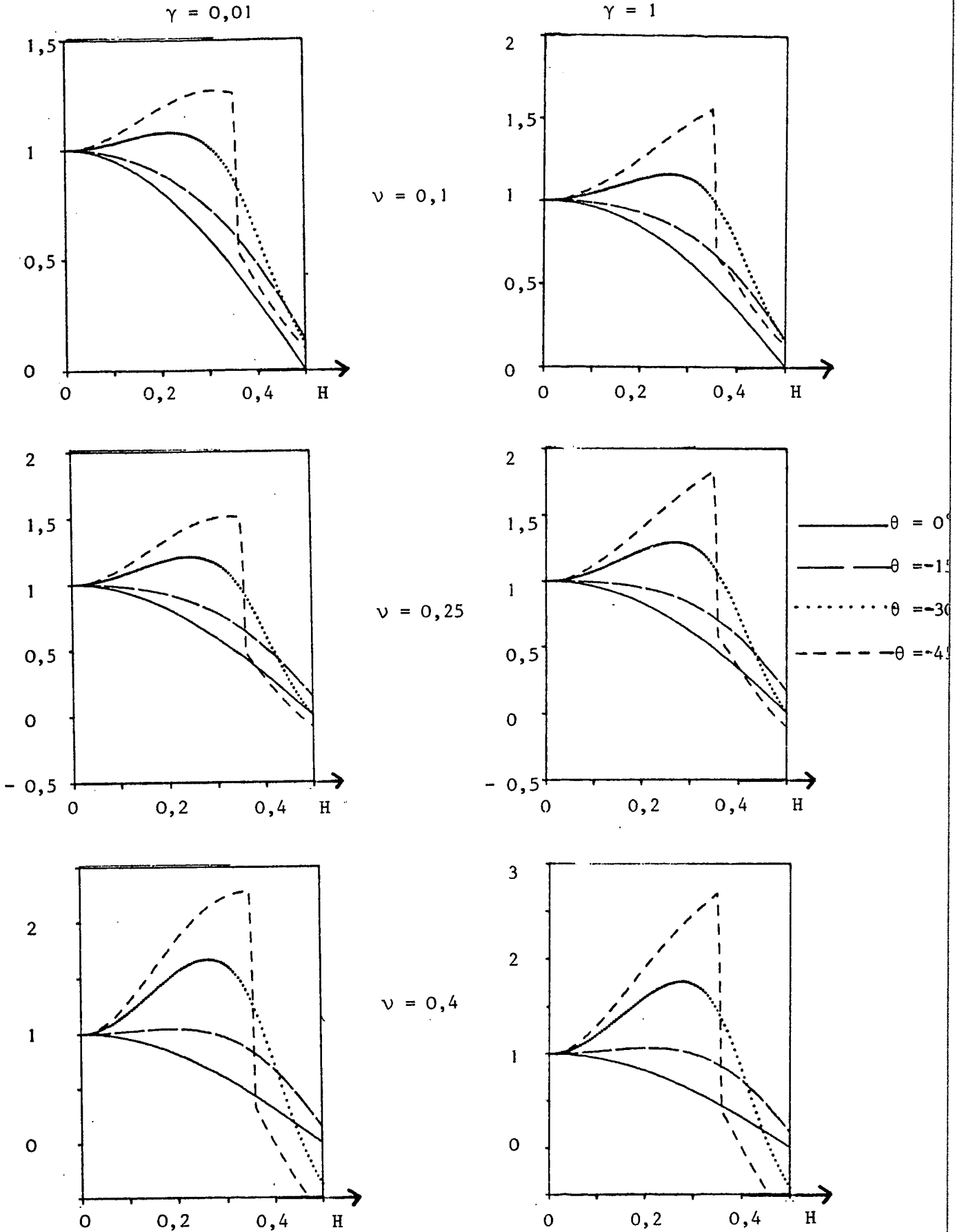


Figure 5.20 : Vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_2$  des ondes S numériques solutions du schéma 4 (pour  $\theta$  négatif)



5.5.4. MODE D'EMPLOI D'UN PROGRAMME DE SIMULATION UTILISANT LE SCHEMA 41°) CHOIX DU NOMBRE G DE POINTS PAR LONGUEUR D'ONDE

Les tableaux 5.5 et 5.6 donnent les erreurs normalisées sur les vitesses de phase et de groupe respectivement des ondes P numériques et S numériques pour  $\gamma = 0,8$ .

	G = 5		G = 10		G = 20	
	$\theta \in [-45^\circ, -20^\circ]$	$\theta \in [-20^\circ, 45^\circ]$	$\theta \in [-45^\circ, -20^\circ]$	$\theta \in [-20^\circ, 45^\circ]$	$\theta \in [-45^\circ, -20^\circ]$	$\theta \in [-20^\circ, 45^\circ]$
0,1	6,6%(19,7%)	5,1%(15,0%)	1,7%(4,9%)	1,3%(3,7%)	0,4%(1,2%)	0,2%(0,9%)
0,25	7,8%(23,1%)	5,5%(16,2%)	1,9%(5,7%)	1,4%(4,0%)	0,5%(1,4%)	0,3%(1,0%)
0,4	9,5%(28,2%)	6,0%(17,8%)	2,4%(7,0%)	1,5%(4,5%)	0,6%(1,7%)	0,4%(1,1%)
0,5	11,2%(33,3%)	6,6%(20,0%)	2,8%(8,2%)	1,7%(4,9%)	0,7%(2,0%)	0,4%(1,2%)

Tableau 5.5. : Erreur relative sur la vitesse de phase des ondes P ( $|1-q_1|$ ) et, mentionnée entre parenthèses, erreur relative sur la vitesse de groupe des ondes P ( $|1-Q_1|$ ) pour  $\gamma = 0,8$ .

	G = 5		G = 10		G = 20	
	$\theta \in [-45^\circ, -20^\circ]$	$\theta \in [-20^\circ, 45^\circ]$	$\theta \in [-45^\circ, -20^\circ]$	$\theta \in [-20^\circ, 45^\circ]$	$\theta \in [-45^\circ, -20^\circ]$	$\theta \in [-20^\circ, 45^\circ]$
0,1	7,8%(22,9%)	5,7%(16,9%)	2,2%(6,9%)	1,5%(4,2%)	0,6%(1,8%)	0,4%(1,0%)
0,25	14,3%(37,8%)	5,9%(17,4%)	4,1%(11,7%)	1,5%(4,3%)	1,1%(3,0%)	0,4%(1,1%)
0,4	35,0%(88,9%)	6,2%(18,2%)	10,7%(30,0%)	1,5%(4,6%)	2,8%(8,1%)	0,4%(1,1%)

Tableau 5.6 : Erreur relative sur la vitesse de phase des ondes S ( $|1-q_2|$ ) et, mentionnée entre parenthèses, erreur relative sur la vitesse de groupe des ondes S ( $|1-Q_2|$ ) pour  $\gamma = 0,8$ .

On constate que pour simuler la propagation d'ondes S dans toutes les directions il faut au minimum 10 à 20 points par longueur d'ondes suivant la valeur du coefficient de Poisson  $\nu$  du milieu, ce qui rend l'utilisation du schéma 4 relativement onéreuse.

## 2°) INFLUENCE DE $\gamma$

Le paramètre  $\gamma$  influe essentiellement sur la vitesse des ondes P numériques qui se propagent dans une direction faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $\vec{Ox}$  compris entre  $-20^\circ$  et  $45^\circ$ . Le tableau 5.7 donne les erreurs relatives sur les vitesses de phase et de groupe des ondes P en fonction de  $\gamma$  pour  $\nu = 0,25$  (nous avons vu que la valeur de  $\nu$  influait peu sur ce résultat).

	G = 5		G = 10		G = 20	
	$\theta \in [-20^\circ, 20^\circ]$	$\theta \in [20^\circ, 45^\circ]$	$\theta \in [-20^\circ, 20^\circ]$	$\theta \in [20^\circ, 45^\circ]$	$\theta \in [-20^\circ, 20^\circ]$	$\theta \in [20^\circ, 45^\circ]$
$\gamma = 0,01$	7,3%(20,9%)	5,5%(16,2%)	1,9%(5,5%)	1,4%(4,1%)	0,5%(1,4%)	0,4%(1,1%)
$\gamma = 0,1$	7,2%(20,8%)	5,5%(16,1%)	1,9%(5,5%)	1,4%(4,1%)	0,5%(1,4%)	0,4%(1,1%)
$\gamma = 0,5$	6,5%(19,1%)	4,8%(14,2%)	1,7%(4,9%)	1,2%(3,6%)	0,4%(1,2%)	0,3%(0,9%)
$\gamma = 0,8$	5,5%(16,2%)	3,6%(11,0%)	1,4%(4,0%)	0,9%(2,6%)	0,3%(1,0%)	0,2%(0,6%)
$\gamma = 1$	4,4%(13,0%)	2,4%(7,6%)	1,0%(3,2%)	0,6%(1,8%)	0,3%(0,8%)	0,1%(0,4%)

Tableau 5.7 : Erreur relative sur la vitesse de phase des ondes P et, mentionnée entre parenthèses, erreur relative sur la vitesse de groupe des ondes P en fonction de  $\gamma$  pour  $\nu = 0,25$ .

Il est clair que l'on aura intérêt à choisir  $\gamma$  aussi proche que possible de 1 : en plus des économies de calcul ce choix permet une amélioration de la propagation des ondes P surtout appréciable lorsque le vecteur d'onde  $\vec{k}$  fait un angle  $\theta$  avec l'axe  $\vec{Ox}$  compris entre  $20^\circ$  et  $45^\circ$ .

### 3 ) INFLUENCE DE $\theta$ ET DE $\nu$

Nous avons vu que le schéma 4 est surtout sensible au paramètre  $\theta$  (ceci était prévisible compte tenu des dissymétries de la triangulation et du schéma).

Le comportement du schéma est donc mauvais pour  $\theta$  compris entre  $-20^\circ$  et  $-45^\circ$ ; on a dans ce cas :

- une erreur importante (environ  $5^\circ$  pour 5 points par longueur d'onde) sur la direction du déplacement.

- une propagation des ondes P moyenne et des ondes S très mauvaise dès que le coefficient de Poisson  $\nu$  dépasse 0,3.

Le comportement du schéma est, au contraire, bon et insensible au coefficient de Poisson  $\nu$  pour  $\theta \in [-20^\circ, 45^\circ]$  (comportement très comparable à celui du schéma 3).

## 5.6. ETUDE DES ONDES PLANES NUMERIQUES ASSOCIEES AU SCHEMA 5

Nous reprenons, dans ce paragraphe, l'étude (et les notations) des § 2.4 et 2.5 : on suppose  $\Omega = \mathbb{R}^2$  et on cherche les solutions de (5.15) (5.16) qui sont de la forme (2.50).

A partir de la relation de dispersion, nous déterminons, étant donné un vecteur  $\vec{k}$ , les pulsations  $\omega$  et les vecteurs  $\vec{d}$  direction du déplacement possibles.

### 5.6.1. DETERMINATION DE LA RELATION DE DISPERSION

En écrivant les relations (5.15) (5.16) pour  $\begin{pmatrix} u_{ij}^n \\ w_{ij}^n \end{pmatrix}$  de la forme (2.50), on obtient :

$$\frac{\rho\sqrt{3}}{\Delta t^2} (\cos \omega \Delta t - 1) \vec{d} + \hat{B}_h(\vec{k}) \vec{d} = 0$$

où  $\hat{B}_h(\vec{k})$  est la matrice (2,2) définie par :

$$(5.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\hat{B}_h(\vec{k}))_{11} = \frac{(\lambda+2\mu)\sqrt{3}}{\Delta x^2} (1 - \cos k_1 \Delta x) + \frac{\mu\sqrt{3}}{\Delta x^2} (1 + \frac{1}{3} \cos k_1 \Delta x) \\ \quad - \frac{4}{3} \cos \frac{k_1 \Delta x}{2} \cos k_2 \Delta x \frac{\sqrt{3}}{2} \\ (\hat{B}_h(\vec{k}))_{22} = \frac{\mu\sqrt{3}}{\Delta x^2} (1 - \cos k_1 \Delta x) + \frac{(\lambda+2\mu)\sqrt{3}}{\Delta x^2} (1 + \frac{1}{3} \cos k_1 \Delta x) \\ \quad - \frac{4}{3} \cos \frac{k_1 \Delta x}{2} \cos k_2 \frac{\Delta x \sqrt{3}}{2} \\ (\hat{B}_h(\vec{k}))_{12} = 2 \frac{(\lambda+\mu)}{\Delta x^2} \sin k_1 \frac{\Delta x}{2} \sin k_2 \frac{\Delta x \sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$$

Le calcul de  $\omega$  et de  $\vec{d}$  à partir de  $\vec{k}$  demande donc le calcul des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$ . On peut remarquer que la matrice  $\hat{B}_h(\vec{k})$  est symétrique réelle; ses valeurs propres sont donc réelles et ses vecteurs propres orthogonaux.

### 5.6.2. CALCUL DES VALEURS PROPRES DE LA MATRICE $\hat{B}_h(\vec{k})$

Pour les raisons exposées au lemme 2.3 on impose au vecteur d'onde  $\vec{k}$  les conditions :

$$(5.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2\pi \leq k_1 \Delta x \leq 2\pi \\ -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \leq k_2 \Delta x \leq \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \end{array} \right.$$

Appelons  $s_1(\vec{k})$  et  $s_2(\vec{k})$  les valeurs propres de  $\hat{B}_h(\vec{k})$  et introduisons les notations :

$$(5.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{ij} = (\hat{B}_h(\vec{k}))_{ij} \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \\ \beta_1 = \cos \frac{k_1 \Delta x}{2} \quad \beta_2 = \cos \frac{k_2 \Delta x \sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$s^2 - (b_{11} + b_{22})s + b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = 0$$

et le discriminant réduit  $\Delta'$  est égal à :

$$\begin{aligned} \Delta' &= \frac{1}{4} (b_{11} - b_{22})^2 + b_{12}^2 \\ &= 4 \frac{(\lambda + \mu)^2}{\Delta x^4} \left[ \frac{1}{3} (\beta_1 \beta_2 - 2\beta_1^2 + 1)^2 + (1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2) \right] \end{aligned}$$

Comme on a d'autre part :

$$b_{11} + b_{22} = 2 \frac{(\lambda + 3\mu)\sqrt{3}}{\Delta x^2} \left[ \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \beta_1^2 - \frac{2}{3} \beta_1 \beta_2 \right]$$

Les valeurs propres de  $\hat{B}_h(\vec{k})$  sont :

$$s = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ (\lambda + 3\mu)\sqrt{3} \left( \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \beta_1^2 - \frac{2}{3} \beta_1 \beta_2 \right) \pm 2(\lambda + \mu) \sqrt{\frac{1}{3} (\beta_1 \beta_2 - 2\beta_1^2 + 1)^2 + (1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} \right]$$

### 5.6.3. UNE CONDITION NECESSAIRE DE STABILITE DU SCHEMA

Pour que le schéma soit stable il est nécessaire que le  $\omega$  de l'onde plane harmonique (2.50) soit réel et, par conséquent, que l'on ait :

$$s_1(\vec{k}) \text{ et } s_2(\vec{k}) \in \left[ 0, \frac{2\rho\sqrt{3}}{\Delta t^2} \right]$$

d'où, en convenant :

$$(5.34) \quad s_2(\vec{k}) \leq s_1(\vec{k})$$

les deux conditions :

$$(5.35) \quad 0 \leq s_2(\vec{k}) = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ (\lambda + 3\mu) \sqrt{3} \left( \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \beta_1^2 - \frac{2}{3} \beta_1 \beta_2 \right) - 2(\lambda + \mu) \sqrt{\frac{1}{3} (\beta_1 \beta_2 - 2\beta_1^2 + 1)^2 + (1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} \right]$$

et

$$(5.36) \quad s_1(\vec{k}) = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ (\lambda+3\mu)\sqrt{3} \left( \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \beta_1^2 - \frac{2}{3} \beta_1 \beta_2 \right) + 2(\lambda+\mu) \sqrt{\frac{1}{3}(\beta_1 \beta_2 - 2\beta_1^2 + 1)^2 + (1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)} \right] \leq \frac{2\rho\sqrt{3}}{\Delta t^2}$$

L'étude de ces deux conditions fait l'objet des deux lemmes suivants :

Lemme 5.3 (positivité des valeurs propres)

La relation (5.35) est vérifiée pour tout couple  $(\lambda, \mu)$  positif de paramètres de Lamé et tout vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

Démonstration du lemme 5.3

Étudions l'inégalité :

$$\sqrt{3}(\lambda+3\mu) \left( \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \beta_1^2 - \frac{2}{3} \beta_1 \beta_2 \right) \geq 2(\lambda+\mu) \sqrt{\frac{1}{3}(\beta_1 \beta_2 - 2\beta_1^2 + 1)^2 + (1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}$$

que nous pouvons élever au carré et n'étudier que dans le cas le plus défavorable  $\mu = 0$  :

$$(2 - \beta_1^2 - \beta_1 \beta_2)^2 \geq (\beta_1 \beta_2 - 2\beta_1^2 + \beta_1)^2 + 3(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)$$

En factorisant, on obtient :

$$3(1-\beta_1^2)(1+\beta_1^2 - 2\beta_1 \beta_2) \geq 3(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)$$

inéquation que l'on vérifie aisément.

▣

Lemme 5.4 (condition nécessaire de stabilité du schéma)

L'inégalité (5.36) est vérifiée si l'on a :

$$(5.37) \quad v_p \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La démonstration, un peu longue, de ce lemme, est donnée en annexe.

#### 5.6.4. OBTENTION DE $\omega$ A PARTIR DE $\vec{k}$ (VITESSE DES ONDES NUMERIQUES)

Comme exposé au § 2.4.2, on impose à  $\omega$  la condition (2.59). Si la condition de stabilité (5.37) est réalisée, on peut facilement obtenir les vitesses de phase adimensionnelle  $q_1(\vec{k})$  et  $q_2(\vec{k})$  (cf. (2.80) (2.81)) respectivement des ondes P numériques et des ondes S numériques en fonction des paramètres  $H, \theta, \gamma$ , définis par (2.75) (2.72) (2.77) :

$$(5.38) \quad q_1 = \frac{1}{\pi H \gamma \sqrt{3}} \text{Arc cos} \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{2} (\varphi + \psi + \xi^2 (\varphi - \psi)) \right]$$

$$(5.39) \quad q_2 = \frac{1}{\pi H \gamma \xi \sqrt{3}} \text{Arc cos} \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{2} (\varphi - \psi + \xi^2 (\varphi + \psi)) \right]$$

avec

$$(5.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 2 - \beta_1^2 - \beta_1 \beta_2 \\ \psi = \sqrt{(\beta_1 \beta_2 - 2 \beta_1^2 + 1)^2 + 3(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} \\ \xi = \frac{v_s}{v_p} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \right)} \text{ où } \nu \text{ est le coefficient de Poisson} \\ \beta_1 = \cos(\pi H \cos \theta) \text{ et } \beta_2 = \cos(\pi H \sqrt{3} \sin \theta) \end{array} \right.$$

Remarque : Grâce à la condition (5.32) nous restreignons l'étude à  $H \in [0, \frac{1}{2}]$  mais n'explorons pas tout le rectangle défini par (5.32).

Remarque : La fonction  $\theta \rightarrow q_1$  ou  $q_2$  est périodique de période  $\frac{\pi}{3}$  (cf. lemme 5.5 en annexe) et paire : on l'étudiera donc dans  $[0, \frac{\pi}{6}]$ .

#### 5.6.5. CALCUL DE $\vec{d}$ A PARTIR DE $\vec{k}$ (ECART ENTRE LA DIRECTION DE PROPAGATION ET LA DIRECTION DU DEPLACEMENT)

Nous ne nous intéressons qu'au premier vecteur propre  $\vec{d}_1$  car nous savons déjà que  $\vec{d}_2$  est perpendiculaire à  $\vec{d}_1$ .

Nous obtenons  $\vec{d}_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$  en exprimant :

$$(b_{11} - s_1)u_1 + b_{12} w_1 = 0$$

ou encore :

$$\vec{d}_1 \text{ est parallèle au vecteur } \begin{pmatrix} -b_{12} \\ b_{11} - s_1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons exprimer ce résultat en fonction des paramètres  $\theta$  et  $H$  (sous la condition, que nous justifions ci-après,  $b_{12}$  positif) :

$$(5.41) \quad \vec{d}_1 \text{ est parallèle au vecteur } \begin{pmatrix} \sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} (2\beta_1^2 - 1 - \beta_1 \beta_2 + \psi) \end{pmatrix}$$

où  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\psi$  sont définis en (5.40).

Nous pouvons définir comme en (2.88) l'écart  $\delta\theta$  entre la direction de propagation et la direction du déplacement.

$$(5.42) \quad \delta\theta = \theta_1 - \theta$$

où  $\theta_1$  est l'angle formé par le vecteur  $\vec{d}_1$  avec l'axe  $\vec{Ox}$ .

Nous constatons que cette fonction ne dépend ni de  $\gamma$ , ni du coefficient de Poisson  $\nu$ . Compte tenu des propriétés de périodicité (lemme 5.5) et d'antisymétrie de la fonction  $\theta \rightarrow \delta\theta$ , nous étudierons cette fonction de  $H$  pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{6}]$ . La condition  $b_{12} \geq 0$  est alors réalisée pour  $H \in [0, \frac{1}{2}]$ .

Remarque : L'écart entre la direction du déplacement des ondes S numériques et la direction du déplacement des ondes S continues est encore donné par (5.42) en n'oubliant pas que  $H$  est, dans ce cas, le nombre de points par longueur d'onde S (dans la direction  $x$  ou la direction  $z$ ).



## 5.7. ETUDE NUMERIQUE DE LA RELATION DE DISPERSION POUR LE SCHEMA 5

Ce paragraphe reprend l'analyse faite au § 2.6 ainsi que les notations utilisées dans ce paragraphe.

### 5.7.1. ETUDE DE L'ECART $\delta\theta$ ENTRE LA DIRECTION DE PROPAGATION ET LA DIRECTION DU DEPLACEMENT (FIG. 5.21)

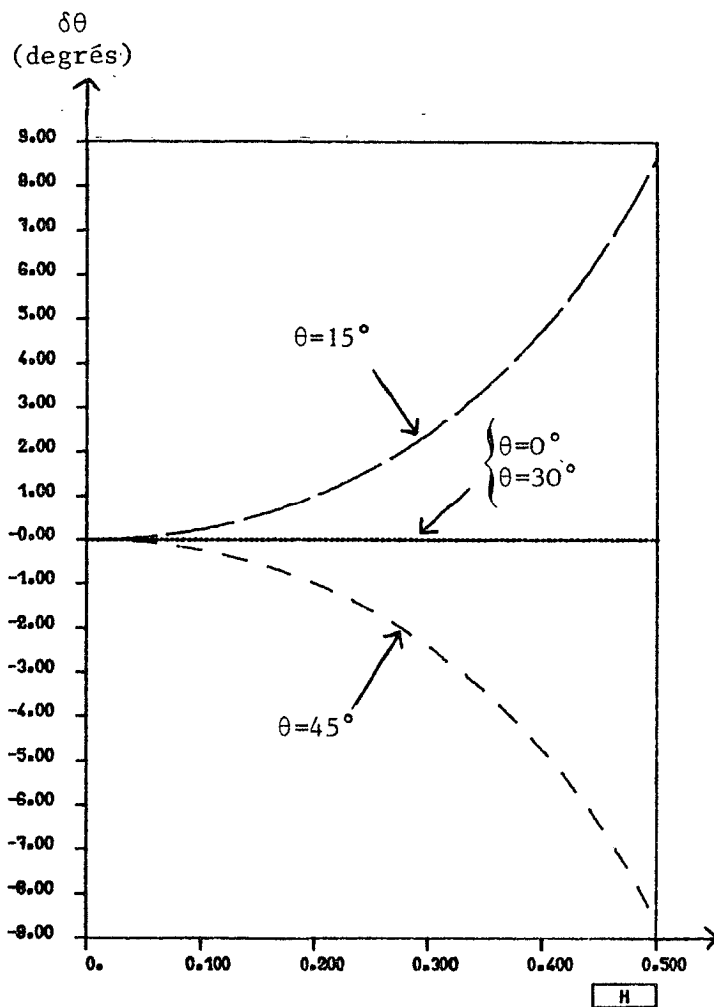


Fig. 5.21 : Erreur sur l'angle du déplacement

L'écart  $\delta\theta$  est nul pour  $\theta = 0$  et  $\theta = 30^\circ$  ce qui est bien naturel compte tenu des symétries du schéma

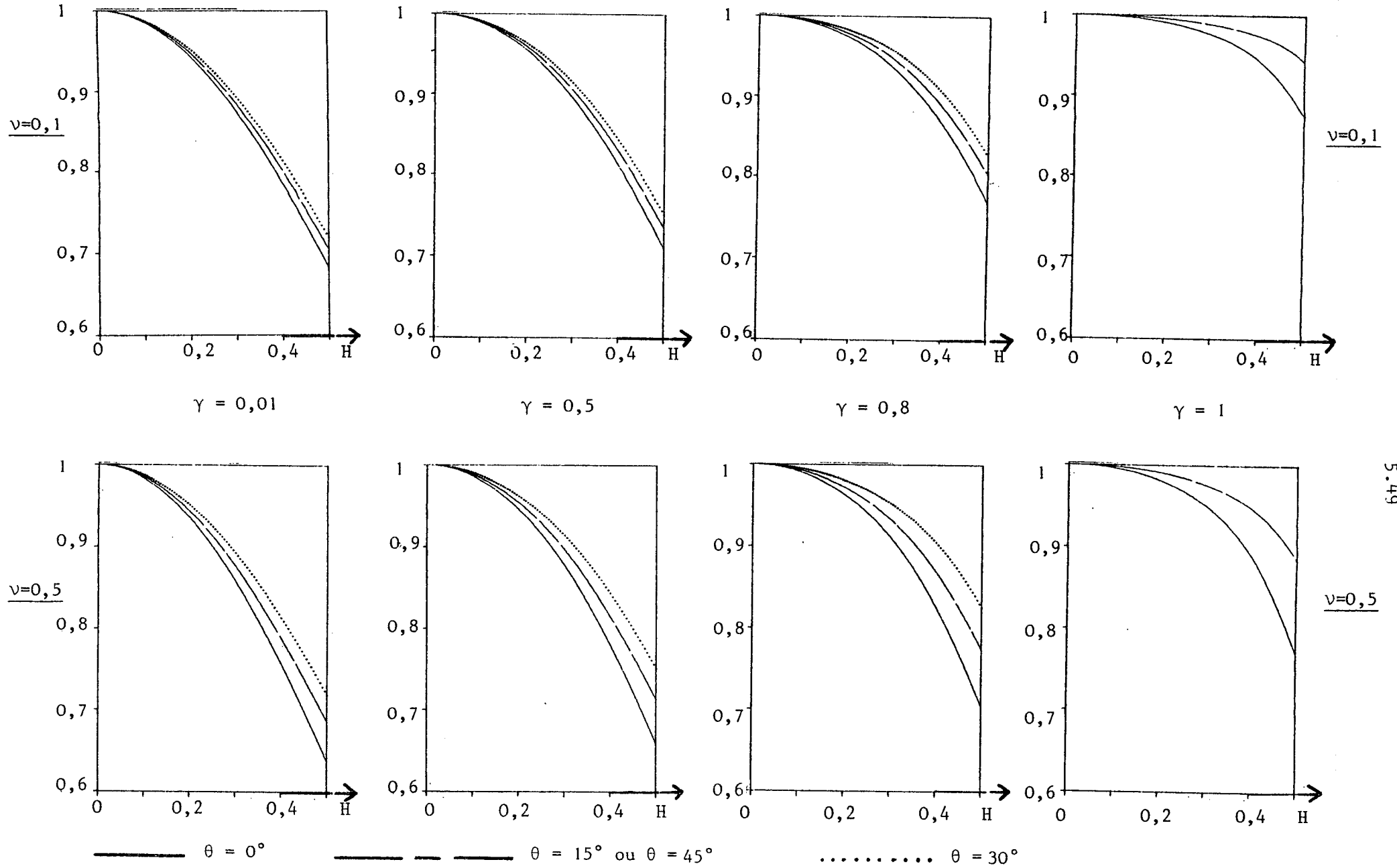
Pour les autres valeurs de  $\theta$  l'écart  $\delta\theta$  reste faible : il est inférieur à  $1^\circ$  pour  $G = 5$  points par longueur d'onde et à  $0,25^\circ$  pour  $G = 10$  points par longueur d'onde.

5.7.2. DISPERSION DES ONDES P

Les figures 5.22 et 5.23 représentent respectivement la vitesse de phase adimensionnelle  $q_1$  et la vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes P numériques, obtenues pour différentes valeurs des paramètres. On constate :

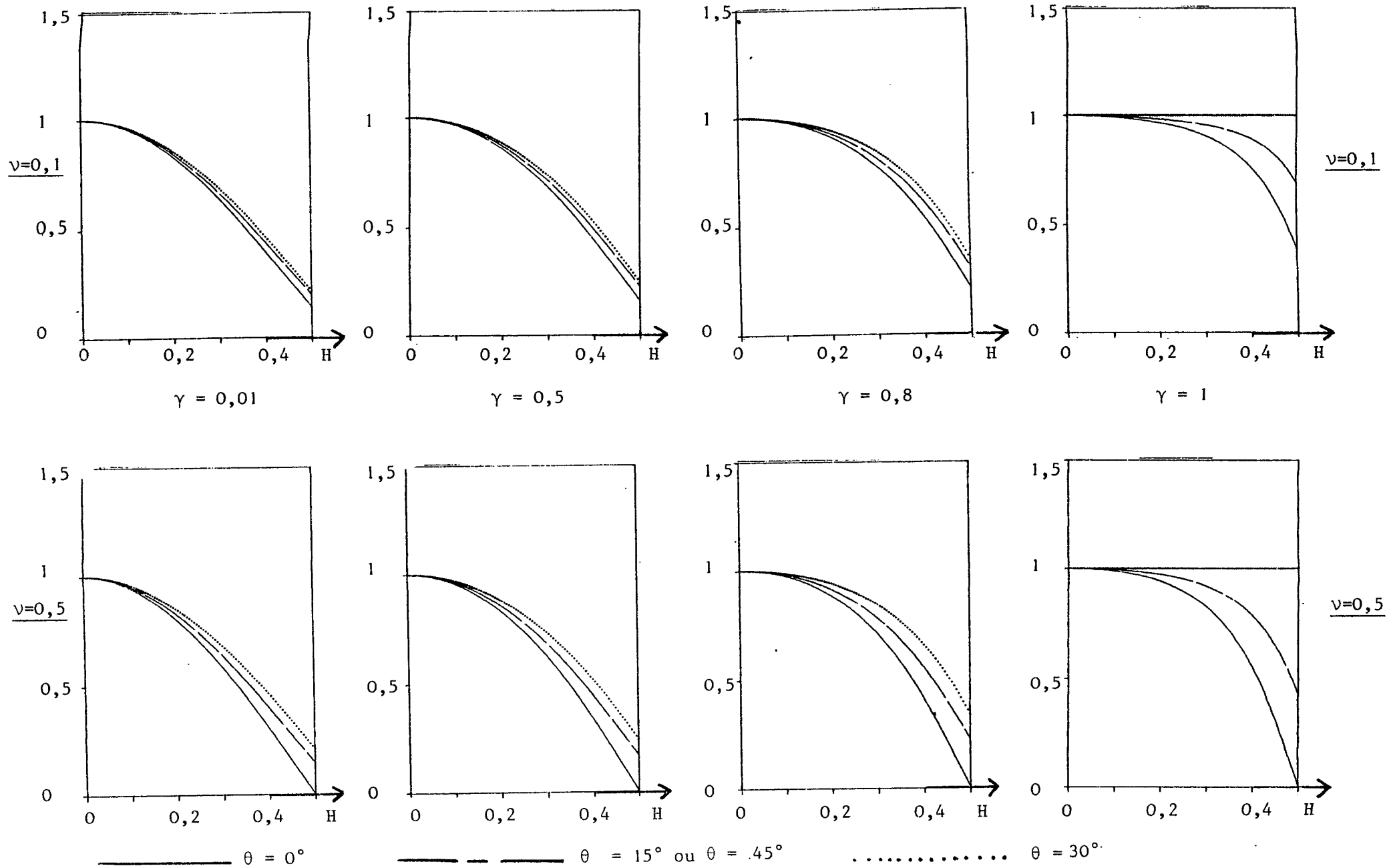
- que  $q_1$  dépend peu de  $v$
- que  $q_1$  dépend relativement peu de  $\theta$ ; cette propriété étant d'autant plus vraie que  $v$  ou  $\gamma$  sont petits, les directions les plus favorables à la propagation étant les directions proches de  $30^\circ$ .
- que la vitesse de phase des ondes P numériques approche bien (par défaut) la vitesse des ondes P jusqu'à  $G = 5$  points par longueur d'onde (erreur relative inférieure à 7%). Cette erreur tombe à 1,6% pour  $G = 10$  points par longueur d'onde.
- que l'approximation s'améliore sensiblement quand  $\gamma$  augmente au-dessus de 0,5 (pour  $\gamma = 1$  et  $G = 5$  points par longueur d'onde l'erreur relative sur la vitesse des ondes P est inférieure à 2%).

La vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  (fig. 5.23) dans la direction  $\vec{k}$  des ondes P numériques (cf. (2.86)) dépend de  $\gamma$ ,  $\theta$  et  $v$  sensiblement de la même façon que  $q_1$ ; l'erreur normalisée  $|1-Q_1|$  est environ trois fois supérieure à  $|1-q_1|$ .



5.49

Figure 5.22 : Vitesse de phase adimensionnelle  $q_1$  des ondes P numériques solutions du schéma 5



5.50

Figure 5.23 : Vitesse de groupe adimensionnelle  $Q_1$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes P numériques

5.7.3. DISPERSION DES ONDES S (Fig. 5.24 et 5.25)

On constate :

- que  $q_2$  et  $Q_2$  dépendent sensiblement de  $\theta$ .
- que l'erreur normalisée  $|1-q_2|$  dépend en moyenne peu de  $\nu$  et de  $\gamma$ ; notons cependant que cette erreur diminue en général lorsque  $\gamma$  augmente au-dessus de 0,5.
- que les erreurs normalisées  $|1-q_1|$  et  $|1-q_2|$  sur les vitesses de phase respectivement des ondes P et des ondes S sont approximativement équivalentes à nombre G de points par longueur d'onde fixée pour  $\gamma \leq 0,5$ .
- que l'erreur normalisée  $|1-Q_2|$  sur la vitesse de groupe des ondes S est environ trois fois supérieure à l'erreur normalisée  $|1-q_2|$  sur la vitesse de phase des ondes S.

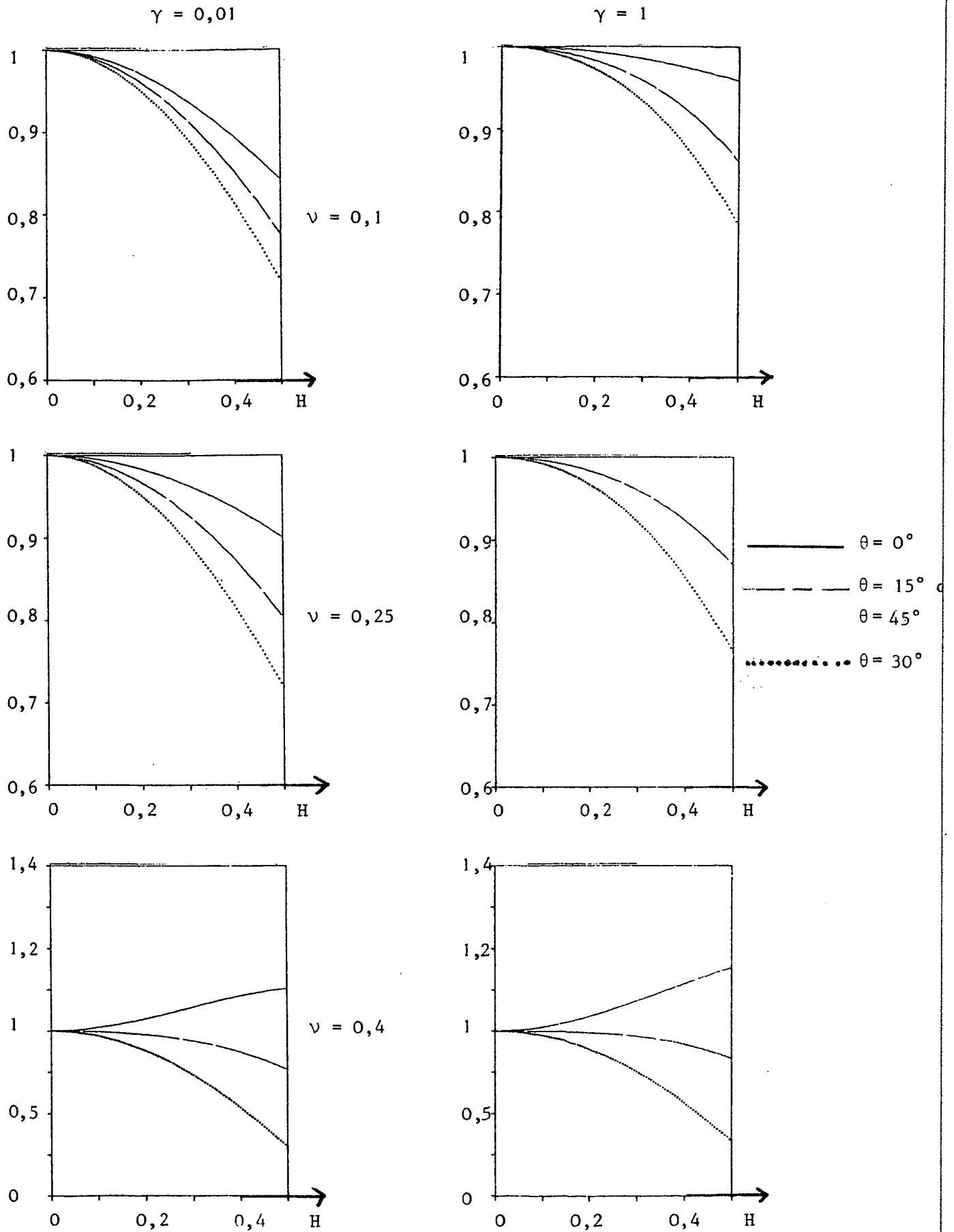
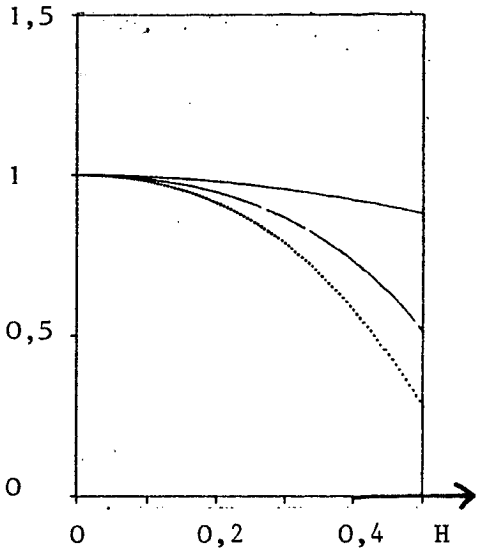
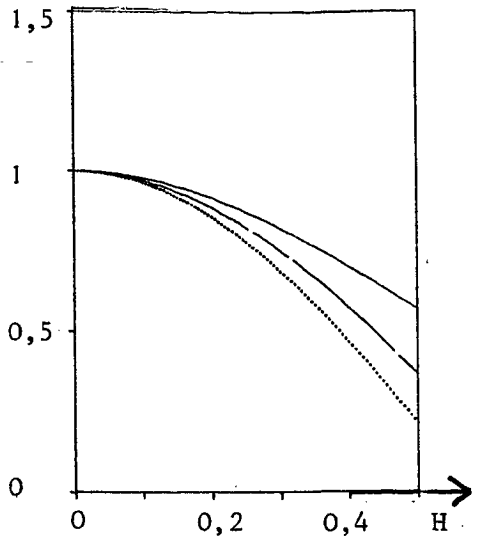


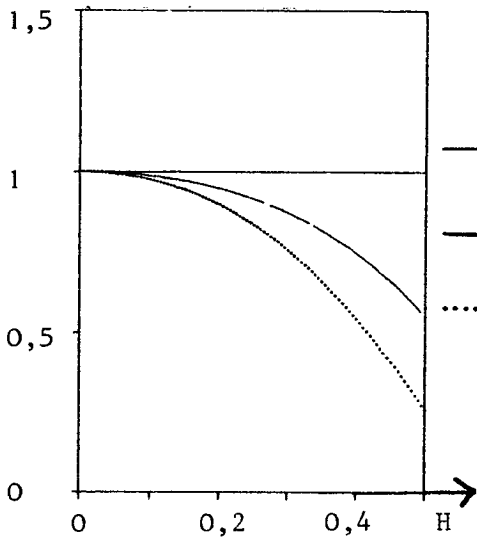
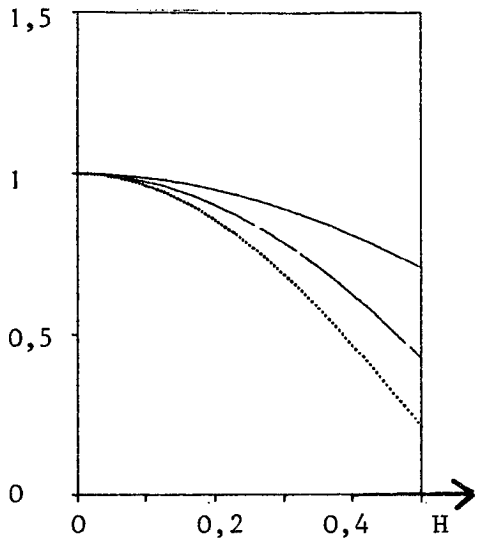
Figure 5.24 : Vitesse de phase adimensionnelle  $q_2$  des ondes S  
numériques solutions du schéma 5

$\gamma = 0,01$

$\gamma = 1$

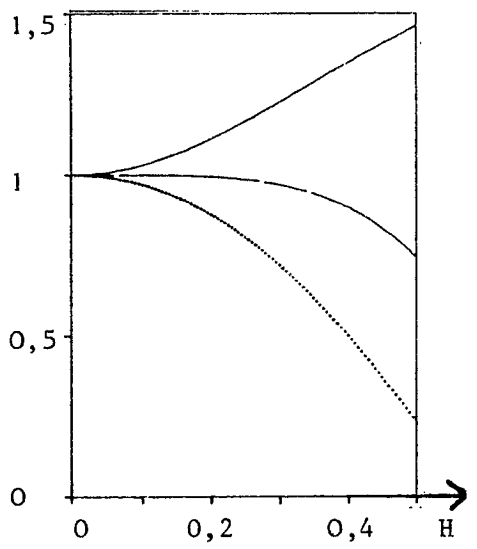
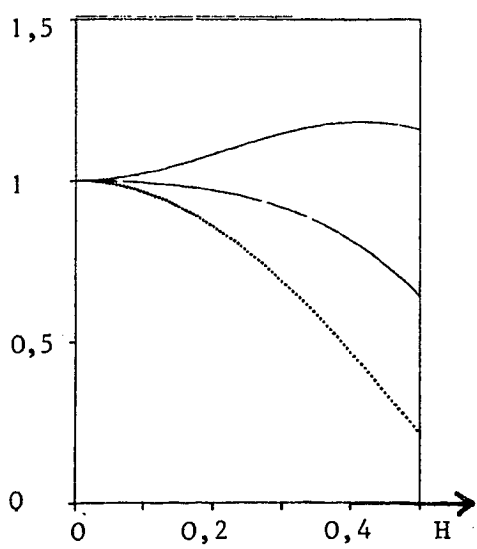


$\nu = 0,1$



$\nu = 0,25$

—  $\theta = 0^\circ$   
 - - -  $\theta = 15^\circ$   
 ou  $\theta = 45^\circ$   
 .....  $\theta = 30^\circ$



$\nu = 0,4$

Figure 5.25 : Vitesse adimensionnelle  $Q_2$  dans la direction  $\vec{k}$  des ondes S numériques solutions du schéma 5

5.7.4. MODE D'EMPLOI D'UN PROGRAMME DE SIMULATION UTILISANT LE SCHEMA 51°) CHOIX DU NOMBRE G DE POINTS PAR LONGUEUR D'ONDE

Les tableaux 5.8 et 5.9 donnent les erreurs normalisées sur les vitesses de phase et de groupe respectivement des ondes P numériques et des ondes S numériques.

$\gamma$ \ G (nombre de points par longueur d'onde)	G = 5	G = 10	G = 20
$\gamma = 0,01$	5,9% (17,3%)	1,5% (4,4%)	0,4% (1,1%)
$\gamma = 0,5$	4,9% (14,5%)	1,2% (3,5%)	0,3% (0,9%)
$\gamma = 0,8$	3,0% (9,4%)	0,7% (2,2%)	0,2% (0,5%)
$\gamma = 1$	1,2% (3,9%)	0,3% (0,8%)	0,1% (0,2%)

Tableau 5.8 : Erreur relative sur la vitesse de phase des ondes P ( $|1-q_1|$ ) et, mentionnée entre parenthèses, erreur relative sur la vitesse de groupe des ondes P ( $|1-Q_1|$ ) pour  $\nu = 0,25$



$\nu$ \ G (nombre de points par longueur d'onde)	G = 5	G = 10	G = 20
$\nu = 0,1$	3,6%(10,9%)	0,9%(2,6%)	0,2%(0,6%)
$\nu = 0,25$	3,9%(11,8%)	1,0%(2,9%)	0,2%(0,7%)
$\nu = 0,4$	4,4%(13,1%)	1,1%(3,3%)	0,3%(0,8%)

Tableau 5.9 : Erreur relative sur la vitesse de phase des ondes S ( $|1-q_2|$ ) et, mentionnée entre parenthèses, erreur relative sur la vitesse de groupe des ondes S ( $|1-Q_2|$ ) pour  $\gamma = 0,8$

Le schéma 5 permet donc des simulations économiques : par

exemple pour des milieux où le rapport  $\frac{v_s}{v_p}$  est voisin de 0,5 (soit un coef-

ficient de Poisson  $\nu$  voisin de 0,33) on peut envisager une simulation en prenant 5 points par longueur d'onde S soit 10 points par longueur d'onde P. Dans ce cas l'erreur sur la vitesse de phase des ondes S sera inférieure à 4% tandis que l'erreur sur la vitesse de phase des ondes P sera inférieure à 1% pour des valeurs de  $\gamma$  raisonnables ( $0,6 \leq \gamma \leq 1$ ).

## 2°) INFLUENCE DE $\gamma$

Il est clair que l'on aura intérêt à choisir  $\gamma$  aussi proche que possible de 1 ce qui permet une propagation des ondes S et surtout des ondes P optimale, tout en minimisant le temps calcul. Malheureusement ceci ne sera pas toujours réalisable, par exemple dans le cas où la structure du domaine a conduit à l'utilisation d'éléments de taille très différente sans que les contraintes de vitesse ne compensent l'irrégularité des rapports  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  ainsi obtenus.

3°) INFLUENCE DE  $\theta$  ET  $\nu$ 

On notera que le schéma 5 est relativement peu sensible aux paramètres  $\theta$  et  $\nu$ .

ANNEXE

DEMONSTRATION DES LEMMES 5.4., 5.5. ET 5.6.

LEMME 5.4.

$$\begin{aligned} \max_{(\beta_1, \beta_2) \in [-1, 1]^2} (\lambda + 3\mu) \sqrt{3} \left( \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \beta_1^2 - \frac{2}{3} \beta_1 \beta_2 \right) + 2(\lambda + \mu) \sqrt{\frac{1}{3} (\beta_1 \beta_2 - 2\beta_1^2 + 1)^2 + (1 - \beta_1^2) (1 - \beta_2^2)} \\ = 4 \frac{\sqrt{3}}{3} (\lambda + 2\mu) \end{aligned}$$

DEMONSTRATION

On rappelle que  $\phi$  et  $\psi$  sont définis par (5.40)

1° La valeur  $(\lambda + 2\mu) \frac{4\sqrt{3}}{3}$  est atteinte par exemple pour  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

$$\text{Dans ce cas } \phi = \psi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2° Montrons maintenant que l'inégalité

$$(\lambda + 2\mu) (\phi + \psi) + \mu(\phi - \psi) \leq (\lambda + 2\mu) \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

est vérifiée  $\forall \lambda$  et  $\mu \geq 0$  et  $\forall (\beta_1, \beta_2) \in [-1, 1]^2$ .

Il faut donc vérifier :

$$\lambda \left( \phi + \psi - \frac{4\sqrt{3}}{3} \right) + \mu \left( 3\phi + \psi - \frac{8\sqrt{3}}{3} \right) \leq 0$$

soit :

$$(A1) \quad \phi + \psi \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$(A2) \quad 3\phi + \psi \leq \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Vérification de (A1) :

$$\phi + \psi \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

ou encore

$$2 - \beta_1^2 - \beta_1 \beta_2 + \sqrt{(\beta_1 \beta_2 - 2\beta_1^2 + 1)^2 + 3(1 - \beta_1^2) (1 - \beta_2^2)} \leq 4$$

soit :

$$(A3) \quad 3\beta_2^2(\beta_1^2 - 1) - 2\beta_1\beta_2(3\beta_1^2 + 1) + \beta_1^2(3\beta_1^2 - 11) \leq 0$$

Inéquation du second degré en  $\beta_2$ . Calculons le discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta' &= \beta_1^2 \left[ (3\beta_1^2 + 1)^2 - 3(\beta_1^2 - 1)(3\beta_1^2 - 11) \right] \\ &= 16\beta_1^2(3\beta_1^2 - 2) \end{aligned}$$

Donc pour  $\beta_1 \in \left[ -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right]$  (A1) est vérifié.

Pour  $|\beta_1| > \sqrt{\frac{2}{3}}$  l'équation du second degré associée à (A3) admet deux racines  $\beta_2'$  et  $\beta_2''$ . Il faut donc vérifier dans ce cas que

$$[\beta_2', \beta_2''] \cap [-1, 1] = \emptyset.$$

Remarque : Le changement de  $\beta_1$  en  $-\beta_1$ , change  $\beta_2'$  en  $-\beta_2'$  et  $\beta_2''$  en  $-\beta_2''$ .

Compte tenu de cette remarque, en posant

$$f(\beta_2) = 3\beta_2^2(\beta_1^2 - 1) - 2\beta_1\beta_2(3\beta_1^2 + 1) + \beta_1^2(3\beta_1^2 - 11)$$

il suffit de vérifier que  $f(1) < 0$  et  $f'(1) > 0 \quad \forall \beta_1 \in \left[ -1, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right]$ .

$$f(1) = 3\beta_1^4 - 6\beta_1^3 - 8\beta_1^2 - 2\beta_1 - 3.$$

On étudie donc la fonction

$$y = 3x^4 - 6x^3 - 8x^2 - 2x - 3 \text{ pour } x \in \left[ -1, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right]$$

$$y' = 2[6x^3 - 9x^2 - 8x - 1]$$

$$y'' = 4[9x^2 - 9x - 4] > 0 \text{ pour } x \in \left[ -1, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right]$$

$$y' \text{ vaut } -4\sqrt{\frac{2}{3}} - 7 \text{ pour } x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

On a donc :

x	-1		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$
y''		+	
y'	-16	$\nearrow$	$-4\sqrt{\frac{2}{3}} - 7$
y	0	$\searrow$	

$f(1)$  est donc négatif  $\forall \beta_1 \in \left[-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$

Vérifions maintenant que  $f'(1) > 0 \forall \beta_1 \in \left[-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$

$$f'(\beta_2) = 2[3\beta_2(\beta_1^2 - 1) - \beta_1(3\beta_1^2 + 1)]$$

$$f'(1) = 2[-3\beta_1^3 + 3\beta_1^2 - \beta_1 - 3]$$

On étudie donc la fonction :

$$y = -3x^3 + 3x^2 - x - 3$$

$$y' = -9x^2 + 6x - 1 = -(3x - 1)^2 < 0$$

On a donc :

x	-1		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$
y'		-	
y		$\searrow$	$\sqrt{6} - 1$

donc  $f'(1)$  est positif  $\forall \beta_1 \in \left[-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$

Vérification de (A2)

$$3\phi + \psi \leq 8 \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ou encore

$$3(2 - \beta_1^2 - \beta_1\beta_2) + \sqrt{(\beta_1\beta_2 - 2\beta_1^2 + 1)^2 + 3(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} \leq 8$$

soit :

$$(A4) \quad \beta_2^2(5\beta_1^2 + 3) + 2\beta_1\beta_2(11\beta_1^2 + 5) + \beta_1^2(5\beta_1^2 + 19) \geq 0$$

Inéquation de second degré en  $\beta_2$ . Calculons le discriminant

$$\begin{aligned} \Delta' &= \beta_1^2 \left[ (11\beta_1^2 + 5)^2 - (5\beta_1^2 + 3)(5\beta_1^2 + 19) \right] \\ &= 32\beta_1^2(3\beta_1^2 - 1) \end{aligned}$$

Donc pour  $\beta_1 \in \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$  (A2) est vérifié.

Pour  $|\beta_1| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ , l'équation du second degré associée à (A4) admet deux racines  $\beta_2'$  et  $\beta_2''$ . Il faut donc vérifier dans ce cas que

$$[\beta_2', \beta_2''] \cap [-1, 1] = \emptyset.$$

Remarque : le changement de  $\beta_1$  en  $-\beta_1$  change  $\beta_2'$  en  $-\beta_2'$  et  $\beta_2''$  en  $-\beta_2''$ .

Compte tenu de cette remarque et en posant :

$$f(\beta_2) = \beta_2^2(5\beta_1^2 + 3) + 2\beta_1\beta_2(11\beta_1^2 + 5) + \beta_1^2(5\beta_1^2 + 19)$$

il suffit de vérifier que  $f(1) > 0$  et  $f'(1) < 0 \quad \forall \beta_1 \in \left[ -1, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right]$

$$f(1) = 5\beta_1^4 + 22\beta_1^3 + 24\beta_1^2 + 10\beta_1 + 3$$

On étudie la fonction

$$y = 5x^4 + 22x^3 + 24x^2 + 10x + 3$$

$$y' = 2(10x^3 + 33x^2 + 24x + 5)$$

$$y'' = 4(15x^2 + 33x + 12) < 0 \quad \forall x \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

On a donc

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
y''		-	
y'	8		0
y	0		$\frac{52}{9} [2 - \sqrt{3}]$

$f(1)$  est donc positif  $\forall \beta_1 \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

Vérifions maintenant que  $f'(1) < 0 \quad \forall \beta_1 \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$$f'(\beta_2) = 2[\beta_2(5\beta_1^2 + 3) + \beta_1(11\beta_1^2 + 5)]$$

$$f'(1) = 2[11\beta_1^3 + 5\beta_1^2 + 5\beta_1 + 3]$$

On étudie donc la fonction :

$$y = 11x^3 + 5x^2 + 5x + 3$$

$$y' = 33x^2 + 10x + 5 > 0$$

On a donc

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
y'		+	
y	-8		$\frac{2}{3\sqrt{3}} [-13 + 7\sqrt{3}] < 0$

Donc  $f'(1)$  est négatif  $\forall \beta_1 \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$



LEMME 5.5.

Les fonctions

$$\left. \begin{array}{l} \theta \rightarrow q_1 \\ \theta \rightarrow q_2 \\ \text{et} \\ \theta \rightarrow \delta\theta \end{array} \right\} \text{ cf. (5.38), (5.39) et (5.42)}$$

sont périodiques de période  $\frac{\pi}{3}$

Remarque : ce résultat est naturel compte tenu des propriétés géométriques de la triangulation utilisée.

DEMONSTRATION

On considère deux vecteurs d'onde  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$  de même nombre d'onde mais dont les directions sont différentes de  $\frac{\pi}{3}$

$$\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} k \cos\theta \\ k \sin\theta \end{pmatrix} \quad \vec{k}_2 = \begin{pmatrix} k \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) \\ k \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

et on appelle  $B(\theta)$  et  $B(\theta + \frac{\pi}{3})$  les matrices :

$$B(\theta) = \hat{B}_h(\vec{k}_1) \quad \text{et} \quad B(\theta + \frac{\pi}{3}) = \hat{B}_h(\vec{k}_2)$$

Il faut montrer que :

(P)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Les matrices } B(\theta) \text{ et } B(\theta + \frac{\pi}{3}) \text{ ont mêmes valeurs propres et que leurs} \\ \text{directions propres diffèrent de } \frac{\pi}{3} \end{array} \right.$

D'après le lemme 5.6. ci-après la propriété P revient à montrer :

$$(A5) \quad B(\theta + \frac{\pi}{3}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad B(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

On appelle :

$\left\{ \begin{array}{l} b_{ij} \text{ les termes de la matrice } B(\theta) \text{ et} \\ b'_{ij} \text{ les termes de la matrice } B(\theta + \frac{\pi}{3}) \end{array} \right.$

On doit donc vérifier :

$$(A6) \begin{cases} b'_{11} = \frac{1}{4} b_{11} - \frac{\sqrt{3}}{2} b_{12} + \frac{3}{4} b_{22} \\ b'_{12} = \frac{\sqrt{3}}{4} b_{11} - \frac{1}{2} b_{12} - \frac{\sqrt{3}}{4} b_{22} \\ b'_{22} = \frac{3}{4} b_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2} b_{12} + \frac{1}{4} b_{22} \end{cases}$$

Les relations (A6) doivent être vérifiées pour tout  $\lambda$  et  $\mu$ .

Vérifions les pour  $\lambda = 1$  et  $\mu = 0$ , la vérification pour  $\lambda = 0$  et  $\mu = 1$  étant tout à fait analogue. La matrice  $B(\theta)$  s'écrit alors (on a simplifié par  $\Delta x^2$ ) :

$$(A7) \begin{cases} b_{11} = \sqrt{3}(1 - \cos\{2\pi H \cos\theta\}) \\ b_{12} = 2\sin\{\pi H \cos\theta\}\sin\{\pi H \sqrt{3} \sin\theta\} = \cos\{2\pi H \cos(\theta + \frac{\pi}{3})\} - \cos\{2\pi H \cos(\theta - \frac{\pi}{3})\} \\ b_{22} = \sqrt{3} \left[ 1 + \frac{1}{3} \cos\{2\pi H \cos\theta\} - \frac{4}{3} \cos\{\pi H \cos\theta\} \cos\{\pi H \sqrt{3} \sin\theta\} \right] \\ = \sqrt{3} \left[ 1 + \frac{1}{3} \cos\{2\pi H \cos\theta\} - \frac{2}{3} \cos\{2\pi H \cos(\theta - \frac{\pi}{3})\} - \frac{2}{3} \cos\{2\pi H \cos(\theta + \frac{\pi}{3})\} \right] \end{cases}$$

En calculant  $b'_{11}$  à partir de (A6) avec les valeurs  $b_{ij}$  définies par (A7) on obtient :

$$\begin{aligned} b'_{11} &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\{2\pi H \cos\theta\} - \sqrt{3} \sin\{\pi H \cos\theta\} \sin\{\pi H \sin\theta \sqrt{3}\} \\ &\quad + \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\{2\pi H \cos\theta\} - \sqrt{3} \cos\{\pi H \cos\theta\} \cos\{\pi H \sin\theta \sqrt{3}\} \\ &= \sqrt{3} \left( 1 - \cos\{2\pi H \cos(\theta + \frac{\pi}{3})\} \right) \end{aligned}$$

ce qui correspond bien à la valeur de  $b_{11}$  définie en (A7) en remplaçant  $\theta$  par  $\theta + \frac{\pi}{3}$ .

On vérifie de façon analogue les relations (A6) pour  $b'_{12}$  et  $b'_{22}$ .

LEMME 5.6.

La propriété (P) est équivalente à la relation (A5) sur les matrices  $B(\theta)$  et  $B(\theta + \frac{\pi}{3})$ .

DEMONSTRATION

Considérons la base de vecteurs propres de l'opérateur associé à la matrice  $B(\theta)$ . Dans cette base,

- l'opérateur associé à  $B(\theta)$  est défini par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

- l'opérateur associé à  $B(\theta + \frac{\pi}{3})$  est défini par la matrice

$$A' = P^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P = P^{-1} A P$$

où  $P$  est la matrice de passage de la base de vecteurs propres de  $B(\theta + \frac{\pi}{3})$  à la base de vecteurs propres de  $B(\theta)$ . La matrice  $P$  est donc d'après (P) la matrice associée à une rotation de  $-\frac{\pi}{3}$  dans la base vecteurs propres de  $B(\theta + \frac{\pi}{3})$  :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Enfin, en revenant à la base initiale et compte tenu des propriétés des matrices de rotation la relation (A8) donne :

$$B(\theta + \frac{\pi}{3}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad B(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## CHAPITRE 6

COMPARAISON DES SCHEMAS EXPLICITES AVEC

CONDENSATION DE MASSE EN ELEMENTS FINIS

Q1 ET P1 (TRIANGLES EQUILATERAUX)

Nous comparons dans ce chapitre les 2 schémas qui ont un bon comportement pour toutes les valeurs des paramètres physiques  $\theta$  et  $\nu$  :

- le schéma 3 (élément fini Q1, schéma explicite avec condensation de masse)
- le schéma 5 (élément fini P1, triangulation en triangles équilatéraux, schéma explicite avec condensation de masse).

### 6.1. COMPARAISON DES TEMPS CALCUL

Comme au chapitre 3, nous envisageons 2 agencements possibles des calculs associés à ces schémas :

- la programmation utilisant le caractère homogène du milieu : il s'agit alors de la programmation naturelle des schémas ; (3.52) (3.53) et (5.15) (5.16).
- une programmation se réservant la possibilité de traiter le cas général d'éléments finis de taille différentes et d'un milieu non homogène.

#### 6.1.1. PROGRAMMATION UTILISANT LE CARACTERE HOMOGENE DU MILIEU ET DU MAILLAGE

##### 1° Comparaison des temps calcul à $\Delta t$ et $\Delta x$ fixés

Nous avons vu (cf. §4.2.1.) que la programmation du schéma 3 demandait 38 additions et 8 multiplications par point de discrétisation en espace-temps.

En programmant de la même façon le schéma 5, il faut 10 multiplications et 24 additions.

En supposant qu'une multiplication est équivalente au point de vue temps calcul à 5 additions, on constate donc que les schémas 3 et 5 demandent respectivement pour un point de discrétisation d'espace-temps, l'équivalent de 78 et 74 additions.

## 2° Comparaison des temps calculs à $\Delta x$ et $\gamma$ fixés

En appelant  $T_3$  (resp.  $T_5$ ) le temps calcul requis pour une simulation à l'aide du schéma 3 (resp. du schéma 5) avec un pas de discrétisation en espace  $\Delta x$  donné, l'évaluation du nombre de noeuds et l'examen de la condition de stabilité permet d'établir les relations :

$$T_3 = K \times \frac{78}{(\Delta x)^3} \quad T_5 = K \times \frac{74}{(\Delta x)^3} \times \frac{4}{3}$$

Le rapport des temps calcul  $\frac{T_5}{T_3}$  à  $\Delta x$  et  $\gamma$  fixés est donc d'environ 1,26.

### 6.1.2. PROGRAMMATION DANS LE CAS GENERAL D'UN MILIEU QUELCONQUE ET D'UN MAILLAGE NON UNIFORME

Les schémas 3 et 5 s'écrivent alors sous la forme synthétique (4.1) (4.2). Le coût informatique du schéma dépend essentiellement de :

- la place mémoire nécessaire au stockage des matrices  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  et  $B'$ .
- le temps calcul requis pour effectuer le produit de ces matrices par  $u^n$  et  $w^n$  que nous allons évaluer, à  $\Delta x$  et  $\gamma$  donnés, dans le cas où l'on dispose d'une méthode permettant de ne stocker en mémoire que les termes non nuls des matrices  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  et  $B'$ .

#### 1° Coût de stockage des matrices $A$ , $A'$ , $B$ , $B'$

Le schéma 3 est un schéma à 9 points et le nombre de noeuds est proportionnel à  $\frac{1}{\Delta x^2}$  si bien que la place mémoire requise pour le stockage des matrices  $A$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $B'$  est proportionnel à  $\frac{9}{\Delta x^2}$ .

Le schéma 5 est un schéma à 7 points et le nombre de noeuds est proportionnel à  $\frac{4}{3\Delta x^2}$  : la place mémoire requise pour le stockage des matrices  $A$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $B'$  est donc proportionnel à  $\frac{28}{3\Delta x^2}$ .

En conclusion les coûts en place mémoire des 2 schémas sont pratiquement identiques à  $\Delta x$  fixé.

## 2° Coût en temps calcul

Le temps calcul nécessaire au calcul des produits du type  $Au^n$  est proportionnel au nombre de termes stockés pour la matrice A ; comme à  $\Delta x$  et  $\gamma$  fixés, le nombre d'itérations en  $n$  à effectuer est  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  fois plus petit pour le schéma 3 que pour le schéma 5, les temps calcul des schémas sont dans le rapport  $\frac{28 \times 2}{27\sqrt{3}} \approx 1,2$ .

## 6.2. COMPARAISON DES SCHEMAS POUR LA PROPAGATION DES ONDES P

Le tableau 6.1. donne le maximum en  $\theta$  de l'erreur normalisée  $|1 - q_1|$  pour les schémas 3 et 5 en fonction de  $\gamma$  pour  $G = 10$  points par longueur d'onde et  $\nu = 0,25$ .

$\max_{\theta}  1 - q_1 $	schéma 3	schéma 5
$\gamma = 0,01$	2,7%	1,5%
$\gamma = 0,5$	2,3%	1,2%
$\gamma = 0,8$	1,7%	0,7%
$\gamma = 1$	1,1%	0,3%

TABLEAU 6.1.

On constate donc que le schéma 5 est de 2 (pour  $\gamma$  petit) à 3,5 (pour  $\gamma$  proche de 1) fois plus précis que le schéma 3 vis à vis de la propagation des ondes P à nombre de points par longueur d'onde fixé G fixé.

### 6.3. COMPARAISON DES SCHEMAS POUR LA PROPAGATION DES ONDES S

Le tableau 6.2. donne le maximum en  $\theta$  de l'erreur normalisée  $|1 - q_2|$  pour les schémas 3 et 5 en fonction de  $\nu$  pour  $G = 10$  points par longueur d'onde et  $\gamma = 0,8$ .

$\max_{\theta}  1 - q_2 $	schéma 3	schéma 5
$\nu = 0,1$	1,8%	0,9%
$\nu = 0,25$	1,5%	1,0%
$\nu = 0,4$	0,7%	1,1%

TABLEAU 6.2.

En résumé le schéma 5 est supérieur au schéma 3 pour  $\nu < 0,3$  c'est à dire dans le cas où les ondes S obtenues par conversion d'ondes P sont relativement importantes

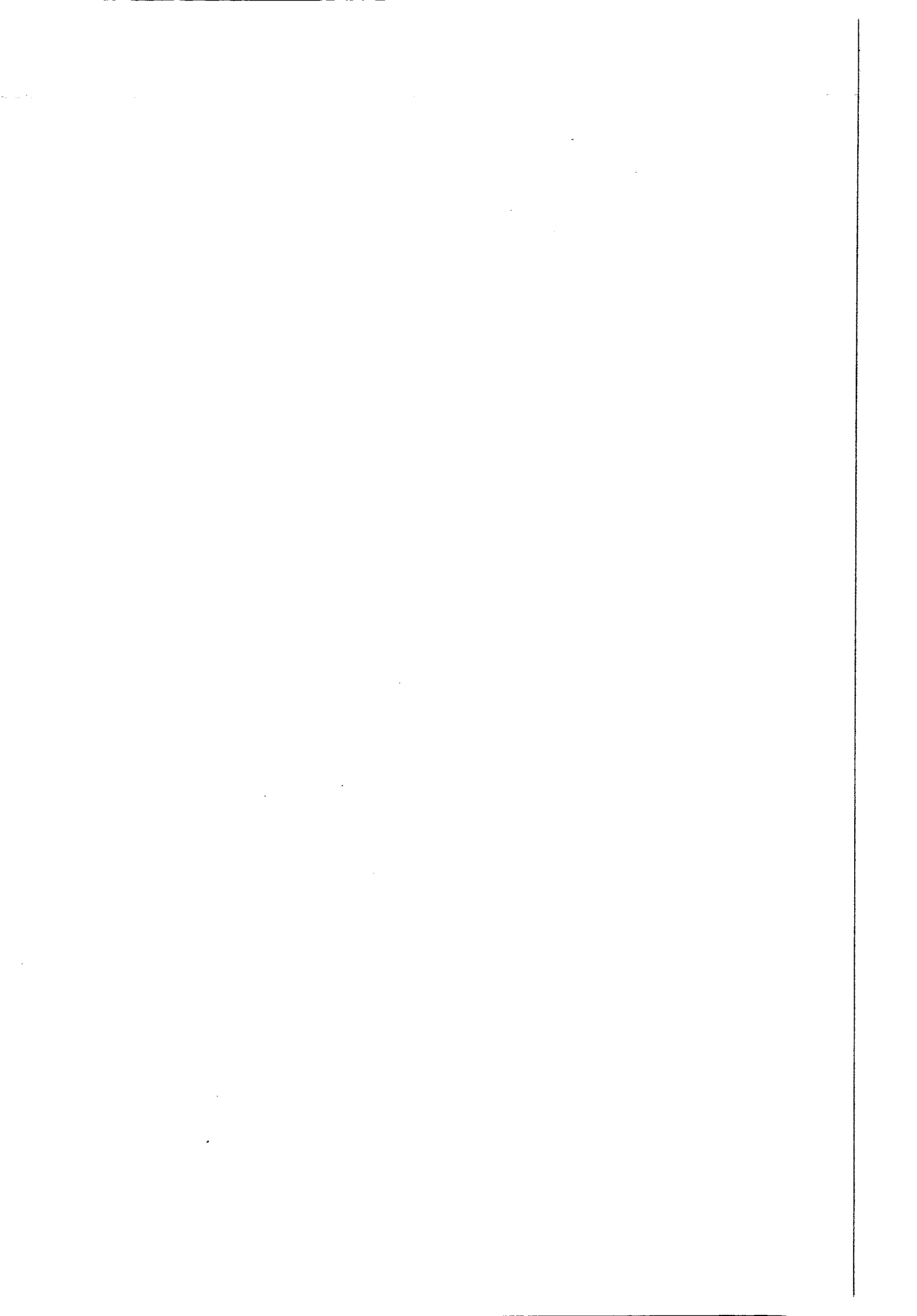
### 6.4. COMPARAISON DES SCHEMAS POUR L'ECART $\delta\theta$ ENTRE LA DIRECTION DE PROPAGATION ET LA DIRECTION DE DEPLACEMENT

Le tableau 6.3. donne, pour chaque schéma, l'écart  $\delta\theta$  en fonction de  $\theta$  pour  $G = 10$  points par longueur d'onde.

$ \delta\theta $	schéma 3	schéma 5
$\theta = 0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$
$\theta = 15^\circ$	$0,41^\circ$	$0,24^\circ$
$\theta = 30^\circ$	$0,42^\circ$	$0^\circ$
$\theta = 45^\circ$	$0^\circ$	$0,24^\circ$

TABLEAU 6.3.





Le schéma 5 est donc en moyenne meilleur que le schéma 3 pour l'approximation des directions de déplacement des ondes P et S à nombre G de points par longueur d'onde donné.

#### 6.5. CONCLUSION

L'ordre de précision des schémas 3 et 5 étant en  $\Delta x^2$  et les temps calcul de ces schémas étant proportionnels à  $\frac{1}{\Delta x^3}$ , l'utilisation du schéma 5 est donc préférable à celle du schéma 3 sauf dans le cas particulier de la propagation d'ondes S dans des milieux à coefficient de Poisson voisin de 0,4.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABOUDI, J.  
Numerical methods in elastodynamics in "Modern problems in elastic wave propagation", Symposium held at Northwestern University, Evanston, Illinois, USA, September 12-15, 1977, Wiley Interscience Publication.
- [2] ACHENBACH, J.D.  
Wave propagation in elastic solids, North Holland, 1975.
- [3] ALFORD, R.M., KELLY, K.R., BOORE, D.M.  
Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation, Geophysics, Vol. 39, N° 6, December 1974.
- [4] ALTERMAN, Z., KARAL, F.C.  
Propagation of elastic waves in layered media by finite differences methods, Bull. Seism. Soc. Am. 58, 1968.
- [5] BAMBERGER, A., CHAVENT, G., LAILLY, P., MARTINEAU, L.  
Comparison of some numerical schemes for the 2-D linear elastodynamic equations : analysis of the dispersion relation, SIAM 1980 National Meeting, Alexandria, Virginia, USA, June 5-7, 1980.
- [6] BAMBERGER, A., CHAVENT, G., LAILLY, P., MARTINEAU, L.  
Rapport INRIA, à paraître.
- [7] BATHE, K.J., WILSON, E.L.  
Numerical methods in finite element analysis, Prentice Hall Inc., 1976.
- [8] BAZANT, Z.P.  
Spurious reflection of elastic waves in non uniform finite element grids, Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 16, p. 91-100, 1978.
- [9] BELYTSCHKO, T., MULLEN, R.  
On dispersive properties of finite element solutions in "Modern problems in elastic wave propagation", Symposium held at Northwestern University, Evanston, Illinois, USA, September 12-15, 1977, Wiley Interscience Publication.

- [10] BETTES, P., ZIENKIEWICZ, O.  
Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements, International Journal for numerical methods in engineering, Vol. 11, p. 1271-1290, 1977.
- [11] BRENNER, P., THOMEÉ, V.  
Estimates near discontinuities for some difference schemes, Math. Scand. 28, 1971, p. 329-340.
- [12] BROWNING, G., KREISS, H.O., OLIGER, J.  
Mesh refinement, Mathematics of Computation, Vol. 27, Number 21, January 1973.
- [13] CHIN, R.C.Y., HEDSTROM, G.W.  
A dispersion analysis for difference schemes, Tables of generalized Airy functions, Mathematics of computation, Vol. 32, Number 144, October 1978, p. 1163-1170.
- [14] DUVAUT, G., LIONS, J.L.  
Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod 1972.
- [15] ENGQUIST, B., KREISS, H.O.  
Difference and finite element methods for hyperbolic differential equations, Computer methods in applied mechanics and engineering 17-18, 1979, p. 581-596.
- [16] FUJII  
Finite element method for mixed initial boundary value problems in elasticity theory, Ph.D. Thesis, Kyoto University, Japan, 1973.
- [17] GOUDREAU, G.L., TAYLOR, R.L.  
Evaluation of numerical integration methods in elastodynamics, Computer methods in Applied Mechanics and Engineering 2, 1972, p. 69-97.
- [18] HEMON, Ch.  
Equation d'onde et modèles, Geophysical prospecting, Vol. 26, n° 4, 1978, p. 790-821.
- [19] ILAN, A., LOEWENTHAL, D.  
Instability of finite difference schemes due to boundary conditions in elastic media, Geophysical Prospecting, Vol. 24, p. 431-453, 1976.

- [20] ILAN, A., UNGAR, A., ALTERMAN, Z.  
An improved representation of boundary conditions in finite difference schemes for seismological problems, *Geophysics, J.R. Astr. Soc.*, 1975, Vol. 43, p. 727-745.
- [21] JACKSON, J.D.,  
Classical electrodynamics, John Wiley and sons, 1975.
- [22] KELLY, K.R., WARD, R.W., TREITEL, S., ALFORD, R.M.  
Synthetic seismograms : a finite difference approach, *Geophysics*, Vol. 41, n° 1, February 1976, p. 2-27.
- [23] MARTINEAU, L.  
Thèse de Docteur Ingénieur, Institut Français du Pétrole, 1980.
- [24] MERCIER, B., PIRONNEAU, O.  
Some examples of implementation and application of the finite element method, Laboria Report n° 248, INRIA, BP 105, 78150 Le Chesnay, France.
- [25] MIKLOWITZ, J.  
The theory of elastic waves and waveguides, North Holland, 1978.
- [26] MULLEN, R., BELYTCHKO, T.  
Dispersion analysis of finite element semidiscretizations of the two dimensional wave equation, to be published in *Numerical Methods for Engineering*.
- [27] POTTER, D.  
*Computational Physics*, John Wiley and sons, 1977.
- [28] RAVIART, P.A.  
Méthode des éléments finis, Cours DEA Analyse Numérique, Université Paris VI, 1972.
- [29] SKOLLERMO, G.  
Error analysis of finite difference schemes applied to hyperbolic initial boundary value problems, *Mathematics of Computation*, Vol. 33, N° 145, January 1979; p. 11-35.
- [30] STRANG, G., FIX, G.  
An analysis of the finite element method, Prentice Hall, 1973.

- [31] TURKEL, E., GOTTLIEB, D.  
Phase error and stability of second order methods for hyperbolic problems, Journal of Computational Physics, Vol. 15, 1974, Part. 1 : p. 226-250, Part 2 : p. 251-265.
- [32] WEARE, T.J.  
Damping in undamped finite difference representations, J. Inst. Math. Applics, 1979, Vol. 23, p. 89-96.
- [33] ZIENKIEWICZ, O.C.  
The finite element method in engineering science, Mc Graw Hill, 1971

