

Pertubation du domaine d'intégration pour une inéquation variationnelle elliptique

Alain Dervieux, Ch. Saguez

▶ **To cite this version:**

Alain Dervieux, Ch. Saguez. Pertubation du domaine d'intégration pour une inéquation variationnelle elliptique. RR-0057, INRIA. 1981. inria-00076504

HAL Id: inria-00076504
https://inria.hal.science/inria-00076504

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 57

PERTURBATION DU DOMAINE D'INTÉGRATION POUR UNE INÉQUATION VARIATIONNELLE ELLIPTIQUE

Alain DERVIEUX
Christian SAGUEZ

Mars 1981

PERTURBATION DU DOMAINE D'INTEGRATION POUR UNE INEQUATION VARIATIONNELLE ELLIPTIQUE

Alain DERVIEUX, Christian SAGUEZ

RESUME

Dans cet article nous étudions les propriétés de différentiabilité de la solution d'une inéquation variationnelle elliptique et de la fonction caractéristique du domaine de contact par rapport à une perturbation apparaissant dans les coefficients. Nous appliquons ces résultats à la différentiabilité par rapport au domaine d'intégration. Enfin nous donnons quelques résultats numériques.

ABSTRACT

In this paper we study the differentiability with respect to a perturbation in the coefficients of the solution of an elliptic variational inequality and the characteristic function of the contact set. The results are applied to the differentiability with respect to the domain of integration. Finally we present some numerical results.

INTRODUCTION

De nombreux problèmes physiques peuvent se formuler mathématiquement en termes d'inéquations variationnelles : problèmes de mécanique des milieux continus, de changement de phase,... Cette formulation a permis à la fois l'obtention de résultats théoriques et la mise au point de méthodes numériques efficaces. Nous nous intéressons ici à la dépendance de la solution par rapport au domaine d'intégration Ω, les variations de Ω étant paramétrées par une famille de bijections $\{T_\varepsilon,\ \varepsilon \in]-\varepsilon_o,+\varepsilon_o[\}$. Plus précisément nous considérons l'inéquations suivante :

$$\int_{\Omega_{T_\varepsilon}} \text{grad } u_{T_\varepsilon}\ \text{grad}(v-u_{T_\varepsilon})d\Omega \geq \int_{\Omega_{T_\varepsilon}} f(v-u_{T_\varepsilon})d\Omega \quad \forall v \in K_{T_\varepsilon}, u_{T_\varepsilon} \in K_{T_\varepsilon},$$

avec

$$K_{T_\varepsilon} = \{v \in H_o^1(\Omega_{T_\varepsilon}),\ v \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega_{T_\varepsilon}\}$$

$$\Omega_{T_\varepsilon} = T_\varepsilon(\Omega),\ \Omega \text{ ouvert donné de } \mathbb{R}^N$$

$T_\varepsilon \in \mathcal{C}_{ad}$, famille de bijections paramétrées par le réel ε.

Nous inspirant d'un calcul de J.L. LIONS [7], nous obtenons la différentiabilité presque partout de la solution u_{T_ε} et de la fonction caractéristique χ_ε du domaine de contact F_ε

$$F_\varepsilon = \{x \in \Omega_{T_\varepsilon} \mid u_{T_\varepsilon}(x) = 0\}\ .$$

Pour obtenir ce résultat, nous étudions dans un premier paragraphe les propriétés analogues dans le cas d'une perturbation des coefficients. Les méthodes utilisées sont une adaptation de techniques développées en particulier dans V. BARBU [1], F. MIGNOT [10], C. SAGUEZ [16], J. SOKOLOWSKI [18] dans les cas elliptiques et paraboliques.

Dans le second paragraphe ces résultats sont adaptés au problème de la perturbation du domaine ; pour cela nous utilisons des techniques d'Optimum Design étudiées en particulier dans F. MURAT, J. SIMON [12].

Les résultats obtenus sont susceptibles de donner lieu à un certain nombre d'applications. Nous nous restreindrons ici à leur utilisation numérique pour le calcul de solutions de l'inéquation qui sont de faibles perturbations d'une solution supposée connue (troisième Paragraphe).

Le plan est le suivant :

1. Perturbation dans les coefficients de la solution d'une Inéquation Variationnelle Elliptique
2. Application à la perturbation du domaine géométrique
3. Calcul numérique de faibles perturbations
4. Conclusion.

-o-

1. - PERTURBATION DANS LES COEFFICIENTS DE LA SOLUTION D'UNE INEQUATION VARIATIONNELLE ELLIPTIQUE.

1.1. Formulation du problème.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, N=2 ou 3, de frontière régulière $\partial\Omega$([1]).

On considère la forme bilinéaire sur $H_o^1(\Omega)$:

$$(1.1) \qquad a_\varepsilon(u,v) = \int_\Omega b(\varepsilon) \text{ grad } u \text{ grad } v \, d\Omega$$

avec les hypothèses :

(1.2) $b(\varepsilon)$ est une application bornée, C^1 de $]-\varepsilon_o,\varepsilon_o[$ dans $[W^{1,\infty}(\Omega)]^{2N}$, et $\frac{db}{d\varepsilon}(\varepsilon)$ est bornée dans $[L^\infty(\Omega)]^{2N}$.

(1.3) il existe deux constantes positives M et β telles que pour tout ε dans $]-\varepsilon_o,\varepsilon_o[$

$$a_\varepsilon(u,v) \le M \|u\|_{H_o^1(\Omega)} \|v\|_{H_o^1(\Omega)} \qquad \forall u,v \in H_o^1(\Omega)$$

$$\beta \|u\|^2_{H_o^1(\Omega)} \le a_\varepsilon(u,u) \qquad \forall u \in H_o^1(\Omega).$$

On note $A_\varepsilon = -\text{div } b(\varepsilon) \text{ grad}$.

Soit :

f un élément de $L^p(\Omega)$ $(p > N)$

K le convexe défini par: $K = \{v \in H_o^1(\Omega) \mid v \ge 0 \text{ p.p.}\}$.

([1]) En pratique il faudra que $\partial\Omega$ soit une variété de classe $W^{2,\infty}$, Ω étant d'un seul côté de $\partial\Omega$. Nous indiquerons plus loin où intervient la restriction sur la dimension N de l'espace.

On considère l'inéquation variationnelle elliptique

$$(1.4)\qquad \begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in K \text{ tel que :} \\ a_\varepsilon(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) \geq (f, v-u_\varepsilon) \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Nous nous intéressons à la dépendance de u_ε par rapport à ε et principalement à la différentiabilité de l'application $\varepsilon \to u_\varepsilon$.

Nous ferons les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$(1.5)\qquad \text{mes}(\{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}) = 0$$

(1.6) $\forall \varepsilon \in]-\varepsilon_o, \varepsilon_o[$, le domaine $\Omega_+^\varepsilon = \{x \in \Omega \mid u_\varepsilon(x) > 0\}$, complémentaire de la zone de contact, est tel que :

$$\forall v \in H_o^1(\Omega),\ v|_{\Omega/\overline{\Omega}_+^\varepsilon} = 0 \Longrightarrow v \in H_o^1(\Omega_+^\varepsilon)\ (^1)$$

1.2. Différentiabilité de l'état par rapport à ε.

Proposition 1.1 : Sous les hypothèses (1.2), (1.3), (1.5) et (1.6), l'application $\varepsilon \to u_\varepsilon$ est différentiable presque partout sur $]-\varepsilon_o, +\varepsilon_o[$ dans $H_o^1(\Omega)$ et sa dérivée y_ε vérifie :

$$(1.7)\qquad y_\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \overline{\Omega}_+^\varepsilon$$

$$(1.8)\qquad \int_{\Omega_+^\varepsilon} b(\varepsilon)\ \text{grad}\ y_\varepsilon\ \text{grad}\ v\ d\Omega = -\int_{\Omega_+^\varepsilon} \frac{db}{d\varepsilon}(\varepsilon)\ \text{grad}\ u_\varepsilon\ \text{grad}\ v\ d\Omega \quad \forall v \in H_o^1(\Omega_+^\varepsilon)$$

$$(1.8)'\qquad y_\varepsilon|_{\Omega_+^\varepsilon} \in H_o^1(\Omega_+^\varepsilon)$$

Cette proposition reprend des résultats obtenus par F. MIGNOT [10], V. BARBU [1], J. SOKOLOWSKI [18] ; la démonstration s'articule comme dans C. SAGUEZ [16] en introduisant un problème pénalisé et en passant à la limite. ■

(^{1}) Pour des contextes où cette condition est vérifiée nous référons à L.A. CAFFARELLI, N.M. RIVIERE [3].

1.2.1. Le problème pénalisé.

Considérons le problème pénalisé non linéaire suivant :

$$(1.9)\quad \begin{cases} \text{Trouver } u_{\varepsilon\alpha} \in H_o^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a_\varepsilon(u_{\varepsilon\alpha},v) - \frac{1}{\alpha}((u_{\varepsilon\alpha}^-)^2,v) = (f,v) \quad \forall v \in H_o^1(\Omega). \end{cases}$$

Ce problème admet une solution unique $u_{\varepsilon\alpha}$ qui appartient à $H^2(\Omega)$ (J.L. LIONS [8]), et nous avons classiquement les estimations suivantes :

Lemme 1.1 : Si $u_{\varepsilon\alpha}$ désigne la solution de (1.9) et u la solution de (1.4), on a :

$$(1.10)\quad \|u_{\varepsilon\alpha}\|_{H_o^1(\Omega)} \leq C \quad (C \text{ indep. de } \alpha \text{ et } \varepsilon)$$

$$(1.11)\quad \|u_{\varepsilon\alpha}-u_\varepsilon\|_{H_o^1(\Omega)} < C\sqrt[4]{\alpha} \quad (C \text{ indep. de } \alpha \text{ et } \varepsilon). \blacksquare$$

Grâce aux hypothèses sur $b(\varepsilon)$ nous obtenons

Lemme 1.2 : L'application $\varepsilon \to u_\varepsilon$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $H^2(\Omega)$. ■

Nous allons en déduire le résultat suivant :

Proposition 1.2 : Sous les hypothèses (1.2), (1.3), l'application $\varepsilon \to u_{\varepsilon\alpha}$ est différentiable de $]-\varepsilon_o,+\varepsilon_o[$ dans $H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$ pour $N \leq 3$; sa dérivée $y_{\varepsilon\alpha}$ vérifie :

$$(1.12)\quad \begin{cases} A_\varepsilon\, y_{\varepsilon\alpha} + \frac{2}{\alpha}\, u_{\varepsilon\alpha}^-\, y_{\varepsilon\alpha} = \operatorname{div}\left(\frac{db}{d\varepsilon}(\varepsilon)\ \operatorname{grad} u_{\varepsilon\alpha}\right) \text{ dans } \Omega \\ y_{\varepsilon\alpha} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La démonstration s'obtient en appliquant un théorème des fonctions implicites à l'application suivante :

$$\Phi : (\varepsilon,u) \to A_\varepsilon u - \frac{1}{\alpha}\,(u^-)^2 - f$$

$$\mathbb{R} \times H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega) \to L^2(\Omega) ;$$

cette application est différentiable en (ε,u), $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ est un isomorphisme de $H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et nous utilisons le Lemme 1.2. ■

1.2.2. Différentiabilité de u_ε.

De (1.12) nous obtenons :

Lemme 1.3 : La dérivée $y_{\varepsilon\alpha}$ de $u_{\varepsilon\alpha}$ vérifie l'estimation suivante :

$$(1.13) \qquad \|y_{\varepsilon\alpha}\|_{H_o^1(\Omega)} \leq \left|\frac{db_\varepsilon}{d\varepsilon}\right|_{[L^\infty(\Omega)]^N} . \blacksquare$$

Soit, pour une fonction ϕ de $H_o^1(\Omega)$ les applications :

$$\theta_\varepsilon : \varepsilon \to ((u_\varepsilon,\phi))_{H^1(\Omega)}$$

$$\theta_{\varepsilon\alpha} : \varepsilon \to ((u_{\varepsilon\alpha},\phi))_{H^1(\Omega)} \quad ;$$

alors de (1.13) on déduit :

$$(1.14) \qquad \max_{|\varepsilon|<\varepsilon_o} \left|\frac{d\theta_{\varepsilon\alpha}}{d\varepsilon}\right| \leq C \max_{|\varepsilon|<\varepsilon_o} \left\{\left|\frac{db}{d\varepsilon}(\varepsilon)\right|_{L^\infty(\Omega)^N}\right\}$$

et de (1.11) (1.14) nous déduisons :

Lemme 1.4 : Quand α tend vers zéro, on a les convergences

$$\begin{cases} \theta_{\varepsilon\alpha} \to \theta_\varepsilon \text{ dans } C^o(-\varepsilon_o,\varepsilon_o) \\ \dfrac{d\theta_{\varepsilon\alpha}}{d\varepsilon} \to \dfrac{d\theta_\varepsilon}{d\varepsilon} \text{ dans } L^\infty(-\varepsilon_o,\varepsilon_o) \text{ faible } *, \\ \qquad\qquad \text{et } L^p(-\varepsilon_o,\varepsilon_o) \text{ faible pour } p<\infty. \blacksquare \end{cases}$$

Démonstration de la Proposition 1.1 :

Nous allons démontrer par passage à la limite ($\alpha \to 0$) les relations (1.7), (1.8).

D'après (1.13), nous pouvons extraire une sous-suite, encore notée $y_{\varepsilon\alpha}$, telle que :

(1.15) $\quad y_{\varepsilon\alpha} \rightharpoonup y_\varepsilon$ dans $H_o^1(\Omega)$ faible.

Multiplions (1.12) par $v = \zeta\, u_{\varepsilon\alpha}$, où ζ est une fonction quelconque de $W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$, nous obtenons :

$$(1.16)\quad \left\{ \int_\Omega \Big[b(\varepsilon)\ \text{grad}\ y_{\varepsilon\alpha}\ \text{grad}\ (\zeta u_{\varepsilon\alpha}) + \frac{2}{\alpha}\, u^-_{\varepsilon\alpha}\, y_{\varepsilon\alpha}\zeta u_{\varepsilon\alpha} + \frac{db}{d\varepsilon}(\varepsilon)\ \text{grad}\ u_{\varepsilon\alpha}\ \text{grad}\ (\zeta u_{\varepsilon\alpha})\Big]\, d\Omega = 0. \right.$$

Alors, en utilisant (1.11), (1.13) et en remarquant que :

$$\int_\Omega \frac{2}{\alpha}\, u^-_{\varepsilon\alpha}\, y_{\varepsilon\alpha}\zeta u_{\varepsilon\alpha}\, d\Omega = \int_\Omega 2\, y_{\varepsilon\alpha}(A_\varepsilon u_{\varepsilon\alpha} - f)\zeta\, d\Omega \to 2\int_\Omega y_\varepsilon (A_\varepsilon u_\varepsilon - f)\zeta\, d\Omega,\ \alpha \to 0$$

par passage à la limite dans (1.16), nous obtenons :

$$(1.17)\quad \left\{ \int_\Omega \{ b(\varepsilon)\ \text{grad}\ y_\varepsilon\ \text{grad}\ (\zeta u_\varepsilon) + 2\, y_\varepsilon (A_\varepsilon u_\varepsilon - f)\zeta + \frac{db}{d\varepsilon}(\varepsilon)\ \text{grad}\ u_\varepsilon\ \text{grad}\ (\zeta u_\varepsilon)\}\, d\Omega = 0. \right.$$

Considérons une boule B de Ω_+^ε, nous avons :

$$A_\varepsilon u_\varepsilon = f \text{ dans } B$$

et comme f est dans $L^p(\Omega)$, $u_{\varepsilon|B}$ est dans $W^{2,p}(B)$; prenons alors $\zeta = \hat{w} \backslash u_\varepsilon$ dans (1.17), où $\hat{w}$ est le prolongement par zéro dans Ω d'une fonction w arbitraire de $W^{1,\infty}(B) \cap H_o^1(B)$; nous obtenons :

$$(1.18)\quad \int_\Omega \{ b(\varepsilon)\ \text{grad}\ y_\varepsilon\ \text{grad}\ \hat{w} + \frac{db}{d\varepsilon}(\varepsilon)\ \text{grad}\ u_\varepsilon\ \text{grad}\ \hat{w}\}\, d\Omega = 0 \quad \forall w \in W^{1,\infty}(B) \cap H_o^1(B).$$

Enfin, comme pour tout v dans $H_o^1(\Omega_+^\varepsilon)$, il existe une suite (B_n^j) de boules et une suite w_n^j de fonction de $W^{1,\infty}(B_n^j) \cap H_o^1(B_n^j)$ telles que :

$$\sum_j w_n^j \to v \text{ dans } H_o^1(\Omega_\varepsilon^+) \text{ quand } n \to +\infty ;$$

avec (1.18) on obtient (1.8).

Soit maintenant B' une boule de l'ouvert $\Omega \setminus \overline{\Omega}_+^\varepsilon$. Si ζ est le prolongement par zéro dans Ω d'une fonction de $H_o^1(B')$, on obtient, avec (1.5) :

$$y_\varepsilon|_{B'} = 0 \text{ p.p.}$$

d'où l'on déduit (1.7), qui, joint à (1.6) entraine (1.8)'.

Enfin, d'après le Lemme 1.4, l'application $\varepsilon \to y_\varepsilon$ est pour presque tout ε dans $]-\varepsilon_o,+\varepsilon_o[$ la dérivée de u_ε par rapport à ε, ce qui termine la démonstration de la Proposition 1.1. ■

1.3. Différentiabilité du domaine de contact.

Soit F_ε le domaine de contact

$$(1.19) \qquad F_\varepsilon = \{x \in \Omega | u_\varepsilon(x) = 0\}$$

et $\chi_\varepsilon = \chi_{F_\varepsilon}$ sa fonction caractéristique.

Dans ce paragraphe nous supposerons que :

$$(1.20) \qquad \varepsilon \to b(\varepsilon) \text{ est dérivable dans } W^{2,\infty}(\Omega),$$

et nous considérerons une valeur ε_1 de ε pour laquelle l'application $\varepsilon \to u(\varepsilon)$ est différentiable dans $H_o^1(\Omega)$ (Proposition 1.1).

Proposition 1.3 : Sous les hypothèses (1.2), (1.3), (1.5), (1.6) et (1.20), l'application $\varepsilon \to \chi_\varepsilon$ est dérivable en ε_1 dans $H^{-1}(\Omega)$ et sa dérivée $\dot{\chi}_\varepsilon$ est définie par :

$$(1.21) \qquad f\dot{\chi}_{\varepsilon_1} = -\left(\frac{dA_{\varepsilon_1}}{d\varepsilon} u_{\varepsilon_1} + A_{\varepsilon_1} y_{\varepsilon_1}\right).$$

Démonstration :

D'après H. BREZIS, D. KINDERLEHRER [2], on a

$$f\chi_\varepsilon = - A_\varepsilon u_\varepsilon + f$$

d'où le résultat, grâce aux propriétés de dérivabilité de u_ε (Proposition 1.1) et de A_ε. ■

Remarque 1.1 : En corollaire à cette proposition, on obtient la continuité de $\varepsilon \to \chi_\varepsilon$ dans $L^p(\Omega)$ (C. SAGUEZ [17]). ■

Soit S_ε la frontière de $\Omega \setminus F_\varepsilon$. Nous faisons sur S_ε les hypothèses de régularité suivantes :

$$(1.22) \quad \begin{cases} S_{\varepsilon_1} \text{ est une variété de dimension N-1, de classe } C^2, \\ \Omega \setminus F_{\varepsilon_1} \text{ étant localement d'un seul côté de } S_{\varepsilon_1}. \end{cases}$$

Proposition 1.4 : Sous les hypothèses (1.2),(1.3),(1.5),(1.6),(1.20), et (1.22), nous avons :

$$(1.23) \quad f\dot{\chi}_{\varepsilon_1} = -\operatorname{grad} \chi_{\varepsilon_1} \cdot (b(\varepsilon_1) \operatorname{grad} y_{\varepsilon_1}) \text{ dans } H^{-1}(\Omega),$$

ou encore

$$(1.24) \quad \langle f\dot{\chi}_{\varepsilon_1}, \phi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_o^1(\Omega)} = -\int_{S_{\varepsilon_1}} \frac{\partial y_{\varepsilon_1}}{\partial \nu_{A_{\varepsilon_1}}} \phi \, d\Gamma \ , \ \forall \phi \in H_o^1(\Omega)$$

où $\dfrac{\partial y_{\varepsilon_1}}{\partial \nu_{A_{\varepsilon_1}}}$ désigne la dérivée conormale de y_{ε_1} sur S_{ε_1}.

Démonstration :

Montrons tout d'abord que $\dot{\chi}_{\varepsilon_1}$ est une distribution à support sur S_{ε_1} ; en effet :

dans $F_{\varepsilon_1} \setminus S_{\varepsilon_1} = \Omega \setminus \Omega_+^{\varepsilon_1}$, d'après (1.21), on a :

$$-\dot{\chi}_{\varepsilon_1} f = A_{\varepsilon_1} y_{\varepsilon_1} = 0$$

dans $\Omega \setminus F_{\varepsilon_1}$ nous avons $-f\dot{\chi}_{\varepsilon_1} = 0$.

Il nous reste donc à calculer la partie singulière de $\dot{\chi}_{\varepsilon_1}$; puisque u_{ε_1} est dans $H^2(\Omega)$, le premier terme de la somme (1.21) est intégrable. Il suffit donc de s'intéresser à $A_{\varepsilon_1} y_{\varepsilon_1}$. Soit ϕ une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$, nous avons :

$$(A_{\varepsilon_1} y_{\varepsilon_1},\phi) = \int_\Omega b(\varepsilon_1) \text{ grad } y_{\varepsilon_1} \text{ grad } \phi \, d\Omega$$

$$= \int_{\Omega_+^{\varepsilon_1}} b(\varepsilon_1) \text{ grad } y_{\varepsilon_1} \text{ grad } \phi \, d\Omega$$

$$= \int_{\Omega_+^{\varepsilon_1}} \phi \text{ div } [b(\varepsilon_1) \text{ grad } y_{\varepsilon_1}] d\Omega + \int_{S_{\varepsilon_1}} \phi \frac{\partial y_{\varepsilon_1}}{\partial \nu_{A_{\varepsilon_1}}} d\Gamma .$$

D'après la régularité de S_{ε_1}, y_{ε_1} est dans $H^2(\Omega_+^{\varepsilon_1})$, et donc le premier terme de la somme est intégrable ; la singularité cherchée provient donc du second terme, d'où (1.24).

Montrons maintenant (1.23) : soit z_{ε_1} un prolongement de y_{ε_1} dans $H^2(\Omega)$; un tel prolongement existe puisque S_{ε_1} est régulière ; nous avons :

$$b(\varepsilon_1) \text{ grad } y_{\varepsilon_1} = (1-\chi_{\varepsilon_1}) \, b(\varepsilon_1) \text{ grad } z_{\varepsilon_1} \text{ dans } \Omega$$

et donc :

$$(A_{\varepsilon_1} y_{\varepsilon_1},\phi) = \int_\Omega (1-\chi_{\varepsilon_1}) \, b(\varepsilon_1) \text{ grad } z_{\varepsilon_1} \text{ grad } \phi \, d\Omega$$

$$= \int_\Omega \text{ grad } (\chi_{\varepsilon_1}-1) \cdot [b(\varepsilon_1) \text{ grad } z_{\varepsilon_1}] \, d\Omega + \int_\Omega \text{grad}[\phi(1-\chi_{\varepsilon_1})] \cdot b(\varepsilon_1) \text{grad } z_{\varepsilon_1} d\Omega$$

soit :

$$(A_{\varepsilon_1} y_{\varepsilon_1},\phi) = \int_\Omega \phi \text{ grad } \chi_{\varepsilon_1} \cdot b(\varepsilon_1) \text{ grad } z_{\varepsilon_1} \, d\Omega$$

$$- \int_\Omega \phi(1-\chi_{\varepsilon_1}) \text{ div}[b(\varepsilon_1) \text{ grad } z_{\varepsilon_1}] \, d\Omega$$

Le support de grad χ_{ε_1} étant S_{ε_1} et le deuxième terme de la somme étant intégrable nous en déduisons (1.24). ■

Nous allons mettre le "correcteur" $(\varepsilon-\varepsilon_1)\dot{\chi}_{\varepsilon_1}$ sous la forme d'un déplacement de la frontière libre.

Nous supposons que :

(1.25) $\frac{1}{f}$ est une fonction bornée sur B

On considère la fonction δ définie sur S_{ε_1} par :

$$\delta = -\frac{1}{f}\frac{\partial y_{\varepsilon_1}}{\partial \nu_{A_{\varepsilon_1}}} \ ;$$

Nous supposons que :

(1.26) δ est une fonction continue sur S_{ε_1}

On introduit l'ensemble suivant ($\eta > 0$ assez petit)

$$B_\eta = \{x+\theta\eta\ \delta(x)\vec{n}\ ,\ x \in S_{\varepsilon_1}\ ,\ \theta \in [0,1]\}$$

où $\vec{n}$ est la normale à S_{ε_1} extérieure à $\Omega \setminus F_{\varepsilon_1}$. Nous avons la proposition :

Proposition 1.5 : Sous les hypothèses (1.2),(1.3),(1.5),(1.6),(1.20),(1.22) (1.25) et (1.26) et pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de fermeture incluse dans Ω on a l'estimation :

$$(1.27)\qquad (\chi_{\varepsilon_1+\eta} - \chi_{\varepsilon_1} - \chi_{B_\eta}\ \mathrm{sgn}(1-\chi_{\varepsilon_1}),\phi) = o(\eta)\,\|\phi\|_{W^{1,\infty}(\mathcal{O})}\ ,\ \forall\phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{O}).$$

Démonstration :

Notons d'abord que, grâce à la dérivabilité de $\varepsilon \to \chi_\varepsilon$ en ε_1, nous pouvons écrire :

$$(1.28)\qquad \|\chi_{\varepsilon_1+\eta} - \chi_{\varepsilon_1} - \eta\dot{\chi}_{\varepsilon_1}\|_{H^{-1}(\Omega)} = o(\eta) \text{ quand } \eta \to 0 \ ;$$

nous devons donc estimer l'expression :

$$D = |(\eta\dot{\chi}_{\varepsilon_1} - \chi_{B_\eta}\ \mathrm{sgn}(1-\chi_{\varepsilon_1}),\phi)|$$

Première étape : Supposons d'abord que S_{ε_1} est incluse dans l'hyperplan $\{x_N = 0\}$; alors, si on note (x',x_N) les coordonnées d'un point de $\mathbb{R}^N$, nous avons :

$$D = \left| \int_{S_{\varepsilon_1}} \eta\delta(x')\phi(x',0)dx' - \int_{S_{\varepsilon_1}} \int_0^{\eta\delta(x')} \phi(x',x_N)dx_N\, dx' \right|$$

$$D \leq \int_{S_{\varepsilon_1}} \int_0^{\eta\delta(x')} |\phi(x',0)-\phi(x',x_N)|dx_N\, dx'$$

d'où

$$D \leq \eta^2 \text{mes}(S_{\varepsilon_1}) |\delta|_{L^\infty} \|\phi\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} .$$

Deuxième étape : nous nous plaçons dans le cas général. Soit 0 un point de S_{ε_1}, on peut construire un système d'axes tel que S_{ε_1} admette dans un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 le paramétrage

$$x_N = a(x')$$

avec

$$a(0) = 0 \ , \ \text{grad } a(0) = 0 \tag{i.29}$$

Soit θ et θ^{-1} la carte et sa réciproque définies dans $\mathcal{V}$ par :

$$\theta^{-1}(x',\lambda) = \left(x' + \frac{\lambda \text{ grad } a(x')}{\sqrt{1+|\text{grad } a(x')|^2}} \ , \ a(x') - \frac{\lambda}{\sqrt{1+|\text{grad } a(x')|^2}}\right)$$

θ et θ^{-1} sont de classe C^1, et θ transforme dans $\mathcal{V}$ un segment normal à S_{ε_1} en un segment perpendiculaire à l'hyperplan $Ox_1 \ldots x_{N-1}$. En appliquant θ, nous sommes ramenés à estimer[1] :

$$\begin{cases} D = \left| \int_{\theta(S_{\varepsilon_1})} \eta\delta\circ\theta(x',a(x'))|\det \theta'| \, \| [{}^t\theta']^{-1}\vec{n}\|_{\mathbb{R}^N} \, dx' \right. \\ \left. - \int_{\theta(S_{\varepsilon_1})} \int_0^{\eta\delta\circ\theta(x',a(x'))} \phi\circ\theta(x',x_N)|\det \theta'| \, dx' \, dx_N \right| , \end{cases}$$

Comme $\theta(S_{\varepsilon_1})$ est inclus dans $\{x_N=0\}$ par construction, nous retrouvons une expression analogue à celle de la première étape, aux Jacobiens $|\det \theta'| \, \|[{}^t\theta']^{-1}\vec{n}\|$ et $|\det \theta'|$ près ; pour obtenir localement le résultat, il faut donc montrer que ces deux expressions peuvent être rendues aussi proches de 1 que désiré ; nous indiquons la démonstration pour $|\det \theta'|$:

---

(1) voir par exemple F. MURAT, J. SIMON [12] pour ce type de changement de variable.

Nous avons (F. MURAT , J. SIMON [12]) :

$$\left| |\det \theta'(x)|-1 \right| = \left| -1 - \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right)^2 \right|^{-1}$$

d'où l'estimation :

$$\left| |\det \theta'(x)|-1 \right| \leq 2 \|a\|^2_{C^2} \ |x-0| \ . \tag{1.30}$$

Troisième étape : Montrons que (1.30) se transpose globalement . Soit $(\mathcal{V}_i)$ un recouvrement de S_{ε_1} tel que $S_{\varepsilon_1}|\mathcal{V}_i$ ait les propriétés utilisées à l'étape précédente (existence d'une représentation $x_N = a_i(x')$) . Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_i \int_{\theta_i(S_{\varepsilon_1})} \int_0^{\eta\delta\circ\theta_i(x',a(x'))} \phi\circ\theta_i(x',a(x'))[\,|\det \theta_i'|-1\,]dx'\ dx_N \right| \\ \\ \leq \operatorname{Max}_i \operatorname{diam}(\mathcal{V}_i)\ [\int_{\cup_i \mathcal{V}_i} |\phi| dx'dx_N]\ \operatorname{Max}_i \|a_i\|^2_{C^2} \quad , \end{array} \right.$$

et ce majorant peut être rendu aussi petit que l'on veut. Pour le terme

$$\sum_i \int_{\theta_i(S_{\varepsilon_1})} \eta\delta\circ\theta_i [\,|\det \theta_i'|\ \|[\,{}^t\theta_i'\,]^{-1}\ \vec{n}\| -1\,]dx'$$

la démonstration est analogue ; ce qui termine la démonstration de la Proposition 1.5. ■

Remarque 1.2 : Une autre façon d'obtenir (1.27) passe par la définition explicite de l'équation de la frontière libre S_ε ; l'estimation (1.27) devient alors une véritable formule de Taylor pour cette équation qui est considérée comme l'inconnue principale ; ce point de vue est développé dans A. DERVIEUX [4].

Remarque 1.3 : Les résultats précédents sont encore valables si on considère les convexes :

$$K_\psi = \{v \in H_o^1(\Omega),\ v \geq \psi \ \text{p.p.}\}$$

où ψ est une fonction donnée de $H_o^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ telle que :

$$\psi \in W^{2,3/2}(\Omega) \ , \ A_\varepsilon \psi \in L^2(\Omega) \quad \forall \varepsilon \ , \ |\varepsilon| < \varepsilon_o$$

La condition sur f devient :

$$\text{mes } \{x \in \Omega | A_\varepsilon \psi - f = 0\} = 0 \quad \forall \varepsilon \in]-\varepsilon_o, +\varepsilon_o[$$

et pour la différentiabilité de χ_ε nous devons supposer que :

$$\psi \in W^{3,\infty}(\Omega).$$

Remarque 1.4 : Les résultats précédents s'étendent au cas où la forme bilinéaire $a_\varepsilon(u,v)$ s'écrit

$$a_\varepsilon(u,v) = \int_\Omega [b(\varepsilon) \text{ grad } u \text{ grad } v + c(\varepsilon)uv] \, d\Omega$$

où $c(\varepsilon)$ est une fonction C^1 de ε, bornée de $]-\varepsilon_o, +\varepsilon_o[$ dans $W^{1,\infty}(\Omega)$, $\frac{dc}{d\varepsilon}(\varepsilon)$ étant bornée dans $L^\infty(\Omega)$, et où $a_\varepsilon(u,v)$ vérifie (1.3).

Pour la différentiabilité de χ_ε, on suppose de plus que $c(\varepsilon)$ est dérivable dans $W^{1,\infty}(\Omega)$.

Remarque 1.5 : Les résultats s'étendent également au cas où f dépend de ε (C. SAGUEZ [17], F. MIGNOT [10]).

Remarque 1.6 : On pourrait également étudier le cas d'inéquations paraboliques en reprenant les idées exposées dans C. SAGUEZ [16].

2. - APPLICATION A LA PERTURBATION DU DOMAINE GEOMETRIQUE.

Nous appliquons les résultats du Paragraphe 1 au cas où la perturbation provient du domaine d'intégration.

2.1. Formulation du problème.

Soit B une boule de $\mathbb{R}^N$ ($N=2$ ou 3) et $\mathcal{T}$ l'ensemble des bijections T de $\bar{B}$ dans $\bar{B}$ telles que :

T et T^{-1} sont deux fois continûment différentiables

$T(x) = x \quad \forall x \in \partial B.$

Soit $\mathcal{T}_{ad}$ un sous-ensemble de $\mathcal{T}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ tel que :

$\bar{\Omega} \subset B$, $\partial\Omega$ est une variété de classe C^2, de dimension $N-1$,

Ω est localement d'un seul côté de $\partial\Omega$.

L'ensemble des domaines admissibles $\mathcal{U}_{ad}$ est défini par :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\Omega_T,\ \Omega_T = T(\Omega),\ T \in \mathcal{T}_{ad}\}. \tag{2.1}$$

A tout domaine Ω_T de $\mathcal{U}_{ad}$, on associe la solution u_T de l'inéquation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_T \in K_T \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_{\Omega_T} \text{grad } u_T \text{ grad } (v-u_T)\ d\Omega \geq \int_{\Omega_T} f(v-u_T)d\Omega\ ,\ \forall v \in K_T \end{array} \right. \tag{2.2}$$

avec

$$K_T = \{v \in H_o^1(\Omega_T)\ ,\ v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\} \tag{2.3}$$

et nous supposons que :

$$f \in H^1(B) \cap L^p(B)\ (p > N) \tag{2.4}$$

Nous souhaitons étudier la dérivabilité de l'application $\Omega_T \to u_T$ (c.à d. $T \to u_T$) ; nous reprenons les méthodes développées par P.R. GARABEDIAN [6] et F. MURAT, J. SIMON [12].

Afin de se ramener au contexte du paragraphe précédent, nous supposerons que l'ensemble $\mathcal{C}_{ad}$ est paramétré par un réel ε de l'intervalle $]-\varepsilon_o,+\varepsilon_o[$, de telle sorte que :

$$\text{(2.5)} \qquad \varepsilon \to T_\varepsilon \text{ et } \varepsilon \to T_\varepsilon^{-1} \text{ sont de classe } C^1 \text{ à valeurs dans } [W^{1,\infty}(\bar{B})]^N.$$

Enfin nous supposerons aussi que :

$$\text{(2.6)} \qquad \text{mes } \{x \in \Omega_{T_\varepsilon} \mid f(x) = 0\} = 0 \quad \forall \varepsilon.$$

2.2. Dérivabilité de u_{T_ε}.

Considérons la fonction :

$$\text{(2.7)} \qquad \hat{u}_{T_\varepsilon} = u_{T_\varepsilon} \circ T_\varepsilon$$

alors $\hat{u}_{T_\varepsilon}$ est solution, dans le domaine fixe Ω, de l'inéquation variationnelle suivante :

$$\text{(2.8)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{u}_{T_\varepsilon} \in K \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega_{T_o}} \{ [{}^t T'_\varepsilon]^{-1} \text{ grad } \hat{u}_{T_\varepsilon} \cdot [{}^t T'_\varepsilon]^{-1} \text{ grad } (v - \hat{u}_{T_\varepsilon}) \\ - (f \circ T_\varepsilon)(v - \hat{u}_{T_\varepsilon}) \} \, |\det T'_\varepsilon| \, d\Omega \geq 0, \quad \forall v \in K \end{array} \right.$$

avec

T'_ε matrice Jacobienne associée à T_ε

$$K = \{v \in H_o^1(\Omega) \mid v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Nous sommes donc ramenés à une situation analogue à celle du Paragraphe 1. Introduisons l'hypothèse suivante :

$$(2.9)\qquad \begin{cases} \forall \varepsilon \in]-\varepsilon_o,+\varepsilon_o[\ ,\ \text{l'ensemble}\ \ \Omega_+^{\varepsilon} = \{x \in \Omega_{T_\varepsilon} \mid u_{T_\varepsilon}(x) > 0\} \\ \\ \text{vérifie} \\ \\ \forall v \in H_o^1(\Omega)\ ,\ v|_{\Omega/\bar{\Omega}_+^{\varepsilon}} = 0 \Longrightarrow v \in H_o^1(\Omega_+^{\varepsilon}) \end{cases}$$

Alors, sous les hypothèses (2.4), (2.5),(2.6) et (2.9), nous déduisons de la Proposition 1.1 que l'application $\varepsilon \to \hat{u}_{T_\varepsilon}$ est différentiable à valeurs dans $H_o^1(\Omega)$ pour presque tout ε dans $]-\varepsilon_o,+\varepsilon_o[$.

Soit ε_1 un point où $\varepsilon \to \hat{u}_{T_\varepsilon}$ est différentiable, on introduit

$$\tilde{u}_{T_\varepsilon} = \hat{u}_{T_\varepsilon} \circ T_{\varepsilon_1}^{-1} \ .$$

De la différentiabilité de $\hat{u}_{T_\varepsilon}$ nous déduisons celle de $\tilde{u}_{T_\varepsilon}$ dans $H_o^1(\Omega_{T_{\varepsilon_1}})$. En remarquant que $\tilde{u}_{T_\varepsilon}$ est la solution dans $\Omega_{T_{\varepsilon_1}}$ d'une inéquation analogue à (2.8), où l'on a remplacé T_ε par $T_\varepsilon \circ T_{\varepsilon_1}^{-1}$, nous en déduisons le résultat suivant :

Proposition 2.1 : Sous les hypothèses (2.4),(2.5),(2.6) et (2.9), la dérivée $\tilde{y}_{\varepsilon_1}$ de $\tilde{u}_{T_\varepsilon}$ au point ε_1 vérifie :

$$(2.10)\qquad \begin{cases} \tilde{y}_{\varepsilon_1} \in H_o^1(\Omega_+^{\varepsilon_1}) \quad ; \ \tilde{y}_{\varepsilon_1} = 0 \ \text{dans}\ \Omega_{T_{\varepsilon_1}} \setminus \tilde{\Omega}_+^{\varepsilon_1} \\ \int_{\tilde{\Omega}_{+1}^{\varepsilon}} \text{grad}\ \tilde{y}_{\varepsilon_1}\ \text{grad}\ v\ d\Omega = \int_{\tilde{\Omega}_+^{\varepsilon_1}} \{(V'+{}^tV')\ \text{grad}\ u_{T_{\varepsilon_1}}\ \text{grad}\ v \\ -(\text{grad}\ u_{T_{\varepsilon_1}}\ \text{grad}\ v - fv)\text{div}\ V - v(\text{grad}\ f)\cdot V\}\ d\Omega \quad \forall v \in H_o^1(\tilde{\Omega}_+^{\varepsilon_1}) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} V = \dfrac{dT_\varepsilon}{d\varepsilon}^{-1} \circ T_{\varepsilon_1}^{-1} \\ \\ \tilde{\Omega}_+^{\varepsilon_1} = \{x \in \Omega_{T_{\varepsilon_1}} \mid \tilde{u}_{T_{\varepsilon_1}}(x) > 0\ \}. \end{cases}$$

Pour démontrer (2.10), il suffit d'utiliser le résultat de la Proposition 1.1 et les deux lemmes suivants dûs à F. MURAT et J. SIMON [12] :

Lemme 2.1 : Sous les hypothèses de la Proposition 2.1, l'application $\varepsilon \to f \circ T_\varepsilon$ est dérivable en tout point ε de $]-\varepsilon_o,+\varepsilon_o[$ dans $L^2(B)$ et sa dérivée est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (f \circ T_\varepsilon) = [(\text{grad } f) \circ T_\varepsilon] \cdot \frac{dT_\varepsilon}{d\varepsilon} \quad .$$

Lemme 2.2 : Sous les hypothèses de la Proposition 2.1, on a :

$$\frac{d}{d\varepsilon} [{}^t T'_\varepsilon]^{-1} = {}^t[T'^{-1}_\varepsilon (\frac{dT_\varepsilon}{d\varepsilon})' T'^{-1}_\varepsilon]$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} |\det T'_\varepsilon| = \{\text{div } (\frac{dT_\varepsilon}{d\varepsilon} \circ T_\varepsilon^{-1})\} \circ T_\varepsilon \, |\det T'_\varepsilon| \quad .$$

Des propriétés de $\tilde{u}_{T_\varepsilon}$ nous allons déduire des propriétés de certains prolongements de u_{T_ε} :

Proposition 2.2 : Sous les hypothèses (2.4),(2.5),(2.6) et (2.9), le prolongement de u_{T_ε} par zéro dans $B \setminus \Omega_{T_\varepsilon}$ est différentiable dans $L^2(B)$ presque partout sur $]-\varepsilon_o,+\varepsilon_o[$.

Démonstration :

Cette différentiabilité est déduite de celle de u_{T_ε} via un résultat analogue au Lemme 2.1 (F. MURAT, J. SIMON [12 ; Lemme 4.6]). ■

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert vérifiant

$$(2.11) \qquad \forall \varepsilon \in]-\varepsilon_o,\varepsilon_o[\quad , \quad \overline{\mathcal{O}} \subset \Omega_{T_\varepsilon}$$

En utilisant par exemple les méthodes de B. PALMERIO, A. DERVIEUX [15], on montre la proposition :

Proposition 2.3 : Sous les hypothèses (2.4),(2.5),(2.6) et (2.9) la restriction de u_{T_ε} à $\mathcal{O}$ est différentiable dans $H^1(\mathcal{O})$ presque partout sur $]-\varepsilon_o,+\varepsilon_o[$. ■

Si nous considérons maintenant l'hypothèse supplémentaire

$$(2.12)\qquad \begin{cases} \varepsilon \to T \text{ et } \varepsilon \to T^{-1} \text{ sont des applications } C^1 \text{ de} \\ ]-\varepsilon_o,+\varepsilon_o[\text{ à valeurs dans } [W^{2,\infty}(B)]^N , \end{cases}$$

alors nous pouvons aussi énoncer la

Proposition 2.4 : Sous les hypothèses (2.4) à (2.6), (2.9) et (2.12), il existe un prolongement $\bar{u}_{T_\varepsilon}$ de u_{T_ε} dans B tel que l'application $\varepsilon \to \bar{u}_{T_\varepsilon}$ est presque partout différentiable dans $]-\varepsilon_o,\varepsilon_o[$, à valeurs dans $H^1(B)$, et sa dérivée $\bar{y}_{\varepsilon_1}$ au point ε_1 vérifie la relation suivante :

$$(2.13)\qquad \bar{y}_{\varepsilon_1}|_{\Omega_{T_{\varepsilon_1}}} = \tilde{y}_{\varepsilon_1} - \operatorname{grad} u_{T_{\varepsilon_1}} \cdot \left(\frac{\partial T_{\varepsilon_1}}{\partial \varepsilon} \circ T_{\varepsilon_1}\right)$$

Démonstration :

Nous savons que $\tilde{u}_{T_\varepsilon}$ est différentiable en ε_1 dans $H^1(\Omega_{T_{\varepsilon_1}})$, et aussi, de manière classique, que la norme de $\tilde{u}_{T_\varepsilon}$ dans $H^2(\Omega_{T_{\varepsilon_1}})$ est uniformément bornée sur tout voisinage compact $\mathcal{V}$ de ε_1 inclus dans $]-\varepsilon_o,\varepsilon_o[$.

Si nous notons $\mathcal{P}$ un opérateur de prolongement linéaire et continu de $H^2(\Omega_{T_{\varepsilon_1}})$ dans $H^2_o(B)$, construit par exemple par réflexions et troncature (J.L. LIONS [9]), alors nous déduisons que $\varepsilon \to \mathcal{P}u_{T_\varepsilon}$ est une application bornée sur $\mathcal{V}$ dans $H^2(B)$, différentiable en ε_1 dans $H^1(B)$.

Posons maintenant :

$$\bar{u}_{T_\varepsilon} = \mathcal{P}\tilde{u}_{T_\varepsilon} \circ T_{\varepsilon_1} \circ T_\varepsilon^{-1}.$$

Alors la conclusion de la Proposition 2.2 découle du lemme suivant, qui est une facile adaptation d'un résultat de F. MURAT, J. SIMON [12 ; lemme 4.6] :

Lemme 2.3 : Soit ϕ une application définie sur $\mathcal{V} \subset]-\varepsilon_o,+\varepsilon_o[$, différentiable à valeurs dans $H^1(B)$ en ε_1 et bornée dans $H^2(B)$, alors l'application

$\varepsilon \to \phi(\varepsilon)\circ T_\varepsilon^{-1}$ est différentiable dans $H^1(B)$ en ε_1 et sa dérivée est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}[\phi(\varepsilon)\circ T_\varepsilon^{-1}](\varepsilon_1) = \\ \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}(\varepsilon_1)\circ T_{\varepsilon_1}^{-1} - (\text{grad } \phi(\varepsilon_1)\circ T_{\varepsilon_1}^{-1})\cdot\frac{dT_\varepsilon}{d\varepsilon}(\varepsilon_1)\circ T_{\varepsilon_1}^{-1} \ . \ \blacksquare \end{cases}$$

La restriction à $\Omega_{T_{\varepsilon_1}}$ de la donnée $\bar{y}_{\varepsilon_1}$ est définie de manière unique de la façon suivante :

Corollaire 2.1 : Sous les hypothèses (2.4),(2.5),(2.6) et (2.9), la restriction de $\bar{y}_{\varepsilon_1}$ à $\Omega_{T_{\varepsilon_1}}$ est la solution du système suivant :

$$(2.14) \qquad -\Delta\bar{y}_{\varepsilon_1} = 0 \text{ dans } \Omega_+^{\varepsilon_1}$$

$$(2.15) \qquad \bar{y}_{\varepsilon_1} + \text{grad } u_{T_{\varepsilon_1}}\cdot(\frac{dT_\varepsilon}{d\varepsilon}\circ T_{\varepsilon_1}^{-1}) \in H_o^1(\Omega_+^{\varepsilon_1})$$

Démonstration :

L'égalité (2.15) est une conséquence immédiate de (2.13). Pour obtenir (2.14), il suffit de calculer le second membre de (2.10), qui s'explicite ainsi :

$$\begin{cases} \int_{\tilde{\Omega}_+^{\varepsilon_1}} \{(V'+{}^tV')\text{ grad } u_{T_{\varepsilon_1}}\cdot\text{grad } v - [\text{grad } u_{T_{\varepsilon_1}}\cdot\text{grad } v - fv]\text{ div } V \\ - v\text{ grad } f\cdot V\}\, d\Omega \\ = \int_{\tilde{\Omega}_+^{\varepsilon_1}} \text{grad } v\cdot\text{grad }[\text{grad } u_{T_{\varepsilon_1}}\cdot(\frac{dT_\varepsilon}{d\varepsilon}\circ T_{\varepsilon_1}^{-1})]\, d\Omega \ ; \end{cases}$$

ce qui, joint à (2.13), donne (2.14).

2.3 Différentiabilité du domaine de contact.

Nous appliquons maintenant les résultats du Paragraphe 1.3 . Soient donc :

$$(2.16) \qquad \begin{cases} F_\varepsilon = \{x \in \Omega_{T_\varepsilon},\ u_{T_\varepsilon}(x) = 0\} \ . \\ \chi_\varepsilon = \chi_{F_\varepsilon}, \text{ fonction caractéristique de } F_\varepsilon. \end{cases}$$

Nous faisons les hypothèses supplémentaires suivantes :

(2.17) $\quad f \in W^{1,\infty}(B)$

(2.18) les applications $\varepsilon \to T_\varepsilon$ et $\varepsilon \to T_\varepsilon^{-1}$ sont dérivables de $]-\varepsilon_o,\varepsilon_o[$ dans $[W^{2,\infty}(B)]^N$.

Nous considérons un ouvert $\mathcal{O}$ vérifiant (2.11) et un point ε_1 de $]-\varepsilon_o,+\varepsilon_o[$ où l'application $\varepsilon \to u_{T_\varepsilon|\mathcal{O}}$ est dérivable dans $H^1(\mathcal{O})$.

Proposition 2.5 : Sous les hypothèses (2.4) à (2.6), (2.9), (2.17) et (2.18), l'application $\varepsilon \to \chi_{\varepsilon|\mathcal{O}}$ est dérivable en ε_1 à valeurs dans $H^{-1}(\mathcal{O})$ et sa dérivée est définie par :

(2.19) $\quad \dot{\chi}_{\varepsilon_1} f = \Delta \bar{y}_{\varepsilon_1}$.

Ce résultat est une conséquence de la Proposition 2.3 et du fait que

$$\chi_\varepsilon f = \Delta u_{T_\varepsilon} + f \text{ dans } \Omega_{T_\varepsilon}$$

La démonstration est identique à celle de la Proposition 1.3. ■

Remarque 2.1 : Nous pouvons en déduire que l'application $\varepsilon \to \chi_\varepsilon$ est continue en ε_1 à valeurs dans $L^p(B)$, $\forall p > 0$. ■

Comme au Paragraphe 1.3, et de façon à pouvoir appliquer les Propositions 1.4 et 1.5, nous faisons sur $S_{\varepsilon_1} = \partial(F_{\varepsilon_1} \cap \mathcal{O})$ l'hypothèse (1.22) ; nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 2.2 : On se place sous les hypothèses de la Proposition (2.5) et sous l'hypothèse (1.22) pour S_{ε_1} :

(i) la dérivée $\dot{\chi}_{\varepsilon_1}$ vérifie :

(2.20) $\quad -\dot{\chi}_{\varepsilon_1} f = \text{grad } \bar{y}_{\varepsilon_1} \cdot \text{grad } \chi_{\varepsilon_1}$

$$(2.21) \qquad -(f\dot{\chi}_{\varepsilon_1} \cdot \phi)_{H^{-1}(\mathcal{O}) \times H_o^1(\mathcal{O})} = \int_{S_{\varepsilon_1}} \frac{\partial \bar{y}_{\varepsilon_1}}{\partial n} \phi \, d\Gamma \ , \ \forall \phi \in H_o^1(\mathcal{O}) \ ;$$

(ii) si de plus la fonction δ définie par :

$$\delta(x) = \frac{1}{f} \frac{\partial \bar{y}_{\varepsilon_1}}{\partial n} \ , \ \forall x \in S_{\varepsilon_1}$$

est une fonction continue sur S_{ε_1}, alors l'estimation (1.27) est vraie pour la fonction δ. ■

2.4. Application à un problème de contrôle optimal.

Soit le problème de contrôle optimal défini comme suit :

- l'état u_T est solution de l'inéquation (2.2) ;
- la variable de contrôle est le domaine Ω_T ;
- la fonctionnelle J est définie par

$$(2.22) \qquad J(\Omega_T) = \int_B (\bar{u}_T - u_d)^2 \, d\Omega$$

où u_d est une fonction donnée de $L^2(B)$.

Le problème s'écrit donc :

$$(2.23) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } \bar{T} \text{ dans } \mathcal{C}_{ad} \text{ tel que :} \\ \\ J(\Omega_{\bar{T}}) \leq J(\Omega_T) \quad \forall T \in \mathcal{C}_{ad} \ . \end{cases}$$

Nous voulons expliciter les conditions d'optimalité correspondant à (2.23) . Afin de se ramener au contexte des paragraphes précédents, nous nous restreignons au cas où T dépend d'un paramètre réel ε ; (2.23) devient :

$$(2.24) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } \bar{\varepsilon} \in [-\varepsilon_o, +\varepsilon_o] \text{ tel que} \\ \\ J(\Omega_{T_{\bar{\varepsilon}}}) \leq J(\Omega_{T_\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon \in [-\varepsilon_o, +\varepsilon_o] \ . \end{cases}$$

D'après les paragraphes précédents, ce dernier problème admet une solution $\bar{\varepsilon}$, et le critère $\varepsilon \to J(\Omega_{T_\varepsilon})$ est dérivable presque partout sur $[-\varepsilon_o, +\varepsilon_o]$.

Proposition 2.6 : On se place sous les hypothèses de la Proposition 2.2 et on suppose que la différentiabilité de u_T a lieu pour la solution $\bar{\varepsilon}$ de (2.24) ; alors le couple $(\Omega_{T_{\bar{\varepsilon}}}, u_{T_{\bar{\varepsilon}}})$ correspondant vérifie les conditions nécessaires d'optimalité suivantes :

$$(2.25)\qquad \int_{\Omega_{T_{\bar{\varepsilon}}}} \text{grad } u_{T_{\bar{\varepsilon}}} \text{ grad } (v-u_{T_{\bar{\varepsilon}}})d\Omega \geq \int_{\Omega_{T_{\bar{\varepsilon}}}} (v-u_{T_{\bar{\varepsilon}}})d\Omega \quad \forall v \in K_{T_{\bar{\varepsilon}}},\ u_{T_{\bar{\varepsilon}}} \in K_{T_{\bar{\varepsilon}}}$$

$$(2.26)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_+^{\bar{\varepsilon}}} \text{grad } p \text{ grad } \phi \, d\Omega = 2\int_{\Omega_+^{\bar{\varepsilon}}} (u_{T_{\bar{\varepsilon}}} - u_d)\phi \, d\Omega \quad \forall \phi \in H_o^1(\Omega_+^{\bar{\varepsilon}}),\ p \in H_o^1(\Omega_+^{\bar{\varepsilon}}) \\ \\ \left[\displaystyle\int_{\partial\Omega_+^{\bar{\varepsilon}}} \frac{\partial p}{\partial n} \text{ grad } u_{T_{\bar{\varepsilon}}} \cdot \left(\frac{\partial T_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \circ T_\varepsilon^{-1}\right) d\Gamma\right](\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \geq 0 \quad \forall \varepsilon \in [-\varepsilon_o, +\varepsilon_o]. \end{cases}$$

3. - CALCUL NUMERIQUE DE FAIBLES PERTURBATIONS.

3.1. Formulation du problème.

Nous considérons un problème modèle introduit dans A. DERVIEUX, H. KAWARADA [5]. On se place en dimension 2. L'ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est défini par :

$$\Omega = \{(x_1,x_2) \ , \ 0 < x_1 < 1 \ , \ \sigma_o(x_1) < x_2 < r \ \} \tag{3.1}$$

où σ_o est une fonction donnée de $W^{1,\infty}(0,1)$ et r une constante positive donnée telles que :

$$\sigma_o(x_1) < r \quad \forall x_1 \in]0,1[\ .$$

Soit δ une fonction donnée de $W^{1,\infty}(0,1)$ .On introduit la famille $\mathcal{T}$ des difféomorphismes T_ε définis par $(-1<\varepsilon<+1)$:

$$T_\varepsilon(x_1,x_2) = (x_1, x_2+\varepsilon\delta(x_1)\ \frac{x_2-r}{\sigma_o(x_1)-r}\ ) \ , \tag{3.2}$$

et on pose :

$$\sigma_\varepsilon(x_1) = \sigma_o(x_1) + \varepsilon\delta(x_1) \quad 0<x_1<1, \ -1<\varepsilon<+1 ,$$

$$\Omega_\varepsilon = T_\varepsilon(\Omega) = \{(x_1,x_2), \ 0<x_1<1, \ \sigma_\varepsilon(x_1) < x_2 < r\} \ .$$

On considère l'inéquation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\varepsilon \in K_\varepsilon \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \text{grad } u_\varepsilon \cdot \text{grad}(v-u_\varepsilon)\,d\Omega \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(v-u_\varepsilon)\,d\Omega \quad \forall v \in K_\varepsilon \end{array} \right. \tag{3.3}$$

avec

$$K_\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon), \ v(x_1,\sigma_\varepsilon(x_1)) = 1, \ v(x_1,r) = 0, \ 0<x_1<1, \ v \geq 0 \text{ p.p.}\} \ .$$

On fait les hypothèses suivantes :

$$f \in H^1(B) \ ; \ B =]0,1[\times]-a,r[\tag{3.4}$$

$$(3.5) \qquad 0 < \alpha \le f \le \beta \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \ge \gamma > 0 \quad ; \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \le M$$

$$(3.6) \qquad \begin{cases} -a < \sigma_o(x_1) + \delta(x_1) < b \quad \text{pour } 0 < x_1 < 1 \\ -a < \sigma_o(x_1) - \delta(x_1) < b \quad \text{pour } 0 < x_1 < 1 \end{cases}$$

$$(3.7) \qquad \left|\frac{d\sigma_o(x_1)}{dx_1}\right| + \left|\frac{d\delta(x_1)}{dx_1}\right| \le \frac{M}{\gamma} \quad \text{pour } 0 < x_1 < 1$$

où a,b,α,β,γ, M sont des constantes strictement positives vérifiant

$$(3.8) \qquad b \le \sqrt{\frac{2}{\beta}} - a \quad ; \quad b + \sqrt{\frac{2}{\alpha}} < r.$$

Proposition 3.1 (A. DERVIEUX, H. KAWARADA [5])

Sous les hypothèses (3.4) à (3.8), l'inéquation variationnelle (3.3) admet pour tout ε dans $]-1,+1[$, une solution u_ε ; la frontière libre associée admet un paramétrage $x_2 = \gamma_\varepsilon(x_1)$ où γ_ε est une fonction de $W^{1,\infty}(0,1)$ vérifiant les estimations suivantes :

$$(3.9) \qquad \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\beta}} - a \le \gamma_\varepsilon \le \sqrt{\frac{2}{\alpha}} + b \\ \left|\frac{d\gamma_\varepsilon}{dx_1}\right| \le \frac{M}{\gamma} . \end{cases}$$

La frontière libre étant donc une courbe Lipschitzienne, le complémentaire du domaine de contact vérifie la condition (1.6) ; nous pouvons donc appliquer les résultats du Paragraphe 2 :

Proposition 3.2 : Sous les hypothèses (3.4) à (3.7), l'application $\varepsilon \to \bar{u}_\varepsilon$, avec $\bar{u}_\varepsilon = u_\varepsilon$ dans $\{(x_1,x_2),\ 0 < x_1 < 1,\ \sigma_\varepsilon(x_1) < x_2 < r\}$ et $\bar{u}_\varepsilon = 1$ dans $\{(x_1,x_2),\ 0<x_1<1,\ x_2 < \sigma_\varepsilon(x_1)\}$ est presque partout différentiable à valeurs dans $L^2(B)$ et sa dérivée $\bar{y}_{\varepsilon_1}$ en ε_1 vérifie :

$$(3.10) \qquad \begin{cases} \Delta \bar{y}_{\varepsilon_1} = 0 \text{ dans } \Omega_{\varepsilon_1} \\ \dfrac{\partial \bar{y}_{\varepsilon_1}}{\partial x} = 0 \text{ sur } \{0\}\times]\sigma_{\varepsilon_1}(0),\ \gamma_{\varepsilon_1}(0)[\cup \{1\}\times]\sigma_{\varepsilon_1}(1),\ \gamma_{\varepsilon_1}(1)[\\ \bar{y}_{\varepsilon_1} = 0 \text{ pour } 0 < x_1 < 1, \quad x_2 > \gamma_{\varepsilon_1}(x_1) \\ \dfrac{\partial \bar{y}_{\varepsilon_1}}{\partial n} = \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\, n_2 \delta(x_1) \text{ sur } \{(x_1,\sigma_{\varepsilon_1}(x_1)),\ 0 < x_1 < 1\} \end{cases}$$

où n_2 désigne la seconde composante de la normale $\vec{n}$ à la frontière inférieure σ_ε.

Nous avons aussi une estimation du type (1.26) que nous explicitons plus loin.

3.2 Essais numériques.

Nous allons vérifier numériquement la formule des accroissements finis d'une part pour la solution u_ε ((3.10)) et d'autre part sur la frontière libre (Corollaire 2.2(ii)).

Pour calculer la frontière libre de manière précise et sensible par rapport aux données nous avons choisi une méthode de relaxation sur la frontière libre ("trial method"). Un maillage variable "en accordéon" permet de suivre à la fois la frontière libre γ et la frontière perturbée σ. Le problème elliptique est approché par des éléments finis P_1 conformes avec 400 triangles. Pour plus de détail sur cette implémentation on se reportera à A. DERVIEUX [4].

Les données du Paragraphe 3.1 sont conservées à l'exception de l'intervalle en x_1 qui est maintenant égal à $]0,2[$. On a les données non perturbées

$$\text{(3.11)} \qquad \begin{cases} f = 10 \\ \\ \sigma_o = 0 \end{cases}$$

et la solution correspondante est :

$$\text{(3.12)} \qquad \begin{cases} u_o(x_1,x_2) = \dfrac{10}{2}\left(x_1 - \sqrt{\dfrac{2}{10}}\right)^2 \\ \\ \gamma_o(x_1,x_2) = \sqrt{\dfrac{2}{10}} \quad . \end{cases}$$

Pour un réel ε assez petit et une perturbation $\delta(x)$ nous noterons $\sigma_\varepsilon = \sigma_o + \varepsilon\delta$, u_ε et γ_ε respectivement la frontière inférieure, la solution et la frontière libre correspondante.

Des paragraphes précédents nous déduisons les <u>correcteurs</u> εu_1 et $\varepsilon\gamma_1$ définis par :

$$(3.13)\qquad \begin{cases} \Delta u_1 = 0 \text{ pour } 0 < x_1 < 2 \ , \ 0 < x_2 < \sqrt{\frac{2}{10}} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \text{ sur } [\{0\}\cup\{2\}]\times\ ]0, \sqrt{\frac{2}{10}}\ [\\ u_1 = 0 \text{ sur }]0,2[\times\{\sqrt{\frac{2}{10}}\} \\ u_1 = -\sigma_1 \dfrac{\partial u_o}{\partial x_2} \text{ sur }]0,2[\times\{0\} \end{cases}$$

$$(3.14)\qquad \gamma_1(x_1) = \frac{1}{10}\frac{\partial u_o}{\partial x_2}(x_1, \sqrt{\frac{2}{10}}), \ 0 < x_1 < 2.$$

Nous nous proposons de comparer u_ε avec $u_o+\varepsilon u_1$ et γ_ε avec $\gamma_o+\varepsilon\gamma_1$.

<u>Essai N° 1</u> :

La perturbation σ_1 est définie comme suit

$$\sigma_1(x_1) = \begin{cases} 0 \text{ si } \ x_1 \le 0.6 \ , \ x_1 \ge 1.4 \\ \dfrac{x-0.6}{0.4} \ \text{ si } 0.6 \le x_1 \le 1. \\ \dfrac{1.4-x}{0.4} \ \text{ si } 1. \le x_1 \le 1.4 \end{cases}$$

et nous avons choisi

$$\varepsilon = 0.2$$

et nous présentons

- en Figure 1 le support de u_ε et ses isovaleurs
- en Figure 2 les coupes verticales en x=1 de u_o, u_ε, $u_o+\varepsilon u_1$,
- en Figure 3 les courbes γ_o, γ_ε, et $\gamma_o+\varepsilon\gamma_1$.

Essai N° 2 :

La perturbation σ_1 est identique et nous avons pris

$$\varepsilon = 0.1 \ ;$$

les résultats sont présentés dans les Figures 4 et 5.

Essai N° 3 :

Nous prenons une perturbation plus régulière :

$$\sigma_1(x_1) = 0.5 \cos(\pi x_1) + 0.1 \quad \text{pour } 0 \leq x_1 \leq 2$$

avec la même amplitude que pour l'essai N° 1 :

$$\varepsilon = 0.2 \ ;$$

les résultats sont présentés dans les Figures 6,7,8.

Essai N° 4 :

Il est identique au précédent sauf

$$\varepsilon = 0.1$$

et les résultats sont présentés dans les Figures 9 et 10.

Essai N° 5

L'inéquation que nous étudions est un problème non linéaire parce que le convexe n'est pas un espace vectoriel ; au niveau de la formulation frontière libre, c'est précisément la frontière libre qui introduit la non linéarité. Ce problème non linéaire admet une linéarisation : c'est, d'après F. MIGNOT [10] le problème de Dirichlet sur le support de la solution (complémentaire du domaine de contact).

Afin d'évaluer l'incidence de cette non linéarité dans les formules d'accroissement finis précédentes, c'est-à-dire sur l'efficacité des correcteurs, nous avons calculé ces corrections pour le problème linéarisé correspondant. Pour l'utilisation de correcteur pour la perturbation du domaine d'un problème de Dirichlet, nous référons à P. MOREL [11].

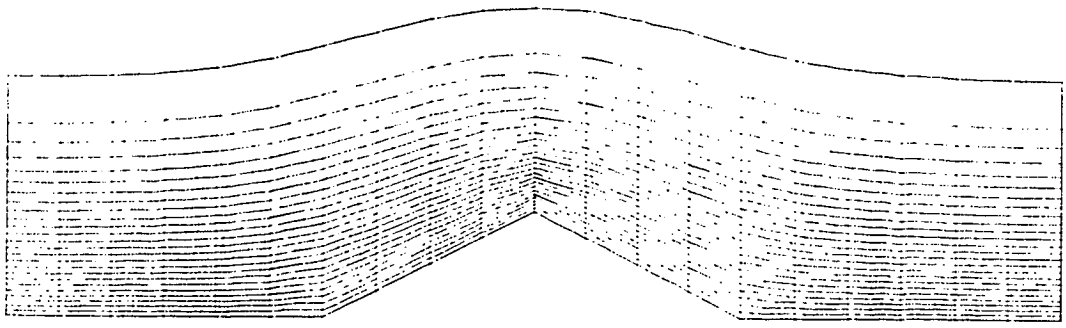
Les données sont celles de l'essai N° 4 ; la solution non perturbée $\tilde{u}_o$ est identique à u_o ; la solution perturbée $\tilde{u}_\varepsilon$ est solution du système suivant :

$$
(3.15)\qquad
\begin{cases}
\Delta\tilde{u}_\varepsilon = 0 \quad 0 < x_1 < 2 \ , \ \sigma_\varepsilon(x_1) < x_2 < \sqrt{\dfrac{2}{10}} \\
\dfrac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial x_1} = 0 \text{ sur } [\{0\} \cup \{2\}] \times]0, \sqrt{\dfrac{2}{10}}\,[\\
\tilde{u}_\varepsilon = 0 \text{ sur }]0,2[\times \{\sqrt{\dfrac{2}{10}}\} \\
\tilde{u}_\varepsilon = 1 \text{ sur } \{(x_1, \sigma_\varepsilon(x_1)),\ 0 < x_1 < 2\} \ .
\end{cases}
$$

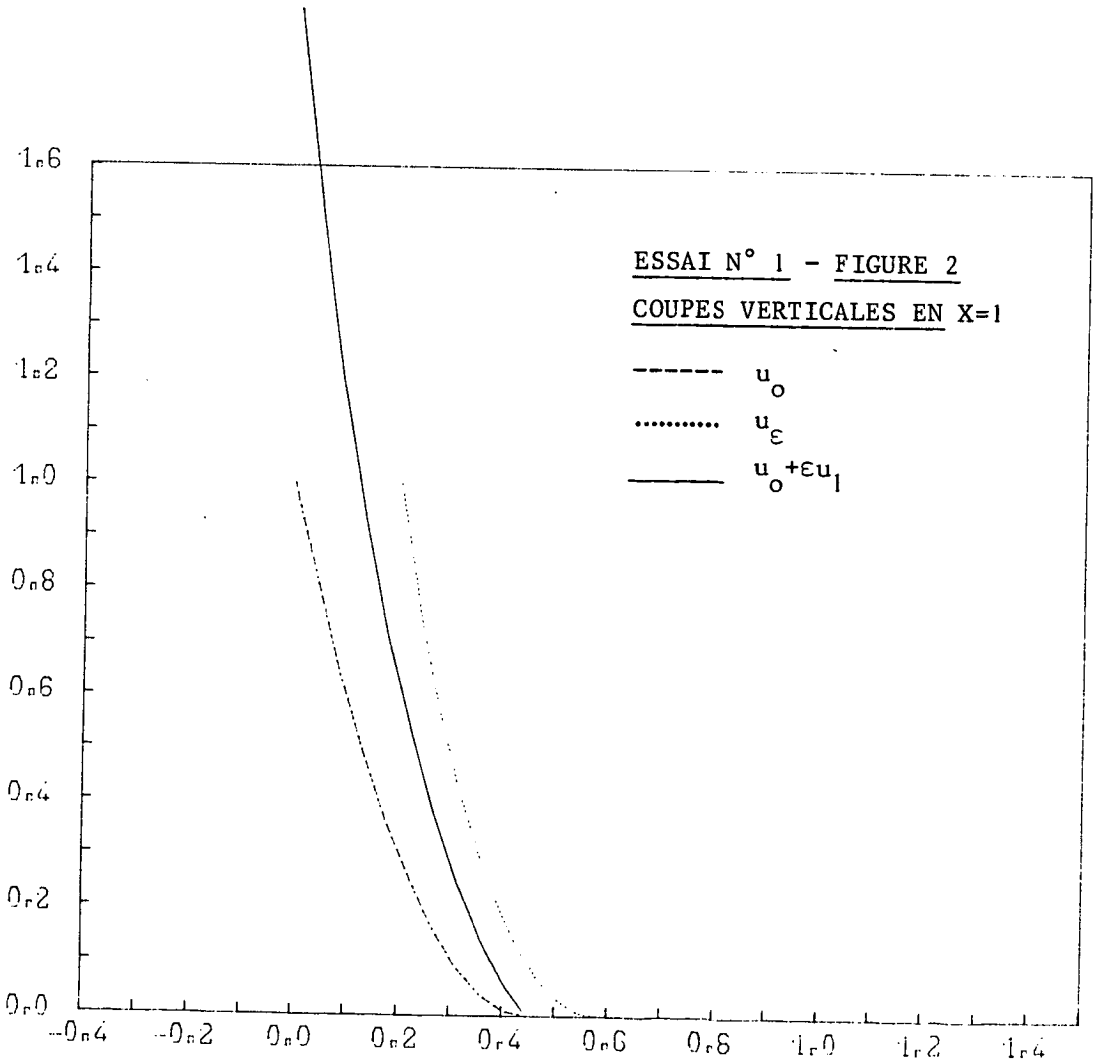
Conformément aux remarques précédentes, le terme correcteur $\tilde{u}_1$ est identique à u_1.

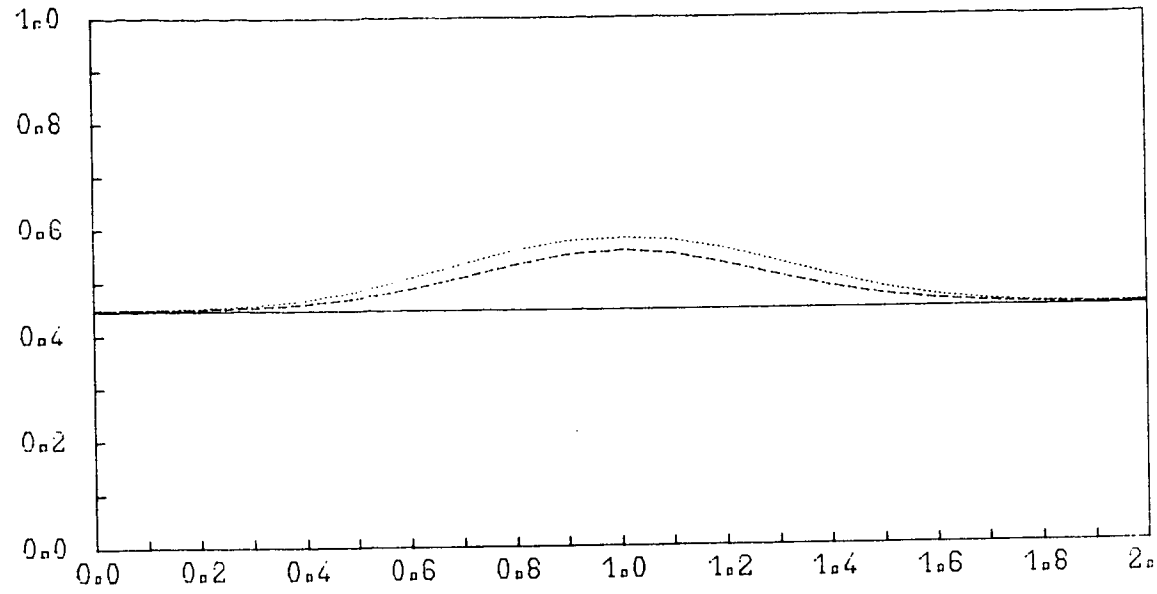
Les résultats sont présentés en Figure 11.

Au vu de ces essais, nous constatons une bonne convergence des quantités corrigées, avec une précision du même ordre que pour le problème linéaire de plus proche, surtout lorsque la perturbation est régulière.



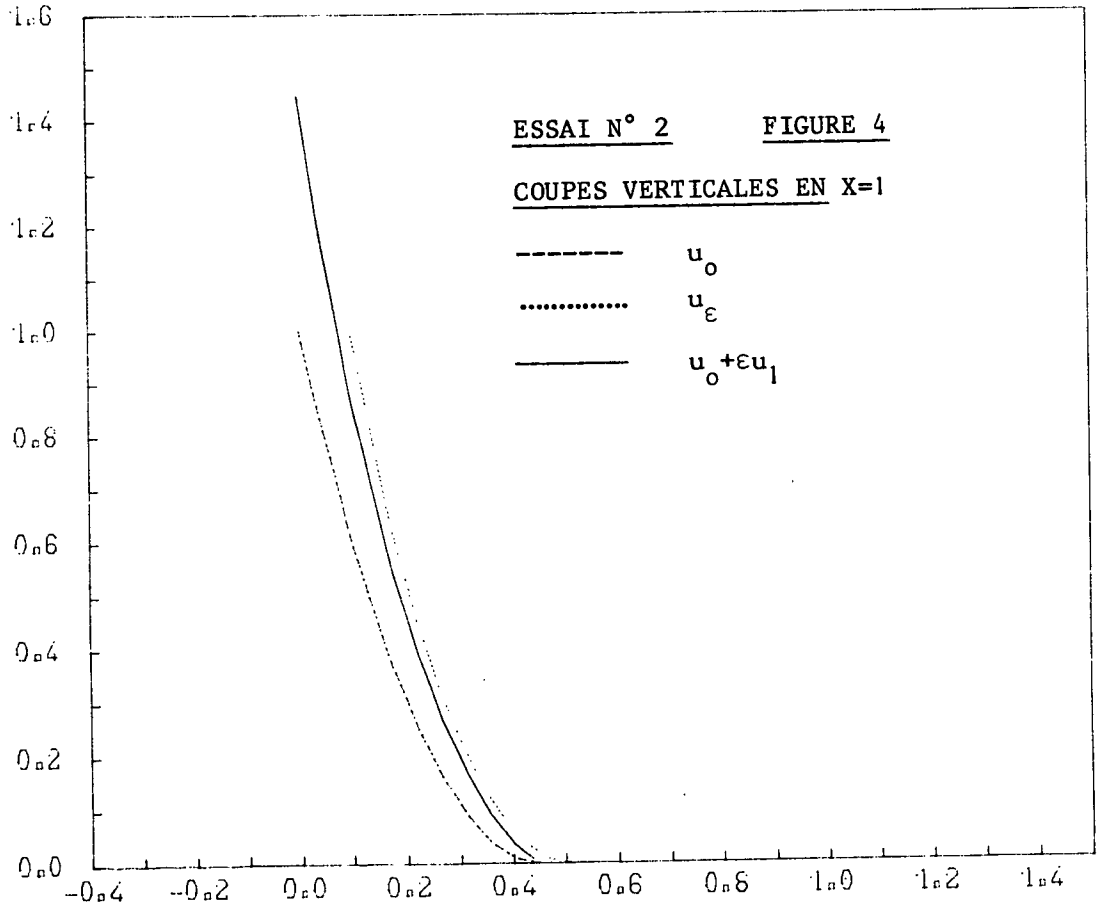
ESSAI N° 1 - FIGURE 1 isovaleurs de u_ε
frontière libre γ_ε (en haut)
frontière $\sigma_\varepsilon = \sigma_o + \varepsilon\sigma_1$ (en bas)

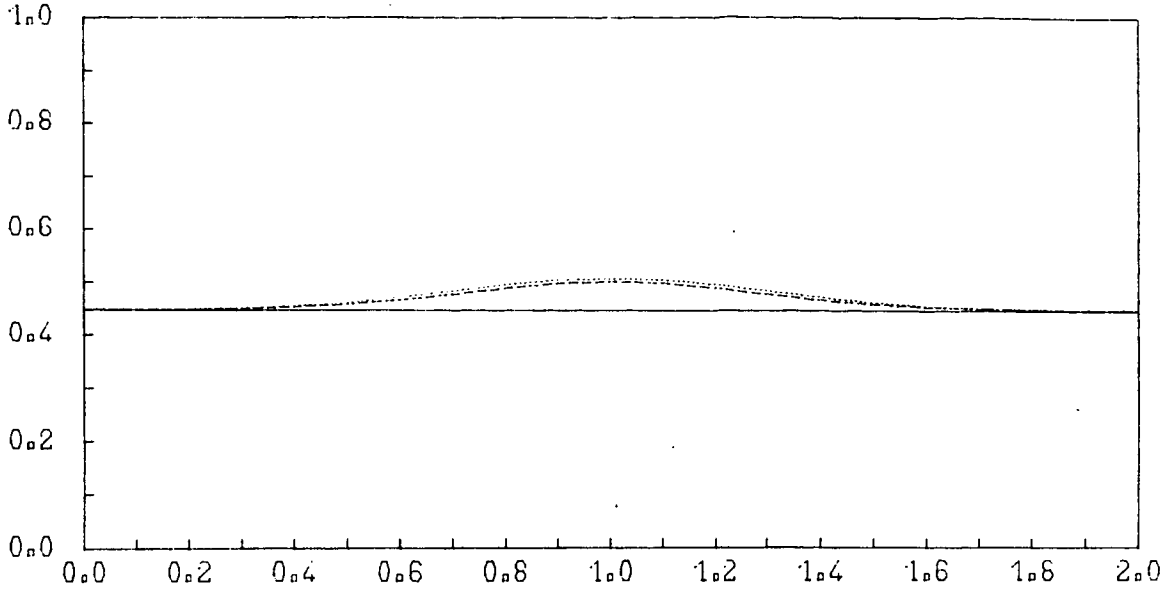




ESSAI N° 1 - FIGURE 3 FRONTIERES LIBRES

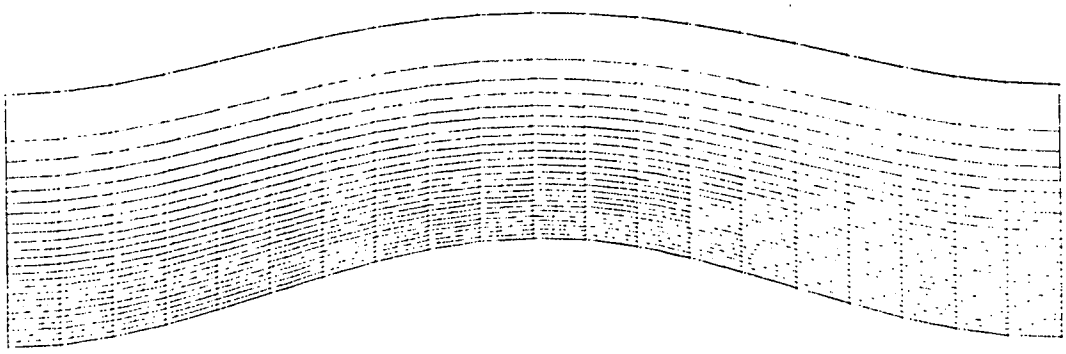
——— γ_0 ..... γ_ε --------- $\gamma_0+\varepsilon\gamma_1$





ESSAI N° 2 FIGURE 5 FRONTIERES LIBRES

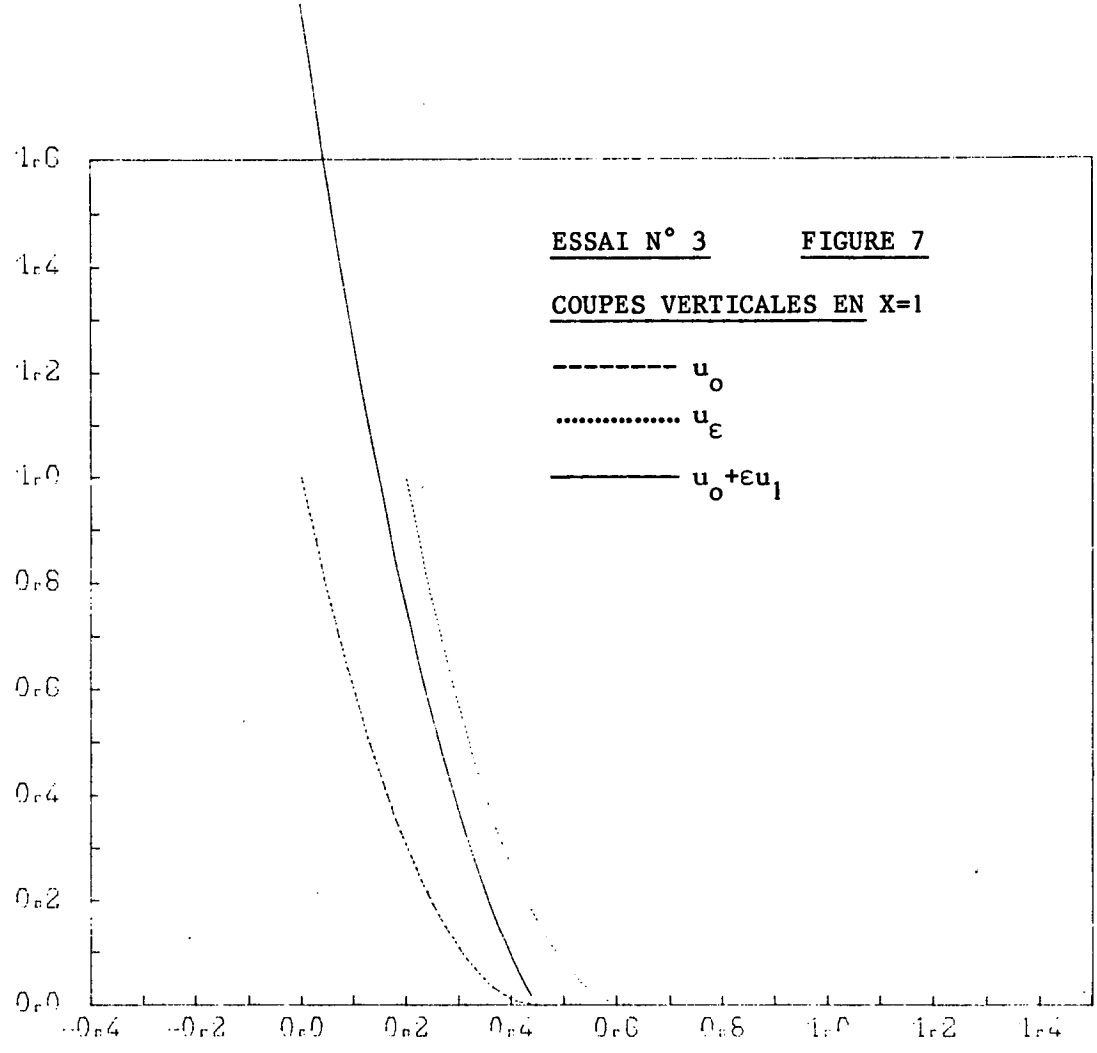
——— γ_o ..... γ_ε -------- $\gamma_o+\varepsilon\gamma_1$

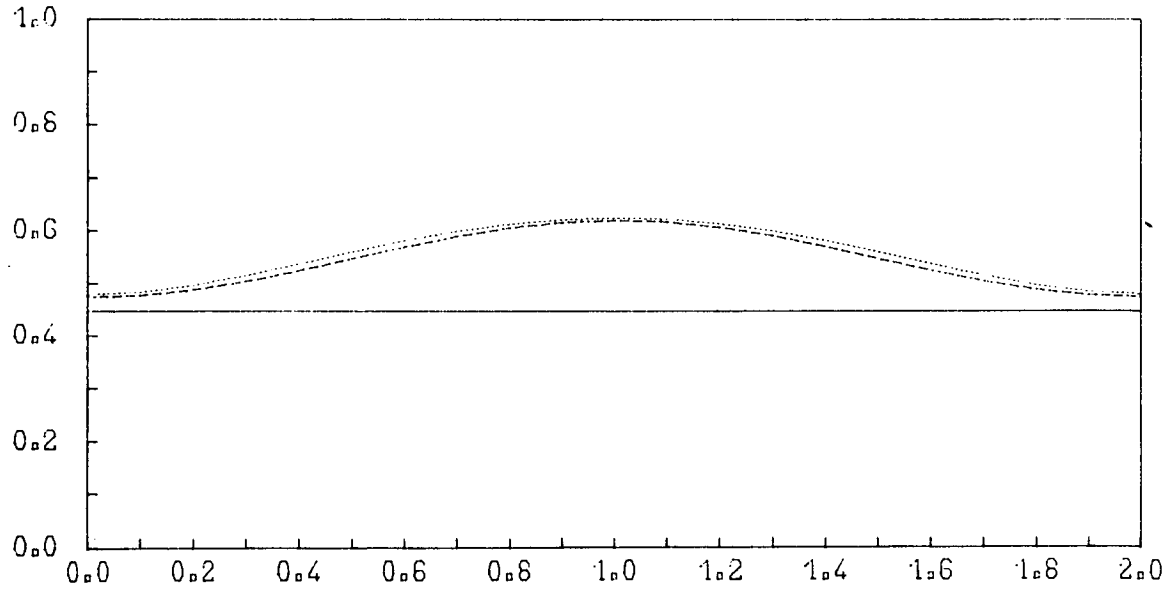


ESSAI N° 3 FIGURE 6 isovaleurs de u_ε

frontière libre γ_ε (en haut)

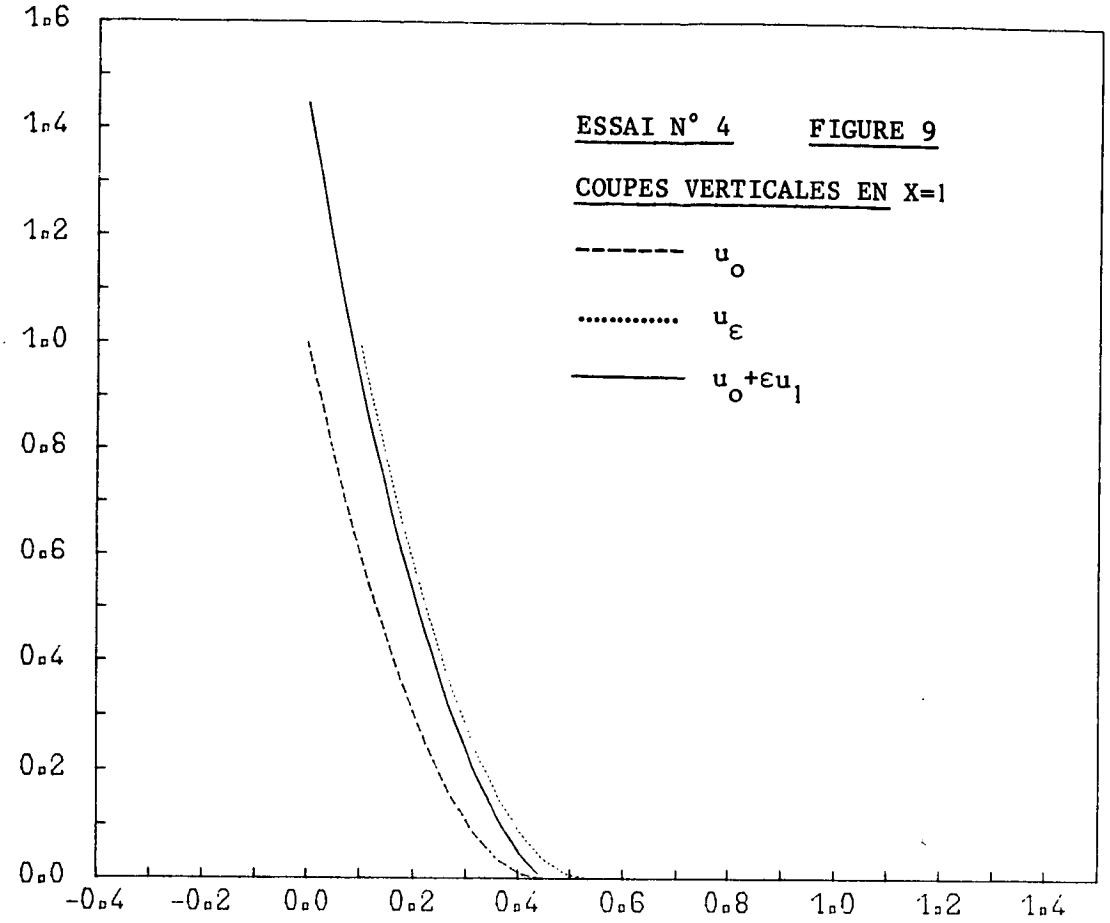
frontière σ_ε (en bas)

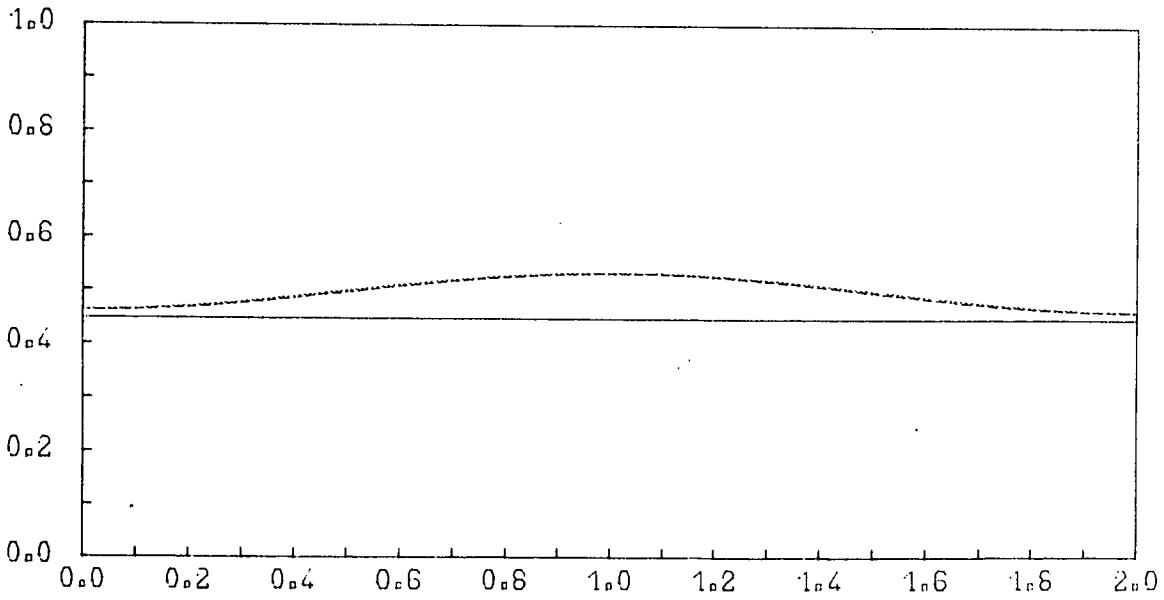




ESSAI N° 3 FIGURE 8 FRONTIERES LIBRES

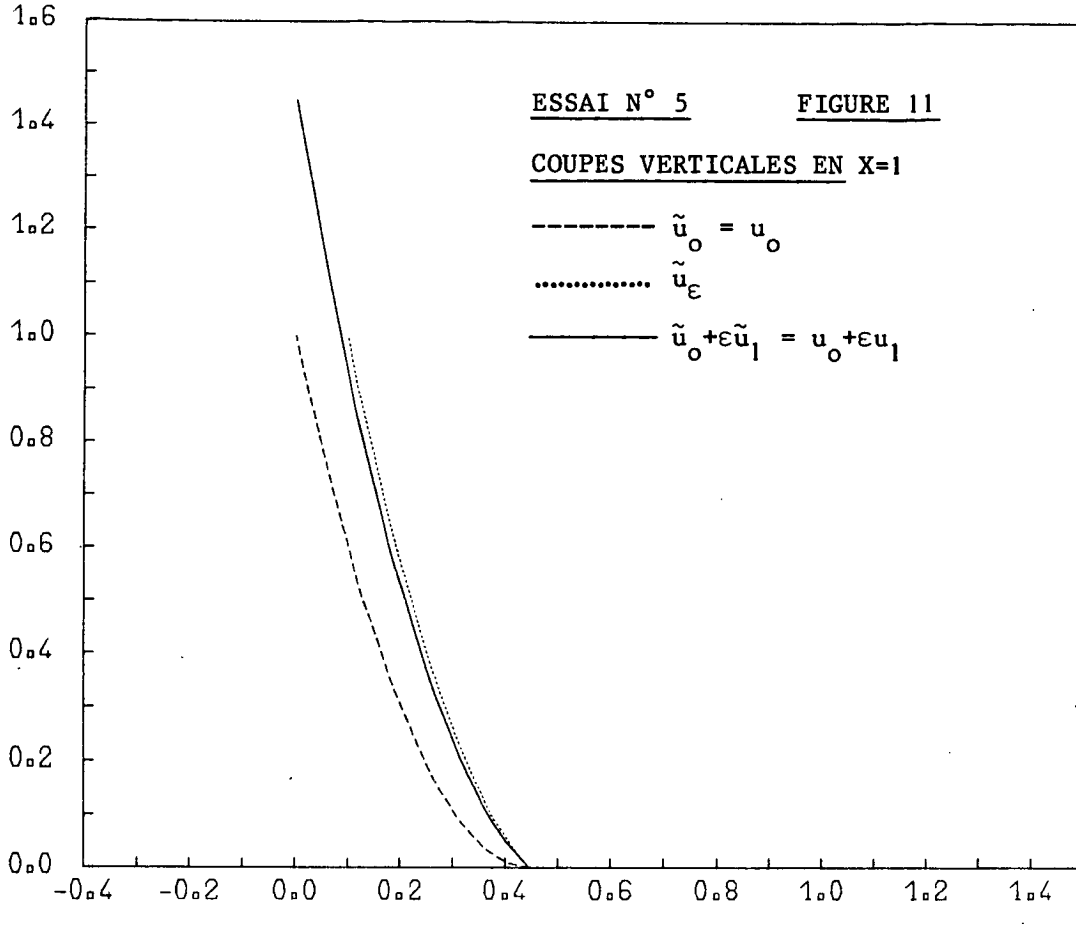
γ_o γ_ε $\gamma_o+\varepsilon\gamma_1$





ESSAI N° 4 FIGURE 10 FRONTIERES LIBRES

γ_o γ_ε $\gamma_o+\varepsilon\gamma_1$


ESSAI N° 5
FIGURE 11
COUPES VERTICALES EN X=1
$\tilde{u}_o = u_o$
$\tilde{u}_\varepsilon$
$\tilde{u}_o+\varepsilon\tilde{u}_1 = u_o+\varepsilon u_1$
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.4
-0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4

4. - CONCLUSION.

Dans ce travail nous avons étudié deux points théoriques principaux :

- la perturbation du domaine d'intégration d'une Inéquation Variationnelle Elliptique
- le comportement de la frontière libre.

A cet effet nous avons adapté la méthode de la pénalisation (Paragraphe 1) ; on pourrait également envisager d'utiliser les méthodes développées par F. MIGNOT [10] et J. SOKOLOWSKI [18].

Ces méthodes sont susceptibles de s'étendre à de nombreux autres contextes : problème de l'équilibre de deux membranes (cf. G. VERGARA-CAFARELLI [19]), analogues évolutifs, etc.

Du point de vue pratique, les termes d'ordre 1 ainsi calculés donnent de bonnes corrections dès que la perturbation des données est de taille raisonnable ; c'est en particulier le cas pour la frontière libre qui se révèle très stable dans l'exemple considéré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. BARBU, Necessary conditions for non convex distributed control problem governed by elliptic variational inequalities (à paraître).

[2] H. BREZIS, D. KINDERLEHRER, The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities, Indiana Univ. Math. J., 23, N° 9, 1974.

[3] L.A. CAFFARELLI, N.H. RIVIERE, Smoothness and Analyticity of Free Boundaries in Variational Inequalities, Annali Sci. Scuola Norm. Sup. di Pisa, 19, 289-310.

[4] A. DERVIEUX, A perturbation study of the Obstacle Problem by means of a generalized Implicit Function Theorem, Annali di Mat. Pura Appl. (à paraître).

[5] A. DERVIEUX, H. KAWARADA, Free Boundary problems for the Laplace Equation : a priori estimates, existence theorems, asymptotic behaviours, Math. Meth. in the Appl. Sci., 3 (1981) (à paraître).

[6] P.R. GARABEDIAN, Partial Differential Equations (New-York, Wiley, 1964).

[7] J.L. LIONS, Communication personnelle (1979).

[8] J.L. LIONS, Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires (Paris, Dunod, 1969).

[9] J.L. LIONS, Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles (Presses de l'Université de Montréal, 1962).

[10] F. MIGNOT, Contrôle dans les Inéquations Variationnelles Elliptiques, J. of Funct. Anal., 22, 1976.

[11] P. MOREL, Utilisation en Analyse Numérique de la formule de variation d'Hadamard, RAIRO, Avril 1973.

[12] F. MURAT, J. SIMON, Sur le contrôle par un domaine géométrique, Lab. d'Analyse Numérique, Univ. Paris VI (1976).

[13] F. MURAT, J. SIMON, Etude des problèmes d'Optimum Design, Conf. IFIP, Lectures Notes in Computer Sciences, 41 (1975).

[14] F. MURAT, J. SIMON, Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique, Lab. d'Analyse Numérique, Univ. Paris VI (1974).

[15] B. PALMERIO, A. DERVIEUX, Hadamard' Variational Formula for a Mixed problem and an application to a problem related to a Signorini-like variational Inequality, Num. Funct. Anal. and Optimization, 1, N° 2, 113-144 (1979).

[16] C. SAGUEZ, Conditions nécessaires d'optimalité pour des problèmes de Contrôle Optimal associés à des Inéquations Variationnelles, Rapport Laboria N° 345, (1979).

[17] C. SAGUEZ, Contrôle Optimal d'un système gouverné par une Inéquation Variationnelle Parabolique. Observation du domaine de contact, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Série A, 287 (1978).

[18] J. SOKOLOWSKI, Sensitivity analysis for a class of Variational Inequalities, System Research Institute of Polish Academy of Sciences (1980).

[19] G. VERGARA-CAFFARELLI, Regolarità di un problema di disequazioni variazionali relativo a due membrane, Rend. Accad. Lincei, 50 (1971) p. 659-662.