



**HAL**  
open science

# Un problème de thermoélasticité dans un milieu avec attaches élastiques

J.M. Viano Rey

► **To cite this version:**

J.M. Viano Rey. Un problème de thermoélasticité dans un milieu avec attaches élastiques. RR-0090, INRIA. 1981. inria-00076471

**HAL Id: inria-00076471**

**<https://inria.hal.science/inria-00076471>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P.105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél: 954 9020

## Rapports de Recherche

N° 90

### UN PROBLÈME DE THERMOÉLASTICITÉ DANS UN MILIEU AVEC ATTACHES ÉLASTIQUES

Juan Manuel VIÃNO REY

Septembre 1981

UN PROBLEME DE THERMOELASTICITE  
DANS UN MILIEU AVEC ATTACHES ELASTIQUES

=====

Juan Manuel VIÑO REY

RESUME :

Dans cet article on présente un problème modèle de thermoélasticité linéaire dans un milieu avec attaches élastiques et force d'inertie négligeable.

L'existence et l'unicité de la solution du problème aux conditions initiales sont montrées en utilisant la méthode de Galerkin.

ABSTRACT :

In this study we consider a model problem in linear thermoelasticity for a medium in contact with an elastic body and taking no care of inertial force.

We present a variational formulation of the initial value problem and the existence and unicity of the solution is showed by using Galerkin's method.

---

(\*) Departamento Ecuaciones Funcionales. Universidad de Santiago de Compostela. ESPAGNE.

Ce travail a été réalisé alors que l'auteur était stagiaire à l'INRIA 78153 - Rocquencourt, FRANCE.

INTRODUCTION :

Dans ce travail nous envisageons un corps élastique conducteur de chaleur qui occupe une région  $\Omega$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  avec attaches sur un autre corps de comportement élastique dans une partie de sa frontière. Ce corps est soumis à des efforts externes et à un champ de température, les forces d'inertie étant négligeables.

Dans la Section 1, ci-dessous on reprend le cadre physique de DUVAUT-LIONS [2] pour la mise en équations du problème aux limites envisagé. Ce problème se formalise par le système d'équations couplées en déplacements  $u$  et en température  $\xi$  :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u, \xi) = f_i, \quad 1 \leq i \leq 3 \\ \rho_0 c_\epsilon \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} (k_{ij} \frac{\partial \xi}{\partial x_j}) + \nu_0 m_{ij} \epsilon_{ij}(\frac{\partial u}{\partial t}) = Q \\ \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (T > 0) \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales

$$(2) \quad \xi(0) = \xi_0, \quad u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega$$

et la loi de comportement thermoélastique

$$(3) \quad \sigma_{ij}(u, \xi) = a_{ijkl} \epsilon_{kl}(u) - m_{ij}(\xi - \nu_0)$$

Les conditions aux limites choisies correspondent à la température et à des déplacements fixés sur des parties disjointes de la frontière, à la condition d'équilibre et à la loi de Fourier. De plus sur la partie de la frontière en contact avec le corps élastique, la condition d'attache (cf. DUVAUT-LIONS [1]) s'écrit :

$$(4) \quad \sigma_N = -\eta u_N, \quad \sigma_T = 0.$$

La Section 2 est consacrée à la formulation variationnelle qui conduit à un problème de la forme :

$$(5) \begin{cases} a(u(t), v) - m(\theta(t), v) = \langle L_1(t), v \rangle \quad \forall v \in V_1 \quad \text{sur } ]0, T[ \\ (\theta'(t), \phi) + k(\theta(t), \phi) + m(\phi, u'(t)) = \langle L_2(t), \phi \rangle \quad \forall \phi \in V_2 \quad \text{sur } ]0, T[ \\ \theta(0) = \theta_0, \quad u(0) = u_0 \quad (\theta = \xi - v_0) \end{cases}$$

dans des espaces convenables  $V_1 \subset [H^1(\Omega)]^3$ ,  $V_2 \subset H^1(\Omega)$ .

Ensuite on démontre dans la section 3 un théorème d'existence et d'unicité de solutions fortes de (5) par la méthode de Galerkin.

## 1. PROBLEME PHYSIQUE

### 1.1. Position du problème :

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un ouvert borné "suffisamment régulier" de frontière  $\Gamma$ .  
On note  $n = \{n_i\}$  la normale unitaire à  $\Gamma$  extérieur à  $\Omega$ .

Dans  $\Omega$  on considère un matériau soumis à une force volumique  $f = \{f_i\}$  et une source de chaleur interne  $Q$ .

Nous reprenons les équations de la thermoélasticité linéaire liant les déplacements  $u = \{u_i\}$  et la température absolue  $\xi$  dans  $\Omega$  :

$$(1.1) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u, \xi) + f_i \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$(1.2) \quad \rho_0 c \frac{\partial \xi}{\partial t} + m_{ij} v_0 \frac{\partial \epsilon_{ij}(u)}{\partial t} = Q + \frac{\partial}{\partial x_i} (k_{ij} \frac{\partial \xi}{\partial x_j})$$

$$(1.3) \quad \epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

$$(1.4) \quad \sigma_{ij}(u, \xi) = a_{ijkh} \epsilon_{kh}(u) - m_{ij}(\xi - v_0)$$

Les considérations physiques qui fournissent les équations précédentes sont abordées dans DUVAUT-LIONS [2] et CARLSON [1]. Elles restent valides pour un matériau de comportement isentropique ou isotherme élastique avec des :

- petites déformations
- petites variations de la température autour d'une température moyenne uniforme  $v_0 > 0$
- contraintes initiales nulles

et en supposant que les divers coefficients sont indépendants de la température et des déformations.

Les équations (1.1)-(1.4) sont relatives à un matériau non homogène et non isotrope, c'est-à-dire que les tenseurs  $a_{ijkh}$ ,  $m_{ij}$ ,  $k_{ij}$  peuvent dépendre du point  $x$  (et aussi de  $v_0$ ). Par contre les scalaires  $\rho_0$  (densité du matériau) et  $c$  (chaleur spécifique à déformation constante) sont supposés

constants et peuvent être pris égaux à 1 par changement d'échelle sur le temps et la température.

Rappelons que les tenseurs de conductivité thermique  $k_{ij}$  et le tenseur d'élasticité  $a_{ijkl}$  vérifient les conditions de coercivité :

$$(1.5) \quad k_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha_1 \xi_i \xi_i \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^3 \quad (\alpha_1 > 0)$$

$$(1.6) \quad a_{ijkl}(x) \xi_{ij} \xi_{kh} \geq \alpha_2 \xi_{ij} \xi_{ij} \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R} \quad (\alpha_2 > 0)$$

et de symétrie :

$$(1.7) \quad k_{ij} = k_{ji}, \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$(1.8) \quad a_{ijkl} = a_{jikh} = a_{khij}, \quad 1 \leq ij \leq 3$$

Nous avons aussi

$$(1.9) \quad m_{ij} = m_{ji}$$

mais il n'y a rien à supposer sur  $m_{ij} \xi_i \xi_j$ .

Si le matériau considéré est isotrope alors les tenseurs sont invariants par rotation, i.e. :

$$(1.10) \quad m_{ij} = m \delta_{ij} \quad k_{ij} = k \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

$$(1.11) \quad a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ij} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk})$$

en général on observe que le coefficient  $m$  est positif mais cela n'a pas des conséquences dans la suite.

Dans ce point nous supposons que les déformations ont lieu à vitesse uniforme et par conséquence les composantes de la force d'inertie

$$\tilde{f}_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad \text{peuvent être négligées de façon à ce que}$$

le système d'équation à étudier devienne :

$$(1.12) \quad - \frac{\partial}{\partial x_j} [a_{ijkh} \epsilon_{kh}(u)] + \frac{\partial}{\partial x_j} [m_{ij}(\xi - v_0)] = f_i \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$(1.13) \quad \rho_0 c \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} (k_{ij} \frac{\partial \xi}{\partial x_j}) + v_0 m_{ij} \epsilon_{ij} (\frac{\partial u}{\partial t}) = Q.$$

□

### 1.2. Problème aux limites envisagé

Notre objectif est l'étude du système (1.12)-(1.13) avec des conditions initiales sur  $u$  et  $\xi$  ; nous posons

$$(1.14) \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \xi(x,0) = \xi_0(x) \text{ dans } \Omega$$

On considère dans  $\Gamma$  les parties  $\Gamma_i$ ,  $0 \leq i \leq 4$ , vérifiant :

$$(1.15) \quad \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

$$(1.16) \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, \quad 0 \leq i, j \leq 2, \quad \Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$$

et on suppose que  $\Gamma_1$  est la partie de  $\Omega$  en contact avec un autre milieu de réponse élastique. Les conditions imposées ci-dessous prennent en compte cette situation, la condition d'équilibre et la loi de Fourier de transfert de chaleur :

$$(1.17) \quad u_i = \hat{u}_i \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T), \quad 1 \leq i \leq 3.$$

$$(1.18) \quad \xi = \hat{\xi} \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

avec  $\hat{u} = \{\hat{u}_i\}$  et  $\hat{\xi}$  donnés.

Si  $F = \{F_i\}$  est le vecteur des efforts surfaciques sur  $\Gamma_2$  et  $G$  le flux de chaleur à travers  $\Gamma_4$  alors :

$$(1.19) \quad \sigma_{ij} n_j = F_i \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$(1.20) \quad q_i n_i = G \text{ sur } \Gamma_4 \times (0, T).$$

où  $\sigma_{ij}$  est donné par (1.4) et  $q_i = -k_{ij} \frac{\partial \xi}{\partial x_j}$  ( $1 \leq i \leq 3$ ).



Pour les conditions sur  $\Gamma_1$  on utilise la notation classique suivante (cf. DUVAUT-LIONS [1]) :

$$(1.21) \left\{ \begin{array}{l} Z = \{Z_i\}, \quad n = \{n_i\} \quad Z_N = Z_i n_i \quad Z_T = Z - n Z_N \\ \sigma_N = \sigma_{ij} n_i n_j \quad \sigma_T = \{\sigma_{iT}\} \quad \text{avec} \quad \sigma_{iT} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_N n_i \end{array} \right.$$

Alors les conditions d'attache sur  $\Gamma_1$  sont :

$$(1.22) \quad \sigma_T = 0, \quad \sigma_N = -\eta u_N \quad (\eta > 0) \quad \text{dans} \quad \Gamma_1 \times (0, T) .$$

□

Remarque 1.1 :

Puisque la condition d'équilibre est valable aussi dans  $\Gamma_1$  le vecteur  $\{\psi_i\}$  des efforts dans  $\Gamma_1$  est  $\psi_i = \sigma_{ij} n_j$ . On suppose que les déplacements tangentiels des points de  $\Gamma_1$  sont libres, tandis que les forces normales sont des forces de rappel élastique dont la valeur absolue est proportionnelle au déplacement normal. Si  $t = \{t_i\}$  est le vecteur tangent à  $\Gamma_1$  on a

$$\psi = \psi^n \vec{n} + \psi^t \vec{t}$$

et ces conditions s'expriment par

$$(1.23) \quad \psi^t = 0 \quad \psi^n = -\eta u_N$$

Mais, (1.23) et (1.22) sont équivalents. □

Dans la suite il serait bien préférable de travailler avec le champ de différences de température

$$(1.24) \quad \theta = \xi - v_0$$

où on suppose que la température constante de référence  $v_0$  a été fixée une fois pour toutes. Il est important d'observer que  $\theta$  peut prendre éventuellement des valeurs négatives.

En termes de  $\theta$  la relation des contraintes avec les déplacements et la température devient :

$$(1.25) \quad \sigma_{ij}(u, \theta) = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) - m_{ij} \theta$$

De plus l'équation de conduction de chaleur (1.13) vérifiée en remplaçant  $\xi$  par  $\theta$ . Ainsi, le vecteur flux de chaleur s'écrit :

$$(1.26) \quad q_i = -k_{ij} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = -k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}$$

et (1.20) est inchangé.

Si on pose

$$(1.27) \quad \hat{\theta} = \hat{\xi} - v_0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad \theta_0 = \xi_0 - v_0 \text{ dans } \Omega$$

les conditions (1.14), (1.18) deviennent

$$(1.28) \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \text{ dans } \Omega \quad \theta = \hat{\theta} \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T). \quad \square$$

### 1.3. Récapitulation

Le problème à étudier est modélisé par les équations aux dérivées partielles suivantes :

Trouver  $u_i(x, t)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , et  $\theta(x, t)$  définies dans  $\Omega \times (0, T)$  solution de

$$(1.29) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} [a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u)] + \frac{\partial}{\partial x_j} [m_{ij} \theta] = f_i & 1 \leq i \leq 3 \\ \frac{\rho c}{v_0} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{k_{ij}}{v_0} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + m_{ij} \varepsilon_{ij} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = q = \left( \frac{Q}{v_0} \right) \end{cases}$$

dans  $\Omega \times (0, T)$ , avec les conditions initiales

$$(1.30) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \text{ dans } \Omega$$

et les conditions aux limites

$$(1.31) \left\{ \begin{array}{l} u = \hat{u} \text{ dans } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T) \\ \theta = \hat{\theta} \text{ dans } \Sigma_3 = \Gamma_3 \times (0,T) \\ \sigma_{ij} n_j = F_i \quad 1 \leq i \leq 3 \text{ sur } \Sigma_2 = \Gamma_2 \times (0,T) \\ -k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} n_i = G \text{ sur } \Sigma_4 = \Gamma_4 \times (0,T) \\ \sigma_T = 0, \quad \sigma_N + \eta u_N = 0 \text{ sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T). \end{array} \right.$$

( $\Gamma_i$  vérifiant (1.15)-(1.16)) et

$$(1.32) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}(u, \theta) = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) - m_{ij} \theta \\ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad \square \end{array} \right.$$

Remarque 1.2.

Eventuellement, les situations suivantes sont envisageables :

$$(1.33) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_0 = \emptyset \text{ alors } \Gamma_2 \cup \Gamma_1 = \Gamma, \quad \Gamma_2 \cap \Gamma_1 = \emptyset \\ \Gamma_1 = \emptyset \text{ alors } \Gamma_0 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_2 = \emptyset \\ \Gamma_2 = \emptyset \text{ alors } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma, \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset \end{array} \right.$$

et/ou

$$(1.34) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_3 = \emptyset \text{ alors } \Gamma_4 = \Gamma \\ \Gamma_4 = \emptyset \text{ alors } \Gamma_3 = \Gamma. \end{array} \right.$$

Nous verrons plus loin que le cas  $\Gamma_0 = \emptyset$  présente une différence essentielle par rapport aux autres, et nous le traiterons explicitement quand cela sera nécessaire.

D'ailleurs, pour simplifier l'exposé, nous avons choisi le cas particulier suivant (physiquement envisageable) :

$$(1.35) \quad \Gamma_3 = \Gamma_1, \quad \Gamma_4 = \Gamma_2 \cup \Gamma_0, \quad \text{le flux dans } \Gamma_0 \text{ est nul.}$$

Les modifications techniques à faire pour un cas différent restent transparentes.

Tenant compte de (1.35) on considéra donc

$$(1.36) \quad \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j \neq \emptyset \quad 0 \leq i \leq j$$

et les conditions aux limites (tirées de (1.31)) :

$$(1.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \hat{u} , \quad -k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} n_i = 0 \quad \text{dans} \quad \Sigma_0 \\ \theta = \hat{\theta} , \quad \sigma_{ij} = 0, \quad \sigma_N + \eta u_N = 0 \quad \text{dans} \quad \Sigma_1 \\ \sigma_{ij} n_j = F_i \quad (1 \leq i \leq 3), \quad -k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} n_i = G \quad \text{dans} \quad \Sigma_2 . \end{array} \right.$$

Le problème étudié dans la suite est modélisé par le système défini en (1.29), (1.30), (1.37).  $\square$

2. FORMULATION VARIATIONNELLE

On utilisera la notation :

$$\begin{aligned} u(t) &: x \in \Omega \rightarrow u(x,t) \\ u'(t) &: x \in \Omega \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \end{aligned}$$

Si les données sont assez régulières,  $(u,\theta)$  est une solution régulière du problème (1.29), (1.30), (1.37), les intégrations par parties sont alors légitimes, et l'on a :

$$\forall t \in (0,T) \quad \forall v \in [D(\bar{\Omega})]^3 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), \quad v = \hat{u}(t) \text{ sur } \Gamma_0, \quad \phi = \hat{\theta}(t) \text{ sur } \Gamma_1 :$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v-u(t)) dx - \int_{\Omega} m_{ij} \theta(t) \varepsilon_{ij}(v-u(t)) dx = \\ &= \int_{\Omega} f_i(t) (v_i - u_i(t)) dx + \int_{\Gamma_2} F_i(t) (v_i - u_i(t)) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i(t)) d\Gamma \\ & \int_{\Omega} \frac{\rho c}{v_0} \theta'(t) (\phi - \theta(t)) dx + \int_{\Omega} \frac{k_{ij}}{v_0} \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi - \theta(t)) dx + \int_{\Omega} m_{ij} \varepsilon_{ij}(u'(t)) (\phi - \theta(t)) dx = \\ &= \int_{\Omega} q(t) (\phi - \theta(t)) dx - \int_{\Gamma_2} \frac{G(t)}{v_0} (\phi - \theta(t)) d\Gamma \end{aligned}$$

D'après la notation (1.21) on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i(t)) d\Gamma &= \int_{\Gamma_1} (\sigma_{iT} + \sigma_N n_i) (v_i - u_i(t)) d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \sigma_N (v-u(t))_N d\Gamma = \\ &= - \eta \int_{\Gamma_1} u_N(t) (v-u(t))_N d\Gamma \end{aligned}$$

de sorte que  $(u,\theta)$  est solution de

$$(2.1) \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v-u(t)) dx + \eta \int_{\Gamma_1} u_N(t) (v-u(t))_N d\Gamma - \\ & - \int_{\Omega} m_{ij} \theta(t) \varepsilon_{ij}(v-u(t)) dx = \\ &= \int_{\Omega} f_i(t) (v_i - u_i(t)) dx + \int_{\Gamma_2} F_i(t) (v_i - u_i(t)) d\Gamma, \\ & \forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3, \quad v = \hat{u}(t) \text{ sur } \Gamma_0, \quad 0 < t < T \end{aligned} \right.$$

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} \frac{\rho_0 c}{v_0} \theta'(t) (\phi - \theta(t)) dx + \int \frac{k_{ij}}{v_0} \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi - \theta(t)) dx + \int_{\Omega} m_{ij} \varepsilon_{ij}(u'(t)) (\phi - \theta(t)) dx = \int_{\Omega} q(t) (\phi - \theta(t)) dx - \int_{\Gamma_2} g(t) (\phi - \theta(t)) d\mathbb{R}$$

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), \phi = \hat{\theta}(t) \text{ dans } \Gamma_1 \quad 0 < t < T \quad (1)$$

$$(2.3) \quad u(0) = u_0, \theta(0) = \theta_0.$$

Réciproquement, si  $u = u(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$  sont des fonctions régulières satisfaisant  $u = \hat{u}(t)$  sur  $\Gamma_0$ ,  $\theta = \hat{\theta}(t)$  sur  $\Gamma_1$ ,  $0 < t < T$ , et (2.1), (2.3) alors  $(u, \theta)$  est solution de (1.29), (1.30), (1.37), il suffit de remonter les calculs.  $\square$

Dans la suite, nous allons résoudre (2.1), (2.3) dans un sens convenable. On introduit un problème plus général dont on montrera l'existence et l'unicité de la solution.

On suppose que pour  $t \in [0, T]$  :

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \hat{u}(t) \text{ est restriction a } \Gamma_0 \text{ de } U(t) \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^3 \\ \cdot \hat{\theta}(t) \text{ est restriction a } \Gamma_1 \text{ de } \tau \in H^{1/2}(\Gamma) \\ \cdot f_i(t) \in L^2(\Omega), F_i(t) \in L^2(\Gamma_2) \quad 1 \leq i \leq 3 \\ \cdot q(t) \in L^2(\Omega), g(t) \in L^2(\Gamma_2) \end{array} \right.$$

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_0 > 0, c > 0, v_0 > 0. \\ a_{ijkh} \in L^\infty(\Omega), \text{ vérifiant (1.6), (1.8)} \\ k_{ij} \in L^\infty(\Omega), \text{ avec (1.5), (1.7)} \\ m_{ij} \in L^\infty(\Omega) \quad \text{et (1.9).} \end{array} \right.$$

On introduit les espaces de fonctions suivants :

---

(1) On pose  $g = G/v_0$ .

$$(2.6) \quad V_1 = \{v/v \in [H^1(\Omega)]^3 : v_i|_{\Gamma_0} = 0 \quad 1 \leq i \leq 3\} \quad 1/2$$

muni de la norme hilbertienne produit :  $\|v\|_1 = [\sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{1,\Omega}^2]^{1/2} \quad \forall v \in V_1$

$$(2.7) \quad H_1 = [L^2(\Omega)]^3 \quad |v|_1 = [\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} |v_i|^2 dx]^{1/2}$$

$$(2.8) \quad V_2 = \{\phi | \phi \in H^1(\Omega) : \phi|_{\Gamma_1} = 0\} ; \quad \|\phi\|_2 = \|\phi\|_{1,\Omega} \quad \forall \phi \in V_2$$

$H_2 = L^2(\Omega)$  avec le produit scalaire équivalent à l'usuel

$$(2.9) \quad (\phi, \psi)_2 = \int_{\Omega} \frac{\rho_0 c}{v_0} \phi \psi dx$$

La propriété  $V_i \subset H_i \subset V'_i \quad (1 \leq i \leq 2)$  avec injection continue et dense sera utilisée.

Soit

$$(2.10) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx + \eta \int_{\Gamma_1} u_N v_N d\Gamma \quad \forall u, v \in [H^1(\Omega)]^3$$

$a(.,.)$  définit une forme bilinéaire continue sur  $[H^1(\Omega)]^3 \times [H^1(\Omega)]^3$

On pose :

$$a_1(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx, \quad u, v \in [H^1(\Omega)]^3.$$

de sorte que  $a(u, v) = a_1(u, v) + \eta \int_{\Gamma_1} u_N v_N d\Gamma$

On a (cf. DUVAUT-LIONS [1], Chap. 3) :

(i) si  $\Gamma_0$  est de mesure superficielle positive, il existe  $\alpha_1 > 0$  telle que

$$(2.11) \quad a_1(v, v) \geq \alpha_1 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V_1$$

et donc, a fortiori

$$(2.12) \quad a(v, v) \geq \alpha_1 \|v\|_1^2, \quad \forall v \in V_1.$$

(ii) si  $\Gamma_1$  n'est pas contenue dans un plan (cf. DUVAUT-LIONS op. cit. pag. 133), alors

$$(2.13) \quad a(v,v) \geq \alpha_1 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in [H^1(\Omega)]^3$$

Par conséquent sauf pour le cas

(iii)  $\text{mes}(\Gamma_0) = 0$ ,  $\Gamma_1$  contenue dans un plan, la forme  $a(\dots)$  est  $V_1$ -elliptique. Le cas particulier de (iii) avec  $\Gamma_0 = 0$ , est traité dans le § 2. Sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , on définit la forme bilinéaire continue et symétrique

$$(2.14) \quad k(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \frac{k_{ij}}{\nu_0} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx$$

D'après (1.5) on déduit que

$\forall C > 0$ , il existe  $\lambda > 0$  telle que

$$(2.15) \quad k(\phi, \phi) + C \|\phi\|_2^2 \geq \lambda \|\phi\|_{1,\Omega}^2; \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Si  $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$  alors sur  $V_2$  la seminorme  $\|\phi\|_{1,\Omega} = \left[ \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 dx \right]^{1/2}$

est une norme équivalente à  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  donc

$$(2.16) \quad \text{si } \text{mes}(\Gamma_1) > 0, \text{ il existe } \alpha_2 > 0 \text{ tel que } k(\phi, \phi) \geq \alpha_2 \|\phi\|_2^2 \quad \forall \phi \in V_2$$

Pour le théorème d'existence la seule propriété qui intervient est (2.15).

Une troisième forme bilinéaire continue est définie sur  $H_2 \times [H^1(\Omega)]^3$  par :

$$(2.17) \quad m(\phi, v) = \int_{\Omega} m_{ij} \phi \epsilon_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} m_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \phi dx, \quad \phi \in H_2, v \in [H^1(\Omega)]^3.$$

Avec les notations introduites ci-dessus, toute solution suffisamment régulière du problème posé ci-après est solution de (2.1), (2.3).



$$\begin{aligned} u : t \in [0, T] \rightarrow u(t) \in [H^1(\Omega)]^3, u(t) = \hat{u}(t) \text{ sur } \Gamma_0 \quad 0 \leq t \leq T \\ \theta : t \in [0, T] \rightarrow \theta(t) \in [H^1(\Omega)], \theta(t) = \hat{\theta}(t) \text{ sur } \Gamma_1 \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

solution, dans  $]0, T[$  de :

$$(2.18) \quad \begin{cases} a(u(t), v) - m(\theta(t), v) = \int_{\Omega} f(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} F(t) \cdot v \, d\Gamma \quad \forall v \in V_1 \\ (\theta'(t), \phi)_2 + k(\theta(t), \phi) + m(\phi, u'(t)) = \int_{\Omega} q(t) \phi \, dx - \int_{\Gamma_2} g(t) \phi \, d\Gamma \\ u(0) = u_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \quad \forall \phi \in V_2.$$

2.1. Remarque sur le cas  $\Gamma_0 = \emptyset$ ,  $\Gamma_1$  contenu dans un plan.

La condition de coercivité (2.12) de la forme bilinéaire  $a(\dots)$  intervient de façon fondamentale dans le théorème d'existence pour (2.18). Si  $\Gamma_0 = \emptyset$ , on a  $V_1 = [H^1(\Omega)]^3$  et d'après DUVAUT-LIONS [1], page 133, (2.12) reste vraie si  $\Gamma_1$  n'est pas plane. Si ce n'est pas le cas on peut trouver  $v \in [H^1(\Omega)]^3$ ,  $v \neq 0$ , tel que  $a(v, v) = 0$ , de sorte que (2.12) n'a pas lieu.

Soit

$$(2.19) \quad R = \{v \in [H^1(\Omega)]^3 \mid v(x) = a + b \wedge x \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}^3\} \quad (1)$$

On montre (cf. DUVAUT-LIONS [1]) que

$$(2.20) \quad a_1(v, v) = 0 \quad \text{équivaut à} \quad v \in R.$$

Puisque  $a(v, v) = 0$  si et seulement si  $a_1(v, v) = 0$  et  $\int_{\Gamma_1} v_N^2 \, d\Gamma = 0$ , on déduit que

$$(2.21) \quad a(v, v) = 0 \quad \text{équivaut à} \quad v \in R, \quad v_N = 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

---

(1) Ensemble des déplacements rigides.

Autrement dit, si  $n$  est le vecteur normal au plan soutenant  $\Gamma_1$

$$(2.22) \quad a(v,v) = 0 \text{ si et seulement si } \begin{cases} v(x) = a+b \wedge x & x \in \Omega, a, b \in \mathbb{R}^3. \\ a+b \wedge x \text{ orthogonal à } n, & x \in \Gamma_1. \end{cases}$$

On introduit le sous-espace fermé

$$(2.23) \quad S = \{v \in [H^1(\Omega)]^3 : v(x) = a+b \wedge x, v_N = 0 \text{ sur } \Gamma_1, a, b \in \mathbb{R}^3\}$$

et l'espace quotient

$$(2.24) \quad \dot{V}_1 = V_1/S = [H^1(\Omega)]^3/S$$

avec

$$(2.25) \quad \dot{u} = \{u + \xi : \xi \in S\}, \quad \|\dot{u}\|_1 = \inf_{\xi \in S} \|u + \xi\|_1, \quad u \in [H^1(\Omega)]^3.$$

Pour  $\dot{u}, \dot{v} \in \dot{V}_1$ , on définit

$$(2.26) \quad \dot{a}(\dot{u}, \dot{v}) = a(u, v), \quad u \in \dot{u}, v \in \dot{v}.$$

$\dot{a}(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire continue sur  $\dot{V}_1$ , bien définie d'après (2.21).

Proposition 2.1.

Si  $\Omega$  est borné de frontière régulière, alors :

$$(2.27) \quad \dot{a}(\dot{v}, \dot{v}) \geq \alpha \|\dot{v}\|_1^2, \quad \forall \dot{v} \in \dot{V}_1, \quad \alpha > 0$$

Démonstration :

Le cas  $\Gamma_1 = \emptyset$  (i.e.  $S = R$ ,  $a(\cdot, \cdot) = a_1(\cdot, \cdot)$ ) est étudié dans DUVAUT-LIONS [1] page 117. Nous suivons la même technique.

L'inégalité de Korn est vraie dans  $\Omega$  :

$$(2.28) \quad \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) dx + \int_{\Omega} v_i v_i dx \geq c(\Omega) \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V_1$$

De (1.6) on obtient :

$$a(v,v) = a_1(v,v) + \eta \int_{\Gamma_1} v_N^2 d\Gamma \geq \alpha \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) dx + \eta \int_{\Gamma_1} v_N^2 d\Gamma$$

Puisque l'inégalité inverse de (2.28) est évidente, on a :

$$(2.29) \quad \|\dot{v}\|_1 = \inf_{\xi \in S} \|v + \xi\|_1 \leq \beta \inf_{\xi \in S} [ \|v + \xi\|_1^2 + \varepsilon(v) ] ,$$

$$\text{où } \varepsilon(v) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) dx \quad (1) , \quad \forall v \in [H^1(\Omega)]^3 .$$

On voit, donc, qu'il suffit de montrer que

$$(2.30) \quad \varepsilon(v) + \int_{\Gamma_1} v_N^2 d\Gamma \geq \omega \cdot \inf_{\xi \in S} [ \|v + \xi\|_1^2 + \varepsilon(v) ]$$

Soit

$$P : [L^2(\Omega)]^3 \rightarrow S$$

l'opérateur de projection orthogonal sur S dans  $H_1$ . Alors,

$$\inf_{\xi \in S} \|v + \xi\|_1^2 = \|v - Pv\|_1^2 ,$$

de sorte que (2.30) revient à montrer que

$$\varepsilon(v) + \int_{\Gamma_1} v_N^2 d\Gamma \geq c \|v - Pv\|_1^2 , \quad \forall v \in V_1 .$$

En remplaçant  $v$  par  $v - Pv$  on conduit à ce qu'il faut montrer :

$$(2.31) \quad \varepsilon(v) + \int_{\Gamma_1} v_N^2 d\Gamma \geq c > 0 \quad \forall v \in V_1, \quad \|v - Pv\|_1 = 1 .$$

---

(1)  $\varepsilon(v + \xi) = \varepsilon(v)$ , pour  $\xi \in S$ .

On raisonne par l'absurde. Si (2.31) est inexact, il existe une suite  $(v_\alpha)$  telle que

$$(2.32) \quad v_\alpha \in V_1, \quad |v_\alpha - Pv_\alpha|_1 = 1, \quad \varepsilon(v_\alpha) + \int_{\Gamma_1} v_{\alpha N}^2 d\Gamma \rightarrow 0$$

Mais alors, si l'on pose

$$(2.33) \quad \omega_\alpha = v_\alpha - Pv_\alpha,$$

puisque  $Pv_\alpha \in S$  on a

$$(2.34) \quad \varepsilon(\omega_\alpha) + \int_{\Gamma_1} \omega_{\alpha N}^2 d\Gamma = \varepsilon(v_\alpha) + \int_{\Gamma_1} v_{\alpha N}^2 d\Gamma.$$

Par conséquence, la suite  $(\omega_\alpha)$  vérifie :

$$(2.35) \quad \omega_\alpha \in V_1, \quad |\omega_\alpha|_1 = 1, \quad \varepsilon(\omega_\alpha) + \int_{\Gamma_1} \omega_{\alpha N}^2 d\Gamma \rightarrow 0$$

D'après l'inégalité de Korn, on a  $\|\omega_\alpha\|_1 \leq C$

On peut donc extraire une sous-suite, encore notée  $\omega_\alpha$ , telle que

$$(2.36) \quad \omega_\alpha \rightarrow \omega \quad \text{dans } V_1\text{-faible}$$

et l'injection  $V_1 \rightarrow [L^2(\Omega)]^3$  étant compacte,

$$(2.37) \quad \omega_\alpha \rightarrow \omega \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^3\text{-fort.}$$

$$\text{Mais, } \liminf [\varepsilon(\omega_\alpha) + \int_{\Gamma_1} \omega_{\alpha N}^2 d\Gamma] = 0 \geq \varepsilon(\omega) + \int_{\Gamma_1} \omega_N^2 d\Gamma$$

d'où :

$$\varepsilon(\omega) = 0, \quad \int_{\Gamma_1} \omega_N^2 d\Gamma = 0, \quad \text{i.e. } \omega \in S.$$

D'autre part  $\omega_\alpha \in S^\perp$  sous-espace de  $V_1$  orthogonal à  $S$  avec le produit scalaire de  $[L^2(\Omega)]^3$ , d'après (2.37),  $\omega \in S^\perp$ . Finalement,  $\omega = 0$ .

Mais alors  $\omega_\alpha \rightarrow 0$  dans  $[L^2(\Omega)]^3$  -fort ce qui est absurde car  $|\omega_\alpha|_1 = 1$ .  $\square$

Dans le cas présent, puisque  $\Gamma_0 = \emptyset$ , le problème (2.18) s'écrit :

$$(2.38) \left\{ \begin{array}{l} u : t \in [0, T] \rightarrow u(t) \in [H^1(\Omega)]^3 \\ \theta : t \in [0, T] \rightarrow \theta(t) \in [H^1(\Omega)] \quad \theta(t) = \hat{\theta}(t) \text{ sur } \Gamma_1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \text{solution dans } ]0, T[ \text{ de :} \\ a(u(t), v) - m(\theta(t), v) = \int_{\Omega} f(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} F(t) \cdot v d\Gamma \quad \forall v \in V_1. \\ (\theta'(t), \phi)_2 + k(\theta(t), \phi) + m(\phi, u'(t)) = \int_{\Omega} q(t) \phi dx - \int_{\Gamma_2} g(t) \phi d\Gamma \quad \forall \phi \in V_2. \end{array} \right.$$

Comme on a déjà signalé, si  $v \in S$ ,  $a(u, v) = 0$ ,  $\forall u \in V_1$ .

De plus, d'après la définition de  $m$  -cf. (2.17)- il est évident que

$$(2.39) \quad \forall v \in R, \quad m(\phi, v) = 0 \quad \forall \phi \in H_2.$$

On déduit, donc, que (2.38) n'est possible que si

$$(2.40) \quad \forall v \in S : \int_{\Omega} f(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} F(t) \cdot v d\Gamma = 0 \quad (1)$$

ce qui permet de définir la forme linéaire continue sur  $\dot{V}_1$

$$(2.41) \quad \langle \dot{b}_1(t), \dot{v} \rangle = \int_{\Omega} f(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} F(t) \cdot v d\Gamma, \quad v \in \dot{v}, \quad \dot{v} \in V_1.$$

Dès que (2.34) est vérifié on peut définir la forme bilinéaire continue sur  $H_2 \times \dot{V}_1$

$$(2.42) \quad \dot{m}(\phi, \dot{v}) = m(\phi, v) \quad v \in \dot{v}, \quad \dot{v} \in V_1, \quad \phi \in H_2.$$

et finalement, si (2.40) a lieu, (2.38) équivaut à

(1) Voir DUVAUT-LIONS [1] pour interprétation mécanique.

$$\begin{aligned}
 (2.43) \quad & \dot{a}(\dot{u}(t), \dot{v}) - \dot{m}(\theta(t), \dot{v}) = \langle \dot{b}_1(t), \dot{v} \rangle \quad \forall \dot{v} \in \dot{V}_1 \\
 & (\theta'(t), \phi)_2 + k(\theta(t), \phi) + m(\phi, \dot{u}'(t)) = \int_{\Omega} q(t)\phi \, dx - \\
 & - \int_{\Gamma_2} g(t)\phi \, d\Gamma \quad \forall \phi \in V_2.
 \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.1,  $\dot{a}(\cdot, \cdot)$  est  $\dot{V}_1$ -elliptique et ce problème est dans les mêmes hypothèses que (2.18) pour le théorème d'existence et unicité. L'unicité de  $\dot{u}$  signifie que la solution  $u$  est définie à un déplacement rigide  $\xi$ , tel que  $\xi_N = 0$ , quelconque près.  $\square$

3. THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE.

Nous allons dans la suite résoudre le problème (2.18) au sens des distributions sur  $]0, T[$ . Les propriétés (2.5) des coefficients et certaine régularité des données (2.4) interviennent pour l'obtention d'un théorème d'existence de solutions fortes. Ci-après nous énonçons le théorème général. La démonstration serait faite en plusieurs étapes :

Théorème 3.1. En supposant :

$$(3.1) \quad f, f', f'' \in L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^3) ; F, F', F'' \in L^2(0, T; [L^2(\Gamma_2)]^3).$$

$$(3.2) \quad q, q' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) ; g, g' \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)).$$

$$(3.3) \quad \hat{u} \text{ est restriction à } \Gamma_0 \times (0, T) \text{ de } U, \text{ avec } U, U', U'' \in L^2(0, T; [H^{1/2}(\Gamma)]^3).$$

$$(3.4) \quad \hat{\theta} \text{ est restriction à } \Gamma_1 \times (0, T) \text{ de } \Theta, \text{ avec } \theta, \theta', \theta'' \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma)).$$

$$(3.5) \quad u_0 \in [H^1(\Omega)]^3, u_0 = \hat{u}(0) \text{ sur } \Gamma_0 ; \theta_0 \in H^1(\Omega), \theta_0 = \hat{\theta}(0) \text{ sur } \Gamma_1$$

$$(3.6) \quad a(u_0, v) - m(\theta_0, v) = \int_{\Omega} f(0) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} F(0) \cdot v \, d\Gamma, \quad \forall v \in V_1.$$

alors, il existe un et un seul couple  $(u, \theta)$  solution de (2.18), vérifiant :

$$(3.7) \quad u \in L^\infty(0, T; [H^1(\Omega)]^3), u' \in L^2(0, T; [H^1(\Omega)]^3).$$

$$(3.8) \quad \theta \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \theta' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad \square$$

Remarque 3.1. : Les hypothèses prises ci-dessus peuvent être affaiblies (cf Remarque 3.2). Si on suppose  $a_{ijkl} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ,  $u_0 \in [H^2(\Omega)]^3$ ,  $m_{ij} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ,  $\theta_0 \in H^2(\Omega)$ , alors (3.5) et (3.6) peuvent être interprétées formellement par la vérification au sens des distributions de :

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} [a_{ijkl} \varepsilon_{kh}(u_0)] + \frac{\partial}{\partial x_j} [m_{ij} \theta_0] = f_i(0) \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$\sigma_{iT}(u_0, \theta_0) = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \quad 1 \leq i \leq 3.$$

$$\sigma_N(u_0, \theta_0) + \eta u_{0N} = 0 \text{ sur } \Gamma_1$$

$$\sigma_{ij}(u_0, \theta_0) n_j = F_i(0) \text{ sur } \Gamma_2 \quad 1 \leq i \leq 3. \quad \square$$

Tout ce qui reste de la Section est consacrée à la démonstration du théorème 3.1.

3.1. Transformation du problème :

Les hypothèses (3.3) et (3.4) entraînent l'existence de  $\phi, \Lambda$  vérifiant : (cf. DUVAUT-LIONS [1], LIONS-MAGENES [1], vol. 2)

$$(3.9) \quad \phi, \phi', \phi'' \in L^2(0, T; [H^1(\Omega)]^3); \quad \phi = \hat{u} \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T).$$

$$(3.10) \quad \Lambda, \Lambda', \Lambda'' \in L^2(0, T; H^1(\Omega)); \quad \Lambda = \hat{\theta} \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T).$$

On pose :

$$(3.11) \quad \tilde{u} = u - \phi, \quad \tilde{u}_0 = u_0 - \phi(0), \quad \tilde{\theta} = \theta - \Lambda, \quad \tilde{\theta}_0 = \theta_0 - \Lambda(0) \quad (1)$$

Si  $(u, \theta)$  est la seule solution de (2.18) vérifiant (3.7) (3.8) alors  $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$  est la seule solution du problème suivant :

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} : t \in [0, T] \rightarrow \tilde{u}(t) \in V_1, \quad \tilde{\theta} : t \in [0, T] \rightarrow \tilde{\theta}(t) \in V_2 \\ a(\tilde{u}(t), v) - m(\tilde{\theta}(t), v) = \langle L_1(t), v \rangle \quad \forall v \in V_1. \\ (\tilde{\theta}'(t), z)_2 + k(\tilde{\theta}(t), z) + m(z, \tilde{u}'(t)) = \langle L_2(t), z \rangle \quad \forall z \in V_2, \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0, \quad \tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}_0. \end{array} \right.$$

vérifiant :

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} \in L^\infty(0, T; V_1), \quad \tilde{u}' \in L^2(0, T; V_1). \\ \tilde{\theta} \in L^\infty(0, T; V_2) \quad \tilde{\theta}' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2) \end{array} \right.$$

où  $L_1(t) \in V_1'$  -dual de  $V_1$ ,  $L_2(t) \in V_2'$  définis par :

$$(3.14) \quad \langle L_1(t), v \rangle = \int_{\Omega} f(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} F(t) \cdot v \, d\Gamma - a(\phi(t), v) + m(\Lambda(t), v), v$$

$$(3.15) \quad \langle L_2(t), z \rangle = \int_{\Omega} q(t) \cdot z \, dx - \int_{\Gamma_2} g(t) z \, d\Gamma - (\Lambda'(t), z)_2 - k(\Lambda(t), z) - m(z, \phi'(t)) \quad z \in V_2. \quad \square$$

Tout revient, alors, à montrer l'existence et l'unicité de la solution de (3.12) vérifiant (3.13). Nous ferons cette démonstration dans le cadre abstrait où n'interviennent que les formes  $a, m, k, L_1, L_2$  et les espaces  $V_i, H_i$  ( $1 \leq i \leq 2$ ).  $\square$

(1) La régularité de  $\phi, \Lambda$  dans (3.9) (3.10) entraîne  $\phi \in C^1([0, T]; [H^1(\Omega)]^3)$ ,  $\Lambda \in C^1([0, T]; H^1(\Omega))$ .

(2) Les hypothèses (3.9) (3.10) entraînent  $\phi, \phi' \in L^\infty(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$ ,  $\Lambda, \Lambda' \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ , donc  $\Lambda' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .



Théorème 3.2. Si on suppose que :

$$(3.16) \quad L_1, L_1', L_1'' \in L^2(0,T;V_1') ; L_2, L_2' \in L^2(0,T ; V_2')$$

$$(3.17) \quad \tilde{u}_0 \in V_1, \tilde{\theta}_0 \in V_2 \text{ vérifiant : } a(\tilde{u}_0, v) - m(\tilde{\theta}_0, v) = \langle L_1(0), v \rangle \quad \forall v \in V_1$$

alors (3.12) admet une et une seule solution  $(u, \theta)$  vérifiant (3.13).  $\square$

Remarque 3.2. :

Puisque dans notre problème  $L_1, L_2$  sont donnés par (3.14) - (3.15) on déduit que dès que (3.1) et (3.2) sont vérifiés pour (3.16) il suffit d'avoir :

$\phi, \phi', \phi'' \in L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^3)$  ;  $\Lambda, \Lambda' \in L^2(0,T ; H^1(\Omega))$ ,  $\Lambda'' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ , plus faible que (3.10).

D'autre part (3.5) et (3.6) entraînent bien (3.17). On constate, donc, que la prise des conditions initiales prises arbitrairement peuvent amener à un problème sans solution.

### 3.2. Démonstration du théorème 3.1.

Puisque les espaces  $V_1, V_2$  sont séparables on peut choisir des "bases" dénombrables  $\{w_1^i, w_2^i, \dots, w_m^i\} \dots$ , ( $1 \leq i \leq 2$ ), telles que  $\{w_1^i \dots w_m^i\} \quad \forall m \geq 1$  sont linéairement indépendants et les combinaisons linéaires finies des  $w_j^i$  sont denses dans  $V_i$  ( $1 \leq i \leq 2$ ). On supposera (ce qui est loisible) :

$$(3.18) \quad (w_k^2, w_j^2)_2 = \delta_{kj} \quad kj \geq 1.$$

$$(3.19) \quad \tilde{u}_0 = w_1^1, \quad \tilde{\theta}_0 = |\tilde{\theta}_0|_2 w_1^2$$

soit  $[w_1^i, \dots, w_m^i]$  le sous-espace généré par  $w_1^i \dots w_m^i$ . On définit  $u_m(t), \theta_m(t)$ , solution approchée d'ordre  $m$ , de (3.12) par :

$$\tilde{u}_m(t) \in V_m = [w_1^1, \dots, w_m^1], \quad \tilde{\theta}_m(t) \in V_{2m} = [w_1^2, \dots, w_m^2], \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$a(\tilde{u}_m(t), v) - m(\tilde{\theta}_m(t), v) = \langle L_1(t), v \rangle, \quad \forall v \in V_{1m}.$$

$$(\tilde{\theta}_m'(t), z)_2 + k(\tilde{\theta}_m(t), z) + m(z, \tilde{u}_m'(t)) = \langle L_2(t), z \rangle \quad \forall z \in V_{2m}$$

$$\tilde{u}_m(0) = \tilde{u}_0, \quad \tilde{\theta}_m(0) = \tilde{\theta}_0$$

En posant :

$$\tilde{u}_m(t) = \sum_{i=1}^m \tilde{g}_{im}(t) w_i^1, \quad \tilde{\theta}_m(t) = \sum_{i=1}^m \tilde{h}_{im} w_i^2$$

$$\tilde{u}_0 = \sum_{i=1}^m \xi_{im} w_i^1, \quad \tilde{\theta}_0 = \sum_{i=1}^m \beta_{im} w_i^2$$

le problème (3.20) équivaut à la résolution d'un système différentiel de la forme :

$$(3.21) \quad \begin{cases} [A_m] \{\tilde{g}_m(t)\} - {}^t[M_m] \{\tilde{h}_m(t)\} = \{L_{1m}(t)\} \\ \{\tilde{h}'_m(t)\} + [K_m] \{\tilde{h}_m(t)\} + [M_m] \{\tilde{g}'_m(t)\} = \{L_{2m}(t)\}. \\ \{\tilde{h}_m(0)\} = \{\beta_m\}, \quad \{\tilde{g}_m(0)\} = \{\xi_m\}. \end{cases}$$

avec les matrices symétriques d'ordre  $m \times m$

$$[A_m]_{ij} = a(w_i^1, w_j^1), \quad [K_m]_{ij} = k(w_i^2, w_j^2) \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

et :

$$[M_m]_{ij} = m(w_i^2, w_j^1), \quad \{\xi_m\} = {}^t(\xi_{1m}, \dots, \xi_{mm}), \quad {}^t\{\beta_m\} = {}^t(\beta_{1m}, \dots, \beta_{mm}).$$

$$\{L_{im}(t)\} = {}^t(\langle L_i(t), w_1^i \rangle, \dots, \langle L_i(t), w_m^i \rangle), \quad (1 \leq i \leq 2).$$

$$\{\tilde{g}_m(t)\} = {}^t(\tilde{g}_{1m}(t), \dots, \tilde{g}_{mm}(t)), \quad \{\tilde{h}_m(t)\} = {}^t(\tilde{h}_{1m}(t), \dots, \tilde{h}_{mm}(t)).$$

La matrice  $[A_m]$  est symétrique et définie positive comme conséquence directe de la coercivité (2.12) de  $a(.,.)$ . Donc  $[A_m]^{-1}$  est aussi symétrique et définie positive :

$$(3.22) \quad ([A_m]^{-1} x, x) \geq \gamma |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \quad (\gamma > 0).$$

De (3.16) on tire que  $L_{1m} \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^m)$ ,  $L_{2m} \in C([0, T]; \mathbb{R}^m)$  de sorte que la solution de (3.21) vérifie :

$$(3.23) \quad \begin{cases} \tilde{g}_m, \tilde{h}_m \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^m) & (1) \\ [I_m + [M_m][A_m]^{-1} {}^t[M_m]] \{\tilde{h}'_m(t)\} + [K_m] \{\tilde{h}_m(t)\} = \{L_m(t)\}, \quad \{\tilde{h}_m(0)\} = \{\beta_m\}. \\ \{\tilde{g}'_m(t)\} = [A_m]^{-1} [\{L_{1m}(t)\} + {}^t[M_m] \{\tilde{h}_m(t)\}], \quad \{\tilde{g}_m(0)\} = \{\xi_m\}. \end{cases}$$

Réciproquement toute solution de (3.23) est solution de (3.21).

---


$$(1) \quad \{L_m(t)\} = \{L_{2m}(t)\} - [M_m] [A_m]^{-1} \{L'_{1m}(t)\}.$$

Mais (3.23) a une solution unique parce que  $L_m \in C([0, T]; \mathbb{R}^m)$  et la matrice  $S_m = I_m + [M_m] [A_m]^{-1} {}^t [M_m]$  est inversible parce que (-1) n'est pas valeur propre de  $[M_m] [A_m]^{-1} {}^t [M_m]$ . En effet, en supposant l'existence de  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \neq 0$ ,  $|x| = 1$  tel que :

$$[M_m] [A_m]^{-1} {}^t [M_m] x = -x$$

on aura la relation suivante :

$$-1 = (-x, x) = (M_m [A_m]^{-1} [M_m] x, x) = ([A_m]^{-1} {}^t [M_m] x, {}^t [M_m] x) \geq \gamma |{}^t [M_m] x|^2 \geq 0.$$

qui est absurde.

Ainsi, l'existence de  $\tilde{h}_m$  est assurée. De plus, si  $\{\tilde{g}_m\}$  est définie par (3.23), alors  $\{\tilde{g}_m(0)\} = \{\xi_m\}$ , d'après l'hypothèse (3.17).

On a montré, donc, que (3.20) admet une solution unique pour vérifiant :

$$(3.24) \quad \tilde{u}_m \in C^1([0, T]; V_1), \quad \tilde{\theta}_m \in C^1([0, T]; V_2), \quad \square$$

### 3.2.1. Estimations à priori (I) :

En prenant dans (3.20),  $v = \tilde{u}'_m(t)$ ,  $z = \tilde{\theta}'_m(t)$  et en additionnant, on obtient pour  $t$  quelconque :

$$a(\tilde{u}'_m(t), \tilde{u}'_m(t)) + (\tilde{\theta}'_m(t), \tilde{\theta}'_m(t))_2 + k(\tilde{\theta}'_m(t), \tilde{\theta}'_m(t)) = L_1(t), \tilde{u}'_m(t) \times L_2(t), \tilde{\theta}'_m(t) >$$

ou bien :

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [a(\tilde{u}_m(t), \tilde{u}_m(t))] + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\tilde{\theta}_m(t)|_2^2 + k(\tilde{\theta}_m(t), \tilde{\theta}_m(t)) = \\ & = \frac{d}{dt} [\langle L_1(t), \tilde{u}_m(t) \rangle - \langle L'_1(t), \tilde{u}_m(t) \rangle + \langle L_2(t), \tilde{\theta}_m(t) \rangle]. \end{aligned} \right.$$

Par intégration en  $(0, t)$  on a :

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} a(\tilde{u}_m(t), \tilde{u}_m(t)) + \frac{1}{2} |\tilde{\theta}_m(t)|_2^2 + \int_0^t k(\tilde{\theta}_m(s), \tilde{\theta}_m(s)) ds = \\ & = \frac{1}{2} a(\tilde{u}_0, \tilde{u}_0) + \frac{1}{2} |\tilde{\theta}_0|_2^2 + \langle L_1(t), \tilde{u}_m(t) \rangle - \langle L_1(0), \tilde{u}_0 \rangle - \\ & - \int_0^t [\langle L'_1(s), \tilde{u}_m(s) \rangle - \langle L_2(s), \tilde{\theta}_m(s) \rangle] ds. \end{aligned} \right.$$

Soit  $\| \cdot \|_{i^*}$  la norme dans  $V_i'$  ( $1 \leq i \leq 2$ ). Alors, car tous les termes à gauche de (3.26) sont positifs, en utilisant la continuité de  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $L_i(t)$  et  $L_i'(t)$  ( $1 \leq i \leq 2$ ) on aura (1) :

$$(3.27) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} a(\tilde{u}_m(t), \tilde{u}_m(t)) + \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}_m(t)\|_2^2 + \int_0^t k(\tilde{\theta}_m(s), \tilde{\theta}_m(s)) ds \leq \\ & \leq c_1 [\|\tilde{u}_0\|_1^2 + \|\tilde{\theta}_0\|_2^2 + \|L_1(0)\|_{1^*}^2] + c_2 \|L_1(t)\|_{1^*} \|\tilde{u}_m(t)\|_1 \\ & + c_3 \int_0^t \|L_1'(s)\|_{1^*} \|\tilde{u}_m(s)\|_1 ds + c_4 \int_0^t \|L_2(s)\|_{2^*} \|\tilde{\theta}_m(s)\|_2 ds. \end{aligned} \right.$$

Soit  $\lambda > 0$  quelconque. Alors, (2.12) et (2.15) entraînent l'existence de  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  telles que

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}_m(t), \tilde{u}_m(t)) &\geq \alpha_1 \|\tilde{u}_m(t)\|_1^2 \\ k(\tilde{\theta}_m(t), \tilde{\theta}_m(t)) &\geq \alpha_2 \|\tilde{\theta}_m(t)\|_2^2 - \lambda \|\tilde{\theta}_m(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

de sorte que de (3.27) s'obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \alpha_1 \|\tilde{u}_m(t)\|_1^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}_m(t)\|_2^2 + \alpha_2 \int_0^t \|\tilde{\theta}_m(s)\|_2^2 ds \\ & \leq c_1 [\|\tilde{u}_0\|_1^2 + \|\tilde{\theta}_0\|_2^2 + \|L_1(0)\|_{1^*}^2] + c_2 \|L_1(t)\|_{1^*} + \frac{\alpha_1}{4} \|\tilde{u}_m(t)\|_1^2 \\ & + c_3 \int_0^t \|\tilde{u}_m(s)\|_1^2 ds + c_4 \int_0^t \|L_1'(s)\|_{1^*}^2 ds + \frac{\alpha_2}{2} \int_0^t \|\tilde{\theta}_m(s)\|_2^2 ds \\ & + c_5 \int_0^t \|L_2(s)\|_{2^*}^2 ds + \lambda \int_0^t \|\tilde{\theta}_m(s)\|_2^2 ds. \end{aligned}$$

D'après l'égalité  $L_1(t) = L_1(0) + \int_0^t L_1'(s) ds$  on a :

$$\|L_1(t)\|_{1^*}^2 \leq 2 \|L_1(0)\|_{1^*}^2 + c \int_0^t \|L_1'(s)\|_{1^*}^2 ds$$

de sorte que l'inégalité précédente donne :

$$(3.28) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\alpha_1}{4} \|\tilde{u}_m(t)\|_1^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}_m(t)\|_2^2 + \frac{\alpha_2}{2} \int_0^t \|\tilde{\theta}_m(s)\|_2^2 ds \\ & \leq c_1 [\|\tilde{u}_0\|_1^2 + \|\tilde{\theta}_0\|_2^2 + \|L_1(0)\|_{1^*}^2 + \int_0^t \|L_1'(s)\|_{1^*}^2 ds + \int_0^t \|L_2(s)\|_{2^*}^2 ds \\ & + \lambda \int_0^t \|\tilde{\theta}_m(s)\|_2^2 ds + c_2 \int_0^t \|\tilde{u}_m(s)\|_1^2 ds. \end{aligned} \right.$$

(1) Dans la suite  $C_i$  désigne les constantes différentes. De plus, on utilise souvent que  $2\alpha\frac{1}{2}\beta\frac{1}{2}ab \leq \alpha a^2 + \beta b^2$ ,  $\alpha, \beta > 0$ .

Posons :

$$|||L|||^2 = \int_0^T [||L_1'(s)||_{1^*}^2 + ||L_2(s)||_{2^*}^2] ds,$$

et

$$\Phi_m(t) = ||\tilde{u}_m(t)||_1^2 + |\tilde{\theta}_m(t)|_2^2, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Alors (3.28) entraîne :

$$\begin{aligned} \Phi_m(t) + \int_0^t ||\tilde{\theta}_m(s)||_2^2 ds &\leq c_1 [||u_0||_1^2 + |\tilde{\theta}_0|_2^2 + ||L_1(0)||_{1^*}^2 + |||L|||^2] \\ &+ c_2 \int_0^t \Phi_m(s) ds \end{aligned}$$

d'où

$$\Phi_m(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \Phi_m(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

D'après l'inégalité de Gronwall :

$$\Phi_m(t) \leq c_1 e^{c_2 t}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Alors, on trouve  $M_1 > 0$ , indépendante de  $m$ , telle que

$$||\tilde{u}_m(t)||_1^2 + |\tilde{\theta}_m(t)|_2^2 \leq M_1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

En reprenant (3.29) on déduit l'existence de  $M > 0$ , indépendante de  $m$ , telle que ;

$$(3.30) \quad ||\tilde{u}_m(t)||_1^2 + |\tilde{\theta}_m(t)|_2^2 + \int_0^t ||\tilde{\theta}_m(s)||_2^2 ds \leq M, \quad 0 \leq t \leq T,$$

d'où la conclusion

$$(3.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \tilde{u}_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; V_1) \\ \cdot \tilde{\theta}_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; H_2) \cap L^2(0, T; V_2) \\ \text{lorsque } m \rightarrow +\infty. \quad \square \end{array} \right.$$

### 3.2.2. Estimations à priori (II)

Dérivant dans (3.20) ce qui est loisible dès que  $L_1 \in C^1([0, T]; V_1')$  s'obtient :

$$a(\tilde{u}_m'(t), v) - m(\tilde{\theta}_m'(t), v) = \langle L_1'(t), v \rangle \quad \forall v \in V_{1m}$$

$$(\tilde{\theta}_m'(t), z)_2 + k(\tilde{\theta}_m(t), z) + m(z, \tilde{u}_m'(t)) = \langle L_2(t), z \rangle \quad \forall z \in V_{2m}$$

En prenant  $v = \tilde{u}'_m(t)$ ,  $z = \tilde{\theta}'_m(t)$  et additionnant :

$$a(\tilde{u}'_m(t), \tilde{u}'_m(t)) + (\tilde{\theta}'_m(t), \tilde{\theta}'_m(t))_2 + k(\tilde{\theta}'_m(t), \tilde{\theta}'_m(t)) = \langle L'_1(t), \tilde{u}'_m(t) \rangle + \langle L_2(t), \tilde{\theta}'_m(t) \rangle$$

qui donne pour  $0 \leq t \leq T$  :

$$\begin{aligned} & a(\tilde{u}'_m(t), \tilde{u}'_m(t)) + \|\tilde{\theta}'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [k(\tilde{\theta}'_m(t), \tilde{\theta}'_m(t))] = \\ & = \frac{d}{dt} [\langle L'_1(t), \tilde{u}'_m(t) \rangle + \langle L_1''(t), \tilde{u}'_m(t) \rangle + \frac{d}{dt} [\langle L_2(t), \tilde{\theta}'_m(t) \rangle + \langle L_2'(t), \tilde{\theta}'_m(t) \rangle] \end{aligned}$$

Encore, par intégration dans  $(0, t)$  :

$$\begin{aligned} & \int_0^t a(\tilde{u}'_m(s), \tilde{u}'_m(s)) ds + \int_0^t \|\tilde{\theta}'_m(s)\|_2^2 ds + \frac{1}{2} k(\tilde{\theta}'_m(t), \tilde{\theta}'_m(t)) = \\ & = \frac{1}{2} k(\tilde{\theta}'_m(0), \tilde{\theta}'_m(0)) + \langle L'_1(t), \tilde{u}'_m(t) \rangle - \langle L'_1(0), \tilde{u}'_m(0) \rangle - \int_0^t \langle L_1''(s), \tilde{u}'_m(s) \rangle ds \\ & + \langle L_2(t), \tilde{\theta}'_m(t) \rangle - \langle L_2(0), \tilde{\theta}'_m(0) \rangle - \int_0^t \langle L_2'(s), \tilde{\theta}'_m(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Les trois termes à gauche étant positifs on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^t a(\tilde{u}'_m(s), \tilde{u}'_m(s)) ds + \int_0^t \|\tilde{\theta}'_m(s)\|_2^2 ds + \frac{1}{2} k(\tilde{\theta}'_m(t), \tilde{\theta}'_m(t)) \leq \\ & \leq c_1 \|\tilde{\theta}'_0\|_2^2 + c_2 \|L'_1(t)\|_{1^*} \|\tilde{u}'_m(t)\|_1 + c_3 \|L'_1(0)\|_{1^*} \|\tilde{u}'_0\|_1 + \\ & + c_4 \int_0^t \|L_1''(s)\|_{1^*} \|\tilde{u}'_m(s)\|_1 ds + c_5 \|L_2(t)\|_{2^*} \|\tilde{\theta}'_m(t)\|_2 + c_6 \|L_2(0)\|_{2^*} \\ & + c_7 \int_0^t \|L_2'(s)\|_{2^*} \|\tilde{\theta}'_m(s)\|_2 ds \leq \\ & \leq c_1 [\|\tilde{\theta}'_0\|_2^2 + \|\tilde{u}'_0\|_1^2 + \|L'_1(0)\|_{1^*}^2 + \|L_2(0)\|_{2^*}^2] + c_2 \|\tilde{u}'_m(t)\|_1^2 + c_3 \|L'_1(t)\|_{1^*}^2 \\ & + c_4 \|L_2(t)\|_{2^*} \|\tilde{\theta}'_m(t)\|_2 + c_5 \int_0^t \|\tilde{u}'_m(s)\|_1^2 ds + c_6 \int_0^t \|L_1''(s)\|_{1^*}^2 ds + \\ & + c_7 \int_0^t \|L_2'(s)\|_{2^*}^2 ds + c_8 \int_0^t \|\tilde{\theta}'_m(s)\|_2^2 ds. \end{aligned}$$

Utilisant encore une fois (2.12) et (2.15) on peut l'écrire :

$$\begin{aligned}
 (3.32) \quad & \alpha_1 \int_0^t \|\tilde{u}'_m(s)\|_1^2 ds + \int_0^t \|\tilde{\theta}'_m(s)\|_2^2 ds + \frac{1}{2} \alpha_2 \|\tilde{\theta}_m(t)\|_2^2 \leq \\
 & \leq c_1 [\|\tilde{\theta}_0\|_2^2 + \|\tilde{u}_0\|_1^2 + \|L'_1(0)\|_{1^*}^2 + \|L_2(0)\|_{2^*}^2] + c_2 \|L'_1(t)\|_{1^*}^2 + c_3 \int_0^t \|L'_2(s)\|_{2^*}^2 ds \\
 & + c_4 \int_0^t \|L''_1(s)\|_{1^*}^2 ds + c_5 \|L_2(t)\|_{2^*}^2 + \frac{\alpha_2}{4} \|\tilde{\theta}_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}_m(t)\|_2^2 + \\
 & + c_6 \left[ \int_0^t \|\tilde{u}_m(s)\|_1^2 ds + \int_0^t \|\tilde{\theta}_m(s)\|_2^2 ds + \|\tilde{u}_m(t)\|_1^2 \right].
 \end{aligned}$$

De  $L'_1(t) = L'_1(0) + \int_0^t L''_1(s) ds$ ,  $L_2(t) = L_2(0) + \int_0^t L'_2(s) ds$ , s'obtient

$$\begin{aligned}
 \|L'_1(t)\|_{1^*}^2 & \leq 2 \|L'_1(0)\|_{1^*}^2 + c \int_0^t \|L''_1(s)\|_{1^*}^2 ds \\
 \|L_2(t)\|_{2^*}^2 & \leq 2 \|L_2(0)\|_{2^*}^2 + c \int_0^t \|L'_2(s)\|_{2^*}^2 ds
 \end{aligned}$$

et (3.32) devient :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \|\tilde{u}'_m(s)\|_1^2 ds + \int_0^t \|\tilde{\theta}'_m(s)\|_2^2 ds + \|\tilde{\theta}_m(t)\|_2^2 \leq \\
 & \leq c_1 [\|\tilde{\theta}_0\|_2^2 + \|\tilde{u}_0\|_1^2 + \|L'_1(0)\|_{1^*}^2 + \|L_2(0)\|_{2^*}^2] + c_2 \left( \int_0^t [\|L''_1(s)\|_{1^*}^2 + \|L'_2(s)\|_{2^*}^2] ds \right) \\
 & + c_3 \left[ \int_0^t \|\tilde{u}_m(s)\|_1^2 ds + \int_0^t \|\tilde{\theta}_m(s)\|_2^2 ds + \|\tilde{u}_m(t)\|_1^2 + \|\tilde{\theta}_m(t)\|_2^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \|L'\| = \int_0^T [\|L''_1(s)\|_{1^*}^2 + \|L'_2(s)\|_{2^*}^2] ds$$

de façon que :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \|\tilde{u}'_m(s)\|_1^2 ds + \int_0^t \|\tilde{\theta}'_m(s)\|_2^2 ds + \|\tilde{\theta}_m(t)\|_2^2 \leq \\
 & \leq c_1 [\|\tilde{\theta}_0\|_2^2 + \|\tilde{u}_0\|_1^2 + \|L'_1(0)\|_{1^*}^2 + \|L_2(0)\|_{2^*}^2 + \|L'\|] + \\
 & + c_2 \left[ \int_0^t \|\tilde{u}_m(s)\|_1^2 ds + \int_0^t \|\tilde{\theta}_m(s)\|_2^2 ds + \|\tilde{u}_m(t)\|_1^2 + \|\tilde{\theta}_m(t)\|_2^2 \right].
 \end{aligned}$$

D'après (3.31), il existe une constante C, indépendante de m telle que

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_m(t)\|_1^2 &\leq C & \text{et} & \int_0^t \|\tilde{u}_m(s)\|_1^2 ds \leq C, & 0 \leq t \leq T. \\ \|\tilde{\theta}_m(t)\|_2^2 &\leq C & \text{et} & \int_0^t \|\tilde{\theta}_m(s)\|_2^2 ds \leq C, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Donc, finalement, on trouve une constante M, indépendante de m, telle que :

$$(3.34) \quad \int_0^t \|\tilde{u}'_m(s)\|_1^2 ds + \int_0^t \|\tilde{\theta}'_m(s)\|_2^2 ds + \|\tilde{\theta}_m(t)\|_2^2 \leq M, \quad 0 \leq t \leq T$$

d'où la conclusion

$$(3.35) \quad \begin{aligned} &\cdot \tilde{u}'_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V_1) \\ &\cdot \tilde{\theta}'_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; H_2) \\ &\cdot \tilde{\theta}_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; V_2). \end{aligned}$$

lorsque  $m \rightarrow +\infty$   $\square$

Unifiant (3.31) et (3.35) on obtient :

$$(3.36) \quad \begin{aligned} &\cdot \tilde{u}_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; V_1) \\ &\cdot \tilde{u}'_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V_1) \\ &\cdot \tilde{\theta}_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; V_2) \\ &\cdot \tilde{\theta}'_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; H_2) \end{aligned}$$

lorsque  $m \rightarrow +\infty$ .  $\square$

### 3.2.3. - $\tilde{u}$ et $\tilde{\theta}$ comme limite de $\tilde{\theta}_m, \tilde{u}_m$ .

On déduit de (3.36) l'existence des sous-suites  $\{\tilde{u}_\nu\}, \{\tilde{\theta}_\nu\}$  telles que :

$$(3.37) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_\nu &\rightarrow \tilde{u} & \text{dans } L^\infty(0, T; V_1) & \text{faible-étoile} & (1) \\ \tilde{u}'_\nu &\rightarrow \tilde{u}' & \text{dans } L^2(0, T; V_1) & \text{faible} \\ \tilde{\theta}_\nu &\rightarrow \tilde{\theta} & \text{dans } L^\infty(0, T; V_2) & \text{faible-étoile} \\ \tilde{\theta}'_\nu &\rightarrow \tilde{\theta}' & \text{dans } L^2(0, T; H_2) & \text{faible} \end{aligned}$$

lorsque  $\nu \rightarrow +\infty$ .

---

(1)  $\int_0^T \langle \tilde{u}_\nu(t), z(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \tilde{u}(t), z(t) \rangle dt$ , pour tout  $z \in L^1(0, T; V_1')$



Alors,  $\tilde{u}$  et  $\tilde{\theta}$  vérifient bien (3.13) et il reste à vérifier qu'ils sont solution de (3.12).

Soit  $j$  fixé et  $v > j$ . Alors (3.20) est valable avec  $m = v$  et

$$(3.38) \quad z = z_j(t) = z(t) w_j^2, \quad z \in C^1([0, T]), \quad z(T) = 0.$$

$$(3.39) \quad v = v_j(t) = \psi(t) w_j^1, \quad \psi \in C^1([0, T]), \quad \psi(T) = 0.$$

qui vient :

$$(3.40) \quad \begin{cases} a(\tilde{u}_v(t), v_j(t)) - m(\tilde{\theta}_v(t), v_j(t)) - \langle L_1(t), v_j(t) \rangle = 0 \\ (\tilde{\theta}'_v(t), z_j(t))_2 + k(\tilde{\theta}_v(t), z_j(t)) + m(z_j(t), \tilde{u}'_v(t)) - \langle L_2(t), z_j(t) \rangle = 0 \\ \forall z_j, v_j \text{ donnés par (3.38) - (3.39).} \end{cases}$$

Puisque

$$(\tilde{\theta}'_v(t), z_j(t))_2 = \frac{d}{dt} [(\tilde{\theta}_v(t), z_j(t))_2] - (\tilde{\theta}_v(t), z'_j(t))_2$$

intégrant (3.40) sur  $(0, T)$  on a :

$$\begin{cases} \int_0^T [a(\tilde{u}_v(t), v_j(t)) - m(\tilde{\theta}_v(t), v_j(t)) - \langle L_1(t), v_j(t) \rangle] dt = 0 \\ \int_0^T [-(\tilde{\theta}_v(t), z'_j(t))_2 + k(\tilde{\theta}_v(t), z_j(t)) + m(z_j(t), \tilde{u}'_v(t)) - \langle L_2(t), z_j(t) \rangle] dt = \\ = (\tilde{\theta}_0, z_j(0)) \quad \forall z_j, v_j \text{ donnés par (3.38)-(3.39).} \end{cases}$$

Grâce à (3.37) on peut passer à la limite dans  $v$  et :

$$(3.41) \quad \begin{cases} \int_0^T [a(\tilde{u}(t), w_j^1) - m(\tilde{\theta}(t), w_j^1) - \langle L_1(t), w_j^1 \rangle] \psi(t) dt = 0, \\ \int_0^T -(\tilde{\theta}(t), w_j^2) z'(t) dt + \int_0^T [k(\tilde{\theta}(t), w_j^2) + m(w_j^2, \tilde{u}'(t)) - \langle L_2(t), w_j^2 \rangle] z(t) dt = \\ = (\tilde{\theta}_0, w_j^2) z(0) \quad \forall z, \psi \in C^1([0, T]), \quad z(T) = \psi(T) = 0. \end{cases}$$

Puisque (3.41) est valable pour  $z, \psi \in \mathcal{D}(0, T)$  on a au sens des distributions sur  $(0, T)$

$$\begin{cases} a(\tilde{u}(t), w_j^1) - m(\tilde{\theta}(t), w_j^1) = \langle L_1(t), w_j^1 \rangle \\ \frac{d}{dt} [(\tilde{\theta}(t), w_j^1)_2] + k(\tilde{\theta}(t), w_j^2) + m(w_j^2, \tilde{u}'(t)) = \langle L_2(t), w_j^2 \rangle \end{cases}$$

Les combinaisons linéaires finies des  $w_j^i$  sont denses dans  $V_i$ , donc au sens des distributions sur  $(0, T)$

$$(3.42) \begin{cases} a(\tilde{u}(t), v) - m(\tilde{\theta}(t), v) = \langle L_1(t), v \rangle, \quad \forall v \in V_1 \\ \frac{d}{dt} [(\tilde{\theta}(t), z)_2] + k(\tilde{\theta}(t), z) + m(z, \tilde{u}'(t)) = \langle L_2(t), z \rangle, \quad \forall z \in V_2 \end{cases}$$

Mais comme  $\tilde{\theta}' \in L^2(0, T; H_2)$ , (3.42) équivaut à

$$(3.43) \begin{cases} a(\tilde{u}(t), v) - m(\tilde{\theta}(t), v) = \langle L_1(t), v \rangle, \quad \forall v \in V_1 \\ (\tilde{\theta}'(t), z)_2 + k(\tilde{\theta}(t), z) + m(z, \tilde{u}'(t)) = \langle L_2(t), z \rangle \quad \forall z \in V_2 \end{cases}$$

de sorte que  $\tilde{u}, \tilde{\theta}$  vérifient (3.12), les conditions initiales étant vérifiées comme on le voit ci-dessous.  $\square$

Soit  $z \in C^1([0, T])$ ,  $z(T) = 0$ . D'après (3.43), pour  $j > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^T [(\tilde{\theta}'(t), z(t)w_j^2)_2 + k(\tilde{\theta}(t), z(t)w_j^2) + m(z(t)w_j^2, \tilde{u}'(t))] dt = \\ = \int_0^T \langle L_2(t), z(t)w_j^2 \rangle dt \end{aligned}$$

et encore, car

$$(3.44) \begin{cases} (\tilde{\theta}'(t), z(t)w_j^2)_2 = \frac{d}{dt} [(\tilde{\theta}(t), z(t)w_j^2)_2] - (\tilde{\theta}(t), z'(t)w_j^2)_2 \\ \int_0^T [- (\tilde{\theta}(t), z'(t)w_j^2)_2 + k(\tilde{\theta}(t), z(t)w_j^2) + m(z(t)w_j^2, \tilde{u}'(t)) - \langle L_2(t), z_j(t)w_j^2 \rangle] dt = \\ = (\tilde{\theta}(0), z(0)w_j^2)_2 \quad \forall z \in C^1([0, T]), \quad z(T) = 0. \end{cases}$$

Comparant (3.44) et (3.41) on voit que :

$$(\tilde{\theta}(0), w_j^2)_2 z(0) = (\tilde{\theta}_0, w_j^2)_2 z(0) \quad \forall z \in C^1([0, T]), z(T) = 0, \quad \forall j > 0.$$

ce qui donne bien  $\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}_0$ .

Dérivant dans (3.43) -  $L_1 \in C^1([0, T]; V_1)$  - on a :

$$(3.45) \quad \frac{d}{dt} [a(\tilde{u}(t), v) - m(\tilde{\theta}(t), v)] = \langle L_1'(t), v \rangle \quad \forall v \in V_1$$

Puisque  $\tilde{u}' \in L^2(0, T; V_1)$  et  $\tilde{\theta}' \in L^2(0, T; H_2)$ , (3.45) équivaut à :

$$a(\tilde{u}'(t), v) - m(\tilde{\theta}'(t), v) = \langle L_1'(t), v \rangle, \quad \forall v \in V_1.$$

Soit  $z \in C^1([0, T])$ ,  $z(T) = 0$  et  $j > 0$ . On aura :

$$(3.46) \quad \int_0^T a(\tilde{u}'(t), z(t)w_j^1) - m(\tilde{\theta}'(t), z(t)w_j^1) - \langle L_1'(t), z(t)w_j^1 \rangle dt = 0$$

et car

$$a(\tilde{u}'(t), z(t)w_j^1) = \frac{d}{dt} [a(\tilde{u}(t), z(t)w_j^1)] - a(\tilde{u}(t), z'(t)w_j^1).$$

$$m(\tilde{\theta}'(t), z(t)w_j^1) = \frac{d}{dt} [m(\tilde{\theta}(t), z(t)w_j^1)] - m(\tilde{\theta}(t), z'(t)w_j^1).$$

$$\langle L_1'(t), z(t)w_j^1 \rangle = \frac{d}{dt} [\langle L_1(t), z(t)w_j^1 \rangle] - \langle L_1(t), z'(t)w_j^1 \rangle$$

$$\begin{aligned} \int_0^T [-a(\tilde{u}(t), z'(t)w_j^1) + m(\tilde{\theta}(t), z'(t)w_j^1) + \langle L_1(t), z'(t)w_j^1 \rangle] dt = \\ = a(\tilde{u}(0), z(0)w_j^1) - m(\tilde{\theta}(0), z(0)w_j^1) - \langle L_1(0), z(0)w_j^1 \rangle. \end{aligned}$$

Grâce à la première équation de (3.43), le membre à gauche de (3.47) est nul, donc, puisque  $\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}_0$  :

$$a(\tilde{u}(0), w_j^1) z(0) = [m(\tilde{\theta}_0, w_j^1) - \langle L_1(0), w_j^1 \rangle] z(0), \quad \forall j > 0, \\ \forall z \in C^1([0, T]), \quad z(T) = 0.$$

D'après l'hypothèse (3.17), le second membre de (3.48) est  $a(\tilde{u}_0, w_j^1) z(0)$ , et alors

$$a(\tilde{u}(0), w_j^1) z(0) = a(\tilde{u}_0, w_j^1) z(0), \quad \forall j > 0, \quad \forall z \in C^1([0, T]), z(T) = 0.$$

Finalement, on obtient  $\tilde{u}(0) = \tilde{u}_0$ , car  $|||u||| = a(u, u)^{1/2}$  est une norme dans  $V_1$  équivalente à  $|| \cdot ||_1$ .  $\square$

#### 3.2.4. Démonstration de l'unicité :

Il suffit de démontrer que si  $L_1 \equiv 0$ ,  $L_2 \equiv 0$ ,  $\tilde{u}_0 = 0$ ,  $\tilde{\theta}_0 = 0$ , alors la seule solution de (3.12) vérifiant (3.13) est  $\tilde{\theta} = 0$ ,  $\tilde{u} = 0$ . Soit, donc,  $\tilde{u}$  et  $\tilde{\theta}$  satisfaisant (3.13) et

$$(3.49) \quad \begin{aligned} (a(\tilde{u}(t), v) - m(\tilde{\theta}(t), v)) &= 0, \quad \forall v \in V_1 \\ (\tilde{\theta}'(t), z)_2 + k(\tilde{\theta}(t), z) + m(z, \tilde{u}'(t)) &= 0, \quad \forall z \in V_2 \\ \tilde{\theta}(0) = 0, \quad \tilde{u}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Alors, il est loisible de prendre  $v = \tilde{u}'(t), z\tilde{\theta}(t)$ , donc :

$$a(\tilde{u}(t), \tilde{u}'(t)) - m(\tilde{\theta}(t), \tilde{u}'(t)) = 0$$

$$(\tilde{\theta}'(t), \tilde{\theta}(t))_2 + k(\tilde{\theta}(t), \tilde{\theta}(t)) + m(\tilde{\theta}(t), \tilde{u}'(t)) = 0$$

et en additionnant :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [a(\tilde{u}(t), \tilde{u}(t))] + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\tilde{\theta}(t)|_2^2 + k(\tilde{\theta}(t), \tilde{\theta}(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

Par intégration dans  $(0, T)$  on trouve :

$$\frac{1}{2} a(\tilde{u}(t), \tilde{u}(t)) + \frac{1}{2} |\tilde{\theta}(t)|_2^2 + \int_0^t k(\tilde{\theta}(s), \tilde{\theta}(s)) ds = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Tous les termes à gauche étant positifs, à fortiori

$$a(\tilde{u}(t), u(t)) = 0, \quad |\tilde{\theta}(t)| = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

et  $\tilde{u} = 0, \tilde{\theta} = 0. \square$

REFERENCES

ADAMS, R.A.

- [1] Sobolev Spaces. Academic Press New York, 1975.

CARLSON, DONALD E.

- [1] Linear thermoelasticity. Enciclopedia of physics, Vol VI/a2. Springer Verlag, 1972.

CIARLET, P.G.

- [1] The finite element method for elliptic problems. North-Holland, 1978.

DAFERMOS, C.M.

- [1] On the existence and asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., Vol 29, 1967.

DUVAUT, G.

- [1] Free boundary problem connected with thermoelasticity and unilateral contact (A paraître).

DUVAUT, G - LIONS, J.L.

- [1] Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris 1972.  
[2] Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique. Arch. Rat. Mech. Anal. vol 46, n°4, 1972.

LANDAU, L. - LIPSHITZ, E.

- [1] Théorie d'élasticité. Miv. Moscou 1967.

LIONS, J.L.

- [1] Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites Springer Verlag. Collection Jaume t. III. 1961.  
[2] Control optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, Paris 1968.

LIONS, J.L. - MAGENES, E.

- [1] Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1,2. Dunod Paris 1968.

MANDEL, G.

- [1] Cours de mécanique des milieux continus. Tome 2 Mécanique des solides Gauthier-Villars, 1966.

