HAL open science

Approximation d'ecoulements multifluides instationnaires

Alain Dervieux

To cite this version:

Alain Dervieux. Approximation d'ecoulements multifluides instationnaires. RR-0068, INRIA. 1981. inria-00076493

HAL Id: inria-00076493

https://inria.hal.science/inria-00076493

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 68

APPROXIMATION D'ÉCOULEMENTS MULTIFLUIDES INSTATIONNAIRES

Alain DERVIEUX

Avril 1981

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 68

APPROXIMATION D'ÉCOULEMENTS MULTIFLUIDES INSTATIONNAIRES

Alain DERVIEUX

Avril 1981

APPROXIMATION D'ECOULEMENTS MULTIFLUIDES INSTATIONNAIRES*

Alain DERVIEUX

RESUME :

On s'intéresse aux écoulements modélisés par les équations de Navier-Stokes. Après un rappel des équations, on passe en revue les principales méthodes existantes : méthodes Lagrangiennes, méthodes Eulériennes.

ABSTRACT :

We are interested by flows modelized by the Navier-Stokes equations. We recall the general equations and present a review of the main (Eulerian, Lagrangian) methods.

* Cours au Séminaire INRIA sur la "Simulation Numérique en Mécanique des Fluides par la méthode des Eléments Finis", Nice (France), 19-23 Janvier 1981.

INTRODUCTION

Le but de ce rapport est de passer en revue les méthodes numériques utilisées pour calculer des écoulements bidimensionnels instationnaires de plusieurs matériaux non miscibles obéissant à des lois physiques de même nature.

Ce type d'écoulement intervient dans de nombreux problèmes physiques :

- en Mécanique des Fluides : jets, vagues, instabilités interfaciales...(1)
- en Mécanique des solides : impacts, détonique...
- en Magnétohydrodynamique (plasmas...)
- etc...

On s'intéressera ici seulement aux deux premiers types d'application, qui correspondent à des modélisations voisines, du type Navier-Stokes évolutif, compressible ou non, avec des interfaces ou des surfaces libres, en insistant un peu plus sur la Mécanique des Fluides ; on passera sous silence les problèmes de chocs et les problèmes liés à la turbulence.

Ce rapport est la version rédigée d'une partie de la conférence faite dans le cadre d'un séminaire INRIA sur les Eléments Finis ; or d'une part, la grande majorité des codes multifluides ont été réalisés en Différences Finies(2) et les méthodes utilisées ont vocation à s'appliquer ou se transposer aux Eléments Finis ; d'autre part il est intéressant de comparer les mérites des deux méthodes (Différences/Eléments) ; par conséquent on traitera ici indifféremment les Différences Finies et les Eléments Finis, à l'exclusion des autres procédés de discrétisation (méthodes spectrales, singularités...)

La lecture de ce qui suit suppose relativement peu de connaissances en Analyse Numérique et en Mécanique des Fluides. Le lecteur pourra approfondir ces sujets en se référant à ROACHE [1] pour les Différences Finies, CHUNG [1] et THOMASSET [1] pour les Eléments Finis appliqués à Navier-Stokes et GERMAIN [1], CHORIN-MARSDEN [1] pour la Mécanique des Fluides.

---

(1) On ne parlera pas des écoulements poreux.

(2) on y inclus les "Volumes Finis".

En ce qui concerne le sujet de ce rapport, il existe quelques autres travaux de synthèse : j'ai fait quelques emprunts à LASCAUX [1] ; on trouvera aussi d'intéressantes discussions dans TURKEL [1] et VAN GOETHEM [1](1).

La présentation est le résultat de plusieurs choix :

- on cherche à fournir un assez grand nombre de références en définissant brièvement leur contenu
- pour les écoulements multifluides les méthodes d'approximation et les difficultés numériques rencontrées sont souvent bien comprises à travers une figure ; on en présentera donc souvent de préférence à des développements ou à des équations.

L'essentiel des équations est d'ailleurs rassemblé dans un premier chapitre.

Il y a de nombreuses manières de classer des méthodes d'approximation d'écoulements ; la classification la plus spécifique au cas multifluide suit le choix du repère utilisé (repère Eulérien, Lagrangien, intermédiaire). Nous distinguerons donc les méthodes où le maillage est susceptible de bouger (deuxième chapitre) et celles ou le maillage est fixe (troisième chapitre).

De nombreux codes qui ont a priori vocation à appartenir aux deux groupes précédents seront traités dans le deuxième chapitre car à mon avis l'option maillage variable nécessite à l'heure actuelle certains sacrifices.

Tout en ne voulant pas être exhaustive, cette compilation a l'ambition d'atteindre une certaine homogénéité : toute suggestion, remarque ou rectification sera la bienvenue.

Le plan est le suivant :

1. - LES EQUATIONS
    1.1. Equations de conservation, repère Eulérien
    1.2. Equations de conservation, repère quelconque
    1.3. Formulation variationnelle, cas incompressible

---

(1) Voir aussi la première référence citée dans HARLOW-AMSDEN [2]

2. - METHODES A MAILLAGE VARIABLE
2.1. Quadrilatères
2.1.1. Méthodes purement Lagrangiennes
2.1.2. Maillage variable du type ALE
2.2. Triangles
2.3. Méthode Mixte Euler-Lagrange

3. - METHODES A MAILLAGE FIXE
3.1. Interfaces Lagrangiennes
3.1.1. La famille MAC
3.1.2. Un exemple compressible : SMITE
3.2. Méthodes continues
3.2.1. Le code SOLA-VOF
3.2.2. Le code CEE
3.2.3. Un code en Eléments Finis non conformes

CONCLUSION.

1. - LES EQUATIONS.

Les paragraphes 1.1 et 1.2 suivent grosso modo LASCAUX [1].

1.1. Equations de conservation, repère Eulérien.

On considère des écoulements 2-D en symétrie plane ou 3-D de matériaux non visqueux en supposant que le tenseur des contraintes est sphérique, le comportement de chaque matériau étant défini par son équation d'état

$$p = f(\rho, e) \tag{1.1}$$

où p, ρ, e sont respectivement la pression, la densité et l'énergie interne par unité de masse.

Dans un repère orthonormé fixe $Ox_1x_2x_3$ (coordonnées d'Euler) les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent pour chaque matériau

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho f_i \ , \ i=1,3 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho e u_j) + p \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \rho S_e \tag{1.4}$$

où $\vec{u} = (u_i(x,t))$ est la vitesse d'une particule matérielle en fonction du temps t et de sa position x à l'instant t ; e est l'énergie interne par unité de masse ; $\vec{f} = (f_i)$ représente les forces extérieures par unité de masse et S_e l'apport d'énergie extérieure par unité de masse.

On ne prend pas en compte ici le phénomène de diffusion d'énergie qui reviendrait à introduire des termes supplémentaires dans (1.4).

Dans le cas visqueux (1.3) devient (cf. par exemple CHORIN-MARSDEN [1])

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} + \rho f_i, \ i=1,3 \tag{1.5}$$

où σ_{ij} est le <u>tenseur des contraintes</u>

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu[D_{ij} - \frac{1}{3}\,\mathrm{div}\,\vec{u}\,\delta_{ij}] + \zeta\,\mathrm{div}\,\vec{u}\,\delta_{ij} \tag{1.6}$$

où D_{ij} est le <u>tenseur des déformations</u>

$$\left\{\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{2}[\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{u} + {}^{t}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{u})\,]\ ^{(1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \end{aligned}\right. \tag{1.7}$$

et où μ et ζ sont respectivement les <u>premier et second coefficients de viscosité</u> ; d'autre part la conservation de l'énergie interne doit être corrigée par la variation de l'énergie cinétique correspondante

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \sum_{j=1}^{3}(\rho e u_j) + p\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - 2\mu\sum_{j=1}^{3}u_j[D_{ij} - \frac{1}{3}\,\mathrm{div}\,\vec{u}\,\delta_{ij}] \\ &-\zeta\sum_{j=1}^{3}u_j\,\mathrm{div}\,\vec{u}\,\delta_{ij} = \rho S_e \end{aligned}\right. \tag{1.8}$$

Ces équations sont reliées par des conditions sur les interfaces : égalité des pressions, des composantes normales des vitesses et des contraintes[2] ; sur les autres bords (y compris les <u>surfaces libres</u>), on impose la vitesse normale ou la pression.

<u>Remarque 1</u> : <u>Compressibilité limitée</u> (HIRT-NICHOLS [1]).

Ce type de modélisation intervient dans des écoulements d'eau à haute pression qui ne nécessitent pas un modèle compressible complet ; on part des équations compressibles

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \\ &\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\mathrm{grad}\,u = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + f \end{aligned}\right. \tag{1.9}$$

et on suppose que (1.1) s'écrit

---

(1) ${}^{t}A$ est la transposée de A ; $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{u}$ est la matrice $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$; $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{u} - D_{ij}$ correspond aux rotations rigides.

(2) Cas non visqueux ; le cas visqueux est précisé plus loin.

$$(1.10) \qquad \frac{dp}{de} = C^2$$

où C est la vitesse adiabatique du son, supposée constante ; on suppose enfin que la variation globale de la densité est très petite

$$(1.11) \qquad \frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1 \quad \text{(ce qui implique } \frac{\|\vec{u}\|}{C} \ll 1\text{)} \ ;$$

alors, au premier ordre, (1.9) devient ($\rho \simeq \rho_0 = 1$) :

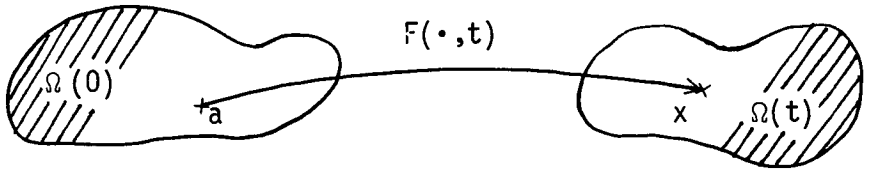
$$(1.12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\text{grad } u = - \text{grad } p + f \\[2ex] \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial p}{\partial t} + \text{div } u = 0 \end{cases}$$

1.2. Equations de conservation, repère quelconque.

Les limites géométriques du domaine matériel (bords fixes ou mobiles, interfaces, frontières libres) sont susceptibles d'évoluer au cours de la simulation et il est alors utile de choisir un système de coordonnées lui aussi variable au cours du temps.

On se place dans $\mathbb{R}^3$, on suppose que le[1] fluide occupe le domaine $\Omega(0)$ au temps t=0 et $\Omega(t)$ au temps $t > 0$ de telle sorte que l'on puisse définir une correspondance biunivoque F entre $\Omega(0)$ et $\Omega(t)$, régulière par rapport aux variables spatiales et dépendant régulièrement de t.

Pour t fixé on a donc le diagramme



et les notations

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = (x_i) = (F_i(a_1,a_2,a_3,t))$$

$$a_i = F_i(a_1,a_2,a_3,0)$$

---

(1) La construction est envisagée pour chaque fluide.

le Jacobien de la carte F s'écrit

$$J(t) = \frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(a_1,a_2,a_3)} = \det\left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{a}}(\cdot,t)\right]$$

et la vitesse du repère $\vec{U}$ est définie par

$$U_i(a,t) = \frac{\partial F_i}{\partial t}(a,t)$$

$$U_i(x,t) = \frac{\partial F_i}{\partial t}(F^{-1}(x,t),t)$$

où F^{-1} est la réciproque de F à t constant

$$F[F^{-1}(x,t),t] = x \ ; \ F^{-1}[F(a,t),t] = a.$$

Les équations (1.2),(1.3),(1.4), valables pour le repère en (a_1,a_2,a_3) s'écrivent à l'aide des dérivées $\frac{\partial}{\partial x_i}$ relatives au nouveau repère (x_1,x_2,x_3) de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho J) + J\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}[\rho(u_j-U_j)] = 0 \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i J) + J\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}[\rho u_i(u_j-U_j)] + J\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho J f_i \ , \ i=1,3 \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e J) + J\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}[\rho e(u_j-U_j)] + Jp\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \rho J S_e \tag{1.15}$$

et on leur adjoint le déplacement du repère

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = U_i \quad i=1,3 \ . \tag{1.16}$$

La notation $\frac{\partial}{\partial t}$ a besoin d'être précisée : il s'agit de la dérivation partielle pour a fixé :

$$\frac{\partial}{\partial t} g = \frac{\partial}{\partial t} g(a,t) \ ; \tag{1.17}$$

la dérivation est donc prise suivant les trajectoires[1] $t \to x(t)$; il est aussi pratique de calculer ces dérivées sur $\Omega(0)$ (cf. LASCAUX [1]).

Intéressons-nous aux termes de convection, seconds termes des sommes (1.13), (1.14), (1.15) : leur approximation est une des difficultés principales : les schémas stables s'accompagnent souvent d'une diffusion numérique trop importante et une des ambitions des méthodes à maillage variable est de réduire cette diffusion ; cela est radicalement le cas pour $\vec{U} = \vec{u}$, où le repérage est dit purement Lagrangien et pour lequel les termes de convection disparaissent ! Inversement pour $\vec{U} = 0$ on retrouve la formulation Eulérienne du paragraphe précédent. Il existe un certain nombre de méthodes intermédiaires (par exemple Arbitraires Eulériennes Lagrangiennes "ALE") suivant le choix de $\vec{U}$ qui reste donc à préciser ; en général $\vec{U}$ est une perturbation de $\vec{u}$ suivant un processus discret, mais on peut aussi construire une mise en équation comportant le calcul de $\vec{U}$.

Remarque 2 : Dans le cas incompressible (div $\vec{u} = 0$) on a J = constante et pour certains schémas on en déduit que le volume de chaque cellule doit être constant. ■

1.3. Formulation variationnelle, cas incompressible[2]

On s'intéresse maintenant au mouvement de deux matériaux incompressibles remplissant une enceinte fixe Ω ; en particulier l'équation d'état est la même ce qui va permettre d'établir une formulation variationnelle globale. Autant du point de vue théorique que pratique, il est intéressant de considérer le cas visqueux, qui possède certaines propriétés de coercivité. Les équations de conservation deviennent

$$\sum_j \frac{\partial u_j^\alpha}{\partial x_j} = 0 \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^\alpha u_i^\alpha) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho^\alpha u_i^\alpha u_j^\alpha) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}^\alpha - \rho^\alpha f_i \tag{1.19}$$

---

(1) distinctes a priori des trajectoires matérielles

(2) On trouvera une discussion de la formulation variationnelle compressible dans VAN GOETHEM [1].

avec

$$(1.20) \qquad \sigma^{\alpha}_{ij} = -p^{\alpha}\,\delta_{ij} + \mu^{\alpha}\left(\frac{\partial u^{\alpha}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^{\alpha}_j}{\partial x_i}\right) ;$$

l'indice α=1 ou 2 est relatif au matériau considéré ; la condition (1.18) est issue de la condition d'incompressibilité ρ = constante qui est valable seulement dans chaque fluide, à l'inverse de (1.18) ; on a utilisé (1.18) pour simplifier le terme visqueux dans (1.20). On suppose $\mu^{\alpha} \neq 0$, α =1,2, et la <u>condition au bord</u> est la suivante

$$(1.21) \qquad \vec{u}|_{\partial\Omega} = 0.$$

A l'instant $t>0$ les fluides 1 et 2 occupent respectivement les régions $\Omega^1(t)$ et $\Omega^2(t)$ ($\overline{\Omega}^{\,1}(t) \cup \overline{\Omega}^{\,2}(t) = \overline{\Omega}$) séparées par une interface $\mathcal{L}(t)$ que l'on suppose être une courbe en dimension 2, une surface en dimension 3 suffisamment régulière ; on a le long de $\mathcal{L}(t)$ les <u>conditions d'interface</u>

$$(1.22) \qquad \begin{cases} \vec{u}^{\,1} = \vec{u}^{\,2} \\ \sum_{j=1}^{n} (\sigma^1_{ij} - \sigma^2_{ij}) n_j = 0 \quad i=1,3 \qquad \text{sur } \mathcal{L}(t) \quad \forall t>0 \\ v_n = \vec{u}^1 \cdot \vec{n} \end{cases}$$

où $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ est la normale extérieure à $\Omega^{\,1}$ et v_n la valeur algébrique de la vitesse de déplacement de $\mathcal{L}(t)$ le long de cette normale.

On complète par les <u>conditions initiales</u>

$$(1.23) \qquad \begin{cases} u^{\alpha}(x,0) = u^{\alpha}_0(x) \text{ dans } \Omega^{\alpha}(0) \\ \Omega^{\alpha}(0) = \Omega^{\alpha}_0 \quad \alpha=1,2. \end{cases}$$

On considère les espaces de fonctions mesurables suivants :

$$L^2(\Omega) = \{ \phi : \Omega \to \mathbb{R} \ ; \int_\Omega |\phi|^2 \, d\Omega < +\infty \}$$

$$H^1(\Omega) = \{ \phi : \Omega \to \mathbb{R} \ ; \ \phi \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \ (i=1,3) \in L^2(\Omega) \}$$

$$V = \{ \vec{v} \in H^1(\Omega)^3 \ , \ \text{div } \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega, \ \vec{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

Ces espaces sont munis des normes habituelles ; on définit aussi

$$Q = \Omega \times]0,T[$$

$$L^\infty(Q) = \{ \phi : Q \to \mathbb{R} \ ; \ \text{supess } \phi < +\infty \}$$

$$L^2(0,T;V) = \{ \phi :]0,T[\to V \ ; \int_0^T \|\phi\|_V^2 \, dt < +\infty \}.$$

On fait l'hypothèse

$$\mu^1 = \mu^2 = \mu$$

et on pose

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho^1 \text{ dans } \Omega^1(t) \\ \rho^2 \text{ dans } \Omega^2(t) \end{cases}$$

$$\vec{u}(x,t) = \begin{cases} \vec{u}^1 \text{ dans } \Omega^1(t) \\ \vec{u}^2 \text{ dans } \Omega^2(t) \ . \end{cases}$$

Alors le système (1.18) à (1.22) peut s'écrire sous la forme suivante

trouver $\vec{u} \in L^2(0,T;V)$ et $\rho \in L^\infty(Q)$ assez réguliers en temps tels que

(1.24) $$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \vec{v} \in L^2(0,T;V) \\ \displaystyle\int_Q \{\rho v_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho v_i \, \vec{u}\cdot\vec{\text{grad}}\, u_i + \mu \, \vec{\text{grad}}\, u_i \cdot \vec{\text{grad}}\, v_i - \rho_i f_i v_i\} \, d\Omega \, dt = 0 \end{array} \right\}$$

(1.25) $\vec{u}$ satisfait à $(1.23)_1$

(1.26) $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\text{grad}}\, \rho = 0$ dans $\mathcal{D}'(Q)$

$$(1.27) \qquad \rho(x,0) = \chi_{\Omega_0^1}\, \rho^1 + (1-\chi_{\Omega_0^1})\, \rho^2$$

($\chi_{\Omega_0^1}$ = Fonction caractéristique de Ω_0^1).

Le cas $\mu^1 \neq \mu^2$ se traite en posant $\mu = \mu(\rho)$.

Cette formulation se prête à une discrétisation facile mais on ne connait de résultats d'existence ($\mu^1 = \mu^2$) que pour des formulation plus faibles (KAJIKOV [1], LIONS [1,2]). La coercivité spatiale en vitesse est mise en évidence par le choix de l'espace V. L'équation (1.26), qui s'entend au sens des distributions est elle aussi coercive en un certain sens (FRIEDRICHS [1]) via (1.18). Remarquons enfin que l'on a éliminé la pression ; une transposition discrète de cette formulation nécessité la construction d'éléments à divergence nulle ; pour un code multifluide déduit de cette formulation, cf. DERVIEUX-THOMASSET [1] ; dans d'autres codes (par exemple WELCH-HARLOW-SHANNON-DALY [1], DALY [1]) on a une formulation variationnelle globale mais sans élimination de la pression.

2. - METHODES A MAILLAGE VARIABLE.

Ce sont les méthodes dans lesquelles la vitesse $\vec{U}$ du repère est non nulle ; concrètement $\vec{U}$ est la vitesse du maillage. Ces méthodes ont en commun la vocation de suivre les bords (limites du domaine, interfaces, surfaces libres) à l'aide du maillage de façon à ne pas avoir de cellules mixtes (c. à d. contenant des matériaux différents[1]).

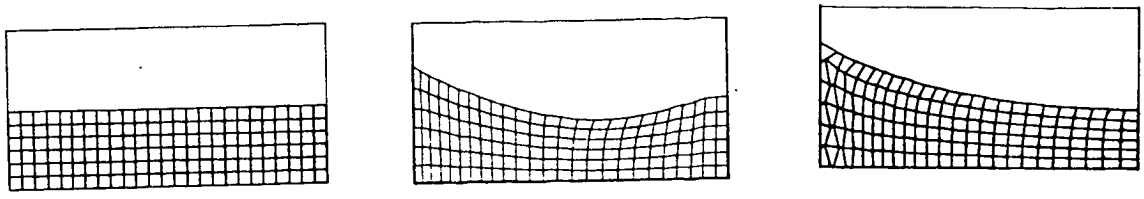
2.1. Quadrilatères.

2.1.1. Méthodes purement Lagrangiennes.

Ce sont les méthodes les plus anciennes ; il n'y a pas terme de convection ; ces méthodes sont les ancêtres des méthodes "ALE".

On distingue les travaux de GOAD [1] (code WAT, 1960), NOH [1] (code CEL ; 1964) : dans ce Code Eulérien Lagrangien un des fluides est simulé en repère Eulérien et l'autre en repère Lagrangien. Citons aussi le code LINC (HIRT-LOOK-BUTLER [1], 1970) qui est incompressible et est appliqué à des phénomènes de vague (Fig. 1).

([1]) le vide étant considéré comme un matériau ("cellules-Frontières") ; la cellule est l'élément fondamental du maillage.



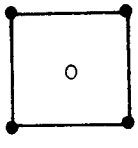
t = 0.0 t = 0.72 t = 4.0

Figure 1

LINC : formation d'un ménisque dans un réservoir.

Nous allons décrire brièvement un code compressible Lagrangien réalisé au C.E.A. (LASCAUX [1], DESGRAZ-LASCAUX [1]).

Comme dans les trois codes cités plus haut les degrés de liberté des inconnues sont arrangés comme suit



● x,y,u,v[1] "Q_1"

o p, ,e "Q_o"

avec une interpolation isoparamétrique bilinéaire "pondérée par les aires en différences finies" pour les degrés aux sommets on a une approximation mixte Q_1, Q_o suivant la terminologie des Eléments finis.

Ce choix appelle quelques commentaires :

Il est naturel de vouloir considérer des cellules matérielles de masse fixe et à cet effet la définition de cellules quadrilatérales par leur sommet semble l'option la plus raisonnable : on définit donc les coordonnées et la vitesse aux sommets.

Supposons l'écoulement <u>incompressible</u>.

Il est clair d'abord que les degrés de liberté de la pression, qui correspondent à des contraintes sur la vitesse ne doivent pas être trop nombreux par rapport aux degrés en vitesse sinon le mouvement rigide devient la seule solution discrète ; seuls les choix Q_1 ou Q_o pour la pression semblent à ce point de vue raisonnable.

([1]) u vitesse horizontale, v vitesse verticale

Le choix p "Q_1" (en différences finies : schéma à grille unique) est assez catastrophique car le calcul de la divergence de u en un sommet A ne fait pas intervenir en maillage orthogonal à pas constant la valeur de u en A : on a donc un découplage complet des noeuds pairs et impairs qui rend le schéma très fragile aux instabilités.

Le schéma p "Q_0" (grille de pression décalée) a été introduit pour tenter d'éviter cet avatar, ce qui n'est d'ailleurs pas complètement réalisé(1). En effet, on constate que la contrainte div u = 0 autorise un mouvement en bascule d'un des côtés de la cellule (Fig. 2).

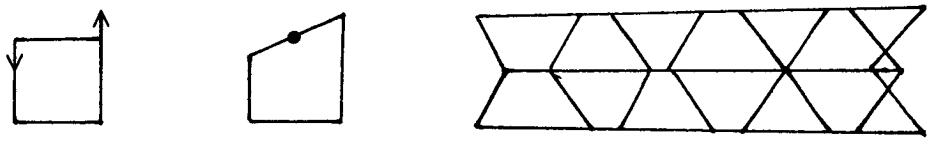


Figure 2 : instabilité en sablier

Si l'on considère plusieurs cellules on a une instabilité alternée (Fig. 1 et 2) qui peut aboutir à un croisement du maillage.

Le problème existe encore dans le cas compressible ; on trouvera dans DESGRAZ-LASCAUX [1] une description des modes instables susceptibles d'être obtenus.

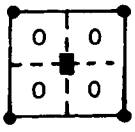
Ces instabilités en sablier (désignées par les anglophones à l'aide du terme plus général "alternating error") se développent au cours du temps via l'accumulation d'erreurs provenant souvent de conditions aux limites difficiles à bien discrétiser (CHAN [1]).

La conséquence de ce phénomène est une forte limitation sur la durée de la simulation.

Pour combattre cet ennui on pourrait rajouter des degrés de liberté en pression (ou densité) ; par exemple

---

(1) La grille MAC (Paragraphe 3.1.1.) se rapproche plus de ce but.



● x y u v

o p,ρ

■ e

on découpe le quadrilatère en quatre et on prend des éléments Q_0 sur le sous découpage ; on retombe alors sur un déséquilibre vitesse/pression qui aboutit à un mouvement plus ou moins rigide (schéma implicite, cas incompressible) on a des oscillations en densité et pression (cas compressible, schéma explicite).

DESGRAZ et LASCAUX [1] proposent d'utiliser un tel sous-découpage de manière temporaire, une projection de la densité et par conséquent des termes pression, y compris la pseudo-viscosité, étant effectuée à chaque pas de temps. L'amélioration obtenue est mise en évidence dans les Figures 3 à 4, qui montrent les résultats de la simulation du télescopage de trois plaques A,B,C dans un mur D. Le problème physique est monodimensionnel ; le maillage non orthogonal de la plaque B va permettre l'apparition de phénomènes bidimensionnels non physiques.

Dans ce type de code (compressible), on se débrouille pour avoir une matrice de masse diagonale ("mass lumping") afin d'avoir un schéma en temps explicite. Puisque les termes de convection disparaissent en repérage Lagrangien, on a en décalant l'approximation en temps des différentes inconnues un schéma explicite d'ordre deux en écrivant par exemple pour les vitesses (LASCAUX [1]) :

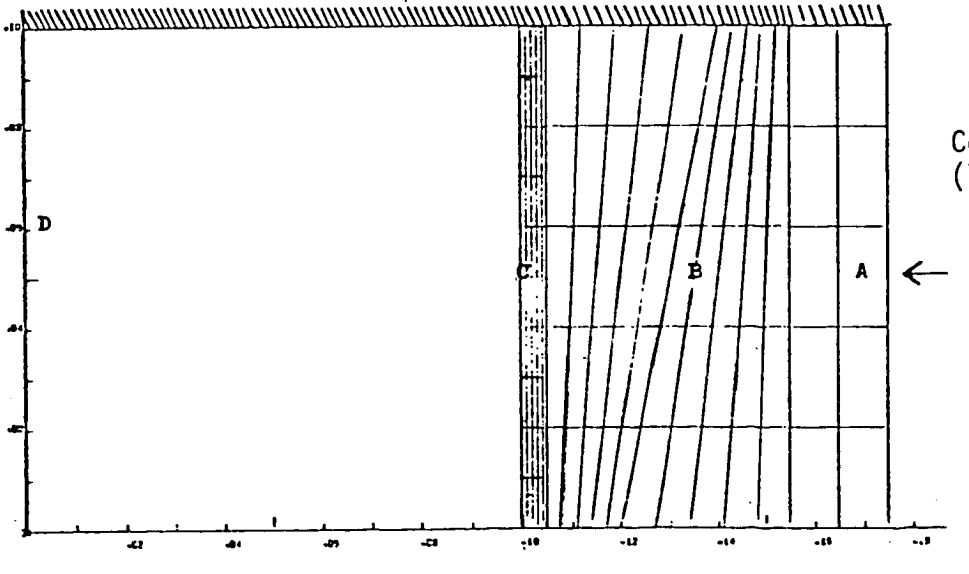


Figure 3

Collision de plaques (DESGRAZ-LASCAUX [1])

Initialisation

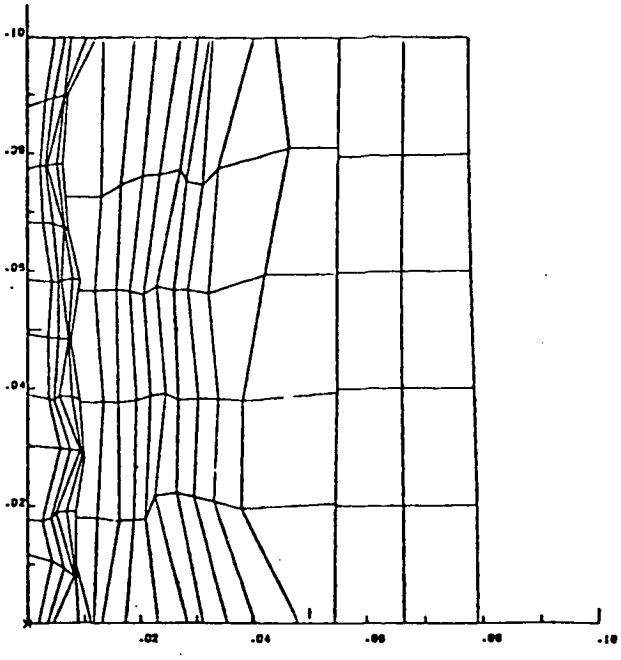
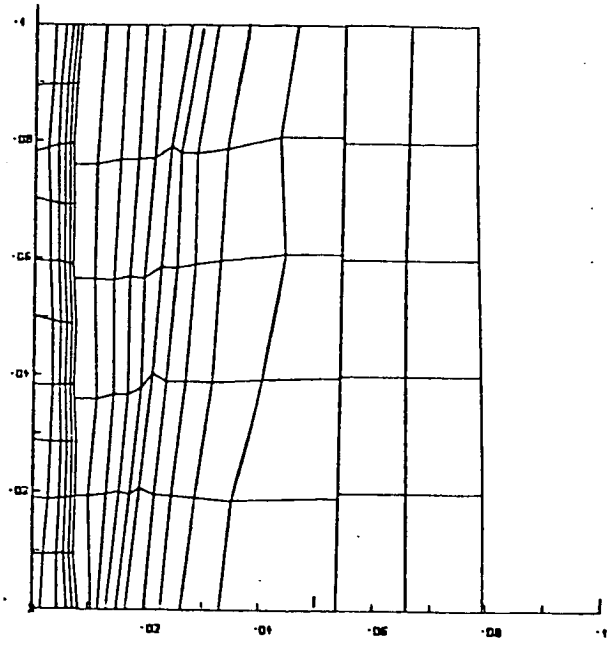


Schéma de WILKINS [1]



DESGRAZ-LASCAUX [1]

$$(2.1)\qquad \begin{cases} M\,\dfrac{u^{m+1/2}-u^{m-1/2}}{\delta t} + Ap^m = f_1^m \\[2ex] M\,\dfrac{v^{m+1/2}-v^{m-1/2}}{\delta t} + Bp^m = f_2^m \end{cases}$$

(M : matrice de masse diagonale (/diagonalisée)).

Le schéma résultant est stable si une condition de Courant-Friedrichs-Lewy est vérifiée (DESGRAZ-LASCAUX [1])

$$(2.2)\qquad \frac{C_Q\,\delta t}{\ell_Q} < 1 \quad \forall \text{ le quadrilatère } Q$$

où C_Q est la vitesse du son et ℓ_Q une quantité représentant l'épaisseur de Q. Il faut donc que

1) - la vitesse du son C_Q ne soit pas trop grande
2) - l'épaisseur de la maille ℓ_Q pas trop petite.

Considérons le point 1) : lorsque C_Q est grand[1] on est amené à traiter de manière implicite la pression (méthodes du type ICE : AMSDEN-HIRT [1], DESGRAZ-LASCAUX [1]).

([1]) C'est une condition physique.

Pour discuter de 2), nous considérons la Figure 4

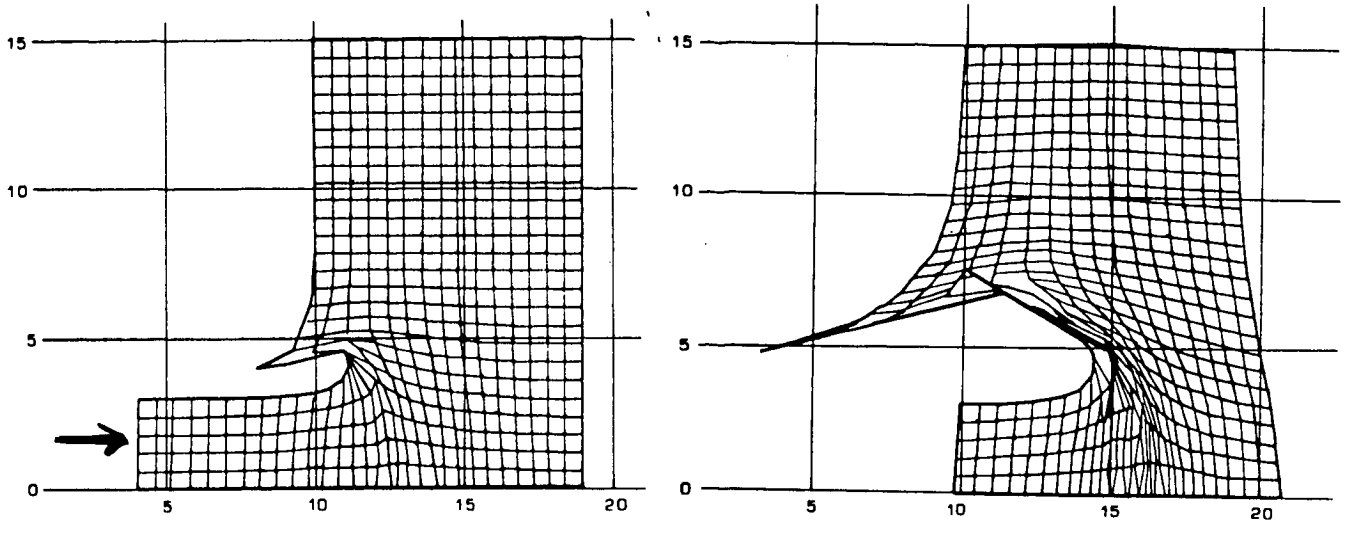


Figure 4 (LASCAUX [1]) : impact d'un cylindre dans une plaque

qui représente la simulation de l'impact d'un cylindre dans une plaque ; des instabilités en sablier apparaissent, mais il est constaté que c'est le comportement des épaisseurs de certaines mailles qui via (2.2) limite le plus sévèrement le temps de la simulation (la stoppant dans bien des cas). Dans ce cas précis le problème est local et on peut envisager pour sauvegarder la stabilité soit des pas de temps plus petits seulement pour les points du maillage concernés, soit un traitement implicite pour ces points. De toutes façons demeure le problème de précision dû à la longueur des mailles aplaties.

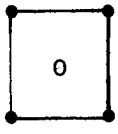
Plus généralement, le maillage à l'intérieur de chaque matériau est relativement tordu, ce qui nuit à la précision, la plupart des approximations spatiales étant d'ordre 2 en maillage orthogonal et 1 seulement en maillage quelconque. Un première idée consiste à "remailler" le domaine dès que c'est nécessaire ; en général la décision et la réalisation de ce remaillage ou rezonage nécessitent l'intervention du programmeur ce qui est un grave inconvénient ; d'autre part la simulation perd beaucoup en précision (voir toutefois HORAK-JONES-KODIS-SANDFORD [1]). Une seconde idée consiste à rezoner à chaque pas de temps à l'intérieur de chaque fluide sans changer la structure du maillage ; ce sont les méthodes du type ALE.

2.1.2. Maillage variable du type ALE.

Le maillage est déformé mais reste homéomorphe à lui-même ; on distingue la famille YAQUI et les autres :

- La Famille YAQUI

Le code YAQUI remonte à AMSDEN-HIRT [1] et HIRT-AMSDEN-COOK [1] ; il est plus ou moins dérivé de LINC mais en compressible ; les degrés de liberté sont donc répartis comme suit



● x,y,u,v

o p,e et ρ ou M

où M est la masse dans une cellule.

L'approximation spatiale est réalisée en différences finies ou plutôt volumes finis, les équations de conservation étant intégrées sur les cellules (e et ρ) ou sur des zones d'influence des sommets (Figure 5).

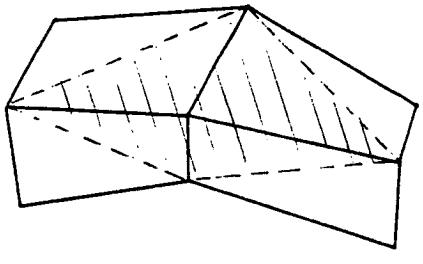


Figure 5

Volume d'intégration attaché à un sommet de quadrilatères

Nous ne rentrons pas plus dans les détails, certains autres points étant précisés à la fin de ce paragraphe.

Comme améliorations et/ou variantes du code initial, citons le code GALE (CHAN [1]) appliqué à un problème de vaque, avec des conditions sur la frontière libre améliorées et une procédure d'atténuation ("damping") des instabilités en sablier. Citons aussi le code BAAL (PRACHT [1]) qui traite d'explosions en 3-D.

- Les autres que YAQUI

Pour mémoire :

- HUGHES, LIU, ZIMMERMAN [1] proposent des méthodes d'éléments finis quadrilatéraux incompressibles Q_1/Q_o et Q_2/Q_1.

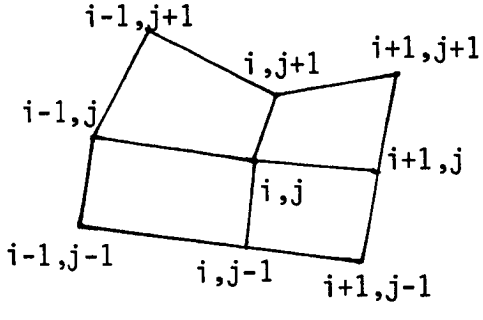
- Le code GILA (HARLOW-AMSDEN [3]) repose sur une version compressible du schéma aux différences MAC (décrit au paragraphe 3.1.1).

Nous allons maintenant analyser certaines caractéristiques de ces méthodes ; nous avons dit qu'elles sont fondamentalement Lagrangiennes ; il est donc intéressant de voir comment le rezonage nécessité par le fait que $\vec{U} \neq \vec{u}$ (Paragraphe 1.2) est réalisé ; on distingue trois façons de construire $\vec{U}$[1] :

1) Le calcul de $\vec{U}$ est réalisé à partir d'une <u>méthode</u> analytique <u>continue</u>, que l'on discrétise et résout en même temps que les équations de conservation ; cf. par exemple HUGHES-LIU-ZIMMERMAN [1] qui utilisent un schéma de glissement $\vec{U}-\vec{u}$ "parallèle" à la surface libre (WHITHAM [1]).

2) Le calcul de $\vec{U}-\vec{u}$ est réalisé dans une seconde étape de rezonage, consécutive à la première étape purement Lagrangienne (on fait donc des pas fractionnaires). Le <u>rezonage</u> est essentiellement discret[2] ; le but est de récupérer une certaine orthogonalité ; pour cela on recentre chaque noeud au milieu de ses voisins à l'aide d'un barycentre ; (AMSDEN-HIRT [1])

$$(x_i^j)_{\text{nouveau}} = \frac{1}{8} \sum_{\substack{i-1 \le k \le i+1 \\ j-1 \le \ell \le j+1 \\ (k,\ell) \neq (i,j)}} x_k^\ell \qquad (2.3)$$



ce recentrage est réalisé itérativement avec un balayage sur les noeuds.
Il faut aussi dans cette étape traiter les termes de convection qui résultent de ce rezonage. Ces termes sont traités sous la forme de flux entre les zones d'influence, pondérés plus ou moins amont ("donor cell" : cf. HIRT-AMSDEN-COOK [1]) ; par exemple la masse transférée de la cellule de A à la cellule B est donnée par

---

(1) En pratique ce sont les coordonnées $\vec{X}$ qui sont calculées.

(2) Bien que l'on puisse en donner une formulation fonctionnelle (BRACKBILL-PRACHT [1]).

$$(2.4) \qquad \delta M = \frac{1}{2}\,(\delta V+\alpha|\delta V|)\,\frac{M_A}{V_A} + \frac{1}{2}\,(\delta V-\alpha|\delta V|)\,\frac{M_B}{V_B}$$

où δV est le flux de volume correspondant (volume enlevé à A et ajouté à B par le rezonage), et α le coefficient de décentrage (α=0 approximation centrée ; α=1 : totalement décentrée).

3) Rappelons pour mémoire le rezonage après plusieurs pas de temps, déclenché par des tests sur le maillage. Le rezonage particulaire par exemple (HORAK-JONES-KODIS-SANDFORD [1]) est dans certains cas beaucoup moins diffusif que le choix 2). Chaque quantité est projetée depuis le mallage tordu sur le nouveau à l'aide de particules centrées sur les éléments d'un sous-maillage fin du maillage tordu.

Quelques mots sur le schéma en temps : le traitement implicite dans YAQUI des termes de pression (méthode ICE) permet de traiter des écoulements compressibles à nombre de MACH élevé. Le traitement "Donor Cell" des termes de convection limite l'ordre en temps à 1 et impose une condition de stabilité du type C.F.L.

Nous conclurons en considérant une simulation (HIRT-AMSDEN-COOK [1]) réalisée avec YAQUI et qui le met un peu en défaut : il s'agit d'une instabilité de Rayleigh-Taylor (chute d'un fluide lourd sur un léger) en incompressible.

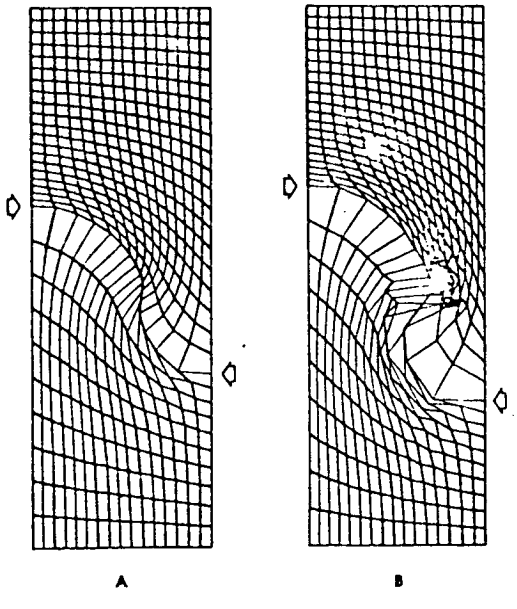


Figure 6

On remarque que des instabilités en sablier apparaissent ; le rezonage quasi-orthogonal n'a pas uniquement des effets positifs : on voit apparaître de grandes cellules nuisibles à la précision (l'écoulement étant incompressible, la surface des cellules serait constante sans le rezonage) ; de plus le rezonage n'empêche pas le croisement du maillage au niveau de l'inferface.

En conclusion les méthodes à maillage arbitrairement variables permettent de traiter des écoulements relativement tordus pourvu que les inferfaces ne le soient pas ; ils sont souvent efficaces pour des simulations compressibles, le maillage se concentrant sur les chocs ; ils permettent de suivre convenablement les conditions aux bords (mobiles ou non) ; ils présentent les limitations suivantes :

1) fragilité (cas des inferfaces tordues)
2) manque de stabilité (sablier)
3) une certaine diffusion par rapport au cas Lagrangien,

le troisième point étant dû à la discrétisation des termes de flux (nécessairement assez rustique en maillage variable).

2.2. Triangles.

Le triangle est sans doute la figure géométrique dont l'utilisation est la plus souple ; il y a pourtant fort peu de codes à maillage variable reposant sur des triangles ; une des raisons fondamentale est sans doute la perte de tout raccord intuitif au cas monodimensionnel.

Le code SPLISH (BORIS-HAIN-FRITTS [1], FRITTS-BORIS [1]) est un code Lagrangien incompressible non visqueux reposant sur des différences finies triangulaires. Les inconnues sont la vitesse et la pression (mais il y a aussi une version vorticité/ fonction courant) et leur degrés de liberté sont situés comme suit :

o p, x, y

● u, v

La vitesse est interpolèe sur les sommets par des barycentres pondérés par les aires

$$(2.5.) \quad u(S) = \left(\sum_T \text{aire}(T)\ u(T)\right) / \left(\sum_T \text{aire}(T)\right)$$

où u (T) est la vitesse (horizontale) définie sur le triangle T, aire (T) sa superficie, u (S) la vitesse au sommet S et où les sommes sont effectuées pour les triangles T ayant S pour sommet. La condition d'incompressibilité s'écrit comme la discrétisation classique en éléments finis P_1 d'un problème elliptique pour la pression

$$(2.6.) \quad -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p\right) = \operatorname{div}\left[\ \vec{u}.\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}\ \vec{u}\ \right]$$

le second membre est la divergence des termes de convection calculés comme tels via le mouvement du maillage ; la résolution (itérative) de cette équation garantit la conservation de la surface des zones d'influence des sommets (c.a.d. du tiers de la somme des aires des triangles voisins).

Le schéma en temps est du type explicite (sauf en pression) du type (2.1.), décalé en vitesse/coordonnées, ou implicite.

Cette méthode semble plus stable que les méthodes quadrilatérales : il n'y a pas d'instabilité en sablier ; les instabilités n'apparaissent que fort tard (cf. la Figure 7, qui présente une simulation de vague sur 12 fois la période).

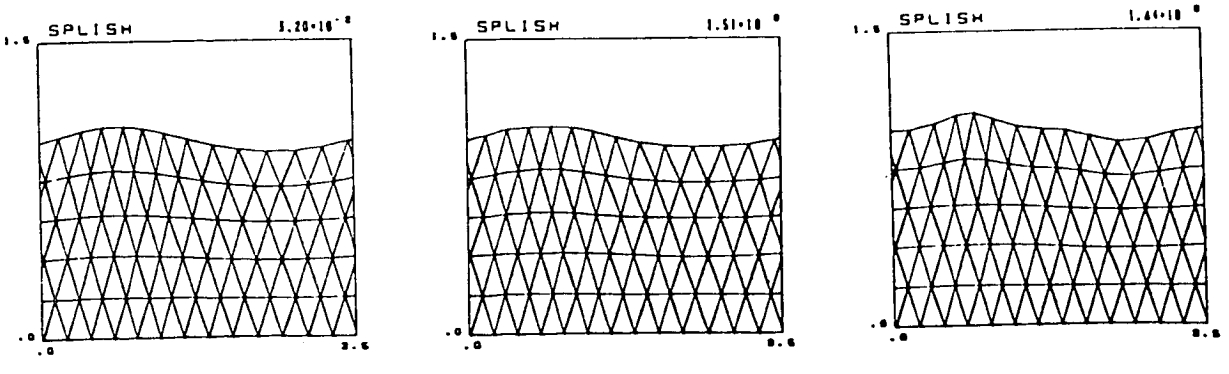


Figure 7 : vague aux temps t/4 , 11 t + t/4 , 12 t + t/4

L'un des principal intérêts de SPLISH réside dans sa procèdure de restructuration du maillage : les sommets sont déplacés de manière strictement lagrangienne. La restructuration intervient fondamentalement sur les connexions qui déterminent les triangles ; ces connexions sont gérées à l'aide d'un certain nombre d'opérations élémentaires locales : des connexions sont créées, d'autres détruites, des sommets supplémentaires sont rajoutés ; pour plus de détails cf. FRITTS-BORIS [1]. Cette restructuration permet à SPLISH de traiter des écoulements quasi-tourbillonnaires (instabilités de Kelvin-Helmotz) et entre autre l'instabilité de Rayleigh-Taylor de manière satisfaisante.

2.3. Méthode Mixte Euler-Lagrange

Le principe de la Méthode M.E.L. (VAN GOETHEM [1]) est de conserver d'une part un maillage fixe (orthogonal) sur la plus grande superficie possible du domaine de calcul (l'approximation y sera donc Eulérienne) et d'autre part de suivre les interfaces et frontières libres par un maillage variable dans leur voisinage ("zones de transition" ; Figure 8)

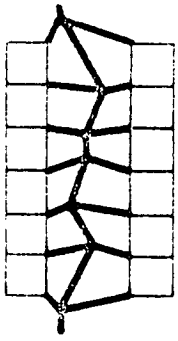


Figure 8 : maillage mixte Euler-Lagrange

Cela est réalisé grâce à une approximation en éléments finis isoparamétriques qui sont à priori plus précis que des différences en maillage non orthogonal.

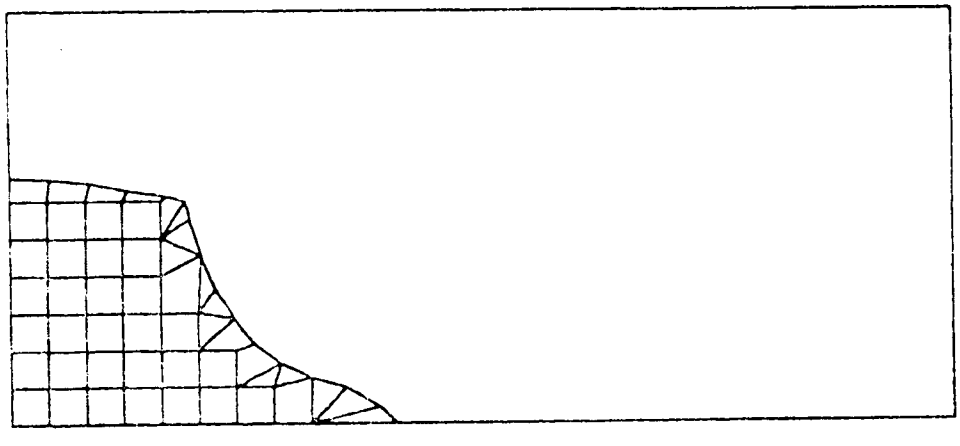
Dans le code compressible présenté par VAN GOETHEM, les éléments sont Q_1/Q_0. L'intégration en temps est explicite, via une diagonalisation de la matrice de masse sur les deux pas de temps concernés par le schéma qui est similaire à un schéma de Lax-Wendroff (ordre 2 en temps, prédicteur-correcteur) et plus précisement donné par (w = p, u, v, e)

$$(2.7.)\quad \begin{cases} \tilde{w} & = w^m + \delta t \; Dw^m \\ w^{m+1} & = w^m + \dfrac{\delta t}{2} (Dw^m + D\tilde{w}) \end{cases}$$

L'approximation des termes de flux contenus dans les termes d'espace Dw est décentrée après intégration par partie sur chaque cellule (forme conservative) par une méthode du type "Donor Cell". Ce code 2-D s'applique à des écoulements multimatériaux avec Frontières libres et interactions Fluide-structures.

Le principe M.E.L. est aussi utilisé dans un code incompressible par DARVES-BORNOZ, GENDRE et CORDAN [1] (code BACCHUS). Le maillage Eulérien est rectangulaire (éléments finis Q_1/Q_0) ; il est raccordé à la ligne brisée Lagrangienne constituant la frontière libre par une rangée de triangles (éléments finis P_1/P_0) ; la Figure 9 montre un maillage pour le problème de la chute d'une colonne d'eau. Le schéma en temps est du type SMAC avec pression implicite (cf Paragraphe 3.1.1).

Ce code a permis de simuler le mouvement d'un fluide dans un réservoir qui tourne autour d'un axe perpendiculaire (Fig. 10)



BACCHUS

Figure 9 : chute d'une colonne de liquide ([1])

([1]) DARVES-BORNOZ, GENDRE, CORDAN Communication personnelle.

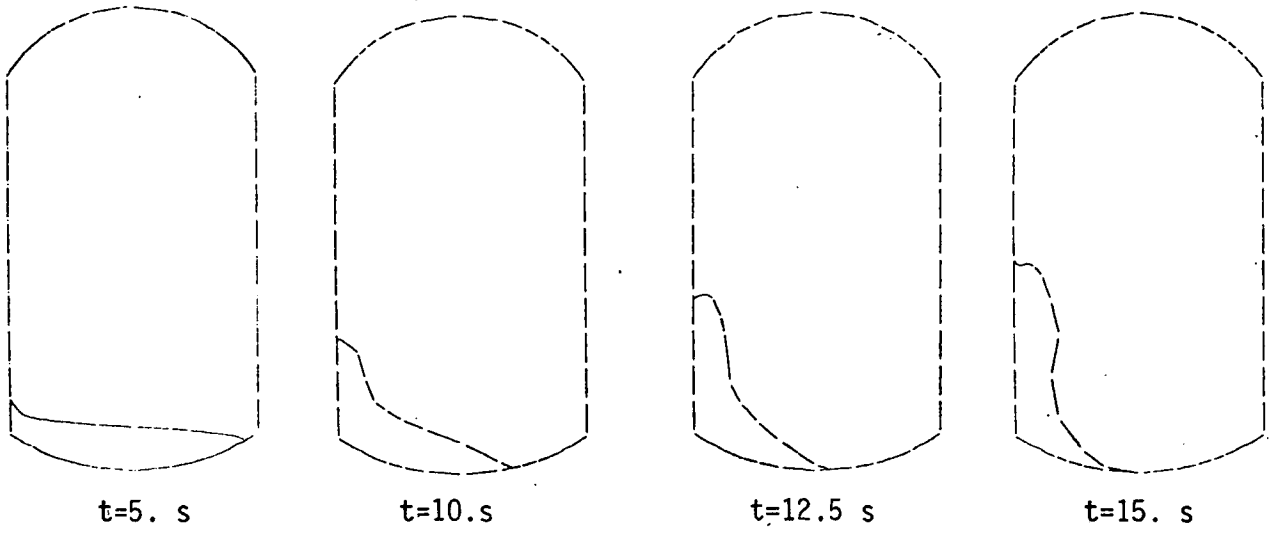


Figure 10 : basculement d'un réservoir (BACCHUS) [1]

3. - METHODES A MAILLAGE FIXE

Ce sont les méthodes dans lesquelles la vitesse a une approximation sur un maillage fixe. Il y aura donc des cellules mixtes, i.e. traversées par une interface ou une frontière libre. On distingue deux groupes suivant que

1) les différents milieux matériels sont repérés ou séparés de manière Lagrangienne.

2) Ce repérage est Eulérien.

3.1. Interfaces Lagrangiennes

Ce sont les codes de type particulaires : l'idée initiale est la suivante : certaines informations vont être traitées de manière Lagrangienne, en étant rattachées à des particules se déplaçant à la vitesse matérielle, d'autres informations étant traitées de manière Eulérienne.

Il est clair que certaines informations (géométrie, certaines quantités...) ont vocation a être traitées de manière Lagrangienne : c'est essentiellement ce qui concerne la particule matérielle isolée, c'est à dire les transferts de matière et autres flux. Au contraire tout ce qui concerne les interactions entre particules (viscosité, pression) nécessite un maillage pas trop tordu et on a tendance à discrétiser ces termes en repère Eulérien.

---

(1) DARVES-BORNOZ, GENDRE, GORDAN Communication personnelle

Ces idées sont appliquées dans le code PIC (HARLOW [1]).

La méthode PIC a été développée depuis dans deux directions opposées :

Dans la méthode GAP (Grid and Particle, expliquée pour le cas 1-D dans MARDER [1]) on joue à fond sur l'ambivalence Lagrange-Euler : aux particules sont rattachées une position, une masse, un volume, une vitesse et une énergie interne ; à la grille Eulérienne sont rattachées une densité, une pression, une énergie spécifique interne et des forces extérieures. Les flux étant traités de manière Lagrangienne, on conçoit que la diffusion numérique généralement rattachée à leur approximation Eulérienne est jusqu'à un certain point évitée. MARDER fait cependant mention de la nécessité de rajouter une viscosité numérique pour compenser les effets discontinus provoqués par le passage d'une particule d'une cellule à une autre ; ces effets sont aussi combattus par l'association d'un volume à chaque particule ([1]).

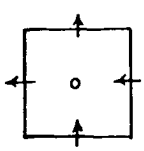
Inversement, dans de très nombreux codes, les particules ont leur rôle restreint par rapport à PIC : elles ne servent plus qu'à repérer et déplacer des régions matérielles ou des interfaces (/frontières libres) qui les séparent. Ce sont entre autres les méthodes MAC, les codes HELP (HAGEMAN-WALSH [1]), CEL (NOH [1] ; déjà décrit) et SMITE.

3.3.1. La famille MAC

Le code MAC (Marker and Cell) initial est décrit dans WELSH-HARLOW-SHANNON-DALY [1] ; voir aussi DALY [1]. Il permet de simuler des écoulements incompressibles avec frontières libres et interfaces et se caractérise par les trois points suivants

1) La grille décalée MAC

Elle est définit à partir de la cellule élémentaire suivante



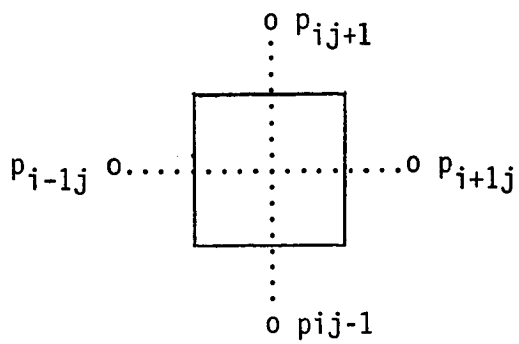
← u ↑ v o p

([1]) par exemple un disque en 2.D

Elle est particulièrement bien adaptée au cas incompressible : la divergence de la vitesse se calcule de manière naturelle au point où est défini la pression ; il n'y a pas de découplage pair/impair.

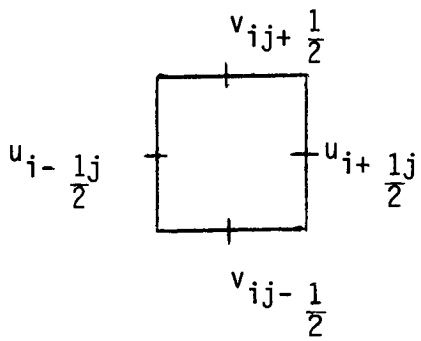
2) Le traitement implicite en pression

Il s'effectue de manière itérative en relaxant sur le système suivant ([1])



$$(3.1)\quad \frac{1}{\delta x^2}(p_{i+1j}+p_{i-1j}-2p_{ij}) + \frac{1}{\delta y^2}(p_{ij+1}+p_{ij-1}-2p_{ij}) = -R_{ij}(u,v,p)$$

au cours des itérations R_{ij} est calculé en fonction de p à travers l'équation en vitesses dont on a pris la divergence, de sorte qu'après convergence la vitesse résultante vérifie la condition de divergence nulle discrète



$$(3.2)\quad D_{ij} = \frac{1}{\delta x}\left(u_{i+\frac{1}{2}j} - u_{i-\frac{1}{2}j}\right) + \frac{1}{\delta y}\left(v_{ij+\frac{1}{2}} - v_{ij-\frac{1}{2}}\right) = 0$$

([1]) On reconnait l'approximation standard à cinq pointsde Δp.

3) La dualité particule/frontière libre

Les particules servent seulement à repérer et transporter les différents matériaux ; elles sont déplacées à l'aide d'interpolations de la vitesse (obtenue à l'étape précédente) par un schéma d'ordre un (k : numéro de la particule)

$$(3.3) \quad \begin{cases} x_k^{m+1} = x_k^m + u_k \, \delta t \\ y_k^{m+1} = y_k^m + v_k \, \delta t \end{cases}$$

Du fait de leur emploi exclusivement géométrique les particules constituent un système Lagrangien très souple : des particules sont facilement créées ou enlevées pour des raisons physiques (entrée d'un fluide dans le domaine de calcul) ou numériques (controle de la densité des particules ; ce rezonage est simple à réaliser).

A partir des particules on définit implicitement la frontière libre par les cellules qu'elle traverse (cellules frontières, cellules mixtes). Dans les cellules frontières on écrit les conditions sur les contraintes normales (condition de pression) ; on récupère aussi des conditions à partir de la contrainte (3.2) que l'on écrit (3.4) $D_{ij} = o$ dans les cellules frontières.

Ces conditions jointes à (3.1) donnent un système bien posé en pression.

Ces conditions sont appliquées au milieu de la cellule frontière ; l'orientation de la frontière libre n'est prise en compte que très partiellement à travers (3.4) en surveillant si les cellules voisines sont vides ou non.

Dans le cas d'une interface, celle-ci est représentée indirectement par le calcul dans les cellules mixtes de valeurs pondérées des densités et viscosités

$$(3.5) \quad \rho = \frac{n^1 \rho^1 + n^2 \rho^2}{n^1 + n^2} \qquad \nu = \frac{n^1 \nu^1 + n^2 \nu^2}{n^1 + n^2}$$

avec n^i nombre de particules du fluide i dans la cellule
ρ^i densité du fluide i
ν^i viscosité du fluide i

Les quantités ρ et ν sont prises en compte dans une formulation globale aux différents fluides, analogue à (1.24). La procédure est donc beaucoup plus simple et on peut envisager de coupler implicitement les vitesses et les particules par un procédé itératif (WELCH-HARLOW-SHANNON-DALY [1], DALY [1]).

Au total, la méthode MAC présente une très grande souplesse, étant théoriquement capable de résoudre des écoulements avec des surfaces libres et interfaces quelconques.

Nous allons maintenant voir rapidement quelles améliorations et quelles extensions ont été apportées à cette méthode.

Les améliorations que nous citerons portent avant tout sur la représentation de l'interface (/frontière libre) et sur les conditions sur ces "bords" ; c'est en effet un point faible du schéma MAC initial.

1) Pour avoir une localisation précise des interfaces on les repère par des chaines de particules frontières ([1]). Cette méthode est décrite par DALY [2]. Les particules sont traitées de manière Lagrangienne ; le caractère monodimensionnel (en écoulement 2.D) de la chaine rend plus facile le rezonage : des particules frontières sont enlevées ou ajoutées ; pour les ajouter "sur l'interface" celle-ci est interpolée à l'aide de fonctions splines : cette interpolation est aussi utilisée pour régulariser l'interface.

Le rezonage et la régularisation sont rendus nécessaires par le caractère délicat du règlage du nombre de particules par cellule frontière (DALY [2], FOOTE [1]).

2) Les conditions aux bords (interfaces frontières libres) : dans HIRT-SHANNON [1] la condition sur la contrainte normale à la frontière libre prend en compte la viscosité ; dans NICHOLS-HIRT [1] la pression est extrapolée en tenant compte de la position de la surface libre par rapport à la cellule frontière ; voir aussi BUTLER [1] d'où est extraite la figure 11 (déplacement dans un réservoir).

([1]) Toutefois HARLOW et AMSDEN [3] utilisent encore un nuage de particules localisé près de l'interface.

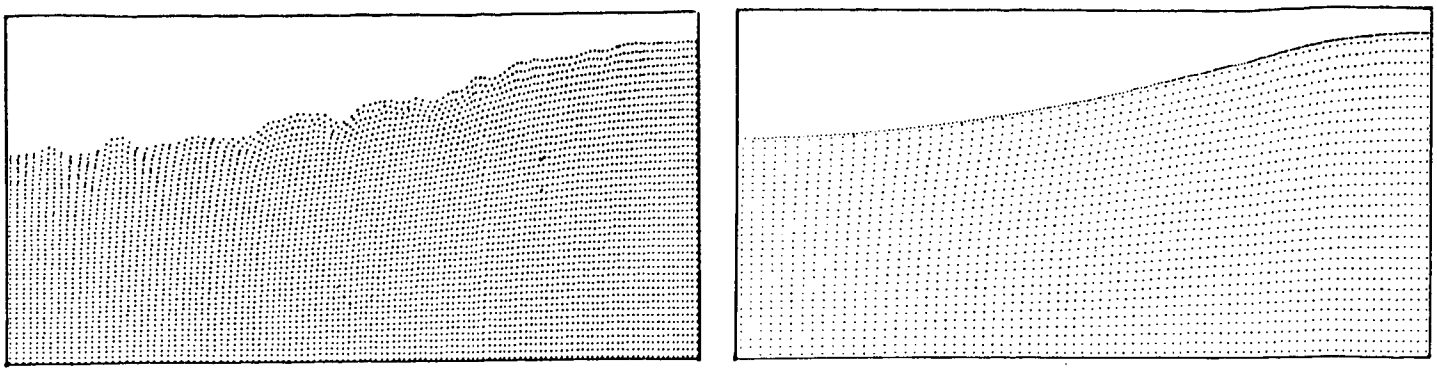


Figure 11 : amélioration de la représentation de la frontière libre et des conditions sur cette frontière.

3) Dans certains cas on peut représenter globalement la frontière libre par une équation du type y = f(n) ; c'est le cas pour des phénomènes de vagues qui nécessitent par ailleurs une conservation très précise de la masse, d'où la recherche de schémas spéciaux pour le déplacement de la frontière libre (CHAN-STREET [1], NICHOLS-HIRT [2], HIRT-NICHOLS-ROMERO [1] (code SOLA-SURF), BULGARELLI-CASULLI-GREENSPAN [1] : Figure 12)

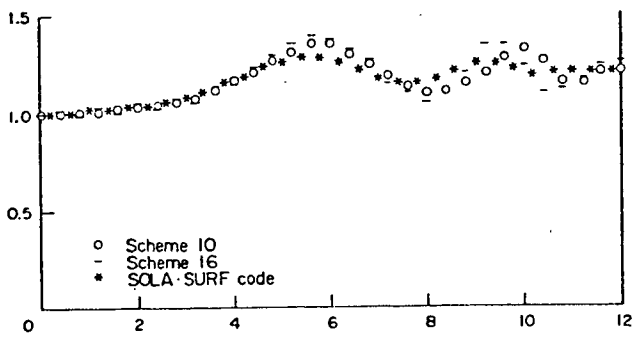


Figure 12 : amélioration du déplacement de la frontière libre (BULGARELLI-CASULLI-GREENSPAN)

4) Le code MAC existe aussi avec un déplacement matériel simulé par une méthode continue (paragraphe 3.2).

Une simplification importante est apportée par la méthode SMAC (AMSDEN-HARLOW [1]) où on emploie une décomposition en pas fractionnaires du type de celle de CHORIN [1] : dans un premier pas une approximation $(\tilde{u}, \tilde{v})$ de la vitesse est calculée explicitement en fonction d'une pseudo-pression $\tilde{p}$; le second pas correspond à l'incompressibilité : on calcule (implicitement) $p-\tilde{p}$, solution d'un problème de Dirichlet homogène ; la vitesse $(u,v) = (\tilde{u},\tilde{v}) + \text{grad}\,(\tilde{p}-p)$ en est déduite. Un des principaux avantages est la condition au bord homogène pour la correction $p-\tilde{p}$.

Comme extensions nous citerons

- l'extension en 3-D : HIRT-COOK [1]
- l'extension au cas compressible : méthode ICE (Implicit Continuous Eulerian), HARLOW-AMSDEN [1,2,3]
- l'extension à des parois mobiles ou non de forme quelconque : VIECELLI [1,2] ; cette extension est utile en particulier pour des couplages fluides-structures.
- la formulation en éléments finis du schéma MAC : PIVA-DI CARLO-GUJ [1] qui devrait permettre de construire une formulation cohérente en maillage quelconque.

3.1.2. Un exemple compressible SMITE.

La vocation fondamentale de MAC est de simuler des écoulements incompressibles ou peu compressibles. Au contraire le code SMITE (BURNSTEIN-SCHETCHTER-TURKEL [1], BURSTEIN-TURKEL [1], TURKEL [1]) est exclusivement compressible ; il permet de simuler des écoulements axisymétriques élastoplastiques. Les équations décrivant le mouvement sont mises sous la forme d'un système du premier ordre (hyperbolique quasilinéaire)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A\,\frac{\partial w}{\partial z} + B\,\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\,s = 0 \qquad (3.6)$$

avec ${}^t w = (\rho,u,v,e,S_{zz},S_{rz},S_{rr})$ et où s est une partie non homogène qui provient de la formulation axisymétrique ; les déviateurs des contraintes $S_{ij} = \tau_{ij}+p\delta_{ij}$ sont définis via la pression $p = fcn(\rho,e)$ et les contraintes τ_{ij} définies par la loi de Prandtl-Reuss avec le critère de Von Mises (cf. HILL [1], DUVAUT-LIONS [1]).

Le système (3.6) est approché et résolu par un schéma aux différences finies du type Lax-Wendroff bidimensionnel à neuf points (Méthode à deux pas de RICHTMYER, cf. BURNSTEIN [1]). C'est un schéma explicite d'ordre 2.

Chaque milieu est traité séparément, avec des extrapolations (ou des différences décentrées) près des interfaces.

Ces interfaces sont simulées de manière Lagrangienne : chaque milieu est limité par une chaine qui se déplace à la vitesse matérielle ; deux matériaux en contact sont donc séparés par deux chaines qui glissent éventuellement l'une

contre l'autre de manière symétrique (pas de "guide"...).

La liaison entre les différents matériaux est réalisée à chaque pas de temps via les conditions sur les contraintes et la vitesse normale u_n des chaînes qui les séparent

$$u_n = \frac{\rho^1 u_n^1 + \rho^2 u_n^2}{\rho^1 + \rho^2} \quad . \tag{3.7}$$

Ce code s'applique à des problèmes d'impacts et de détonique ; la Figure 13 montre la simulation de l'explosion d'une charge creuse : le pincement de la coque métallique C sur l'axe de symétrie provoque l'expulsion rapide d'une aiguille A le long de cet axe.

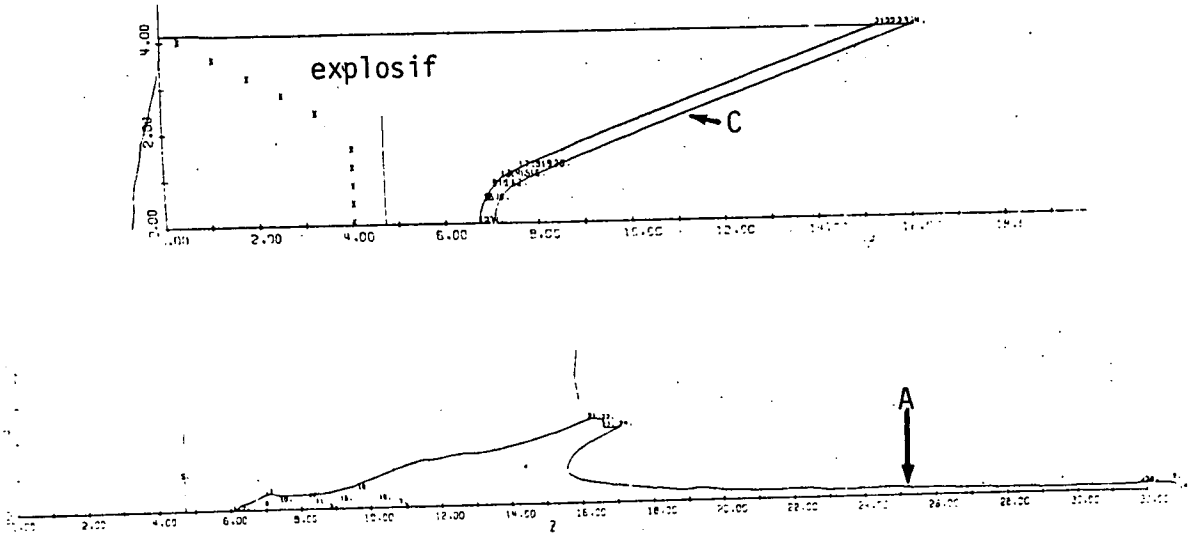


Figure 13 : SMITE ; charge creuse

3.2. Méthodes continues.

Toutes les équations, y compris la conservation de la masse sont traitées de manière fondamentalement Eulérienne. La principale difficulté réside dans les discontinuités aux interfaces et surfaces libres.

Nous nous intéresserons d'abord aux méthodes de volumes partiels : c'est le volume de chaque fluide dans chaque maille qui est solution d'une équation aux dérivées partielles ; l'interface est reconstituée a posteriori à chaque pas de temps.

Puis on décrira (Paragraphe 3.2.3) un code en Eléments finis où l'interface est simulée comme l'isovaleur d'une fonction.

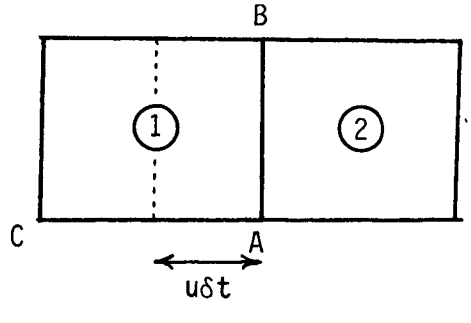
3.2.1. Le Code SOLA-VOF.

Ce code issu de Los Alamos (NICHOLS-HIRT-HOTCHKISS [1], NICHOLS [1]) repose sur un schéma spatial MAC rectangulaire à mailles variables (avec approximation décentrée du terme de convection sous forme non conservative). Le code s'applique à des écoulements incompressibles ou a compressibilité limitée (Remarque 1) ; le schéma en temps est du type SMAC (cf. Paragraphe 3.1.1), implicite en pression sauf si l'écoulement est suffisamment compressible.

La grosse différence avec les précédents codes MAC, c'est que les transferts de matière ne se font plus à l'aide de particules mais par des volumes partiels (Volume Of Fluid) F_α, relatifs au fluide α, définis dans chaque cellule et solutions de l'équation

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial r F_\alpha u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial F_\alpha v_\alpha}{\partial y} = 0 \qquad (3.8)$$

Une telle méthode ne peut être intéressante que si la matière qui remplit à moitié une cellule à un pas de temps donné ne diffuse pas uniformément vers la cellule receveuse voisine au pas suivant : un tel phénomène entrainerait la diffusion de la matière dans tout le maillage en peu de temps. La clé de voûte du bon fonctionnement d'une telle méthode c'est la priorité de transfert que nous allons tenter d'expliquer sur un cas très simple :



on sait que la cellule 1 est à moitié remplie ($F = \frac{1}{2}$) et que la vitesse est perpendiculaire à AB, de 1 vers une cellule voisine 2 ; on suppose que la translation $u\delta t$ correspond au transfert de la moitié du contenu de 1 vers 2 ($u\delta t = \frac{1}{2}$ AC ; on se réfère au schéma Donor Cell) ; il faut donc transférer de la matière et du vide ; transférer la moitié de chaque est nous l'avons dit la mauvaise solution ; il faut des informations supplémentaires ; elles sont

données par une reconstitution de l'interface dans 1 à partir des volumes partiels dans 1 et les cellules voisines. Par exemple si au vu de ces informations on décide que l'interface est verticale dans 1 et que la matière est située à gauche de cette verticale, alors il n'y aura pas de matière transférée.

Outre cette première représentation de l'interface (par des segments horizontaux et verticaux), on calcule aussi dans SOLA-VOF une équation cartésienne de l'interface ($y = g(x)$, $x = h(y)$ suivant les zones) ; cette équation a deux usages

1) le calcul précis des conditions sur la surface libre (cf. Paragraphe 3.1.1)
2) le calcul de la courbure de la surface libre pour prendre en compte des effets de tension superficielle.

Nous présentons en Figure 14 une illustration des possibilités de ce code : il s'agit du développement dans une colonne de liquide (en l'absence de la gravité) d'une instabilité due à la tension superficielle (le défaut initial étant choisi sinusoïdal).

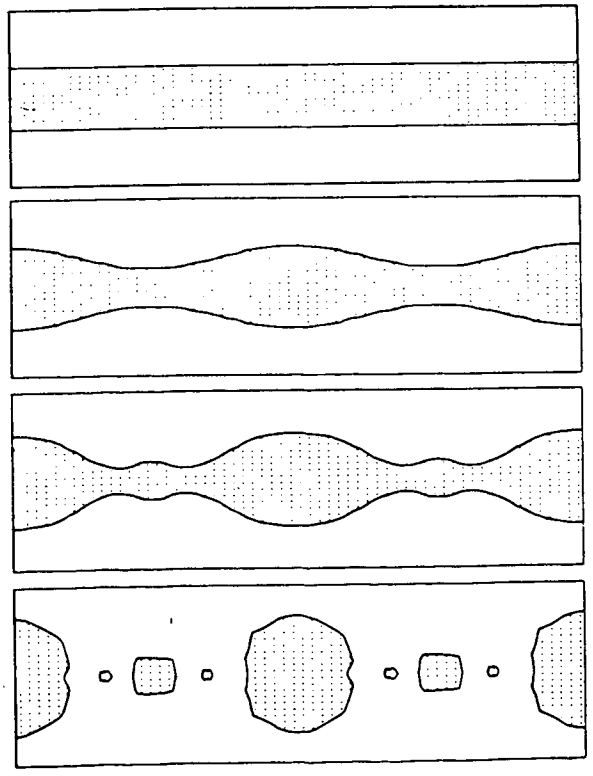


Figure 14
(NICHOLS-HIRT-HOTCHKISS)
Instabilité d'une colonne liquide.

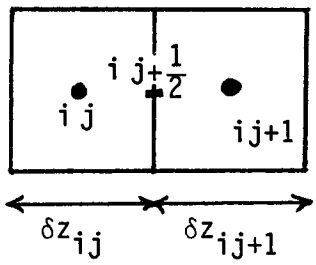
3.2.2. Le code CEE.

A la différence de SOLA-VOF, le code CEE (Code Euler Euler ; LEGRAND-OVADIA [1], OVADIA-LEGRAND [1]) est compressible. Nous avons vu qu'en compressible la discrétisation des trois lois de conservation sont de même nature ; le principe de CEE est d'appliquer la technique des volumes partiels à ces trois équations.

On a donc des degrés de liberté en ρ,u,v,E centrés dans des cellules rectangulaires (mailles variables).

Dans des cellules mixtes, les valeurs globales de ρ,u,v,E et p sont évaluées à partir de valeurs partielles relatives à chaque matériau. Pour écrire les équations de ces valeurs partielles, il faut interpoler les vitesses et pressions sur les cotés des cellules ; pour chaque matériau α , ces quantités sont pondérées par la largeur de la cellule δz et les densités partielles ρ^{α} ; par exemple, pour la pression

$$(3.9) \qquad p^{\alpha}_{ij+\frac{1}{2}} = \frac{p^{\alpha}_{ij+1}\,\rho^{\alpha}_{ij}\,\delta z_{ij} + p^{\alpha}_{ij}\,\rho^{\alpha}_{ij+1}\,\delta z_{ij+1}}{\rho^{\alpha}_{ij}\,\delta z_{ij} + \rho^{\alpha}_{ij+1}\,\delta z_{ij+1}}$$



Le schéma en temps est explicite, avec un décentrage du type Donor Cell, d'ordre un en temps et en espace (avec des directions spatialement alternée x/y on z,r).

Les priorités de transfert sont déduites de la définition de l'interface par la méthode SLIC (NOH-WOODWARD [1]).

Ce code s'applique efficacement à des problèmes de jets, détonique (charge creuse) etc...

3.2.3. Un code en Eléments Finis non conformes.

On décrit dans DERVIEUX-THOMASSET [1,2] un code multifluide incompressible Eulérien qui utilise pour la vitesse $\vec{u}$ des éléments triangulaires de degré 1 à divergence nulle ; l'approximation est assez bien adaptée au traitement de l'incompressibilité mais présente l'inconvénient d'être discontinue ; pour ne pas utiliser de valeurs ponctuelles de la vitesse dans les transferts de matière, on simule l'interface comme l'isovaleur d'une fonction ϕ définie sur le domaine, qui joue un rôle analogue à la densité (mais sans être discontinue à l'interface) ; la "pseudo-densité" ϕ est solution de l'équation de transport

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}}\, \phi = 0 \tag{3.10}$$

discrétisée sous forme variationnelle (en éléments finis P_1 continus) ; le couplage $\vec{u}$-ϕ est donc intégral.

Le schéma en temps est du type implicite linéarisé (avec un couplage explicite $\vec{u}$-ϕ).

Ce code s'applique à des écoulements de plusieurs fluides très visqueux.

4. - CONCLUSION.

Nous allons comparer en quelques remarques les mérites des différentes méthodes susceptibles d'être choisies lors de la construction d'un code multifluide.

Maillage fixe / Maillage variable.

On utilise des maillages variables pour suivre les interfaces ; une première conséquence est que les conditions sur ces interfaces (ou surfaces libres) sont mieux résolues (pression interfaciele, conditions sur les contraintes, réflexions des ondes) ; au contraire les traitements Eulériens de cellules mixtes ou partiellement remplies entrainent d'importantes pertes de précision (interpolations, diffusion des différentes quantités dans la cellule élémentaire).

Les maillages variables suivent aussi plus ou moins le mouvement matériel, ce qui se répercute sur les termes de flux : ceux-ci n'existent pas dans le cas purement Lagrangien ; en particulier le schéma en temps peut être d'ordre deux

à moindres frais (cf. (2.1)) ; dans les autres cas l'approximation des termes de flux conduit à une certaine diffusion numérique (cas décentré) ; on admet que la diffusion est potentiellement moindre en maillage ALE, la vitesse du maillage étant proche de la vitesse matérielle, mais elle reste assez importante.

Au point de vue coût le traitement des variables coordonnées (x,y) et le rezonage est pénalisant par rapport à un Code Eulérien.

Si l'on se réfère au problème physique on fait les constatations suivantes :

- En incompressible ou peu compressible, les maillages variables souffrent de la nécessité de localiser les degrés de liberté u et v au sommet du maillage (pour le transporter ; à l'exception de SPLISH) ; on est alors privé de la possibilité d'utiliser des approximations décalées (schéma aux différences MAC) ou discontinues (cf. par exemple THOMASSET [1] pour une revue d'éléments finis incompressibles discontinus) souvent mieux adaptées ; en quadrilatères on a des instabilités en sablier qu'il est difficile de combattre sans diffusion numérique.
- En compressible par contre, on conçoit que les chocs soient mieux suivis par un maillage mobile.
- La conservation de la masse est assurée (à un certain prix) dans les codes à maillage variable et dans les Codes Eulériens continus ; elle pose des problèmes dans les codes Eulériens à interfaces Lagrangiennes.

Nous conclurons en notant que les domaines d'application de ces deux familles de méthode ne sont pas identiques :

- Le couplage aves des structures est moins bien résolu en maillage Eulérien.
- Les écoulements avec interfaces mouvementées posent des problèmes souvent insolubles en maillage variable : les changements de convexité (pincements...) ne sont généralement pas traités en maillage variable ; il en est de même pour des interfaces prises dans de petits tourbillons ; P. LASCAUX cite en 1977 [1] trois exemples d'écoulements mal traités en maillage Lagrangien :

1) Problème de l'impact cylindre/plaque (Figure 4)
2) Instabilité de Rayleigh-Taylor (Figure 6)
3) Charge creuse (Figure 13)

Cette affirmation est encore vraie, en remarquant que

- pour le problème de l'impact, les méthodes ALE et MEL sont peut-être aptes à résoudre le problème de la simulation du glissement entre les deux matériaux (LASCAUX [1]) ; il reste le problème des mailles pincées.
- pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor le code Lagrangien SPLISH (Paragraphe 2.2) semble donner des résultats raisonnables, y compris avec un tourbillon central.

La simulation de la charge creuse n'a pas été réalisée à ma connaissance en maillage variable.

Différences finies / Eléments finis

Nous allons faire une rapide comparaison de ces méthodes sous l'éclairage des écoulements multifluides.

Les Eléments Finis constituent un outil d'analyse efficace, en particulier pour les couplages mixtes vitesse/pression en incompressible (condition de BABUSKA-BREZZI, cf. THOMASSET [1], Paragraphe 3.1). Une fois que les éléments sont choisis, la discrétisation des équations est directe et cohérente ; en particulier, en maillage variable les conditions aux bords (pression d'interface, interaction avec des structures) sont approchées de manière naturelle ; d'autre part, la non-orthogonalité des cellules pose moins de problèmes de précision (éléments isoparamétriques).

Signalons par contre que l'utilisation en toute généralité des possibilités géométriques des Eléments Finis (maillage non régulier) prive de certaines facilités typiques des différences finies, et par exemple des directions spatialement alternées x/y qui ramènent au cas monodimensionnel ; on est ainsi plus ou moins privé

- des schémas hyperboliques 1-D sophistiqués (SHASTA cf. BORIS-BOOK [1], etc...)
- des méthodes de volumes partiels (Paragraphe 3.2)
- de certaines méthodes de résolution implicite (A.D.I. voir par exemple GOSMAN [1])

Triangles / Quadrilatères

Le quadrilatère est la cellule (ou l'élément) fondamentale en écoulement multifluide ; les quelques codes qui utilisent des triangles font ressortir quelques caractéristiques :

- des facilités au niveau maillage et interpolations,
- la suppression de certaines instabilités ;

le prix à payer est

- une certaine sensibilité par rapport aux directions de la triangulation (problèmes de symétries, etc..)
- la perte de l'analogue avec le cas 1-D ; non seulement en ce qui concerne les direction alternées mais aussi pour la construction de décentrages.

Les pas fractionnaires (cf. par exemple TEMAM [1])

Ils se justifient par les différents traitements susceptibles d'être appliqués aux différents termes de l'équation (convection, diffusion, incompressibilité/pression...) notamment pour les choix explicites/implicites (discussion suivante). Notons que les pas fractionnaires donnent (sauf schémas compliqués) une approximation en temps d'ordre un (schéma à un pas) ou d'ordre deux (prédicteur-correcteur).

Schéma explicite/implicite

Un schéma explicite raisonnable réunit les deux conditions suivantes :

1) la quantité à calculer à l'instant m+1 (en fonction de ses valeurs en m, m-1, etc...) n'est présente que dans la discrétisation de la dérivée en temps.

2) la matrice de ses coefficients dans le système discret est diagonale.

Dans le cas multipas on applique ces critères à chaque pas (par exemple prédicteur, correcteur...).

En Eléments Finis, la matrice de masse n'étant en général pas diagonale, le θ-schéma (ZIENKIEWICZ [1] p. 619) donne pour $\theta=0$ un schéma vérifiant la condition 1) seulement ; ce schéma est alors généralement de peu d'intérêt ; il faut diagonaliser la matrice de masse soit à l'instant m+1 seulement (schémas du type Lax) soit pour tout le terme en temps (cf. la discussion de VAN GOETHEM [1]).

Compte tenu de la remarque sur les pas fractionnaires, nous discuterons le choix explicite/implicite successivement sur les trois phénomènes susceptibles d'être présents dans un écoulement régi par les équations de Navier-Stokes.

- termes de flux/convection : il s'agit de la partie hyperbolique de degré un. On admet que cette partie est traitée explicitement de manière satisfaisante ; dans certains cas un décentrage des dérivées spatiales semble nécessaire (discussion suivante) ; on a en général une condition de C.F.L. qui peut devenir sévère en certains points du domaine ; on peut alors envisager des zones traitées implicitement (DESGRAZ-LASCAUX [1]) ou encore des méthodes de caractéristiques inconditionnellement stables (BENQUE [1], BENQUE-IBLER-KERAMSI-LABADIE [1])

- termes de diffusion : on peut traiter ces effets de manière explicite (méthode MAC...) mais la condition sévère de stabilité rend ce choix moins évident ; lorsque la viscosité est assez importante, un schéma implicite peut être moins couteûx.

- incompressibilité : cet effet doit être traité de manière implicite.

Le décentrage.

Nous incluons dans les schémas décentrés les algorithmes du type Lagrange+ projection ; pour une revue des méthodes de décentrage en Eléments Finis, voir THOMASSET [1].

Le contre : on remplace une approximation centrée instable par une approximation plus stable, mais qui diffuse tellement que la solution discrète n'a plus qu'un lointain rapport avec la solution continue cherchée. Cela est particulièrement le cas pour le décentrage d'ordre 1 (Donor Cell...) ; la viscosité numérique introduite masque les effets de viscosité physique à partir de nombres de Reynolds peu élevé (typiquement vers 500-1000).

Le pour : Certaines fortes discontinuités sont intraitables avec les approximations centrées habituelles.

Dans certains cas la zone instable représente une faible partie du domaine de calcul (l'avant d'un profil par exemple) ; le décentrage à ce niveau seulement (via l'utilisation d'un paramètre local) peut donner une solution globale encore significative.

On peut aussi limiter certains effets de la viscosité numérique en particulier au bord par des conditions de glissement spéciales.

Au total le décentrage fournit une solution plus stable mais qui converge plus lentement ; les deux méthodes sont départagées par le rapport puissance de l'ordinateur/difficulté du problème.

En ce qui concerne plus précisément les écoulements multifluides, le décentrage utilisé est dans tous les codes cités ici d'ordre un ; cela est dû entre autres aux problèmes géométriques qui interviennent dans de tels codes (maillages variables et cellules mixtes). On admet qu'il vaut mieux calculer les termes de flux de manière indépendante pour les différents matériaux ; lorsque le maillage suit l'interface, le schéma Donor Cell, qui repose sur les flux à travers les côtés, est donc bien adapté.

Nous conclurons en citant certaines méthodes dont on peut attendre d'intéressantes applications :

- pour les interfaces : les méthodes de cartes citées par TURKEL [1], les méthodes M.E.L. (les facilités des éléments finis ne semblent pas toutes explorées).
- pour les équations du type advection/convection : des schémas plus sophistiqués, quasi d'ordre deux (SHASTA) ou d'ordre plus élevé (TURKEL [1]), les décentrages en Eléments Finis de degré plus grand que 1, les éléments espace temps (cf. par exemple FORGES [1]), les méthodes de caractéristiques (cf. BENQUE [ ], MacCORMACK [1], PIRONNEAU [1])
- pour le traitement de l'incompressibilité : la décomposition du problème de Stokes (BRISTEAU et Al. [1]) et les bases à divergence nulles (CROUZEIX-LEROUX [ ], HECHT [1]).

B I B L I O G R A P H I E

A. A. AMSDEN [1] : The particle in cell method for the calculation of the dynamics of compressible fluids, Los Alamos LA - 3466 (1966).

A. A. AMSDEN, F. H. HARLOW [1] :A simplified MAC Technique for incompressible fluid flow calculations, J. of Comp. Physics, 6 (1970), 322-325.

A. A. AMSDEN, C.W., HIRT [1] : A simple scheme for Generating Curvilinear grids, J. Comp. Phys., 11 (1973), 348-359.

J. P. BORIS, K. L. HAIN, M. J. FRITTS [1] : Proc. First Int. Conf. on Num. Ship Hydrodynamics, National Bureau of Standards, Gaitherburg, Md (1975).

J. P. BORIS, D. L. BOOK [1] : Flux Corrected Transport J. Comp. Phys. 20 (1976) 397- 431.

J. U. BRACKBILL, W. E. PRACHT [1] : An implicit, Almost Lagrangian Algorithm for Magnetohydrodynamics, J. Comp. Phys. 13 (1973) 455-482.

M. O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI, B. MANTEL, J. PERIAUX, P. PERRIER, O. PIRONNEAU [1] : A finite element approximation of Navier-Stokes equations for incompressible viscous fluids. Iterative methods of solution, in Approximation Methods for Navier-Stokes Problems, R. Rautmann Ed., Lectures Notes in Mathematics 771 (1980), Springer Berlin, 78-128.

U. BULGARELLI, V. CASULLI, D. GREENSPAN [1] : On numerical treatment of free Surface incompressible fluid flow problems, Non Linear Analysis, Methods and Applications 4, n° 5 (1980) 975-983.

S. Z. BURSTEIN [1] : Finite - Difference Calculations for hydrodynamics Flows containing discontinuities, J. Comp. Physics, 2 (1967), 198-222.

S. Z. BURSTEIN, E. L. TURKEL [1] : Eulerian Computations in domains with moving boundaries, Lectures Notes in Physics, 59 (1976), 114-122.

S. Z. BURSTEIN, H. SCHETCHER, E. L. TURKEL, [1] : An Accurate Numerical Model for Dynamics Problems in Continuum Mechanics, Proc. First Int. Symp. Ballistics, E. J. BRYANT Ed. p. IV - 27-44 (1974).

T. D. BUTLER [1] : Recent advances in computational Fluid dynamics, in Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, R. GLOWINSKI, J. L. LIONS Ed. Lectures Notes in Computer Sciences 11 (part. 2) (1974) SpingerBerlin 11-21.

R. K.-C. CHAN [1] : A generalized Arbitrary Lagrangian-Eulerian Method for incompressible Flows with sharp interfaces, J. Comp. Phys. 17 (1975), 311-331.

R. K.-C. CHAN, R. L. STREET [1] : A computer Study of finite amplitude water waves, J. Comp. Phys. 6 (1970), 68-94.

J. CHORIN [1] : Numerical solution of the Navier-Stokes equations, Math. Comput. 22 (1968) 745-762.

J. CHORIN, J.E. MARSDEN [1] : Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, Springer, New-York (1978).

M. CROUZEIX, A. Y. LE ROUX [1] : Journees Elements Finis de Rennes (1976).

B. J. DALY [1] : Numerical Study of two fluid Rayleigh-Taylor instability, The Physics of Fluids, 10, n° 2 (1967), 297-307.

B. J. DALY [2] : A technique for Including surface tension effects in hydrodynamics Calculations, J. Comp. Physics, 4 (1969), 97-117.

J. M. DARVES-BORNOZ, P. GENDRE, E. CORDAN [1] : Résolution par une méthode d'éléments finis mixtes d'un problème d'écoulement transitoire à surface libre, Proc. of GAMNI2 (Paris, 1-5 déc. 1980), Numerical Methods for Engineering, t. 1, E. ABSI, R. GLOWINSKI, P. LASCAUX, H.VEYSSEYRE Ed., Dunod, Paris (1980) 339-349.

D. DEGANI-C. GUTFINGER [1] Three dimensional Low Reynolds Number flows with a Free Surface, J. Comp. Phys. 24 (1977), 108-114.

A. DERVIEUX, F. THOMASSET [1] Multifluid incompressible flows by a finite element method, Seventh Int. Conf. on Num. Meth. in Fluid Dynamics, Stanford (USA) 23-27 Juin 1980

[2] Rapport INRIA (à paraître).

J.C. DESGRAZ, P.M. LASCAUX [1] Stabilité de la discrétisation des équations de l'hydrodynamique Lagrangienne 2-D, Computer Methods in Applied Sciences, R. Glowinski, J.L. Lions Ed., Lecture Notes in Physics 58 (1976) Springer Berlin 510-529.

M.O. DEVILLE [1] Numerical Experiments on the MAC Code for a slow flow, J. Comp. Phys. 15 (1974), 362-374.

G. DUVAUT, J.L. LIONS [1] Les Inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod Paris (1972).

G.B. FOOTE [1] A numerical Method for studying Liquid drop behaviour : simple oscillation, J. Comp. Phys. 11 (1973),507-530.

F. FORGES [1] Approximation d'une équation diffusion-transport par des méthodes d'éléments finis espace-temps, thèse 3ème cycle, Univ. Paris IX (1980).

K.O. FRIEDRICHS, Symmetric Positive Linear Differential Equations, C.P.A.M. 11 (1958), 333-418.

M.J. FRITTS, J.P. BORIS [1] The Lagrangian solution of transient problems in Hydrodynamics using a triangular mesh, J. Comp. Phys. 31 (1979), 173-215.

P. GERMAIN [1] Mécanique des Milieux Continus, Masson et Cie, Paris (1962).

W.B. GOAD [1] WAT, a numerical method for two dimensional unsteady fluid flow, Los Alamos, LAMS - 2365 (1960).

D. GOSMAN [1] , Computational Fluid Dynamics and Heat/Mass transfer, Lectures Notes for C.E.A./I.R.I.A./E.D.F. Ecole d'Eté, Bréau-sans-Nappe, 18 juin-6 juillet 1979.

L.J. HAGEMAN, J.M. WALSH [1] An Eulerian code for transient compressible elastoplastic flow in 2-D, BRL N° 39 3SR-350.

F.H. HARLOW [1] The Particle in Cell computing method for fluid dynamics, Methods in Computational Physics, 3, Academic Press, New-York, 1964.

F.H. HARLOW, A.A. AMSDEN [1] Numerical calculation of almost incompressible flow, J. Comp. Physics, 3 (1968), p. 80.
[2] A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds, J. Comp. Phys. 8 (1971), 197-213.
[3] Multifluid flow calculations at all Mach numbers, J. Comp. Phys. 16 (1974), 1-19.

F. HECHT [1] Construction d'une base de fonctions P_1 non conforme à divergence nulle dans $\mathbb{R}^3$, RAIRO (1981) à paraître.

R. HILL [1] The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, 1950.

C.W. HIRT, A.A. AMSDEN, J.L. COOK [1] An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing method for all flow speeds, J. Comp. Phys. 14 (1974), 227-253.

C.W. HIRT, J.L. COOK [1] Calculating three dimensional flows around structures and over rough terrain, J. Comp. Phys. 10 (1972), 324-340.

C.W. HIRT, J.L. COOK, T.D. BUTLER [1] A Lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with a free surface, J. of Comp. Phys. 5 (1970), 103-124.

C.W. HIRT, B.D. NICHOLS [1] Adding limited compressibility to incompressible hydrocodes, J. Comp. Phys. 34 (1980) 390-400.

C.W. HIRT, B.D. NICHOLS, N.C. ROMERO [1] "SOLA - A Numerical solution algorithm for transient Fluid Flows", Los Alamos LA-5852 (April 1975).

C.W. HIRT, J.P. SHANNON [1] Free surface stress conditions for incompressible flow calculations, J. Comp. Phys. 2 (1968), 403-411.

H.G. HORAK, E.M. JONES, J.W. KODIS, M.T. SANFORD II, [1] An algorithm for the discrete rezoning of Lagrangian meshes, J. Comp. Phys. 26 (1978), 277-284.

T.J.R. HUGHES, W.K. LIU, T.K. ZIMMERMANN [1] , Lagrangian-Eulerian Finite Element formulation for incompressible viscous flows, US-Japan Conf. on Interdisciplinary Finite Element Analysis, Cornell Univ. August 7-11 (1978).

A.V. KAJIKOV [1] Résolution of boundary value problems for non homogeneous viscous fluids, Doklady Akad. Nauk, 216 (1974), 1008-1010.

P.M. LASCAUX [1] Méthodes numériques pour les calculs d'écoulements 2-D instationnaires multifluides, ISNM 37 Birkhaüser Verlag, Basel und Stuttgart (1977) p. 9-48.

B. LEGAIT [1] Contribution à l'étude numérique des équations de Navier-Stokes à deux phases, Institut Français du Pétrole (juin 1980).

N. LEGRAND, J. OVADIA [1] Code Eulérien d'hydrodynamique C.E.E., Aspects physico-numeriques,Commissariat à l'Energie Atomique, (Octobre 1977).

J.L. LIONS [1], On some questions in boundary value problems of Mathematical Physics, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matematica, Rio de Janeiro (1977).

[2]On some problems connected with Navier-Stokes equations, Madison Univ. (1977).

R.W. MacCORMACK [1] An efficient Explicit-Implicit characteristic method for solving the compressible Navier-Stokes equations, to appear in the SIAM-AMS Proceedings of the Symposium on Computational Fluid Dynamics, New-York (April 16-17, 1977).

B.M. MARDER [1] GAP - A PIC-type fluid code, Math. of Comp. 29 (1975), N° 130, 434-446.

B.D. NICHOLS [1] Conférence à Seventh Int. Conf. on Num. Meth. in Fluid Dynamics, Stanford (USA) 23-27 juin 1980.

B.D. NICHOLS, C.W. HIRT [1] Improved free surface boundary condition for numerical incompressible flow calculation, J. of Comp. Phys. 8 (1971), 434-448.

[2] Calculation of 3-D free surface flows in the vicinity of submerged and exposed structures, J. of Comp. Phys. 12 (1973), 234-246.

B.D. NICHOLS, C.W. HIRT, R.S. HOTCHKISS [1] SOLA-VOF : A solution algorithm for transient fluid flow with multiple Free Boundaries, Los Alamos, LA-8355 (August 1980)

W.F. NOH [1] C.E.L. a time dependent two space dimensional coupled Eulerian Lagrangian code, in Method in Computational Physics, 3 (1964), Academic Press.

W.F. NOH, P. WOODWARD [1] "The SLIC Method" Lawrence Livermore Lab. UERL-52111 (August 1976).

[2] "SLIC, Simple Line Interface Calculation, Fifth Int. Conf. on Num. Meth. in Fluid Dynamics.

J. OVADIA, N. LEGRAND [1] C.E.E. : une méthode numérique Eulérienne pour la résolution d'écoulements multifluides, Méthodes numériques dans les sciences de l'Ingénieur (GAMNI 1), E. ABSI, R. GLOWINSKI Ed., Dunod Paris (1979).

J. OVADIA, P.A. RAVIART [1] Nouvelles méthodes numériques pour le traitement de la convection, Commissariat à l'Energie Atomique (Mars 1978).

O. PIRONNEAU [1] On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations, dans "Simulation numérique en mécanique des fluides par la méthode des éléments finis, Séminaire INRIA, Nice, 19-23 janvier 1981.

R. PIVA, A. DI CARLO, G. GUJ [1] Finite element MAC scheme in general curvilinear coordinates, Comp. and Fluids 8 (1980), 225-241.

W.E. PRACHT [1] Calculating three dimensional fluid flows at all speeds with an Eulerian-Lagrangian Computing mesh, J. Comp. Phys. 17 (1975), 132-159.

P.J. ROACHE [1] Computational fluid dynamics, Hermosa Pub.,Albuquerque, New-Mexico (1972).

R. TEMAM [1] Theory and Numerical Analysis of the Navier-Stokes equations, North-Holland, Amsterdam (1977).

F. THOMASSET [1] Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations (to appear).

E. TURKEL [1] Order of accuracy and boundary conditions for large scale time dependent partial differential equations, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1979 - 6, Computational Fluid Dynamics (March 19-23, 1979).

G. VAN GOETHEM [1] Description mixte d'Euler-Lagrange et modèles d'éléments finis à domaine variable, Thèse, Université Catholique de Louvain, University Microfilm International 80-70/043 (1979).

[2] Mixed Eulerian Lagrangian formulation and finite element solution of 2-D moving boundary problems in compressible fluid Dynamics, Proc. of the Third GAMM-Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics (DFVLR, Cologne, Oct. 10-12, 1979), Notes on Numerical Fluid Mechanics (Vol. 2), E.H. Hirschel Ed., Friedr. Vieweg und Sohn Pub., Braunschweig/Wiesbaden.

A.E.P. VELDMAN [1] Liquid sloshing under low-g conditions : mathematical model and basic numerical method, NLR TR 79057 U, National Aerospace Laboratory, Amsterdam (1979).

J.A. VIECELLI [1] A method for including arbitrary external boundaries in the MAC incompressible fluid computing technique, J. Comp. Phys. 7 (1969), 543-551.

[2] A computing method for incompressible flows bounded by moving walls, J. Comp. Phys. 8 (1971), 119-143.

J.E. WELCH, F.H. HARLOW, J.P. SHANNON, B.J. DALY [1] The MAC Method, a computing technique for solving viscous incompressible transient fluid flow Problems involving free surfaces, LA-3425, Los Alamos, New-Mexico (1966).

G.B. WHITHAM [1] Linear and Nonlinear Waves, Wiley, New-York (1974).

M.L. WILKINS [1] Calculation of elastic plastic flows, Methods in Computational Physics, 3 (1974), Academic Press.

O.C. ZIENKIEWICZ [1] La méthode des Elements Finis, Traduction de la 3ème édition, Mac Graw-Hill (1979).

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique