



**HAL**  
open science

# Convergence des méthodes de commande adaptative en présence de perturbations aléatoires

Jean-Jacques Fuchs

► **To cite this version:**

Jean-Jacques Fuchs. Convergence des méthodes de commande adaptative en présence de perturbations aléatoires. [Rapport de recherche] RR-0096, INRIA. 1981. inria-00076465

**HAL Id: inria-00076465**

**<https://inria.hal.science/inria-00076465>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

CENTRE DE RENNES

IRISA

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P. 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. 954 90 20

## Rapports de Recherche

N° 96

### CONVERGENCE DES MÉTHODES DE COMMANDE ADAPTATIVE EN PRÉSENCE DE PERTURBATIONS ALÉATOIRES

Jean-Jacques FUCHS

Octobre 1981

# CONVERGENCE DES MÉTHODES DE COMMANDE ADAPTATIVE EN PRÉSENCE DE PERTURBATIONS ALÉATOIRES

Jean-Jacques Fuchs

## Résumé :

Ce rapport comprend deux parties. La première «Commande adaptative stochastique», présente une analyse assez générale qui peut être appliquée à de multiples schémas de commande adaptative et permet notamment d'établir assez rapidement la majeure partie des résultats théoriques obtenus à ce jour. La deuxième partie «Commande adaptative des systèmes à phase non minimale» a principalement pour but de mettre clairement en évidence les difficultés supplémentaires rencontrées dans le cas de systèmes à phase non minimale. Nous y proposons également un algorithme original de commande du type directe pour lequel cependant nous ne donnons pas de démonstration de stabilité. Celle-ci reste à faire ...

## Abstract :

*This report is divided into two parts. The first one entitled «Commande adaptative stochastique» presents a general scheme allowing the analysis of many adaptative control algorithms and the straightforward proof of most of the theoretical results obtained up to now. Some new results are also established. The second part is devoted to adaptive control of non-minimum phase systems and is mainly concerned with a direct self tuning pole placement strategy. Moving from perfect knowledge to ignorance of the non-minimum phase part of the system's model, we carefully develop a control scheme. We hope this derivation to be helpful for further research.*

## TABLE DES MATIERES



### *Présentation du rapport*

## PARTIE A : COMMANDE ADAPTATIVE STOCHASTIQUE.

1. <u>Introduction.</u>	3
1.1. Généralités	3
1.2. Formalisation	4
1.3. Stabilité de l'ensemble	5
1.4. Plan	7
2. <u>Les deux principales approches.</u>	9
2.1. La commande adaptative indirecte	9
2.2. La commande adaptative directe	10
3. <u>Propriétés de l'algorithme d'identification.</u>	13
3.1. Introduction	13
3.2. Le modèle considéré	13
3.3. Les propriétés	14
3.4. Algorithme d'identification	15
4. <u>L'algorithme du calcul de la commande.</u>	19
4.1. Introduction	19
4.2. Cas de l'approche indirecte	20
4.2.1. Equation d'évolution du vecteur des observations	20
4.2.2. Les propriétés suffisantes	22
4.2.3. L'hypothèse de la stabilisabilité	23
4.3. Cas de l'approche directe	23
4.3.1. Equation d'évolution du vecteur des observations	23
4.3.2. Les limitations de l'approche directe	25

4. <u>Commande adaptative directe.</u>	17
4.1. Reparamétrisation du système.	17
4.2. Régulation adaptative par placement de pôles	19
4.2.1. Equation d'évolution de l'écart	19
4.2.2. Difficultés rencontrées	20
4.2.3. Un exemple simple	22
4.2.4. Le schéma proposé	26
4.3. Poursuite adaptative	28
4.4. Résultats expérimentaux	30
4.4.1. Régulation adaptative	30
4.4.2. Poursuite adaptative 1	30
4.4.3. Poursuite adaptative 2	31
4.5. Conclusions.	37
 BIBLIOGRAPHIE.	 39

5. <u>L'analyse de la stabilité.</u>	27
5.1. Introduction	27
5.2. Propriétés du vecteur des observations	27
5.3. Stabilité et convergence	28
5.3.1. Approche indirecte	28
5.3.2. Approche directe	30
5.4. Conclusions	31
6. <u>Modèles plus généraux.</u>	33
6.1. Introduction	33
6.2. Les résultats	33
6.3. Conclusions	35
7. <u>Conclusions.</u>	37
BIBLIOGRAPHIE.	39
8. <u>Annexe</u>	41
8.1. Indirect stochastic adaptive control: the general delay-coloured noise case	42
8.2. Détails des démonstrations.	50

## PARTIE B : COMMANDE ADAPTATIVE DES SYSTÈMES À PHASE NON MINIMALE.

1. <u>Introduction.</u>	3
2. <u>Stratégies de commande envisageables.</u>	5
2.1. Commande par minimisation d'un critère	5
2.2. Commande par placement de pôles	7
2.3. Conclusions	7
3. <u>Commande adaptative indirecte.</u>	9
3.1. Propriétés de l'algorithme d'identification	9
3.2. Calcul de la loi de commande	10
3.3. La question de la commandabilité du système	13
3.4. Conclusions	14

## PRESENTATION DU RAPPORT



*Ce rapport comprend deux parties bien distinctes.*

*Dans la partie A, le problème de la stabilité et de la convergence des algorithmes de commande adaptative en présence de perturbations aléatoires est abordé de manière synthétique. Pour une classe donnée de systèmes, l'approche proposée permet d'étudier simultanément un grand nombre de schémas de commande adaptative et d'obtenir rapidement tous les résultats établis à ce jour. Par ailleurs, le développement utilisé est facilement transposable à d'autres contextes et devrait notamment permettre l'analyse de la stabilité en présence de perturbations bornées quelconques.*

*Dans la partie B, nous considérons le problème de la commande adaptative de systèmes à phase non-minimale. Après avoir rappelé les différentes approches proposées à ce jour, nous développons de manière très minutieuse un nouvel algorithme. Le principal objectif de ce développement est de mettre en évidence les difficultés supplémentaires dues à la caractéristique "phase non-minimale" du système.*

PARTIE A :

COMMANDE ADAPTATIVE STOCHASTIQUE



## 1. INTRODUCTION

### 1.1. Généralités.

Les principales techniques de commande de systèmes dynamiques reposent sur la connaissance d'un modèle du système et de son environnement. En général cette connaissance est assez imprécise principalement parce que le système est trop complexe ou son fonctionnement imparfaitement connu. Dans le cas de modèles paramétriques, ces difficultés peuvent être surmontées de diverses manières.

On peut commencer par identifier la structure et les paramètres du système et de son environnement, et utiliser le modèle mathématique ainsi obtenu dans le calcul d'un régulateur ou d'une commande. On peut aussi implanter a priori un régulateur et ajuster ses paramètres manuellement de manière à obtenir un comportement satisfaisant. Cette dernière solution n'est pas très réaliste sur des systèmes complexes. Mais une combinaison des deux solutions précédentes : identification d'un modèle du système, calcul d'un régulateur "nominal" et ajustement ou réajustement au cours du temps des paramètres du régulateur de manière manuelle ou préprogrammée (en fonction du point de fonctionnement) est certainement une bonne manière de commander un grand nombre de systèmes.

La commande adaptative est une autre manière de résoudre le problème de la commande. Une hypothèse fondamentale de cette approche est que le processus à commander est modélisable et que la structure du modèle est connue. L'identification de la structure d'un modèle paramétrique du système est donc une opération -délicate- à réaliser avant l'élaboration d'un algorithme de commande adaptative. Cet algorithme peut être vu comme une manière automatique et pratique de réaliser simultanément l'identification proprement dite (des paramètres) et le calcul du régulateur et -donc- d'éviter le réglage manuel de ses paramètres. Mais le principal attrait de la commande adaptative résulte du fait qu'elle doit permettre de conserver des performances quasi-optimales à un système dont les paramètres varient lentement au cours du temps.

## 1.2. Formalisation.

Nous supposons que le système à commander peut être décrit par l'équation aux différences

$$A(z^{-1}) y_t = z^{-1} B(z^{-1}) u_t + v_t \quad (1)$$

où  $\{v_t\}$  est une suite de variables aléatoires, dont les caractéristiques seront définies plus tard. L'entrée du système est  $u(t)$  et sa sortie  $y(t)$ , nous les supposons scalaires. Il est courant que les  $k$  premiers coefficients du polynôme  $B$  soient nulles, nous dirons alors que le système présente un retard  $k+1$  (pas d'échantillonnage). Nous supposons aussi que les polynômes  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux et que des majorants  $\hat{n}$  et  $\hat{m}$  des degrés  $n$  et  $m$  des polynômes  $A$  et  $B$ , respectivement, sont connus. Ces connaissances a priori correspondent à l'hypothèse de base énoncée plus haut.

Ayant ainsi défini le modèle et la structure du système, il s'agit maintenant de choisir une stratégie de commande. Ce choix dépend d'une part du type de problèmes considérés (problème de régulation ou de poursuite) et d'autre part des caractéristiques du système (à phase minimale ou non) et de la suite des perturbations  $\{v_t\}$ . Suivant la connaissance a priori que l'on a de ces caractéristiques, le choix sera plus ou moins grand. Il s'agit de toute façon de choisir une stratégie qui, dans le cas où le modèle du système et de son environnement serait parfaitement connu, mènerait à une loi de commande satisfaisante. Les stratégies les plus couramment considérées en commande adaptative sont :

- pour des systèmes à phase minimale (ou pour lesquels la partie à phase non minimale est parfaitement connue) : la commande à minimum de variance ou la commande avec modèle de référence
- pour les systèmes à phase non-minimale : la commande par placement de pôles ou la commande optimale à critère quadratique.

L'algorithme de commande adaptative est alors conçu en tenant compte de la structure du modèle du système (et éventuellement des connaissances supplémentaires dont on dispose) et de la stratégie de commande choisie. Il peut, en général, être lui-même vu comme la combinaison de deux

algorithmes. Un algorithme d'identification qui utilise les mesures faites sur le système, et fournit de l'information (la suite des estimées) à un algorithme de calcul de la loi de commande. Cet algorithme détermine à chaque instant les paramètres du régulateur adaptatif et le signal de commande à appliquer au système. Ce découpage peut ne pas toujours apparaître clairement. L'algorithme de calcul de la loi de commande est, par exemple, inexistant dans le cas où les paramètres du régulateur adaptatif sont directement identifiés.

### 1.3. La stabilité de l'ensemble.

Le but principal de la commande adaptative étant de contrôler des systèmes pour lesquels peu d'information est connue a priori, il est important de limiter au maximum les hypothèses faites sur le processus à commander et il est souhaitable, dans la pratique, que ces hypothèses soient facilement vérifiables. La question qui se pose maintenant est de savoir si les hypothèses introduites (existence d'un modèle, connaissance de sa structure,...) sont suffisantes pour pouvoir garantir la stabilité de l'ensemble rebouclé (système + régulateur adaptatif).

L'analyse de la stabilité d'un système contrôlé par un régulateur adaptatif n'est pas triviale. Le système rebouclé est non-linéaire et variable dans le temps. Même si, prises séparément, les propriétés de chacun des éléments, qui constituent un algorithme de commande adaptative, sont connues, le fait de les relier dans une boucle de contre-réaction crée des conditions de fonctionnement dans lesquelles ces propriétés ne sont plus nécessairement vérifiées. Ce type de difficultés apparaît également (et a été étudié) dans l'identification des systèmes en boucle fermée.

Une manière d'étudier la stabilité est la linéarisation autour de la solution désirée. Malheureusement les hypothèses introduites plus haut ne garantissent nullement que le point de fonctionnement est, et surtout reste, dans le domaine de validité de cette linéarisation. De plus il serait intéressant de connaître le comportement du système loin de la solution optimale. Ce comportement contient des renseignements sur la robustesse et le régime transitoire du régulateur adaptatif.

Une autre manière d'étudier la stabilité est de formaliser le raisonnement intuitif suivant. Considérons le cas d'une régulation adaptative dont le but est d'amener la sortie du système rebouclé à zéro et imaginons un régulateur adaptatif constitué d'un algorithme d'identification estimant les paramètres du modèle du système et d'un algorithme de commande générant une commande qui annule l'estimée de la prédiction de la sortie du système. Si pour un certain nombre de pas d'échantillonnage, l'ensemble est instable, la sortie et donc la commande vont diverger rapidement. Les perturbations additives vont avoir un effet négligeable. La quantité et la qualité de l'information sur le vrai système vont augmenter sensiblement, une certaine combinaison (celle correspondant au mode instable dominant du système rebouclé) des paramètres estimés du système va converger vers sa vraie valeur et le régulateur adaptatif va annuler ce mode dominant, rendant ainsi visibles d'éventuels autres modes instables. Ce schéma se termine quand le système rebouclé est stable, le but de la commande étant toujours d'annuler la sortie, elle semble alors tendre à diminuer l'information nouvelle sur le système. En absence de perturbations, on conçoit alors que l'algorithme d'identification puisse ne pas converger vers les "vrais" paramètres du système, en présence de perturbations celles-ci ont à nouveau un niveau comparable à celui du signal utile et l'on peut donc espérer continuer à identifier les modes stables du système rebouclé. Malheureusement ce raisonnement heuristique est difficilement formalisable. Même dans le cas, qui semble pourtant plus facile à étudier, de l'identification d'un processus stochastique instable, nous n'avons pas réussi à formaliser ce raisonnement qui présente alors une forte analogie avec la recherche des valeurs propres d'une matrice par la méthode de la puissance.

Enfin, la seule manière qui s'est avérée fructueuse, à ce jour, dans l'étude de la stabilité est directement calquée sur celle utilisée en absence de perturbations. Elle consiste à étudier séparément chacun des blocs constitutifs d'un algorithme de commande adaptative, à en déduire les propriétés que présentent ces blocs en présence d'hypothèses minimales sur leurs entrées, et finalement à juxtaposer ces propriétés pour étudier les propriétés de stabilité et de convergence de l'ensemble.

On peut schématiser cette approche de la manière suivante : comme il semble difficile d'étudier simultanément l'ensemble, coupons cet ensemble en sous-blocs, plaçons-nous dans le cas le plus défavorable pour chacun des sous-blocs, étudions leurs propriétés et vérifions si, juxtaposés, ils ne forment pas un ensemble stable. Si ce n'est pas le cas, quelle est l'hypothèse supplémentaire de départ sur le système, la moins contraignante, qui serait suffisante, et, inversement, si c'est le cas, ne peut-on supprimer une des hypothèses. Il est clair que cette approche n'est pas très satisfaisante et qu'il reste beaucoup à faire dans ce domaine. Par ailleurs, nous verrons (chapitres 3 et 6) qu'elle ne semble s'appliquer que dans le cas de perturbations d'un type limité. Elle présente cependant l'avantage de rendre possible l'étude simultanée d'un grand nombre de schémas de commande adaptative et de donner des indications concrètes sur les possibilités de modifications de chacun des sous-blocs.

#### 1.4. Plan.

Nous allons développer et formaliser dans les chapitres qui suivent le schéma que nous venons d'introduire. Nous décomposons l'algorithme de commande adaptative (global) en un algorithme d'identification et un algorithme de calcul de la loi de commande. Le schéma exposé au paragraphe 1.3 fait alors apparaître trois blocs que nous allons successivement étudier, après avoir précisé, au chapitre 2, les deux grands types d'algorithmes de commande adaptative généralement considérés.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'algorithme d'identification. Les propriétés énoncées ne sont établies que pour des modèles (1) perturbés par du bruit blanc. C'est une restriction importante de la classe de modèles à laquelle s'applique le schéma global que nous proposons. Ces propriétés, satisfaites en absence de toute hypothèse sur la suite des vecteurs d'observation (la suite des entrées de l'algorithme), s'appliquent aussi bien aux algorithmes identifiant les paramètres du système (approche indirecte) qu'à ceux identifiant les paramètres du régulateur optimal (approche directe).

Dans le quatrième chapitre, nous considérons l'algorithme de commande qui, à partir des estimées que lui fournit l'algorithme d'identification, génère les paramètres du régulateur adaptatif et la suite des signaux de commande. Cet algorithme ferme la boucle de contre-réaction au niveau des signaux. Nous écrivons l'équation d'évolution des signaux sous une forme qui en facilite l'étude.

Dans le chapitre 5, nous établissons les propriétés de stabilité et de convergence qui résultent de la combinaison des deux algorithmes précédents.

Dans le chapitre 6, nous présentons les résultats obtenus, à ce jour, pour des modèles plus généraux (perturbations représentées par une "moyenne glissante"). Nous expliquons pourquoi ils paraissent difficilement intégrables au schéma global précédent.

Dans le chapitre 7, nous concluons en indiquant notamment les possibilités d'extension du schéma proposé à d'autres contextes.

Finalement nous proposons en annexe la démonstration complète d'un résultat nouveau. Il s'agit d'une approche indirecte à la commande adaptative de système perturbés par du bruit coloré.

## 2. LES DEUX PRINCIPALES APPROCHES

On distingue, en général, deux types de commande adaptative. La distinction n'est pas toujours aisée à faire et certains schémas spécifiques peuvent être difficiles à classer.

### 2.1. La commande adaptative indirecte.

Dans cette approche, on décide d'identifier les paramètres du système et d'utiliser, à chaque instant, ces estimées (comme s'il s'agissait des vrais paramètres) dans le calcul de la loi de commande, c'est-à-dire dans le calcul des paramètres du régulateur adaptatif. D'une certaine manière, on peut dire que l'on commande optimalement, à chaque instant, le modèle estimé du système. Un des avantages de cette approche est de pouvoir transposer directement toutes les stratégies de commande utilisées quand les paramètres du système sont parfaitement connus.

Pour définir les notations que nous allons utiliser dans la suite, nous réécrivons le modèle (1) du système sous la forme :

$$y_t = \phi_{t-1}^T \theta + v_t \quad (2)$$

$$\text{où : } \phi_{t-1}^T = [y_{t-1} \dots y_{t-\hat{n}} \quad u_{t-1} \quad u_{t-2} \dots u_{t-\hat{m}}]$$

$$\text{et : } \theta^T = [-a_1 \dots -a_{\hat{n}} \quad b_1 \dots b_{\hat{m}}]$$

$$\text{avec : } \begin{array}{ll} a_j = 0 & \text{pour } \hat{n} \geq j > n \\ b_j = 0 & \text{pour } \hat{m} \geq j > m \text{ et } j \leq k \end{array}$$

L'algorithme de commande adaptative est donc, dans ce cas, composé d'un algorithme d'identification du vecteur  $\theta$  et d'un algorithme de calcul des paramètres de la loi de commande. En appelant  $\bar{d}_t$  le vecteur de ces paramètres, à l'instant  $t$ , déduit du vecteur  $\theta_t$  de l'estimée de  $\theta$ , le signal de commande  $u_t$  effectivement appliqué peut s'écrire, en général :

$$u_t = \bar{X}_t^T \bar{d}_t + r_t \quad (3)$$

$$\text{où : } \bar{X}_t^T = [y_t \dots y_{t-\hat{n}} \quad u_{t-1} \dots u_{t-\hat{m}}]$$

et :  $r_t$  est une éventuelle entrée extérieure (consigne,...).

Il nous semble que cette écriture permet de traduire toutes les lois de contre-réaction rencontrées dans le cadre des systèmes linéaires.

## 2.2. La commande adaptative directe.

Cette approche repose sur le raisonnement suivant. Etant donné la structure du modèle du système (supposée connue) et la stratégie de commande choisie, on peut en déduire la structure du régulateur capable de réaliser la commande. Si on est alors capable de reparamétriser l'ensemble système + régulateur en fonction des seuls paramètres du régulateur et si le modèle ainsi obtenu est susceptible de permettre l'identification des paramètres du régulateur (par exemple, si ce modèle est linéaire par rapport aux paramètres du régulateur), identifions directement ces paramètres et utilisons ces estimées dans le régulateur.

*Pour clarifier ce raisonnement, considérons l'exemple simple suivant. Soit un système admettant pour modèle :*

$$A(z^{-1}) y_t = z^{-1} u_t + e_t \quad (4)$$

*où  $e_t$  est un bruit blanc et  $A(z^{-1})$  est un polynôme de degré  $n$  connu, mais dont les paramètres sont inconnus.*

*On désire construire un algorithme de régulation adaptative amenant la sortie à zéro avec une dynamique fixée correspondant à un dénominateur de la transmittance en boucle fermée égal à  $D(z^{-1})$  fixé. Le régulateur optimal devra donc être tel que l'équation d'évolution en boucle fermée soit :*

$$D(z^{-1}) y_t = e_t \quad (5)$$

*On vérifie qu'un régulateur ayant la forme :*

$$u_t = P(z^{-1}) y_t \quad (6)$$

*convient, et que le régulateur optimal  $P^*(z^{-1})$  vérifie :*

$$\begin{aligned} P^*(z^{-1}) &= z(A(z^{-1}) - D(z^{-1})) \\ &= \bar{A}(z^{-1}) - \bar{D}(z^{-1}) \end{aligned} \quad (7)$$

*où :  $A(z^{-1}) = 1 + z^{-1} \bar{A}(z^{-1})$*

*et :  $D(z^{-1}) = 1 + z^{-1} \bar{D}(z^{-1})$ .*



La structure du régulateur est entièrement définie par les relations (6) et (7). L'identité polynomiale (7) se réécrit :

$$D(z^{-1}) = A(z^{-1}) - z^{-1} p^*(z^{-1})$$

On en déduit :

$$D y_t = A y_t - z^{-1} p^* y_t$$

soit, à l'aide de (4) :

$$D y_t = z^{-1}(u_t - p^* y_t) + e_t \quad (8)$$

Cette relation correspond à la reparamétrisation du système en fonction des paramètres du régulateur  $P^*$  et du polynôme connu  $D$ . Il s'agit maintenant de faire apparaître une équation susceptible de permettre l'identification de  $P^*$ , en construisant par exemple un signal qui soit, en quelque sorte, une mesure de l'écart entre les paramètres du régulateur à l'instant  $t$  et les paramètres du régulateur optimal. Pour le régulateur optimal, l'évolution du système est décrite par (5), qui se réécrit :

$$y_{t+1} = -\bar{D}(z^{-1}) y_t + e_{t+1}$$

Il semble donc naturel de souhaiter à l'instant  $t$  que la sortie, à l'instant  $t+1$ , du système commandé de manière adaptative (sous-optimale) soit :

$$y_{t+1}^d = -\bar{D}(z^{-1}) y_t \quad (9)$$

l'espérance de la sortie que l'on observerait, si le régulateur adaptatif était optimal. Ce signal  $y_{t+1}^d$  est parfaitement constructible, à l'instant  $t$ . Des relations (8) et (9), on déduit :

$$e_{t+1} \triangleq y_{t+1}^d - y_{t+1} \quad (10)$$

$$= -u_t + p^* y_t - e_{t+1}$$

$$= Y_t^T p^* - u_t - e_{t+1} \quad (11)$$

$$\text{avec : } Y_t^T = [y_t \quad y_{t-1} \quad \dots \quad y_{t-n+1}]$$

$$p^{*T} = [p_0^* \quad p_1^* \quad \dots \quad p_n^*]$$

soit en tenant compte du signal de commande  $u_t$  généré par le régulateur adaptatif (6) :

$$\begin{aligned} u_t &= P_t(z^{-1}) y_t \\ &= Y_t^T p_t \end{aligned} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{t+1} = -Y_t^T(p_t - p^*) - e_{t+1} \quad (13)$$

Ce signal d'écart  $\varepsilon_{t+1}$  (10) entre  $y_{t+1}^d$ , la sortie désirée (9), et  $y_{t+1}$ , la sortie observée, est donc bien une mesure de l'erreur paramétrique entre le régulateur adaptatif à l'instant  $t$   $P_t(z^{-1})$  et le régulateur optimal  $P^*(z^{-1})$ . De plus la forme de la relation (11) se prête parfaitement à l'identification des paramètres  $p^*$  du régulateur optimal  $P^*$ .

On constate que l'élaboration d'un algorithme de commande adaptative de ce type est plus complexe, mais que l'algorithme lui-même est très simple puisqu'il n'est constitué que d'un algorithme d'identification des paramètres du régulateur.

L'inconvénient majeur de cette approche est qu'elle n'est applicable que pour un nombre de stratégies de commande limité.

### 3. PROPRIETES DE L'ALGORITHME D'IDENTIFICATION

#### 3.1. Introduction.

Nous allons, dans ce chapitre, étudier les propriétés des algorithmes récursifs d'identification en les considérant comme des processus dynamiques. De ce point de vue, un algorithme d'identification est un processus complexe, dont l'entrée est constituée par les quantités mesurées sur le système à identifier (le vecteur des observations) et la sortie par les estimées des paramètres. Notre but ici est d'établir des propriétés sur la sortie en l'absence d'hypothèses sur l'entrée ; ces propriétés seront donc assez faibles. Le type de propriétés recherchées est bien sûr directement lié à l'utilisation qui en sera faite ultérieurement.

Nous considérons l'identification des paramètres d'un modèle sans préciser la signification physique des paramètres et des signaux qui interviennent. Elle dépend de l'approche utilisée dans l'élaboration de l'algorithme de commande adaptative comme nous l'avons vu au chapitre précédent. Cela ne signifie nullement que le choix et la construction de l'algorithme d'identification sont arbitraires. En fait, il est primordial d'utiliser au maximum les informations dont on dispose, sur le système à identifier.

#### 3.2. Le modèle considéré.

Nous avons vu, au chapitre 2, que, suivant l'approche utilisée, on identifiait les paramètres du système ou les paramètres du régulateur. Dans les deux cas [équation (2) et (11)], le modèle du système à identifier est de la forme :

$$z_{t+1} = \psi_t^T n + e_{t+1} \quad (14)$$

où :  $z_{t+1}$  est la sortie mesurée à l'instant  $t+1$

$\psi_t$  est le vecteur colonne des observations

et :  $n$  est le vecteur des paramètres à identifier.

La connaissance, supposée, de la structure du modèle du système à commander est utilisée ici pour déterminer un majorant de la dimension des vecteurs  $\psi_t$  et  $n$ .

Nous nous limitons au cas où  $\{e_t\}$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . Pour préciser les notations, nous dirons qu'il est défini sur un espace  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et définissons une suite croissante de sigma-algèbre  $\{F_t, t \in \mathbb{IN}\}$  où  $F_t$  est engendrée par les observations faites sur le système jusqu'à l'instant  $t$ .

Ce modèle (14) est limitatif par le type de perturbations aléatoires considérées. Un modèle plus général serait :

$$A(z^{-1}) y_t = z^{-1} B(z^{-1}) u_t + C(z^{-1}) e_t \quad (15)$$

qui correspond à une perturbation :

$$v_t = e_t + c_1 e_{t-1} + \dots + c_p e_{t-p}$$

Les résultats obtenus en commande adaptative pour ce type de modèle sont présentés dans le chapitre 6. Ils ne s'appliquent qu'à des schémas de commande bien précis qu'il serait difficile d'inclure dans le cadre général de la synthèse que nous tentons de faire.

### 3.3. Les propriétés.

Appelons  $n_t$  l'estimée, à l'instant  $t$ , du vecteur  $n$  des paramètres à identifier et posons :

$$\tilde{n}_t = n_t - n \quad (16)$$

$$r_t = r_{t-1} + \psi_t^T \psi_t ; \quad r_0 = 1$$

Appliqué à un système, admettant une représentation de la forme (14), un algorithme d'identification, vu comme un processus dynamique ayant pour entrée  $\psi_t$  et pour sortie  $n_t$ , vérifie alors, en général, les propriétés suivantes, en absence de toute hypothèse sur la suite  $\{\psi_t\}$  :

$$P1 : \quad \| \eta_t \| < M(\omega) \quad \forall t$$

$$P2 : \quad \sum_{t=1}^{\infty} \| \eta_t - \eta_{t-1} \|^2 < \infty \quad \text{p.s.}$$

$$P3 : \quad \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(\psi_t^T \tilde{\eta}_t)^2}{r_t} < \infty \quad \text{p.s.}$$

L'importance de ces propriétés est directement liée à l'utilisation qui en est faite dans un algorithme de commande adaptative. On peut les considérer comme les conditions (suffisantes) que doit satisfaire un algorithme d'identification faisant partie d'une boucle de commande adaptative. Nous donnons dans le paragraphe qui suit des exemples d'algorithmes les vérifiant.

L'intérêt de chacune des propriétés apparaîtra clairement dans la suite. Comme les paramètres  $\eta_t$  estimés seront utilisés dans le calcul des paramètres du régulateur adaptatif et du signal de commande, la nécessité de P1 est évidente. La propriété P2, qui garantit que la vitesse de variation des paramètres estimés converge vers zéro, permet de considérer le modèle identifié comme asymptotiquement constant sur tout intervalle de temps fini, fixé a priori. Cette propriété est très utile quand il s'agit de commander un processus variable dans le temps, elle garantit que ce processus dont l'évolution future est inconnue, varie de moins en moins vite. Quant à la propriété P3, c'est la seule qui nous assure qu'il s'agit bien d'un algorithme d'identification. La quantité  $(\psi_t^T \tilde{\eta}_t)$  est l'erreur de prédiction du signal  $z_{t+1}$  à l'instant  $t$ . La propriété P3 est donc une sorte de loi des grands nombres pour la variance de la partie déterministe de l'erreur de prédiction.

### 3.4. Algorithme d'identification

Nous donnons deux prototypes d'algorithmes d'identification vérifiant les propriétés énoncées, quand ils sont appliqués à la classe des modèles (14) considérés. Le premier est une variante de l'algorithme des moindres carrés récursifs [6], le deuxième est du type approximation stochastique.

i) Variante de l'algorithme des moindres carrés récursifs [6].

$$\begin{aligned} n_{t+1} &= n_t + \gamma_t G_t \psi_t \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1} &= z_{t+1} - \psi_t^T n_t \\ G_t &= G_{t-1} - \frac{G_{t-1} \psi_t \psi_t^T G_{t-1}}{\frac{1}{\gamma_t} + \psi_t^T G_{t-1} \psi_t} ; \quad G_0 = I \\ \gamma_t &= \frac{\psi_t^T G_{t-1} \psi_t}{\psi_t^T \psi_t} \end{aligned}$$

ii) Algorithme du type "approximation stochastique"

$$\begin{aligned} n_{t+1} &= n_t + \frac{1}{r_t} \psi_t \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1} &= z_{t+1} - \psi_t^T n_t \\ r_t &= r_{t-1} + \psi_t^T \psi_t ; \quad r_0 = 1 \end{aligned}$$

Nous ne démontrons pas que ces algorithmes vérifient les propriétés P1-P3. On peut trouver les démonstrations dans les références [6] et [7] respectivement. Il est à noter qu'en faisant  $\gamma_t \equiv 1$  dans l'algorithme i), celui-ci n'est autre que l'algorithme des moindres carrés récursifs qui, à notre connaissance, ne vérifie pas les propriétés P1-P3 en l'absence d'hypothèses supplémentaires. D'autres algorithmes vérifiant ces propriétés sont donnés dans [3], [4].

### 3.5. Conclusions.

Nous avons donné les propriétés susceptibles d'être vérifiées par la partie "algorithme d'identification" d'un schéma de commande adaptative. D'un point de vue identification pure, ces propriétés sont faibles, mais nous verrons qu'elles sont suffisantes dans l'étude qui nous intéresse. Il serait intéressant de montrer qu'elles sont aussi nécessaires. Il nous semble que oui, même si elles peuvent ne pas apparaître explicitement dans chaque étude particulière d'un schéma spécifique de commande adaptative. Par contre, ce qui ne semble pas nécessaire, est le fait de ne faire aucune hypothèse sur la suite des vecteurs d'observations  $\{\psi_t\}$ , mais cette contrainte nous est dictée par l'approche (par découpage de l'algorithme de commande adaptative) utilisée.

Les démonstrations, qui n'ont pas été présentées, reposent sur la théorie des martingales discrètes [8]. Il semble que l'utilisation de cette théorie dans l'analyse d'algorithmes récursifs remonte à 1965 [9]. La linéarité du modèle (14) par rapport aux paramètres à identifier explique la relative facilité d'obtention des propriétés. Des propriétés analogues peuvent être démontrées dans le cas des modèles plus généraux (15). Elles sont légèrement plus faibles que les propriétés P1-P3 énoncées dans ce chapitre. On en trouvera un exemple dans l'annexe.

## 4. L'ALGORITHME DE CALCUL DE LA COMMANDE

### 4.1. Introduction.

Le rôle de cet algorithme est de calculer, à chaque instant, à partir des paramètres estimés que lui fournit l'algorithme d'identification, les paramètres du régulateur adaptatif et la valeur du signal de commande à appliquer au système. Dans l'approche directe il est, en général, trivial (inexistant) puisque les paramètres du régulateur sont directement identifiés. Dans l'approche indirecte, il est plus complexe (résolution d'une identité polynômiale, par exemple dans le cas d'une stratégie de commande par placement de pôles) et il peut être intéressant de ne pas calculer la solution exacte (i.e. le régulateur optimal pour le modèle identifié du système) à chaque pas, mais d'effectuer ce calcul de manière approchée (cf. partie B, paragraphe 3.2). Dans les deux approches, le calcul à réaliser par cet algorithme est entièrement défini par la stratégie de commande choisie et les propriétés du résultat -s'il existe- de ce calcul sont parfaitement connues.

A partir des paramètres du régulateur adaptatif ainsi obtenu, il est facile de calculer la valeur du signal de commande à appliquer. Cet algorithme est donc celui qui ferme la boucle au niveau des signaux.

Dans le cadre général que nous avons adopté, nous n'allons pas préciser la forme prise par cet algorithme pour chaque stratégie de commande particulière. Pour les deux types d'approche -indirecte et directe- nous allons formaliser la manière dont est généré le signal de commande. Nous serons alors en mesure d'écrire l'équation d'évolution du vecteur des signaux observés/mesurés sur le système. De cette équation, nous déduirons les propriétés que devra vérifier l'algorithme de calcul de la loi de commande. Il sera alors facile de retrouver les hypothèses qui sont généralement faites dans chaque schéma spécifique de commande adaptative.



#### 4.2. Cas de l'approche indirecte.

##### 4.2.1. Equation d'évolution du vecteur des observations.

Au paragraphe 2.1, nous avons indiqué la philosophie de cette approche. Un algorithme d'identification identifie les paramètres  $\theta$  du modèle du système :

$$y_t = \phi_{t-1}^T \theta + e_t \quad (17)$$

$$\phi_{t-1}^T = [y_{t-1} \dots y_{t-\hat{n}} \quad u_{t-1} \dots u_{t-\hat{m}}]$$

$$\theta^T = [-a_1 \dots -\hat{a}_n \quad b_1 \dots b_{\hat{m}}]$$

$\{e_t\}$  : bruit blanc gaussien.

L'algorithme de calcul de la commande utilise les estimées  $\theta_t$  et en déduit le vecteur  $\bar{d}_t$  des paramètres du régulateur à l'instant  $t$ . Le signal  $u_t$  de commande appliqué peut alors se mettre sous la forme :

$$u_t = \bar{X}_t^T \bar{d}_t + r_t$$

$$\text{où : } \bar{X}_t^T = [y_t \quad y_{t-1} \dots y_{t-\hat{n}} \quad u_{t-1} \dots u_{t-\hat{m}}]$$

$$\bar{d}_t^T = [d_{0t} \quad d_{1t} \quad \dots \quad d_{\hat{n}+\hat{m},t}]$$

et  $\{r_t\}$  est une suite uniformément bornée d'entrées extérieures (consigne,...).

Nous le réécrivons :

$$u_t = X_{t-1}^T d_t + d_{0t} y_t + r_t \quad (18)$$

$$\text{où : } X_{t-1}^T = [y_{t-1} \dots y_{t-\hat{n}} \quad u_{t-1} \dots u_{t-\hat{m}}]$$

$$d_t = [d_{1t} \dots d_{\hat{n},t} \quad \dots \quad d_{\hat{n}+\hat{m},t}]$$

Nous supposons dans la suite que :

$$\bar{n} \geq \hat{n} \quad \text{et} \quad \bar{m} \geq \hat{m} \quad (19)$$

On peut toujours se ramener à cette situation, en introduisant, si nécessaire, des paramètres identiquement nuls dans le vecteur  $d_t$ .

Nous supposons par ailleurs, pour des raisons de commodité d'écriture, que le paramètre  $d_{0t}$  est nul pour tout  $t$  ; le cas général est traité dans [5].

L'équation (17) peut aussi s'écrire :

$$y_t = \phi_{t-1}^T \theta_{t-1} - \phi_{t-1}^T \tilde{\theta}_{t-1} + e_t \quad (20)$$

où :  $\tilde{\theta}_{t-1} = \theta_{t-1} - \theta$ .

On en déduit l'équation d'évolution de  $X_t$  suivante :

$$X_t = F_{t-1} X_{t-1} + B_1 (-\phi_{t-1}^T \tilde{\theta}_{t-1} + e_t) + B_2 r_t \quad (21)$$

où :  $F_{t-1}$  est une matrice carrée  $(\bar{n}+\bar{m})$ ,  $B_1$  et  $B_2$  des vecteurs colonnes  $(\bar{n}+\bar{m})$  vérifiant :

$$F_{t-1} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -a_{1,t-1} & \dots & -a_{\hat{n},t-1} & 0 \dots & b_{1,t-1} & \dots & b_{\hat{m},t-1} & 0 \dots \\ & & & & & & & \\ & & I_{\bar{n}-1} & & & & & \\ & & & & d_t^T & & & \\ & & & & & & I_{\bar{m}-1} & \end{array} \right]$$

$$B_1^T = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

$$B_2^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Remarques :

a/ Le régulateur adaptatif  $d_t$  dépend en général des paramètres  $\theta_t$  identifiés à l'instant  $t$ , la présence de  $\theta_{t-1}$  dans la première ligne de  $F_{t-1}$  n'est cependant pas gênante à cause de la propriété P2 de la suite des estimées  $\{\theta_t\}$ .

b/ Il est important de noter que la matrice  $F_{t-1}$  est la matrice d'évolution du processus :

$$y_t = \phi_{t-1}^T \theta_{t-1} \quad (22)$$

soit :

$$A_{t-1}(z^{-1}) y_t = z^{-1} B_{t-1}(z^{-1}) u_t \quad (23)$$

rebouclé par la contre-réaction

$$u_t = X_{t-1}^T d_t$$

qui est précisément la contre-réaction optimale (pour la stratégie de commande choisie) du processus (23). C'est dans ce sens, que l'on peut dire que, dans l'approche indirecte, on contrôle optimalement le modèle identifié (22,23) du système à commander.

#### 4.2.2. Les propriétés suffisantes.

Toutes les stratégies de commande ont notamment pour but de stabiliser le système en absence d'entrées extérieures. Dans l'équation 21, qui est une manière de décrire l'évolution des signaux  $y_t$  et  $u_t$ , la matrice  $F_{t-1}$ , dans laquelle apparaît le régulateur adaptatif  $d_t$ , joue un rôle prédominant. On peut montrer que si la suite des matrices  $\{F_t\}$  est exponentiellement stable, la suite des vecteurs  $\{X_t\}$  possède des propriétés satisfaisantes. Nous n'allons pas garder cette condition dans la suite, mais énoncer des propriétés suffisantes analogues qui, si elles sont vérifiées, presque sûrement, vont assurer au système rebouclé par le régulateur adaptatif un comportement satisfaisant. Ces propriétés, qui nous semblent plus parlantes, sont les suivantes :

$$C1 : \quad \|d_t\| < M(\omega) \quad \forall t \quad \text{p.s.}$$

$$C2 : \quad \|d_t - d_{t-1}\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty \quad \text{p.s.}$$

$$C3 : \quad \exists T \text{ fini, tel que } \rho(F_t) \leq \delta < 1^{(+)} \quad \forall t > T. \quad \text{p.s.}$$

Comme nous ne précisons pas l'algorithme de calcul de la loi de commande, il est peut-être difficile de mesurer le réalisme de ces propriétés. Dans le paragraphe qui suit nous essayons de clarifier ce point.

---

(+) Nous notons  $\rho(F)$  le rayon spectral de la matrice  $F$ .

#### 4.2.3. L'hypothèse de la stabilisabilité.

L'algorithme a pour entrée la suite  $\{\theta_t\}$ , qui satisfait les propriétés P1-P3 (paragraphe 3.3), les conditions C1 et C2 sur sa sortie  $d_t$  ne semblent donc nullement contraignantes. La matrice  $F_{t-1}$  (cf. paragraphe 4.2.1.b/) est la matrice d'évolution du processus (23), variable dans le temps mais dont la vitesse de variation converge vers zéro (propriété P2 de  $\{\theta_t\}$ ), rebouclé à chaque instant par une contre-réaction optimale, la condition C3 (ou toute condition analogue) devrait donc être vérifiée pour peu que la contre-réaction optimale existe. Une condition minimale d'existence semble être une condition d'uniforme stabilisabilité du processus (23), le modèle identifié du système.

Il apparaît donc que les propriétés C1-C3 sont tout à fait réalistes si la suite des modèles identifiés du système est uniformément stabilisable. Il est à noter que ceci constitue une hypothèse (un souhait).

Dans [10], [11], cette hypothèse apparaît explicitement et sous cette forme. Dans [12] l'auteur suppose que les paramètres estimés convergent vers les vrais paramètres, c'est une hypothèse bien plus forte. Enfin dans [13], on suppose connaître un modèle initial suffisamment proche du vrai modèle du système et l'on établit que la suite  $\{\theta_t\}$  reste alors dans un domaine où l'hypothèse de stabilisabilité est vérifiée. On trouvera dans la partie B, paragraphe 3.3, d'autres commentaires sur ce point.

#### 4.3. Cas de l'approche directe.

##### 4.3.1. Equation d'évolution du vecteur des observations.

Dans cette approche (cf. paragraphe 2.2), l'identification porte sur le vecteur des paramètres du régulateur, comme dans le paragraphe précédent nous supposons que le signal de commande  $u_t$  peut se mettre sous la forme (18) :

$$u_t = X_{t-1}^T d_t + r_t$$

qui se réécrit, en introduisant le vecteur des paramètres  $d^*$  du régulateur optimal :

$$u_t = X_{t-1}^T d^* + X_{t-1}^T \tilde{d}_t + r_t \quad (24)$$

où :  $\tilde{d}_t = d_t - d^*$ .

L'équation d'évolution du vecteur  $X_t$  s'écrit maintenant :

$$X_t = F^* X_{t-1} + B_1 e_t + B_2 (X_{t-1}^T \tilde{d}_t + r_t) \quad (25)$$

où :  $B_1$  et  $B_2$  ont été définis plus haut et  $F^*$  est égal à :

$$F^* = \begin{bmatrix} -a_1 \dots -a_n & 0 \dots 0 & b_1 \dots b_m & 0 \dots 0 \\ & I_{n-1} & & \\ & & d^{*T} & \\ & & & I_{m-1} \end{bmatrix}$$

L'équation (25), qui est une manière, parmi d'autres, d'écrire l'évolution des signaux  $y_t$  et  $u_t$  du système rebouclé, fait maintenant intervenir une matrice d'évolution  $F^*$  constante dans laquelle apparaissent les vrais paramètres  $\theta$  du système et les paramètres  $d^*$  du régulateur optimal. On peut vérifier [14] que les valeurs propres de cette matrice sont les pôles de la transmittance de l'ensemble : système + régulateur optimal. Il semble donc que l'on soit dans une situation particulièrement favorable à l'établissement de la stabilité des schémas de commande adaptative du type direct et, en effet, il suffit que la matrice  $F^*$  soit asymptotiquement stable. Nous verrons les implications de cette condition dans le paragraphe qui suit.

Précisons d'abord que, dans le cas de l'approche indirecte, l'équation d'évolution du vecteur  $X_t$  peut bien entendu également se mettre sous une forme faisant apparaître une matrice d'évolution constante et "optimale", mais que cette écriture introduit un terme supplémentaire en entrée qui interdit toute analyse ultérieure. Il nous semble que l'équation (21) est la seule forme utilisable dans le cas de l'approche indirecte.

#### 4.3.2. Les limitations de l'approche directe.

Nous avons vu au paragraphe 2.2, sur un exemple simple, la façon dont est conçu un algorithme de commande adaptative directe. D'autres exemples sont présentés dans [1][4][7]. Il s'agit d'une part de reparamétriser l'ensemble système + régulateur à l'aide des seuls paramètres du régulateur et d'autre part de générer un signal, qui soit une fonction linéaire de l'écart entre les paramètres du régulateur optimal et du régulateur adaptatif. Cette procédure n'est réalisable que pour un ensemble très limité de stratégies de commande. Cet ensemble semble coïncider avec celui des stratégies permettant de commander des systèmes à phase minimale, uniquement.

Pour le moment, l'utilisation de l'approche directe à la commande adaptative est donc limitée aux systèmes à phase minimale, ou dont la partie à phase minimale (retard, par exemple) est parfaitement connue.

Nous présentons dans la partie B, chapitres 4 et 5, les difficultés rencontrées dans la conception d'un algorithme de commande de type directe dans le cas d'une stratégie par placement de pôles (donc susceptible d'être utilisée pour des systèmes à phase non minimale). Il apparaît qu'il semble difficile de reparamétriser l'ensemble système + régulateur en fonction des seuls paramètres du régulateur (et de paramètres connus). Certains paramètres du système. (ceux du numérateur pour la stratégie choisie) demeurent présents dans cette reparamétrisation. Et la solution qui consisterait à identifier simultanément ces paramètres et ceux du régulateur optimal n'est pas envisageable dans l'état actuel de la théorie des algorithmes d'identification.

## 5. L'ANALYSE DE LA STABILITE

### 5.1. Introduction.

Nous avons déjà évoqué la notion de stabilité dans le chapitre précédent au moment où nous avons choisi d'écrire l'équation d'évolution du vecteur des observations sous une certaine forme. Nous avons même essayé de justifier ce choix, mais il a été, bien sûr, principalement fait dans l'optique de l'analyse de la stabilité qui suit.

Dans une première étape, nous allons établir une propriété de la suite des vecteurs des observations découlant directement des équations (21) et (25) d'évolution de ces vecteurs et des propriétés de la suite des matrices d'évolution. Dans une deuxième étape, nous utilisons les propriétés P1-P3 de l'algorithme d'identification pour obtenir les résultats de stabilité et de convergence de l'ensemble système + régulateur adaptatif.

### 5.2. Propriétés du vecteur des observations.

L'analyse repose sur le lemme suivant établi dans [5].

*Lemme :* Soit l'équation d'évolution :

$$X_{t+1} = F_t X_t + B u_t$$

où  $X_t$  est un vecteur et  $u_t$  un scalaire.

- Si :
- i)  $\|F_t\| < M \quad \forall t \geq 0$
  - ii)  $\|F_t - F_{t-1}\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty$
  - iii)  $\rho(F_t) \leq \delta < 1 \quad \forall t > T$

alors, il existe des constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  indépendantes de  $N$ , tel que :

$$\sum_{t=1}^N \|X_t\|^2 \leq C_1 \sum_{t=1}^N u_{t-1}^2 + C_2 \quad \forall N$$

Ce lemme purement déterministe va s'appliquer à chaque réalisation des processus stochastiques que nous considérons et permet donc d'établir des résultats "presque sûrs". On devine derrière les conditions *i)-iii)* les propriétés C1-C3 définies au paragraphe 4.2.2. : des lemmes analogues pourraient évidemment être établis pour des conditions et des propriétés voisines.

Dans l'approche indirecte (équation 21) les équations P1-C1 et P2-C2 entraînent la satisfaction des conditions *i)* et *ii)* ; C3 est équivalent à *iii)* ; l'application de ce lemme et du principe de superposition impliquent :

$$\sum_{t=1}^N \|x_t\|^2 \leq c'_1 \sum_{t=1}^N (-\phi_{t-1}^T \tilde{\theta}_{t-1} + e_t)^2 + c'_2 \sum_{t=1}^N r_t^2 + c'_3$$

en appliquant l'inégalité de Schwarz au premier terme du deuxième membre et comme la suite  $\{r_t\}$  des entrées extérieures est uniformément bornée, on en déduit :

$$\sum_{t=1}^N \|x_t\|^2 \leq c_1 \sum_{t=1}^N (\phi_{t-1}^T \tilde{\theta}_{t-1})^2 + c_2 \sum_{t=1}^N e_t^2 + c_3 \quad (26)$$

De manière analogue, pour l'approche directe (équation 25), la matrice  $F^*$  étant asymptotiquement stable, on obtient :

$$\sum_{t=1}^N \|x_t\|^2 \leq c_1 \sum_{t=1}^N (x_{t-1}^T \tilde{d}_t)^2 + c_2 \sum_{t=1}^N e_t^2 + c_3 \quad (27)$$

### 5.3. Stabilité et convergence.

#### 5.3.1. Approche indirecte.

L'algorithme d'identification étant appliqué au système (17), la propriété P3 s'écrit :

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(\phi_t^T \tilde{\theta}_t)^2}{r_t} < \infty$$



et par application du lemme de Kronecker :

$$\lim_N \frac{1}{r_N} \sum_{t=1}^N (\phi_t^T \tilde{\theta}_t)^2 = 0 \quad (28)$$

En observant que (19) implique :

$$\|X_t\|^2 \geq \|\phi_t\|^2$$

on a :

$$\sum_{t=1}^N \|X_t\|^2 \geq r_N$$

L'inégalité (26) peut maintenant se réécrire :

$$1 \leq C_1 \frac{1}{r_N} \sum_{t=1}^N (\phi_{t-1}^T \tilde{\theta}_{t-1})^2 + C_2 \frac{N}{r_N} \cdot \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_t^2 + \frac{1}{r_N} C_3 \quad (29)$$

en utilisant (28) et les relations suivantes :

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_t^2 = \sigma^2, \quad \lim_N \frac{C_3}{r_N} = 0$$

on obtient, en prenant les limites inférieures dans (29) :

$$1 \leq C_2 \sigma^2 \liminf \frac{N}{r_N}$$

$$\Rightarrow \limsup \frac{r_N}{N} \leq C_2 \sigma^2 \quad (30)$$

En combinant cette relation avec (28), on a :

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\phi_t^T \tilde{\theta}_t)^2 = 0 \quad (31)$$

Les relations (30) et (31) constituent les propriétés, presque sûres, de stabilité et de convergence que l'on peut dériver du schéma général que nous avons adopté. La relation (30) qui implique, par exemple :

$$\limsup_N \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_t^2 \leq \infty$$

$$\limsup_N \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u_t^2 \leq \infty \quad (32)$$

assure que tous les signaux qui interviennent dans le système commandé de manière adaptative sont bornés en moyenne quadratique.

En notant  $\hat{y}_{t+1/t}$ , l'estimée de la prédiction de la sortie  $y_{t+1}$  du système (17), à l'instant  $t$  :

$$\hat{y}_{t+1/t} = \phi_t^T \theta_t$$

la relation (31) implique :

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E((y_{t+1} - \hat{y}_{t+1/t})^2 / F_t) = \sigma^2 \quad (33)$$

qui indique que, en moyenne, la variance de l'erreur de prédiction de la sortie du système est minimale.

### 5.3.2. Approche directe.

Les propriétés P2 et P3 s'écrivent dans ce cas :

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|d_t - d_{t-1}\|^2 < \infty$$

et :

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(x_t^T d_t)^2}{r_t} < \infty$$

$$\text{Or : } x_{t-1}^T \tilde{d}_t = x_{t-1}^T \tilde{d}_{t-1} + x_{t-1}^T (d_t - d_{t-1})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum \frac{(x_{t-1}^T \tilde{d}_t)^2}{r_t} &\leq 2 \sum \frac{(x_{t-1}^T \tilde{d}_{t-1})^2}{r_t} + 2 \sum \frac{x_{t-1}^T x_{t-1}}{r_t} \|d_t - d_{t-1}\|^2 \\ &\leq \dots + 2 \sum \|d_t - d_{t-1}\|^2 \\ &\leq \infty \end{aligned}$$

d'où, par le lemme de Kronecker :

$$\lim_N \frac{1}{r_N} \sum_{t=1}^N (x_{t-1}^T \tilde{d}_t)^2 = 0$$

Le développement du paragraphe précédent s'applique maintenant, de manière analogue, à la relation (27). On en déduit les propriétés de stabilité (32) sur les signaux. L'équation (31) s'écrit dans ce cas :

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_1^N (x_{t-1}^T \tilde{d}_t)^2 = 0 \quad (31')$$

Elle ne s'interprète plus comme (un estimateur de) la variance de l'erreur de prédiction de la sortie du système mais d'un signal (paragraphe 4.3.2.) qui est une mesure de l'écart entre le régulateur adaptatif et le régulateur optimal. Bien souvent, comme dans l'exemple du paragraphe 2.2., ce signal n'est autre que l'écart (10) entre la sortie désirée et la sortie mesurée. Cette propriété (31') signifie alors que (asymptotiquement) la variance de l'erreur de poursuite est minimale (est la même que celle obtenue en commande classique, quand les paramètres du système à contrôler sont connus).

#### 5.4. Conclusions.

Pour la classe des systèmes considérés (admettant un modèle linéaire perturbé par du bruit blanc), nous avons établi, dans un cadre très général, des propriétés de stabilité et de convergence aussi bien dans le cas d'une approche directe qu'indirecte. Ce développement permet d'obtenir tous les résultats [1]-[4], [7] établis à ce jour en commande adaptative stochastique pour la classe de systèmes considérés. Ces résultats correspondent, en général, à l'association d'un algorithme d'identification particulier et d'un algorithme de calcul de la commande spécifique. Pour un tel schéma, il est possible d'adapter les propriétés générales obtenues dans le paragraphe précédent au cas particulier considéré.

Nous allons dans le chapitre qui suit présenter les résultats obtenus dans des cas très spécifiques, pour des modèles plus généraux. et proposons en annexe la démonstration complète de résultats de ce type dans le cas d'une commande indirecte.

## 6. MODELES PLUS GENERAUX.

### 6.1. Introduction.

Nous allons indiquer les quelques résultats obtenus [1]-[3] en commande adaptative stochastique de systèmes dont le modèle n'appartient pas à la classe considérée dans les chapitres qui précèdent. Ces résultats ont tous été établis dans le cadre d'une approche directe. La partie à phase non minimale du système est donc supposée parfaitement connue (cf. paragraphe 4.3.2.). L'analyse de la stabilité est plus directement liée à la stratégie de commande (du type "minimum de variance") utilisée et c'est là, une des raisons pour lesquelles elle est difficile à intégrer dans un schéma global. Même si cela n'apparaît peut-être pas clairement dans les références [1][2] et [3], les trois étapes : analyse de l'algorithme d'identification, de l'algorithme de calcul de la commande, de la stabilité pourraient être mises en évidence.

### 6.2. Les résultats.

Les modèles considérés sont de la forme :

$$A(z^{-1}) y_t = q^{-k} B(z^{-1}) u_t + C(z^{-1}) e_t \quad (34)$$

avec les notations habituelles. La suite  $\{e_t\}$  satisfait, presque sûrement, les propriétés suivantes :

$$E\{e_t / F_{t-1}\} = 0$$

$$E\{e_t^2 / F_{t-1}\} = \sigma^2$$

$$\limsup_N \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_t^2 < \infty$$

où  $F_t$  est la sigma-algèbre engendrée par les observations faites jusqu'à l'instant  $t$ .

Précisons que l'étude des chapitres précédents menée dans le cas  $\{e_t\}$  bruit blanc gaussien se généralise sans difficulté au cas présent et qu'elle correspond donc au cas :  $C(z^{-1}) \equiv 1$ .

On suppose, par ailleurs, que le système satisfait les hypothèses suivantes :

H1 :  $k$  est connu

H2 : on connaît un majorant des degrés des polynômes  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

H3 :  $B(z)$  et  $C(z)$  ont leurs zéros à l'extérieur du cercle unité.

H2 est l'hypothèse habituellement faite en commande adaptative. H1 et l'hypothèse sur  $B(z)$  dans H3 correspondant à une connaissance parfaite de la partie à phase non minimale du système. Ces hypothèses sont toujours nécessaires dans le cas d'une approche directe. L'hypothèse sur  $C(z)$  dans H3 sera renforcée dans la suite.

Le but de la commande est de minimiser la variance de l'écart  $e_t$  entre la sortie mesurée et la sortie désirée  $y_t^*$ . Appelons  $\gamma^2$  la variance minimale réalisable avec un régulateur linéaire. Les résultats obtenus dans [2] sont alors les suivants :

Si il existe  $a$ , une constante positive connue, telle que :  $C(z) - \frac{a}{z}$  est strictement positive réelle, alors, presque sûrement :

$$\sup_N \frac{1}{N} \sum_1^N y_t^2 < \infty$$

$$\sup_N \frac{1}{N} \sum_1^N u_t^2 < \infty$$

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_1^N E\{(y_t - y_t^*)^2 / F_{t-k}\} = \gamma^2$$

La constante  $a$  apparaît dans la partie "algorithme d'identification" de l'algorithme de commande adaptative proposé. Cet algorithme est du type "approximation stochastique" (cf. paragraphe 3.4).

### 6.3. Conclusions.

Ces résultats sont analogues à ceux obtenus au chapitre 5 pour une classe de modèles moins généraux mais dans un cadre plus général. Il ne semble pas que l'on puisse espérer diminuer l'hypothèse sur C ; cette hypothèse apparaît déjà dans les études [15] des algorithmes d'identification des modèles du type (34).

Ces résultats nécessitent l'implémentation de k (le nombre de retards entre l'entrée et la sortie du système (34)) algorithmes d'identification travaillant chacun tous les k pas d'échantillonnage (le  $i^{\text{ème}}$  algorithme est utilisé aux instants  $t=i+kn$ ,  $n=0,1,2\dots$ ). Il semble que cette complexité découle principalement de la méthode d'analyse mise en oeuvre. On peut, en utilisant une approche indirecte, obtenir les mêmes performances à l'aide d'un seul algorithme. Dans le cas "bruit blanc", on trouvera ces résultats dans [7]. Le cas "bruit coloré" est considéré dans l'annexe, où l'on trouvera une démonstration complète mettant clairement en évidence les étapes : algorithme d'identification, algorithme de calcul de la commande et analyse de la stabilité. Les résultats exposés dans l'annexe sont nouveaux.

L'extension de ces résultats à la commande adaptative avec modèle de référence ne semble pas poser de problèmes.

## 7. CONCLUSIONS.

Les premiers résultats complets obtenus en commande adaptative stochastique [1] remontent à décembre 1978. L'approche que nous avons présentée englobe, pour la classe de systèmes à laquelle elle s'applique, tous les résultats obtenus à ce jour [1]-[4], [7].

Le développement utilisé, qui consiste à étudier séparément les différents sous-blocs qui constituent l'algorithme de commande adaptative, est directement transportable à d'autres contextes. Implicitement, le contexte impose entièrement le type des propriétés qu'il s'agit d'établir et la théorie qui permet de les démontrer. Par ailleurs, dans un contexte donné, la forme des propriétés (analogues à P1-P3) que l'on est capable d'établir pour l'algorithme d'identification, dicte pour une large part le type des propriétés de stabilité et de convergence que l'on obtiendra.

Dans ce rapport, le type des propriétés P1-P3 de l'algorithme d'identification et la théorie qui permet de les établir, sont pratiquement imposés par le contexte stochastique. Le fait de mener le reste de l'étude, trajectoire par trajectoire et dans l'optique d'obtenir des résultats en moyenne sur les trajectoires, est entièrement dicté par la forme des propriétés P1-P3.

Dans un contexte déterministe, les propriétés analogues à P1-P3 [11], [16] sont plus fortes, les démonstrations font appel à des théories différentes, mais le raisonnement reste le même.

Si l'on remarque que, dans cette étude, le caractère aléatoire n'intervient que dans l'établissement des propriétés P1-P3 de l'algorithme d'identification, on conçoit que cette analyse puisse être utilisée -par exemple, dans le cas de perturbations bornées quelconques [4] (déterministes ou aléatoires)- chaque fois que les propriétés obtenues au chapitre 5 sont jugées satisfaisantes. Il reste alors à établir les propriétés P1-P3 ou à définir des algorithmes d'identification satisfaisant ces propriétés.

Il semble difficile d'étendre ce schéma global au modèle plus général (34). Les stratégies de commande prennent dans ce cas des formes assez complexes pouvant notamment faire intervenir des signaux estimés (et non plus uniquement des signaux mesurés). L'étude simultanée de

différentes stratégies est alors exclue. L'utilisation d'une méthode d'identification par variables instrumentales [17], qui a pour caractéristique de n'identifier dans un modèle du type (34) que les paramètres des polynômes A et B, nous paraît soulever des problèmes intéressants.

Comme nous l'avons déjà souligné, il serait beaucoup plus satisfaisant de pouvoir analyser simultanément l'ensemble d'un algorithme de commande adaptative. Cela semble un peu utopique pour le moment et paradoxalement la méthode proposée dans ce rapport peut constituer un premier pas dans cette direction. Il n'est pas exclu qu'une analyse plus poussée de chacun des sous-blocs, qui mènerait dans un premier temps à des propriétés (suffisantes) moins fortes, permette d'aboutir à un effacement progressif du découpage. L'analyse de l'équation d'évolution du vecteur des observations devrait, notamment, permettre d'obtenir des indications à la fois sur le type d'effet dual à introduire dans la commande et sur les conséquences de ce genre d'action sur la suite des vecteurs d'observation.

Rappelons, finalement, que tous les résultats évoqués, sont, bien entendu, limités au cadre idéal dans lequel se place la théorie de la commande adaptative actuellement : le système est invariant et peut être décrit par un modèle (de dimension finie) dont la structure est connue. Il serait, bien sûr, intéressant d'élargir ce cadre à la fois dans la direction de systèmes imparfaitement modélisés (robustesse) et de systèmes (lentement) variables dans le temps. Beaucoup reste à faire dans ces directions.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] GOODWIN, G.C.; RAMADGE, P.J.; CAINES, P.E.: '*Discrete time stochastic adaptive control*', Dec. 1978, to appear SIAM Jnl on Control and Optimization.
- [2] GOODWIN, G.C.; SIN, K.S.: '*Stochastic adaptive control: the general delay-coloured noise case*'; IEEE-T-AC, Oct. 1980, pp. 946-950.
- [3] GOODWIN, G.C.; SIN, K.S.: '*Stochastic adaptive control using a modified least squares algorithm*'; Tech. Rept. N°7907, Dept. of E.E., Univ. of Newcastle, June 1979.
- [4] EGARDT, B.: '*Stability analysis of discrete time adaptive control schemes*', IEEE-T-AC, Aug. 1980, pp. 710-716.
- [5] FUCHS, J.J.: '*Explicit self-tuning methods*', IEE Proc., vol.127, Pt.D., N°6, Nov. 1980.
- [6] FUCHS, J.J.: '*Recursive least-squares algorithm revisited*', IEE Proc., vol.128, Pt.D., N°2, Mars 1981.
- [7] FUCHS, J.J.: '*Stochastic adaptive control: the general delay-white noise case*'; June 1980, to appear in IEEE-T-AC, Aug. 1981.
- [8] NEVEU, J.: '*Discrete parameter martingales*'; New York, North-Holland, 1975.
- [9] GLABYSHEV, E.G.: '*On stochastic approximation*', Th. of Proba. and its Applic., vol.10, N°2, 1965, pp. 275-278.
- [10] SAMSON, C.: '*Commande adaptative à critère quadratique des systèmes linéaires à minimum de phase ou non*'; Thèse de Docteur-Ingénieur, Univ. de Rennes, juin 1980.
- [11] SAMSON, C.; FUCHS, J.J.: '*Discrete adaptive regulation of not-necessarily minimum-phase systems*', Janv. 1980; to appear in IEE. Proc., Pt. D.
- [12] KREISSELMEIER, G.: '*Adaptive control via adaptive observation and asymptotic feedback matrix synthesis*'; IEEE-T-AC, 1980, pp. 712-722.
- [13] GOODWIN, G.C.; SIN, K.W.: '*Adaptive control of non-minimum phase systems*', Univ. of Newcastle, Tech. Report. EE 7918, 1979.

- [14] FUCHS, J.J.: *'Discrete adaptive control: a sufficient condition for stability and applications'*, IEEE-T-AC, Oct. 1980, pp. 940-946.
- [15] SOLO, V.: *'The convergence of AML'*, IEEE-T-AC, 1979, pp. 958-962.
- [16] DE LARMINAT, Ph.: *'Unconditional stabilizers for non-minimum phase systems'*. Int. Symp. on Adaptive Systems, Ruhr. Univ., Bochum 1980.
- [17] FINIGAN, B.M.; ROWE, I.H.: *'Strongly consistent parameter estimation by the introduction of strong instrumental variables'*; IEEE-T-AC, Dec. 1974, pp. 825-830.

## 8. ANNEXE

Cette annexe présente des résultats nouveaux et peut être lue indépendamment du reste de ce rapport. Elle consiste en un bref article, rédigé en anglais, dans lequel les démonstrations sont esquissées, suivi d'un appendice, rédigé en français, donnant les détails des différentes démonstrations. La numérotation des équations et des références bibliographiques est indépendante du reste de ce rapport.

8.1. INDIRECT STOCHASTIC ADAPTIVE CONTROL :  
THE GENERAL DELAY-COLOURED NOISE CASE

Jean-Jacques J. FUCHS

Abstract:

Global convergence of stochastic adaptive control algorithms has been established recently for the general delay-coloured noise case. An unfortunate feature of the proposed scheme is the use of  $k$  (the number of delays) interlaced recursions. Using an indirect adaptive control approach we establish that identical convergence properties can be achieved by a single adaptation algorithm. The proposed results apply straight forwardly to the adaptive predictor problems and should be of interest in other indirect control schemes.

The author is with I.R.I.S.A. (Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires), laboratoire d'Automatique, Rennes, France.

Mailing Address:

INRIA/Rennes (IRISA)  
Campus de Beaulieu  
35042 RENNES CEDEX  
FRANCE.

## I. INTRODUCTION.

Global convergence of stochastic adaptive control algorithms has been established [1] recently for the general delay-coloured case. For delays  $k$  greater than unity the proposed scheme leads to the necessity of introducing  $k$  interlaced recursions. Using an indirect adaptive control approach, we show that identical convergence properties can be achieved by a single adaptation algorithm. Similar results have already been proven in the white noise case [3].

The proposed results are readily applicable to the adaptive predictor problems of the type suggested in [1], [4], thus allowing to reduce memory space requirement in this case also.

It is our feeling, that identifying the parameters of a minimal representation of the system rather than those of a predictor of the system, leads to a better conditioned identification problem. As in the white noise [9], the properties established for the identification algorithm should be of interest in other indirect control schemes.

The proof presented here heavily draws on results of [5][2][3] and will only be sketched. The general development follows very closely the one introduced in [3].

## II. PROBLEM STATEMENT.

We use the basic setup of [1].

Consider a SISO linear time-invariant system having a representation of the form:

$$A(q^{-1}) y_t = q^{-k} B(q^{-1}) u_t + C(q^{-1}) w_t \quad (1)$$

where  $\{y_t\}$ ,  $\{u_t\}$  and  $\{w_t\}$  denote the output, input and disturbance sequences, respectively.  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$  and  $C(q^{-1})$  are polynomials in the delay operator  $q^{-1}$ . The leading coefficient  $b_0$  of  $B(q^{-1})$  is assumed to be different from

zero,  $k$  is thus the exact time delay. The scalar sequence  $\{w_t\}$  is a real stochastic process defined in a probability space  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  on which we denote by:  $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N}\}$  the sequence of increasing sigma-algebras generated by the observations made on the system. The sequence  $\{w_t\}$  is assumed to be white gaussian noise, thus, w.p.1.:

$$E(w_t / \mathcal{F}_{t-1}) = 0 \quad (2)$$

$$E(w_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma^2 \quad (3)$$

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N w_t^2 = \sigma^2 \quad (4)$$

We make the following assumptions:

- A1)  $k$  is known
- A2) upperbounds  $n, m$  and  $\lambda$  of the degrees of  $A, B$  and  $C$  are known.
- A3)  $C(q)$  and  $B(q)$  are stable polynomials.

As in [1], [2] we shall require a further assumption on the noise polynomial  $C$ , below.

The problem is to determine a control sequence  $\{u_t\}$  which stabilizes the system and causes the output to track a given -uniformly bounded- reference sequence  $\{y_t^*\}$  with (possibly) minimal mean square tracking error.

### III. A k-STEP AHEAD PREDICTOR.

Representation (1) of the system can be rewritten [6]:

$$C(q^{-1})(y_t - F(q^{-1})w_t) = q^{-k}\{G(q^{-1})y_t + B(q^{-1})F(q^{-1})u_t\}$$

where:  $C(q^{-1}) = A(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-k} G(q^{-1})$

Then:  $y_{t/t-k} = y_t - F(q^{-1})w_t$  is the optimal linear prediction of  $y_t$ .

One easily verifies that another possible representation is:

$$y_t - F(q^{-1})w_t = q^{-k}\{\tilde{G}_t(q^{-1})y_t + B(q^{-1})\tilde{F}(q^{-1})u_t + D(q^{-1})w_t\} \quad (5)$$

$$\text{where: } 1 = A(q^{-1})\tilde{F}(q^{-1}) + q^{-k}\tilde{G}(q^{-1}) \quad (6)$$

$$\text{and: } D(q^{-1}) = G(q^{-1})\tilde{F}(q^{-1}) - \tilde{G}(q^{-1})F(q^{-1})$$

Moreover, one has:

$$C(q^{-1})\tilde{F}(q^{-1}) = F(q^{-1}) + q^{-k}D(q^{-1}) \quad (7)$$

A simple way to obtain (5) is thus to perform (6) and use (7).

#### IV. THE ADAPTATION ALGORITHM.

We shall consider the following indirect adaptive control scheme. We identify, recursively in time, the parameters of the system (1). Using representation (5) of the predictor we compute an estimate of the predicted output. The control input is then obtained by equating this estimate with its desired value.

##### • The identification algorithm

We use a stochastic approximation variant of the RML1 [8]:

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \frac{a}{r_{t-1}} \phi_{t-1} e_t ; \quad a > 0 \quad (8)$$

$$r_t = r_{t-1} + \phi_t^T \phi_t ; \quad r_0 = 1 \quad (9)$$

$$e_t = y_t - \phi_{t-1}^T \theta_{t-1} \quad (10)$$

$$\phi_{t-1}^T = [y_{t-1}, \dots, y_{t-n}, u_{t-k}, \dots, u_{t-k-m}, e_{t-1}, \dots, e_{t-l}] \quad (11)$$

Notice that the prediction error appears in the regression vector  $\phi_t$ .

Now let:

$$\theta_0^T = [-a_1, \dots, -a_n, b_0, \dots, b_m, c_1, \dots, c_l] \quad (12)$$

$$\tilde{\theta}_t = \theta_t - \theta_0 \quad (13)$$

$$z_{t-1} = e_t - w_t \quad (14)$$

$$b_t = -\phi_t^T \tilde{\theta}_t \quad (15)$$

then verify, that  $z_t$  is  $F_t$ -measurable and:

$$C(q^{-1}) z_t = b_t \quad (16)$$

Some properties of algorithm (8)-(11) are summarized in the following.

Lemma:

If  $[C(q)-(a/2)]$  is strictly positive real, then w.p.1.:

$$P1/ \|\theta_t\| < M(\omega) \quad \forall t$$

$$P2/ \sum_1^{\infty} \|\theta_t - \theta_{t-1}\|^2 < \infty$$

$$P3/ \sum_1^{\infty} \frac{z_t^2}{r_t} < \infty$$

Proof:

P3/ by adapting the analysis in [2] to the present algorithm. P1/ is a by-product of this analysis. P2/ straight forward by using a conditional Borel-Cantelli lemma [7] or the proof in [3].

• The control calculation

From  $\theta_t$ , we define in an obvious way  $A_t(q^{-1})$ ,  $B_t(q^{-1})$  and  $C_t(q^{-1})$  and solving (6) we obtain  $\hat{G}_t(q^{-1})$ ,  $\hat{F}_t(q^{-1})$  and  $D_t(q^{-1})$ . An estimate of the predicted output is then:

$$y_{t+k/t}(\theta_t) = G_t(q^{-1})y_t + B_t(q^{-1}) \hat{F}_t(q^{-1})u_t + D_t(q^{-1})e_t \quad (17)$$

and the control input  $u_t$  is chosen such that:

$$y_{t+k/t}(\theta_t) = y_{t+k}^* \quad (18)$$



V. STABILITY ANALYSIS.

Theorem: Let assumptions A1)-A3) hold, use an identification algorithm satisfying P1)-P3) and the control defined by (17) and (18). Then, w.p.1.:

$$S1/ \sup_N \frac{1}{N} \sum_1^N y_t^2 < \infty$$

$$S2/ \sup_N \frac{1}{N} \sum_1^N u_t^2 < \infty$$

$$S3/ \lim_N \frac{1}{N} \sum_1^N E((y_{t+k} - y_{t+k}^*)^2 / F_t) = \gamma^2$$

where:  $\gamma^2 = \sigma^2(1 + f_1^2 + \dots + f_{k-1}^2)$  is the minimum possible mean-square tracking error achievable with any causal linear feedback.

Proof: The proof follows closely the steps introduced in [3]. For simplicity, we take  $k=2$ . Due to lack of space, we sketch the proof and insist only upon the difficulties.

From A3/ and (4), it follows [2], [1] that:

$$\frac{1}{N} \sum_1^N u_t^2 \leq \frac{K_1}{N} \sum_1^N y_{t+2}^2 + K_2 \quad N > N_1 \quad \text{a.s.}$$

Besides (14) and (4) imply:

$$\frac{1}{N} \sum_1^N e_t^2 \leq \frac{K_3}{N} \sum_1^N z_{t-1}^2 + K_4 \quad N > N_2 \quad \text{a.s.}$$

thus (9):

$$\frac{r_N}{N} \leq \frac{K_5}{N} \sum_1^N y_{t+1}^2 + \frac{K'_5}{N} \sum_1^N z_{t-1}^2 + K_6 \quad N > N_3 \quad \text{a.s.} \quad (19)$$

Now (6) (7) (18) and a careful analysis of the computation of the prediction (17) leads to:

$$y_{t+1} = y_{t+1}^* + w_{t+1} - (a_1 - c_1)w_t + \Delta_{t-1} \quad (20)$$

where:

$$\Delta_{t-1} = z_t - (a_{1,t-1} - c_{1,t-1})z_{t-1} + \phi_t^T(\theta_t - \theta_{t-1}) - (\tilde{a}_{1,t-1} - \tilde{c}_{1,t-1})w_t \quad (21)$$

P2/ implies:

$$\forall \epsilon' > 0, \exists N' \ni \|\theta_t - \theta_{t-1}\|^2 < \epsilon' \quad \text{for } t > N' \quad (22)$$

then, using Schwarz inequality, (4), (9), P1/ and (22), we have, from (20):

$$\frac{1}{N} \sum_1^N y_{t+1}^2 \leq \frac{K_7}{N} \sum_1^N z_t^2 + \varepsilon \frac{r_N}{N} + K_8 \quad N > N_4 \quad \text{a.s.} \quad (22')$$

combining this relation with (19) yields, by an adequate choice of  $\varepsilon$ :

$$\frac{r_N}{N} \leq \frac{K_9}{N} \sum_1^N z_t^2 + K_{10} \quad N > N_5 \quad \text{a.s.} \quad (22'')$$

This inequality and P3 imply [1], [2]:

$$\sum_1^{\infty} \frac{z_t^2}{t} < \infty \quad \text{a.s.} \quad (23)$$

and:

$$\sup_N \frac{r_N}{N} < \infty \quad \text{a.s.} \quad (24)$$

Relation (24) implies S1/ and S2/. In order to establish S3/ verify that  $\Delta_{t-1}$  (21) is  $F_{t-1}$ -measurable, so that (20):

$$E\{(y_{t+1} - y_{t+1}^*)^2 / F_{t-1}\} = \Delta_{t-1}^2 + \gamma^2 \quad \text{a.s.}$$

where, for  $k=2$ ,  $\gamma^2 = \sigma^2(1 + (a_1 - c_1)^2)$ .

To obtain S3/, it remains thus to prove that:

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_1^N \Delta_{t-1}^2 = 0 \quad \text{a.s.} \quad (25)$$

This last step is somewhat involved, we only outline it to the point where the proof presented in ([3], Appendix II) can be easily transposed. The important point is to notice that (16) yields:

$$\sum_1^N \frac{(\phi_t^T \tilde{\theta}_t)^2}{t} < K_{11} \sum_1^N \frac{z_t^2}{t} + K_{12} \quad \text{a.s.} \quad (26)$$

thus, by (23) and P2/:

$$\sum_1^{\infty} \frac{(\phi_{t+1}^T \tilde{\theta}_t)^2}{t+1} < \infty \quad \text{a.s.} \quad (27)$$

Apply Schwarz inequality to (21), then by Kronecker lemma, (4), (23), (26), (27):

$$\frac{1}{N} \sum_1^N \Delta_{t-1}^2 \leq \frac{K_{13}}{N} \sum_1^N z_t^2 + \frac{K_{14}}{N} \sum_1^N (\tilde{a}_{1,t-1} - \tilde{c}_{1,t-1})^2 w_t^2 \quad \text{a.s.} \quad (28)$$

the first term on the right goes to zero by (23) and Kronecker lemma. The difficulty appears in the second term, however, due to (27) the proof of ([3], Appendix II) can be transposed to this last term, to finally yield (25) and S3/. This completes the proof of the theorem.

#### IV. CONCLUSION.

It has been shown that, irrespective of the number  $k$  of delays, a single adaptation mechanism permits to obtain globally convergent indirect adaptive control algorithms. The proposed technique readily applies to prediction problems and other indirect control schemes.

#### REFERENCES

- [1] G.C. GOODWIN, K.W. SIN, and K.K. SALUJA: "*Stochastic adaptive control and prediction - the general delay-coloured noise case*", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-25, pp. 946-950, Oct. 1980.
- [2] G.C. GOODWIN, P.J. RAMADGE, and P.E. CAINES: "*Discrete time stochastic adaptive control*", SIAM J. Contr. Optimiz., 1980, to be published.
- [3] J.-J.J. FUCHS: "*Indirect stochastic adaptive control: the general delay-white noise case*", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, to appear Aug. 81.
- [4] K.W. SIN, G.C. GOODWIN and R.R. BITMEAD: "*An adaptive  $d$ -step ahead predictor based on least squares*", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-25, pp. 1161-1165, Dec. 1980.
- [5] V. SOLO: "*The convergence of AML*", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-24, pp. 958-962, Dec. 1979.
- [6] K.J. ÅSTROM: "*Introduction to stochastic control theory*", New York, Academic, 1970.
- [7] L.H.Y. CHEN: "*A short note on the conditional Borel-Cantelli Lemma*", The Annals of Proba., vol.6, n°4, pp. 699-700, 1978.
- [8] T. SODERSTRÖM, L. LJUNG and I. GUSTAVSSON: "*A comparative study of recursive identification methods*", Div. Automat. Contr., Lund Inst. of Tech., Rep. 7427, 1974.
- [9] J.-J.J. FUCHS: "*Explicit self-tuning methods*", IEE Proc., vol. 127, Pt. D, pp. 259-264, Nov. 1980.
- [10] J. NEVEU: "*Discrete Parameter Martingales*", New York, North Holland, 1975.

8.2. Détails des démonstrations.

a) Obtention de l'équation (16)

Posons :

$$\theta_t^T = [-a_{1t} \dots \dots \dots b_{mt} \quad C_{1t} \dots \dots \dots C_{\ell t}]$$

$$\bar{\theta}_t^T = [-a_{1t} \dots \dots \dots b_{mt}]$$

$$\bar{\phi}_t^T = [y_t \dots \dots \dots u_{t-m+1}]$$

$$\bar{C}(q^{-1}) = C_1 + C_2 q^{-1} + \dots + C_\ell q^{-\ell+1}$$

En utilisant alors (10), on a :

$$e_{t+1} = y_{t+1} - \phi_t^T \theta_t$$

$$e_{t+1} + c_{1t} e_t + \dots + c_{\ell t} e_{t-\ell+1} = y_{t+1} - \bar{\phi}_t^T \bar{\theta}_t$$

où :

$$C_t(q^{-1})e_{t+1} = y_{t+1} - \bar{\phi}_t^T \bar{\theta}_t$$

$$e_{t+1} = y_{t+1} - \bar{\phi}_t^T \bar{\theta}_t - \bar{C}_t(q^{-1})e_t$$

et le modèle (1) du système s'écrit :

$$C(q^{-1})w_{t+1} = y_{t+1} - \bar{\phi}_t^T \bar{\theta}_0$$

et en combinant ces relations, on obtient :

$$\begin{aligned} C(q^{-1})(e_{t+1} - w_{t+1}) &= -(\bar{\phi}_t^T \bar{\theta}_t - \bar{\phi}_t^T \bar{\theta}_0 + \bar{C}_t(q^{-1})e_t - \bar{C}(q^{-1})e_t) \\ &= -\phi_t^T (\theta_t - \theta_0) \end{aligned}$$

b) Démonstration des propriétés P1, P2 et P3.

Nous commençons par démontrer P3.

$$(8) (13) : \quad \tilde{\theta}_{t+1} = \tilde{\theta}_t + \frac{a}{r_t} \phi_t e_{t+1}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\theta}_{t+1}^T \tilde{\theta}_{t+1} = \tilde{\theta}_t^T \tilde{\theta}_t + \frac{2a}{r_t} (\phi_t^T \tilde{\theta}_t) e_{t+1} + a^2 \frac{\phi_t^T \phi_t}{r_t^2} e_{t+1}^2$$

$$(14) (15) : \quad = \tilde{\theta}_t^T \tilde{\theta}_t - \frac{2a}{r_t} b_t z_t - \frac{2a}{r_t} b_t w_{t+1} \\ + a^2 \frac{\phi_t^T \phi_t}{r_t} \cdot \frac{1}{r_t} \{z_t^2 + 2 z_t w_{t+1} + w_{t+1}^2\}$$

soit en prenant les espérances conditionnelles et en utilisant (2) (3) et le fait que (9) :

$$\frac{\phi_t^T \phi_t}{r_t} \leq 1$$

$$E(\tilde{\theta}_{t+1}^T \tilde{\theta}_{t+1} / F_t) \leq \tilde{\theta}_t^T \tilde{\theta}_t - \frac{2a}{r_t} b_t z_t + \frac{a^2}{r_t} z_t^2 + a^2 \frac{\phi_t^T \phi_t}{r_t^2} \sigma^2 \\ \leq \tilde{\theta}_t^T \tilde{\theta}_t - \frac{2a}{r_t} (b_t - \frac{a+\epsilon}{2} z_t) z_t - a\epsilon \frac{z_t^2}{r_t} + a^2 \frac{\phi_t^T \phi_t}{r_t^2} \sigma^2$$

En notant que (16) :

$$b_t - \frac{a+\epsilon}{2} z_t = \{C(q^{-1}) - \frac{a+\epsilon}{2}\} z_t$$

L'hypothèse  $\{C(q^{-1}) - \frac{a}{2}\}$  strictement positif réel implique :  $\exists \epsilon > 0$  et  $K > 0$  tels que :

$$S_t \triangleq 2a \sum_{j=1}^t (b_j - \frac{a+\epsilon}{2} z_j) z_j + K > 0 \quad \forall t$$

en posant alors :

$$Z(t) = \tilde{\theta}_t^T \tilde{\theta}_t + \frac{S_{t-1}}{r_{t-1}} \quad (> 0 \quad \forall t)$$

on a :

$$E(Z_{t+1}/F_t) \leq Z_t - a \varepsilon \frac{z_t^2}{r_t} + a^2 \frac{\phi_t^T \phi_t}{r_t^2} \sigma^2$$

et comme (9) :

$$a^2 \sigma^2 \sum_1^{\infty} \frac{\phi_t^T \phi_t}{r_t^2} < \infty$$

il est facile [10] de transformer l'inégalité précédente pour y faire apparaître une surmartingale positive et d'en déduire que  $Z_t$  converge vers une variable aléatoire presque sûrement finie, et que les propriétés  $P1$  et  $P3$  sont donc vérifiées.  $P2$  s'obtient alors sans difficulté en utilisant, par exemple, une forme particulière du lemme de Borel-Cantelli [7].

c) Obtention des relations (20) (21).

Nous nous plaçons dans le cas d'un retard  $k=2$ . La prédiction  $y_{t|t-1}(\theta_{t-1})$  de la sortie  $y_t$  à l'instant  $t-1$  s'écrit :

$$y_{t|t-1}(\theta_{t-1}) \triangleq \phi_{t-1}^T \theta_{t-1}$$

$$\begin{aligned} (10) \quad (14) \Rightarrow y_t - y_{t|t-1}(\theta_{t-1}) &= e_t \\ &= z_{t-1} + w_t \end{aligned}$$

Comme :

$$y_{t+1} = -a_1 y_t - a_2 y_{t-1} \dots + w_{t+1} + c_1 w_t + \dots$$

il semble naturel de définir  $y_{t+1|t-1}(\theta_{t-1})$  la prédiction de  $y_{t+1}$  à l'instant  $t-1$  par :

$$\begin{aligned}
 y_{t+1|t-1}(\theta_{t-1}) &= -a_{1,t-1} y_{t|t-1}(\theta_{t-1}) - a_{2,t-1} y_{t-1} \dots \\
 &\quad + 0 + c_{1,t-1} 0 + \dots \\
 &= -a_{1,t-1}(y_t - e_t) - a_{2,t-1} y_{t-1} \dots \\
 &\quad + 0 + (c_{1,t-1} e_t - c_{1,t-1} e_t) + \dots \\
 &= \phi_t^\top \theta_{t-1} + (a_{1,t-1} - c_{1,t-1}) e_t
 \end{aligned}$$

or (10) :

$$y_{t+1} = \phi_t^\top \theta_t + e_{t+1}$$

d'où :

$$y_{t+1} - y_{t+1|t-1}(\theta_{t-1}) = \phi_t^\top (\theta_t - \theta_{t-1}) - (a_{1,t-1} - c_{1,t-1}) e_t + e_{t+1}$$

soit (14) :

$$\begin{aligned}
 y_{t+1} - y_{t+1|t-1}(\theta_{t-1}) &= \phi_t^\top (\theta_t - \theta_{t-1}) - (a_{1,t-1} - c_{1,t-1}) (z_{t-1} + w_t) \\
 &\quad + z_t + w_{t+1} - (a_{1,t-1} - c_{1,t-1}) (w_t - w_{t-1})
 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (21) en tenant compte de (18). On vérifie, par ailleurs, que pour  $k=2$ , la prédiction  $y_{t+1|t-1}(\theta_{t-1})$  ainsi obtenue n'est autre que celle donnée par (17) et que le polynôme  $F(q^{-1})$  (5) (7) est égal à :

$$F(q^{-1}) = 1 + (c_1 - a_1) q^{-1}.$$

d) Obtention de la relation (22') et (22'').

En appliquant l'inégalité de Schwarz à la relation (20), on a en posant :  $f_1 = c_1 - a_1$  :

$$\begin{aligned}
 y_{t+1}^2 &\leq 6 \{ y_{t+1}^{*2} + (w_{t+1} + f_1 w_t)^2 + z_t^2 + f_{1,t-1}^2 z_{t-1}^2 + \phi_t^\top \phi_t \|\theta_t - \theta_{t-1}\|^2 \\
 &\quad + f_{1,t-1}^2 w_t^2 \}.
 \end{aligned}$$

En utilisant alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_1^N y_t^{*2} < K'_1/6 \\ \cdot (4) \Rightarrow & \frac{1}{N} \sum_1^N (w_{t+1} + f_1 w_t)^2 < K'_2/6 \end{aligned}$$

la propriété P1, la relation (22) et la définition (9) ; on obtient :

$$\frac{1}{N} \sum_1^N y_{t+1}^2 \leq K'_1 + K'_2 + \frac{K'_3}{N} \sum_1^N z_t^2 + \frac{K'_4}{N} \sum_1^N z_{t-1}^2 + 6 \varepsilon' \frac{r_N}{N} + K'_5$$

qui est bien de la forme (22') et en choisissant  $\varepsilon' < \frac{1}{6K'_5}$  ( $\varepsilon < \frac{1}{K'_5}$ )

on en déduit (22'') par combinaison avec (19).

e) Démonstration de (S3).

(26), (27) et (28) s'obtiennent sans difficulté par des arguments analogues à ceux utilisés au d) ci-dessus. Il ne reste finalement à établir que les propriétés suivantes :

$$\frac{1}{N} \sum_1^N \tilde{f}_{1t}^2 w_{t+1}^2 \rightarrow 0 \quad \text{p.s.}$$

Posons :  $\Delta'_t = \phi_{t+1}^T \tilde{\theta}_t - \tilde{f}_{1t} w_{t+1}$

et vérifions que  $\Delta'_t$  s'écrit successivement :

$$\begin{aligned} \Delta'_t &= -\tilde{a}_{1t} y_{t+1} - \tilde{a}_{2t} y_t \dots + \tilde{c}_{1t} e_{t+1} + \dots + (\tilde{a}_{1t} - \tilde{c}_{1t}) w_{t+1} \\ &= -\tilde{a}_{1t} (y_{t+1} - w_{t+1}) - \dots + \tilde{c}_{1t} (e_{t+1} - w_{t+1}) \\ &= -\tilde{a}_{1t} \phi_t^T \theta_0 - \dots + \tilde{c}_{1t} z_t \end{aligned}$$

et est donc  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.



On a, par conséquent :

$$E((\phi_{t+1}^T \tilde{\theta}_t)^2 / \mathcal{F}_t) = \Delta_t'^2 + \tilde{f}_{1t}^2 \sigma^2$$

Posons alors :

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= \frac{1}{t+1} \{ (\phi_{t+1}^T \tilde{\theta}_t)^2 - E((\phi_{t+1}^T \tilde{\theta}_t)^2 / \mathcal{F}_t) \} \\ &= \frac{1}{t+1} \{ (\phi_{t+1}^T \tilde{\theta}_t)^2 - \Delta_t'^2 - \tilde{f}_{1t}^2 \sigma^2 \} \end{aligned}$$

par construction :

$$E(X_{t+1} / \mathcal{F}_t) = 0$$

et :  $M_n = \sum_1^n X_t$  est une martingale par rapport à  $\{\mathcal{F}_n\}$ . Nous allons montrer que le processus croissant -noté  $A_n$ - associé à la sous-martingale  $\{M_n^2, \mathcal{F}_n\}$  est p.s. fini et en déduire que la martingale  $M_n$  converge p.s. Nous serons alors prêts du but.

$$A_{n+1} - A_n = E(X_{n+1}^2 / \mathcal{F}_n)$$

or :

$$X_{n+1} = \frac{1}{n+1} \{ \tilde{f}_{1n}^2 (w_{n+1}^2 - \sigma^2) + 2 \Delta_n' \tilde{f}_{1n} w_{n+1} \}$$

et en utilisant les hypothèses faites sur le processus  $\{w_t\}$ , on a :

$$A_{n+1} \leq c_1 \sum_1^{n+1} \frac{1}{t^2} \tilde{f}_{1,t-1}^2 + c_2 \sum_1^{n+1} \frac{1}{t^2} \Delta_{t-1}'^2$$

d'où l'on déduit, grâce à P1, (27) et (4) :

$$P \{A_\infty < \infty\} = 1.$$

La martingale  $\{M_n, \mathcal{F}_n\}$  converge donc presque sûrement, d'où :

$$\sigma^2 \sum_1^\infty \frac{\tilde{f}_{1,t}^2}{t+1} < \infty$$

et à l'aide du lemme de Borel-Cantelli [7] :

$$\sum_1^{\infty} \frac{f_{1t}^2}{t+1} w_{t+1}^2 < \infty$$

et la relation demandée par le lemme de Kronecker.

PARTIE B :

COMMANDE ADAPTATIVE DES SYSTÈMES  
A PHASE NON-MINIMALE

## 1. INTRODUCTION

Nous nous proposons de présenter un résumé des différentes techniques qui ont été suggérées pour commander de manière adaptative un système à non-minimum de phase. La difficulté supplémentaire introduite par cette dernière caractéristique se conçoit en remarquant que, même dans le cas de systèmes parfaitement connus, la loi de contre-réaction permettant de stabiliser de tels systèmes n'est jamais obtenue de manière simple mais nécessite la résolution d'une identité polynomiale ou d'une équation de Riccati algébrique.

Diverses solutions ont été proposées [1]-[12] en utilisant en général une approche indirecte. Dans une telle approche, le schéma de commande adaptative peut être vu comme la combinaison d'un algorithme d'identification du système d'une part, et d'un algorithme de calcul de la loi de contre-réaction d'autre part. Il a été montré [12][11] que, moyennant une hypothèse assez faible mais difficile à éliminer, une telle combinaison était toujours satisfaisante. D'un point de vue pratique le principal problème soulevé par ce type d'approche est le calcul de la loi de contre-réaction qui, devant être fait à chaque pas, doit être à la fois simple et adaptatif. Nous aborderons ces questions dans le troisième chapitre, après avoir brièvement revu dans le deuxième chapitre les différentes stratégies de commande envisageables pour de tels systèmes.

Dans le quatrième chapitre, nous considérons une approche directe et mettons en évidence les difficultés qu'elle soulève. Pour ce type d'approche, peu de solutions ont été proposées à ce jour [4][7][10], sauf dans le cas où l'on suppose avoir une connaissance plus ou moins parfaite de la partie à non-minimum de phase du système. Nous proposons une solution à mi-chemin entre une approche directe et une approche indirecte et présentons quelques résultats de simulation qui semblent indiquer que les performances de cette nouvelle approche sont comparables à celles des autres méthodes proposées à ce jour.

## 2. STRATEGIES DE COMMANDE ENVISAGEABLES

Nous considérons le cas où le système à commander admet un modèle linéaire, invariant, discret à une entrée-une sortie, soit en prenant les notations habituelles :

$$A(z^{-1}) y_t = z^{-1} B(z^{-1}) u_t \quad (1)$$

$$\text{avec : } A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_1 + b_2 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}$$

où nous supposons que les polynômes A et B sont premiers entre eux. Nous nous intéressons au cas où le système est à non-minimum de phase, ce qui signifie que le polynôme  $B(z^{-1})$  n'est pas stable. Les transmittances constituant la contre-réaction ne devront donc pas compenser les zéros instables du système.

### 2.1. Commande par minimisation d'un critère

Il est facile de vérifier que dans une approche du type "minimum de variance" où la loi de commande minimise à chaque instant un critère du type.:

$$J_0 = y_{t+1}^2$$

si théoriquement la sortie est bien nulle, la commande  $u_t$  est générée à partir des sorties  $\{y_t\}$  à l'aide d'une transmittance instable. Ce critère correspond en effet à une contre-réaction qui compense exactement les pôles et les zéros du système et n'est donc pas utilisable.

On peut alors compliquer le critère de différentes manières.

i) en introduisant une pondération scalaire de la commande [10],...

$$J_1 = y_{t+1}^2 + \lambda^2 u_t^2$$

La fonction de transfert en boucle fermée, obtenue en minimisant ce critère, a alors pour dénominateur :

$$D_1(z^{-1}) = \lambda^2 A(z^{-1}) + b_1 B(z^{-1})$$

et l'on constate en faisant varier  $\lambda$  de zéro à l'infini que ce dénominateur passe de  $B(z^{-1})$  à  $A(z^{-1})$ . Si pour certaines valeurs de  $\lambda^2$ , le système rebouclé peut effectivement être stable, l'utilisation d'un tel critère est exclue en commande adaptative puisque cette plage de valeurs admissibles pour  $\lambda$ , même si elle existe, est inconnue a priori.

ii) en introduisant des pondérations plus complexes sur la sortie et la commande [10], [13]

$$J_2 = (P(z^{-1})y_{t+1})^2 + (Q(z^{-1})u_t)^2$$

où :  $P(z^{-1})$  et  $Q(z^{-1})$  sont des polynômes à définir ( $P(0)=1$  ;  $Q(0)=q_0$ ). Le dénominateur de la fonction de transfert du système rebouclé obtenue en minimisant ce critère est de la forme :

$$D_2(z^{-1}) = b_1 P(z^{-1}) B(z^{-1}) + q_0 Q(z^{-1}) A(z^{-1}).$$

Il est clair que pour certaines valeurs des polynômes  $P(z^{-1})$  et  $Q(z^{-1})$  la minimisation du critère  $J_2$  va donc garantir la stabilité du système rebouclé, mais il est important de remarquer que les polynômes  $P$  et  $Q$  qui conviennent, dépendent des polynômes  $A$  et  $B$  du système. Nous retrouverons une équation polynomiale analogue dans l'approche "commande par placement de pôles".

iii) pour le moment nous avons généralisé le critère de commande en lui gardant son caractère de minimisation sur un pas, une autre manière de généraliser ce critère consiste à introduire des minimisation sur plus d'un pas [2], on retrouve alors les techniques de la commande optimale à critère quadratique, dont les résultats sont bien connus et garantissent la stabilité asymptotique du système rebouclé obtenu. Cette technique est certainement la plus robuste mais nécessite la résolution d'une équation de Riccati matricielle.

## 2.2. Commande par placement de pôles. [5], [8], [12]

Une autre technique couramment utilisée pour le calcul d'une loi de commande d'un système à non-minimum de phase consiste à trouver un régulateur qui déplace les pôles mais non les zéros de la fonction de transfert du système de départ. Si alors on désire que le dénominateur de la fonction de transfert du système rebouclé soit égal à un polynôme fixé a priori  $D(z^{-1})$ , une contre-réaction de la forme :

$$u_t = - \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} y_t$$

devra être calculée en résolvant l'identité polynomiale :

$$D(z^{-1}) = A(z^{-1}) Q(z^{-1}) + z^{-1} B(z^{-1}) P(z^{-1})$$

qui, sous certaines conditions sur les degrés des polynômes  $P$  et  $Q$ , admet toujours une solution si les polynômes  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux.

## 2.3. Conclusions.

Il existe d'autres méthodes de synthèse de commande de systèmes à phase non minimale (commande à "temps minimal" par exemple) qui se situent entre les deux méthodes exposées.

On peut remarquer que de toute façon, le calcul n'est jamais simple et que les relations qui permettraient de passer des coefficients du système à commander aux coefficients du régulateur ne sont pas linéaires.

C'est principalement cette dernière remarque qui explique -à notre avis- que des résultats théoriques complets pour la commande adaptative de systèmes à non-minimum de phase soient difficiles à obtenir. Nous ne retenons dans la suite que les stratégies correspondant à la commande optimale à critère quadratique multi-pas et à la commande par placement de pôles.

### 3. COMMANDE ADAPTATIVE INDIRECTE

Cette approche consiste à identifier les paramètres du système et à utiliser, à chaque instant, les paramètres estimés dans le calcul de la commande. L'analyse d'une telle approche peut se faire en étudiant d'abord les propriétés de l'algorithme d'identification des paramètres du système et en utilisant ensuite ces propriétés et celles de la loi de commande utilisée pour étudier la stabilité et la convergence de l'ensemble. Cette méthode est fructueuse pour l'analyse [11] [12], mais il est probable qu'une analyse globale (dans laquelle les deux parties ne seraient pas scindées) mènerait à des résultats de stabilité et de convergence plus forts. Malheureusement cette voie semble difficile d'accès, nous nous contenterons de la voie classique et résumons dans le paragraphe qui suit les propriétés que vérifient, en général, les algorithmes d'identification avant les problèmes soulevés par le calcul de la loi de commande.

#### 3.1. Propriétés de l'algorithme d'identification.

Il s'agit d'identifier un système admettant un modèle de la forme (1) que nous réécrivons :

$$y_t = \phi_{t-1}^T \theta \quad (2)$$

$$\text{avec : } \phi_{t-1}^T = [y_{t-1} \ y_{t-2} \ \dots \ y_{t-n} \ u_{t-1} \ \dots \ u_{t-m}]$$

$$\theta^T = [-a_1 \ -a_2 \ \dots \ -a_n \ b_1 \ \dots \ b_m]$$

la prédiction de la sortie  $y_t$  de ce système s'exprimant de manière linéaire par rapport aux paramètres, les propriétés des algorithmes d'identification sont bien connues. Sans aucune hypothèse sur la suite des vecteurs d'observations  $\{\phi_t\}$ , on montre [14][15][2] qu'ils vérifient notamment les propriétés suivantes, en appelant  $\theta_t$  l'estimée de  $\theta$  à l'instant  $t$  et en posant :  $\tilde{\theta}_t = \theta_t - \theta$



$$P1 : \|\theta_t\| < M \quad \forall t$$

$$P2 : \|\theta_t - \theta_{t-1}\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

$$P3 : |\phi_t^T \tilde{\theta}_t| \leq \alpha_t \|\phi_t\| + \beta_t$$

où  $\alpha_t$  et  $\beta_t \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$

Rappelons que ces propriétés -obtenues sans aucune hypothèse sur la suite des vecteurs d'observations  $\{\phi_t\}$ - sont donc indépendantes de la loi de commande utilisée, ce ne sont -a priori- ni des conditions nécessaires ni des conditions suffisantes pour l'analyse, mais simplement des propriétés "mécaniques" de l'algorithme d'identification qui s'avèrent particulièrement intéressantes. La propriété P1 est utile dans l'analyse de la stabilité globale. La propriété P2 est cruciale dans l'analyse des propriétés de l'algorithme de calcul de la loi de commande. Quant à la propriété P3, c'est la seule qui garantisse que nous avons bien un algorithme d'identification du vecteur de paramètres  $\theta$ .

### 3.2. Calcul de la loi de commande.

Dans l'approche indirecte considérée, on utilise à chaque instant l'estimée  $\theta_t$  des paramètres dans le calcul de la loi de commande. Notons que ce calcul associe à un vecteur de paramètres estimés  $\theta_t$ , un vecteur de paramètres  $d_t$  du régulateur optimal qui définit entièrement ce que nous appelons la loi de commande. Nous avons vu dans le chapitre précédent différentes manières de calculer cette loi -ces paramètres  $d_t$ - et avons constaté que cette opération était toujours compliquée. Il serait donc particulièrement intéressant dans la pratique -de ne pas avoir à faire ce calcul à chaque instant- ou de n'avoir à le faire que de manière approchée. Nous allons maintenant développer ces deux remarques.

a) Non-réactualisation de la loi de commande à chaque instant.

La propriété P2 des algorithmes d'identification est suffisante pour assurer d'un point de vue théorique l'admissibilité d'une réactualisation de la loi de commande tous les  $k$  pas d'échantillonnage, où  $k$  est un entier fixé.

Dans la pratique, il est évident que l'on aura tendance à ne réactualiser la loi de commande -les paramètres du régulateur- que si la variation des paramètres estimés est significative. Cette notion est cependant assez difficile à préciser et à manipuler avec précaution. Rappelons à ce sujet que la variation des racines d'un polynôme peut être sans commune mesure avec la variation de ses paramètres.

b) Calcul approché de la loi de commande.

L'idée de la commande adaptative indirecte est de calculer à chaque instant  $t$ , la loi de commande optimale  $d_t$  associée au vecteur  $\theta_t$  de paramètres estimés du système. Ce calcul étant fastidieux, il s'agit ici de proposer des méthodes approchées-itératives et surtout plus simples de faire ce calcul.

Supposons que l'algorithme d'identification ait la propriété supplémentaire suivante :

$$\theta_t \rightarrow \theta_\infty \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty$$

où  $\theta_\infty$ , un vecteur constant, n'est pas nécessairement égal à  $\theta$ , le vecteur des vrais paramètres. On imagine facilement que dans ce cas une méthode approchée de calcul de la loi de commande qui à  $\theta_t$  associe un vecteur  $\hat{d}_t$  -différent du vecteur  $d_t$  optimal- mais possédant la propriété suivante :

$$\hat{d}_t \rightarrow d_\infty \quad \text{quand} \quad \theta_t \rightarrow \theta_\infty$$

suffise pour garantir une bonne commande. En général, et toujours grâce principalement à la propriété P2, ceci reste vrai même si le vecteur des estimées  $\theta_t$  ne tend pas vers un vecteur constant.

Dans le cas de la minimisation d'un critère de coût quadratique, où le calcul de la loi de commande optimale nécessiterait à chaque instant la résolution d'une équation de Riccati matricielle, il est montré dans [3][2][15], qu'une simple itération de l'équation récurrente de Riccati convient parfaitement.

Dans le cas de la commande par placement de pôles, il s'agit de résoudre à chaque instant une équation polynomiale, ceci est équivalent à la résolution d'un système linéaire. On peut imaginer qu'une méthode itérative (Jacobi, Gauss-Seidel...) de résolution d'une telle équation puisse s'adapter et convenir [5,8,9].

c) Conclusions

Des deux manières proposées pour réduire la complexité du calcul à chaque pas d'échantillonnage, c'est certainement la deuxième (qui peut d'ailleurs être jumelée avec la première) qui semble la plus satisfaisante. Etant donné le caractère adaptif de l'ensemble et principalement de l'algorithme d'identification, le fait d'introduire une partie optimale (le calcul de la loi de commande optimale à chaque instant) semblerait tout à fait injustifié et même, peut-être, pénalisant notamment durant la phase transitoire.

Nous avons jusqu'à présent, passé sous silence, un problème délicat, principalement d'un point de vue théorique, de l'approche indirecte de la commande adaptative. Il semble acceptable de dire de cette approche [2], qu'elle consiste, en fait, à commander le modèle identifié du système et non le système lui-même et sans vouloir mettre en cause le caractère sans doute non optimal d'une telle approche, la question de la commandabilité du modèle identifié est, elle, bien réelle. Rien ne semble en effet garantir que le modèle identifié soit bien commandable ou du moins stabilisable et si un calcul approché de la loi de commande à chaque pas cache la permanence de problème, il est toujours présent. Nous allons maintenant considérer cette question.

### 3.3. La question de la commandabilité du modèle identifié.

La difficulté rencontrée est la suivante, si à un instant le modèle identifié n'est pas commandable ou stabilisable, la loi de commande optimale n'existe pas. Dans le cas d'un calcul approché de la loi de commande, cette difficulté n'apparaît que si le modèle reste non commandable ou stabilisable pendant un certain laps de temps.

Notons que ce problème est directement lié à la loi de commande choisie et donc au type de système que l'on considère : les systèmes à non-minimum de phase. En effet pour des systèmes à minimum de phase, une loi de commande du type "minimum de variance" convient parfaitement, à l'avantage d'exister quel que soit le modèle identifié et, de plus, il est possible de démontrer la stabilité de l'ensemble sans hypothèse supplémentaire, i.e. sans avoir à supposer que le modèle identifié est stabilisable.

Est-il possible d'établir que le modèle identifié est toujours commandable ou stabilisable ? Le cas le plus simple à étudier est de considérer un algorithme d'identification pour lequel la suite des vecteurs estimés converge vers un vecteur constant. Il suffirait alors de montrer que le modèle asymptotique constant possède cette propriété. Malheureusement, rien n'exclut la possibilité de converger vers un point dans l'espace des paramètres en lequel le modèle n'est pas commandable ou stabilisable.

On peut alors imaginer au moins deux solutions plus ou moins pratiques ou réalistes :

- a) s'arranger pour que bien qu'identifiant un système rebouclé, l'on converge vers les "vrais" paramètres du système, [9]. Ceci impose -notamment- des conditions d'excitation sur la commande effectivement appliquée et requiert, par exemple, la superposition à la commande adaptative un signal d'excitation supplémentaire.
- b) agir sur l'algorithme d'identification au niveau du gain et des paramètres estimés pour maintenir la satisfaction de cette propriété. Il est à noter que cette action doit néanmoins garder à l'algorithme les propriétés P1-P3 énoncées plus haut et nécessite donc une certaine circonspection.

Il nous semble qu'une conjonction de ces deux méthodes devrait effectivement permettre une parfaite utilisation de cette approche de la commande adaptative, dans la pratique.

### 3.4. Conclusions.

Les méthodes de commande adaptative indirecte -historiquement les premières à avoir été envisagées- reposent sur un "principe de séparation" (identifier les paramètres du système et utiliser les estimées dans la loi de commande à la place des "vrais" paramètres) qui leur confère une très grande souplesse, notamment au niveau du choix de la stratégie de commande. Moyennant l'hypothèse de commandabilité asymptotique du modèle identifié, on peut en fait justifier ce principe de séparation et montrer [11][12] que la combinaison d'un algorithme d'identification vérifiant les propriétés P1-P3 et d'une stratégie de commande "raisonnable" (stabilisant l'ensemble : modèle identifié + régulateur adaptatif) garantit au schéma global des propriétés de stabilité et de convergence satisfaisantes.

Les stratégies de commande généralement envisagées dans la littérature sont celles considérées au chapitre 2 : commande optimale et placement de pôles, principalement. On trouvera dans [3][2][15] une analyse détaillée de la combinaison d'un algorithme d'identification et d'une stratégie de commande à critère quadratique multi-pas. On y établit qu'une seule itération de l'équation récurrente de Riccati à chaque pas d'échantillonnage suffit pour assurer la stabilité de l'ensemble. C'est un exemple typique de calcul approché de la loi de commande. Les lois de commande du type placement de pôles sont considérées dans [4,5,7,8,9,12,16] notamment.

Répétons que, grâce au principe de séparation, toute stratégie de commande applicable dans le cas d'un système dont les paramètres sont "connus" est immédiatement transposable dans le cadre d'une commande adaptative indirecte, ce qui rend cette approche particulièrement séduisante dans

la pratique, puisqu'elle permet ainsi de prendre en compte directement toutes les différentes variations et modifications des stratégies de commande classique introduites, au fil des expériences, pour adapter celles-ci aux problèmes concrets.

#### 4. COMMANDE ADAPTIVE DIRECTE

Cette approche consiste à identifier non les paramètres du système à commander, mais directement les paramètres du régulateur. Etant donné une stratégie de commande et la connaissance de la structure du système, il est facile d'en déduire la forme de la loi de commande et donc la structure d'un régulateur capable de générer cette commande. L'algorithme d'identification-adaptation peut alors très bien être considéré comme un algorithme d'optimisation-minimisation paramétrique qui tente de résoudre à chaque instant le problème suivant : étant donné le système et l'état actuel des grandeurs physiques, quelles sont les valeurs des paramètres du régulateur adaptatif qui minimisent l'écart entre -par exemple- la sortie du système rebouclé par le régulateur adaptatif et la sortie idéale ? On constate -que, dans cette approche, il faut d'une certaine façon inclure un modèle décrivant le comportement désiré du système global et- qu'à chaque instant on essaie de trouver le régulateur optimal dans la classe considérée. D'un point de vue "philosophique" cette approche nous semble, pour cette dernière raison, préférable à l'approche indirecte.

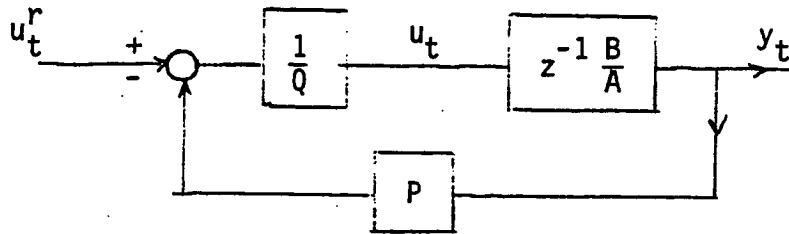
Malheureusement pour le type de systèmes -à non-minimum de phase- que nous considérons, cette approche se heurte à de nombreuses difficultés. Pour la stratégie de commande qui consiste à minimiser un critère quadratique, si la structure du régulateur optimal est bien connue, le modèle qui permettrait de définir le comportement souhaité est inconnu, pour cette raison -et de nombreuses autres- cette stratégie n'est donc pas envisageable en commande adaptative directe. Il ne reste que les stratégies du type "placement de pôles" qui puisse convenir.

##### 4.1. Reparamétrisation du système.

On peut considérer que dans l'approche directe à la commande adaptative, l'idée consiste à reparamétriser le modèle du système en fonction des paramètres du régulateur adaptatif. Nous allons essayer de mettre

en évidence ce point de vue dans le cas d'une commande par placement de pôles.

Soit le schéma suivant :



dont la transmittance est :

$$y_t = \frac{z^{-1} B}{AQ + z^{-1} BP} u_t^r$$

Si nous considérons le cas où la stratégie consiste à obtenir une transmittance globale de la forme :

$$y_t = \frac{z^{-1} B}{D} u_t^r \quad (3)$$

la structure de régulateur proposée convient et le régulateur optimal  $(P^*, Q^*)$  est tel que :

$$A Q^* + z^{-1} B P^* = D \quad (4)$$

On en déduit :

$$(A Q^* + z^{-1} B P^*) y_t = D y_t$$

soit :

$$z^{-1} B(Q^* u_t + P^* y_t) = D y_t \quad (5)$$

Connaissant le régulateur optimal  $(P^*, Q^*)$ , on peut déduire de ces relations le modèle du système, c'est, en ce sens, qu'elles correspondent à une reparamétrisation du système.

Nous avons considéré le cas où la transmittance souhaitée (3) avait le même numérateur que le modèle du système, on peut aisément inclure dans l'analyse, à condition d'envisager une structure de régulateur un peu plus complexe, le cas où l'on souhaiterait obtenir un numérateur



ayant des zéros supplémentaires de la forme  $B(z^{-1}) B'(z^{-1})$ . Divers algorithmes de commande adaptative directe peuvent être construits en partant de ces relations [4,7], notamment si l'on suppose connu le numérateur instable  $B$  du modèle du système, on est alors ramené à une situation identique à celle rencontrée dans la commande de système à minimum de phase.

Dans le cas général, où l'on suppose ce numérateur inconnu, on constate (3) que le modèle de référence n'est pas défini. Nous allons dans la suite considérer -d'une part, le cas d'une régulation adaptative ( $u_t^r = 0, \forall t$ ) où le rôle de la commande est d'annuler la sortie avec une dynamique entièrement définie par le dénominateur  $D(z^{-1})$  et -d'autre part, le cas d'une poursuite adaptative où le rôle de la commande est de faire suivre à la sortie  $y_t$  du système une suite de sorties désirées.

#### 4.2. Régulation adaptative par placement de pôles.

##### 4.2.1. Equation d'évolution de l'écart.

Les entrées  $u_t^r$  étant identiquement nulles, le fait d'ignorer le numérateur du modèle de référence n'est pas gênant et nous allons construire la suite des sorties désirées à l'aide d'un modèle de référence série.

Si le régulateur était optimal, les sorties du système rebouclé vérifieraient :

$$D(z^{-1}) y_{t+1} = 0$$

soit :

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= (1-D) y_{t+1} \\ &= -d_1 y_t - d_2 y_{t-1} \dots \end{aligned}$$

Etant donné les sorties du système jusqu'à l'instant  $t$ , il semble naturel de prendre comme sortie désirée à l'instant  $t+1$  :

$$y_{t+1}^d = -d_1 y_t - d_2 y_{t-1} - \dots$$

Il est parfaitement possible de construire cette quantité à l'instant  $t$ , et l'écart entre la sortie désirée et la sortie mesurée vérifie :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{t+1} &\triangleq y_{t+1}^d - y_{t+1} \\ &= -D y_{t+1}\end{aligned}$$

qui s'écrit aussi, grâce à (4) :

$$\varepsilon_{t+1} = -B(Q^* u_t + P^* y_t) \quad (6)$$

C'est cette dernière relation entre des quantités mesurables  $\{y_t, u_t\}$  et constructibles  $\{\varepsilon_{t+1}\}$  que nous allons utiliser dans la suite pour identifier le régulateur optimal. Elle peut être considérée comme l'équation d'évolution de l'écart  $\varepsilon_{t+1}$ .

#### 4.2.2. Difficultés rencontrées dans le calcul de la loi de commande.

Nous allons principalement envisager deux manières d'utiliser l'équation précédente (6). Rappelons d'abord que la commande  $u_t$  optimale est telle que :

$$P^* y_t + Q^* u_t = 0$$

et peut donc s'écrire -en notant que  $q_0=1$  (4) :

$$u_t = -\psi_t^T d \quad (7)$$

avec :  $\psi_t^T = [y_t \ y_{t-1} \ \dots \ u_{t-1} \ u_{t-2} \ \dots]$

$$d^T = [P_0 \ P_1 \ \dots \ q_1 \ q_2 \ \dots]$$

Il ne s'agit donc pas d'une commande qui annule identiquement l'écart (6) à chaque instant. L'équation (6) peut maintenant se réécrire d'une part :

$$\varepsilon_{t+1} = -B(z^{-1}) \{\psi_t^T d + u_t\} \quad (8)$$

et d'autre part :

$$\varepsilon_{t+1} = - X_t^T \eta \quad (9)$$

$$\text{avec : } X_t^T = [ y_t \quad y_{t-1} \quad \dots \quad u_t \quad u_{t-1} \quad \dots ]$$

$$\eta^T = [ b_1 p_0 \quad b_1 p_1 + b_2 p_0 \quad \dots \quad b_1 \quad b_1 q_1 + b_2 \quad \dots ]$$

A chacune de ces deux écritures (8), (9), on peut associer, plus ou moins directement, un modèle utilisable dans l'identification de la loi de commande (7).

Si l'on prend la seconde écriture, le modèle qui lui est naturellement associé est un modèle de prédiction :

$$\varepsilon_{t+1/t}(\hat{\eta}) = - X_t^T \hat{\eta}$$

linéaire en  $\hat{\eta}$  et l'on sait que l'algorithme d'identification (de minimisation de l'erreur de prédiction) de  $\eta$  aura de bonnes propriétés. Le calcul de la commande (7) faisant intervenir le vecteur des paramètres d du régulateur, il s'agit d'associer, à chaque instant, à une estimée  $\hat{\eta}$  de  $\eta$  une estimée  $\hat{d}$  de  $d$ . Comme nous le verrons dans le paragraphe qui suit ce calcul -l'élaboration de la loi de commande- nécessite la factorisation de deux polynômes et n'a pas de solution, en général. La deuxième écriture (9) n'est donc pas d'un emploi très commode.

Considérons maintenant la première écriture (8). On note qu'à cause de la présence du polynôme inconnu  $B$ , ce modèle n'est pas linéaire en  $d$ , le vecteur des paramètres à identifier. Il n'est donc pas utilisable dans les algorithmes d'identification courants, sauf si la fonction de transfert ( $\frac{1}{B} - \frac{1}{Z}$ ) était strictement positive réelle [17][18], car dans ce cas on pourrait en quelque sorte oublier sa présence<sup>(+)</sup>. Mais ce n'est certainement pas le cas puisque nous considérons des systèmes à non-minimum de phase.

Dans le paragraphe qui suit, nous allons examiner plus en détail -sur un exemple simple- les difficultés que nous venons de signaler.

---

(+) Dans un contexte de commande adaptative, cette propriété est à manipuler avec précaution.

### 4.2.3. Un exemple simple.

Soit un système admettant le modèle suivant :

$$y_{t+1} + a_1 y_t + a_2 y_{t-1} = b_1 u_t + b_2 u_{t-1}$$

L'équation polynomiale (4) définissant le régulateur optimal s'écrit, en posant :

$$D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}$$

$$D = z^{-1} B P^* + A Q^*$$

et la commande de placement de pôles (7) vérifie :

$$u_t = - d^T \psi_t$$

$$d^T = [p_0 \quad p_1 \quad q_1]$$

$$\psi_t^T = [y_t \quad y_{t-1} \quad u_{t-1}]$$

Rappelons qu'il nous faut définir un moyen de calculer une estimée  $\hat{d}$  du vecteur  $d$  définissant le régulateur, ce calcul devra être fait à chaque instant  $t$  et nous notons  $d_t$  l'estimée  $\hat{d}$  de  $d$  à l'instant  $t$ . Nous avons vu comment il était possible de construire à l'instant  $t+1$ , une grandeur  $\varepsilon_{t+1}$ , l'écart entre la sortie désirée et la sortie du système rebouclé, dépendant des paramètres  $d$  du régulateur optimal. L'équation d'évolution de l'écart peut notamment s'écrire des deux manières suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t+1} &= - B(z^{-1}) \{ \psi_t^T d + u_t \} \\ &= - b_1 (\psi_t^T d + u_t) - b_2 (\psi_{t-1}^T d + u_{t-1}) \end{aligned} \quad (10)$$

et :

$$\varepsilon_{t+1} = - X_t^T \eta \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } X_t^T &= [y_t \quad y_{t-1} \quad y_{t-2} \quad u_t \quad u_{t-1} \quad u_{t-2}] \\ \eta^T &= [b_1 p_0 \quad b_1 p_1 + b_2 p_0 \quad b_2 p_1 \quad b_1 \quad b_1 q_1 + b_2 \quad b_2 q_1] \end{aligned}$$

S'il est facile en utilisant le modèle linéaire (11) d'obtenir une suite d'estimée  $\eta_t$  de  $\eta$ , rien ne garantit que  $\eta_t$  puisse se mettre à chaque instant, ou du moins asymptotiquement, sous la forme :

$$\eta_t = b_{1t} \begin{bmatrix} p_{0t} \\ p_{1t} \\ 0 \\ 1 \\ q_{1t} \\ 0 \end{bmatrix} + b_{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ p_{0t} \\ p_{1t} \\ 0 \\ 1 \\ q_{1t} \end{bmatrix}$$

par exemple, qui permettrait d'en déduire, de manière cohérente pour l'analyse de la stabilité, un régulateur adaptatif  $d_t$ . Sur cet exemple simple, il est facile d'obtenir les conditions d'existence d'une telle solution en fonction des composantes du vecteur  $\eta_t$ . (Il s'agit d'un système de 6 équations non-linéaires à 5 inconnues, et la condition d'existence d'une solution consiste à écrire que deux polynômes ont une racine commune). On peut alors avoir l'idée de chercher un algorithme d'identification de  $\eta$  qui garantisse qu'à chaque instant ces conditions soient vérifiées. Cela paraît cependant difficile même sur cet exemple simple.

Revenons maintenant à la première écriture (10) dans laquelle le vecteur  $d$  apparaît isolé mais de manière non-linéaire. Nous allons nous attarder sur ce modèle et, en procédant par étapes, en déduire peu à peu un algorithme de régulation (par placement de pôles) adaptative.

i) Supposons que nous ayons trouvé une manière d'obtenir à chaque instant une estimée  $d_t$  de  $d$ , la commande appliquée sera alors :

$$u_t = -d_t^T \psi_t \quad (12)$$

et en posant :  $\tilde{d}_t = d_t - d$ , la relation (10) s'écrit aussi :

$$\varepsilon_{t+1} = b_1 \psi_t^T \tilde{d}_t + b_2 \psi_{t-1}^T \tilde{d}_{t-1}$$

L'écart  $\varepsilon_{t+1}$  apparaît maintenant comme une combinaison linéaire inconnue des erreurs entre la commande appliquée (12) et la commande optimale (7).

ii) Supposons maintenant que les paramètres  $b_1$  et  $b_2$  sont connus. Diverses approches sont alors possibles pour l'identification de  $d$ , mais  $B(z^{-1})$  étant un polynôme "instable", nous déconseillons l'approche qui consiste à filtrer l'écart par  $\frac{1}{B}$  pour obtenir :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{t+1} &= \frac{1}{B} \varepsilon_{t+1} \\ &= \psi_t^T \tilde{d}_t\end{aligned}$$

et à utiliser l'écart filtré  $\bar{\varepsilon}_{t+1}$  dans un algorithme d'identification. Nous procédons plutôt de la façon suivante. La prédiction  $\varepsilon_{t+1/t}$  de l'écart  $\varepsilon_{t+1}$  à l'instant  $t$ , étant :

$$\varepsilon_{t+1/t} = b_1 \cdot 0 + b_2 \psi_{t-1}^T (d_{t-1} - d_t) \quad (13)$$

L'erreur de prédiction  $\Delta_{t+1}$  est égale à :

$$\begin{aligned}\Delta_{t+1} &\triangleq \varepsilon_{t+1} - \varepsilon_{t+1/t} \\ &= (b_1 \psi_t + b_2 \psi_{t-1})^T \tilde{d}_t\end{aligned}$$

qui s'écrit aussi, en posant :

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_t &= b_1 \psi_t + b_2 \psi_{t-1} \\ \Delta_{t+1} &= \bar{\psi}_t^T \tilde{d}_t\end{aligned} \quad (14)$$

et l'utilisation de  $\Delta_{t+1}$  nous semble préférable -pour des raisons de stabilité- à celle de  $\bar{\varepsilon}_{t+1}$  dans un algorithme d'identification.

iii) Les paramètres  $b_1$  et  $b_2$  étant inconnus, refaisons le raisonnement précédent en supposant avoir des estimées  $b_{1t}$  et  $b_{2t}$ . La prédiction  $\varepsilon_{t+1/t}$  de l'écart  $\varepsilon_{t+1}$  est égale à (13) :

$$\varepsilon_{t+1/t} = b_{1t} \cdot 0 + b_{2t} \psi_{t-1}^T (d_{t-1} - d_t) \quad (15)$$

et l'erreur de prédiction  $\Delta_{t+1}$  devient :

$$\Delta_{t+1} = \bar{\psi}_t^T \tilde{d}_t + \psi_{t-1}^T (d_t - d_{t-1}) \tilde{b}_{2t} \quad (16)$$

Ce développement appelle deux remarques :

- Il paraît difficile dans cette approche d'identifier  $b_1$ . Ceci ne semble pas très grave si on fait l'hypothèse de connaître le signe et un majorant de ce paramètre.
- $\Delta_{t+1}$ , qui est une grandeur parfaitement constructible, est bien linéaire par rapport aux paramètres à identifier  $d$  et  $b_2$ , malheureusement  $\bar{\psi}_t$  (14), qui apparaît dans le gradient de  $\Delta_{t+1}^2$  par rapport à  $d$ , n'est pas connu exactement.

iv) Ces remarques et celles faites en ii) nous amènent à proposer un algorithme du type :

$$\begin{bmatrix} d_{t+1} \\ b_{2,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_t \\ b_{2t} \end{bmatrix} - \gamma_t \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_t \\ \psi_{t-1}^T (d_t - d_{t-1}) \end{bmatrix} \Delta_{t+1}$$

avec, par exemple, un gain  $\gamma_t$  scalaire de la forme :

$$\gamma_t = \gamma \{ \tilde{\psi}_t^T \tilde{\psi}_t + (\psi_{t-1}^T (d_t - d_{t-1}))^2 \}^{-1}$$

et : 
$$\tilde{\psi}_t = \hat{b}_1 \psi_t + b_{2t} \psi_{t-1}$$

où :  $\hat{b}_1$  est une estimée a priori de  $b_1$ .

Sur des simulations de tels systèmes, on constate effectivement que cet algorithme associé à la commande (12) convient, mais l'identification de  $b_2$  se fait mal et l'on note qu'il est préférable d'introduire un algorithme d'identification du système et d'utiliser les estimées de  $B$  ainsi obtenues dans l'identification des paramètres du régulateur  $d$  définie ci-dessus.

Nous allons, dans le paragraphe qui suit, préciser pour un système général le schéma de régulation adaptative par placement de pôles auxquels nous aboutissons finalement.

#### 4.2.4. Le schéma proposé

Etant donné un système admettant un modèle de la forme (1) :

$$A(z^{-1}) y_t = z^{-1} B(z^{-1}) u_t$$

que nous réécrivons :

$$y_t = \phi_{t-1}^T \theta,$$

nous proposons un schéma qui consiste :

- d'une part, en un algorithme d'identification des paramètres  $\theta$  du système, soit, par exemple :

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \frac{\phi_{t-1}}{\phi_{t-1}^T \phi_{t-1}} (y_t - \phi_{t-1}^T \theta_{t-1}) \quad (16)$$

- d'autre part, en un algorithme d'identification des paramètres  $d$  du régulateur. Celui-ci utilise comme mesure l'écart  $\varepsilon_{t+1}$  entre la sortie désirée et la sortie mesurée.

La sortie désirée  $y_{t+1}^d$  est obtenue à l'aide d'un modèle série :

$$y_{t+1}^d = (1 - D(z^{-1})) y_{t+1} \quad (17)$$

où le polynôme  $D(z^{-1})$  définit la dynamique (les pôles) de retour à zéro souhaitée. L'écart  $\varepsilon_{t+1}$  :

$$\varepsilon_{t+1} \triangleq y_{t+1}^d - y_{t+1}$$

admet alors comme équation d'évolution (10) :

$$\varepsilon_{t+1} = B(z^{-1}) \{ \psi_t^T \tilde{d}_t \}$$

où nous avons tenu compte de la commande appliquée (12) :

$$u_t = - \psi_t^T d_t$$

La prédiction de l'écart  $\varepsilon_{t+1/t}$  s'écrit en utilisant les paramètres estimés  $b_{it}$  du numérateur du système (15) :

$$\varepsilon_{t+1/t} = b_{2t} \psi_{t-1}^T (d_{t-1} - d_t) + b_{3t} \psi_{t-1}^T (d_{t-2} - d_t) + \dots \quad (18)$$



et l'algorithme d'identification du régulateur est alors, par exemple de la forme :

$$d_{t+1} = d_t - \frac{\tilde{\psi}_t}{\tilde{\psi}_t^T \tilde{\psi}_t} (\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_{t+1/t}) \quad (19)$$

avec :  $\tilde{\psi}_t = b_{1t} \psi_t + b_{2t} \psi_{t-1} + \dots$

On note, expérimentalement, que la prise en compte de la prédiction  $\varepsilon_{t+1/t}$  de l'écart  $\varepsilon_{t+1}$  joue qualitativement un rôle important. on peut, bien sûr, considérer de nombreuses variantes du schéma ainsi obtenu et notamment décider de ne pas identifier le paramètre  $b_1$  du numérateur du système, par exemple.

L'approche proposée peut, d'une certaine manière être considérée comme une approche indirecte dans laquelle le calcul de la loi de commande -du type placement de pôles- est réalisé à l'aide d'un algorithme d'identification (19) qui remplace un algorithme de résolution de l'équation polynomiale (4). Cette approche -rendue possible par l'introduction du modèle de référence-série (7) générant la suite des sorties désirées- nous semble présenter les avantages suivants :

- i) un temps de calcul moindre
- ii) la disparition de l'hypothèse de commandabilité asymptotique du modèle identifié
- iii) un caractère plus adaptatif dans la mesure où l'identification du régulateur fait intervenir des signaux physiques mesurés sur le système.

Précisons cependant que, pour le moment, ce développement ne repose sur aucune analyse théorique et que des propriétés de stabilité et de convergence semblent difficiles à établir.

Nous proposons dans le paragraphe qui suit une extension naturelle de cette approche au problème de la poursuite adaptative avant de présenter quelques résultats expérimentaux.

### 4.3. Poursuite adaptative

Dans un souci de simplicité, nous considérons toujours le cas où la transmittance globale souhaitée est de la forme (3) :

$$y_t = \frac{z^{-1} B}{D} u_t^r \quad (3)$$

ayant donc le même numérateur que le modèle du système. Comme nous l'avons vu, dans une approche directe, il s'agit toujours d'être capable de définir le comportement souhaité du système et donc de générer une suite de sorties désirées; l'algorithme de commande étant alors en quelque sorte un algorithme de minimisation paramétrique de l'écart  $\varepsilon_{t+1}$  entre la sortie désirée  $y_{t+1}^d$  et la sortie effectivement observée  $y_{t+1}$ .

En plus des difficultés signalées au paragraphe 4.2.2 dans le cas de la régulation adaptative, nous nous heurtons maintenant au problème soulevé par le fait que le numérateur du modèle de référence (3) est inconnu. Il semble alors naturel de songer à un modèle série-parallèle, variable dans le temps, de la forme :

$$y_{t+1}^d = (1-D) y_{t+1} + B_t u_t^r \quad (20)$$

où  $B_t$  est l'estimée du numérateur  $B$  du système à l'instant  $t$ , obtenue par l'algorithme d'identification (16). Malheureusement rien ne garantit que la suite  $\{y_{t+1}^d\}$  ainsi générée représente bien le comportement souhaité notamment durant la période transitoire pendant laquelle  $B_t$  n'est pas nécessairement très significatif. Différentes solutions sont alors envisageables : filtrage de l'écart  $\varepsilon_{t+1}$ , introduction de zéros supplémentaires invariants au numérateur du modèle de référence... Nous n'allons pas considérer ces différentes variantes dans la suite, mais simplement introduire dans le modèle (20) un gain scalaire  $g_t$  variable :

$$y_{t+1}^d = (1-D) y_{t+1} + g_t B_t u_t^r \quad (21)$$

assurant un gain statique  $g$  constant à la transmittance :

$$g_t \frac{z^{-1} B_t}{D}$$

Le gain variable  $g_t$  sera donc donné à chaque instant par la relation :

$$g_t = g \frac{1+d_1+\dots}{b_{1t}+b_{2t}+\dots} \quad (22)$$

Le calcul de  $g_t$  est donc particulièrement simple.

La sortie désirée étant ainsi définie (21), l'équation d'évolution de l'écart s'écrit, avec les notations des paragraphes précédents :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t+1} &\stackrel{\Delta}{=} y_{t+1}^d - y_{t+1} \\ &= -D y_{t+1} + g_t B_t u_t^r \\ &= -B \{P^* y_t + Q^* u_t - g_t u_t^r\} + g_t (B_t - B) u_t^r \\ &= -B \{\psi_t^T d + u_t - g_t u_t^r\} + g_t (B_t - B) u_t^r \end{aligned}$$

et, à l'instant  $t$ , la commande appliquée sera donc :

$$u_t = -\psi_t^T d_t + g_t u_t^r \quad (23)$$

d'où :

$$\varepsilon_{t+1} = +B\{\psi_t^T \hat{d}_t\} + g_t (B_t - B) u_t^r$$

La prédiction du 2<sup>ème</sup> terme du membre de droite étant nulle, la prédiction  $\varepsilon_{t+1/t}$  de l'écart est toujours donnée par l'équation (18). L'algorithme d'identification des paramètres du régulateur (eqn. 19, par exemple) est lui aussi inchangé.

Le schéma de poursuite adaptative ainsi obtenu consiste donc à faire à chaque itération  $t$  les opérations suivantes :

- i) réactualiser les estimées des paramètres  $\theta$  du système à l'aide de l'algorithme (16) par exemple
- ii) mesurer l'écart  $\varepsilon_t$ , calculer la prédiction de l'écart  $\varepsilon_{t/t-1}$  (18); estimer les nouveaux paramètres du régulateur  $d_t$  (19)
- iii) calculer le gain scalaire  $g_t$  (22) et la commande  $u_t$  (23).

Dans le paragraphe qui suit nous présentons quelques résultats de simulation de cet algorithme de poursuite adaptative.

#### 4.4. Résultats expérimentaux

Les exemples qui suivent ont pour but de permettre de comparer l'algorithme de régulation adaptative (paragraphe 4.2.4) et l'algorithme de poursuite adaptative (paragraphe 4.4) aux algorithmes proposés dans la littérature. Nous reprenons donc des simulations de systèmes déjà introduits par ailleurs, en indiquant à chaque fois les références bibliographiques.

Il est important d'ajouter que les algorithmes d'identification que nous utilisons sont du type "projection" (eqn. 16 et 19) sans aucun réglage ou filtrage supplémentaires et qu'ils correspondent donc à un schéma de commande particulièrement simple et fruste.

##### 4.4.1. Régulation adaptative.

Cet exemple est considéré dans ([2], *fig. 3a,b*)

$$y_{t+1} - 1.2 y_t = .5 u_t + u_{t-1}$$

Il s'agit d'un système instable et à non-minimum de phase. Les conditions initiales sur les paramètres sont toutes nulles sauf  $b_1(0)$  pris égal à 1. Les conditions initiales des signaux sont :  $y_0=1$  et  $u_0=u_{-1}=0$ .

L'évolution de la sortie et de l'entrée du système régulé de manière adaptive est présentée sur la *figure 1*.

##### 4.4.2. Poursuite adaptive 1.

Le système est caractérisé par l'équation :

$$y_{t+1} - 1.5 y_t + .7 y_{t-1} = u_t + 1.1 u_{t-1}$$

et l'on cherche à placer les pôles de manière à avoir une fonction de transfert en boucle fermée :

$$\frac{z^{-1} B}{D} = \frac{0.0583 z^{-1} (1 + 1.1 z^{-1})}{1 - 1.44 z^{-1} + 0.5625 z^{-2}}$$

ayant un gain statique unité ( $g=1$ ).

Cet exemple est pris dans ([4], *fig. 6.12*).

Les estimées initiales des paramètres sont prises égales à zéro, sauf  $\hat{b}_1(0)=1$ . Les conditions initiales des signaux sont :  $y_0=0.5$  et  $y_{-1}=u_0=u_{-1}=0$ . L'entrée de référence  $u_t^r$  change de +1 à -1 tous les 100 pas d'échantillonnage.

Les *figures 2* et *3* donnent l'évolution de la sortie et de la commande, respectivement.

#### 4.4.3. Poursuite adaptative 2.

Cet exemple est tiré de ([8], *fig. 5.1 a,b,c*). Le système suit l'équation d'évolution suivante :

$$y_{t+1} - 2 y_t + 0.99 y_{t-1} = 0.5 u_t + u_{t-1}$$

et l'on souhaite avoir une fonction de transfert en boucle fermée ayant un dénominateur égal à 1 (pôles à l'origine) et un gain statique unité.

Comme dans [8], les estimées initiales des paramètres sont nulles sauf  $\hat{a}_2(0)=0.5$  et  $\hat{b}_1(0)=1$ . L'entrée de référence est égale à +1 pour  $t=1$  à 30 et -1 pour  $t$  supérieur à 30.

Les *figures 4* et *5* donnent l'évolution de la sortie et des paramètres  $d_t$  de la loi de commande.

Sur les trois exemples considérés, les résultats obtenus sont tout à fait comparables à ceux présentés dans les références indiquées. Il semble donc que l'approche développée dans les paragraphes 4.2 et 4.3 ait de bonnes propriétés.

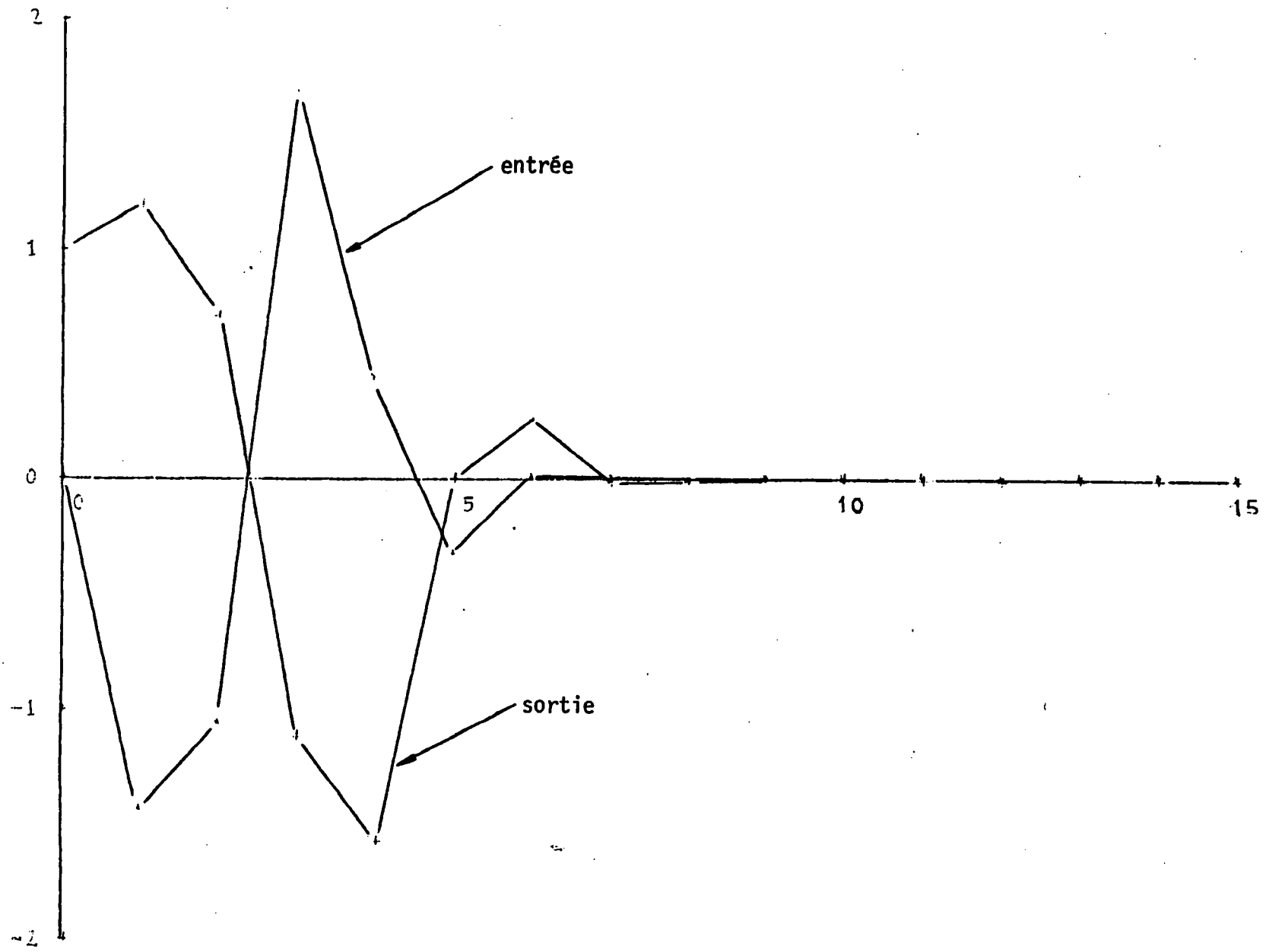


Figure 1 : Entrée et sortie pour l'exemple 4.4.1.

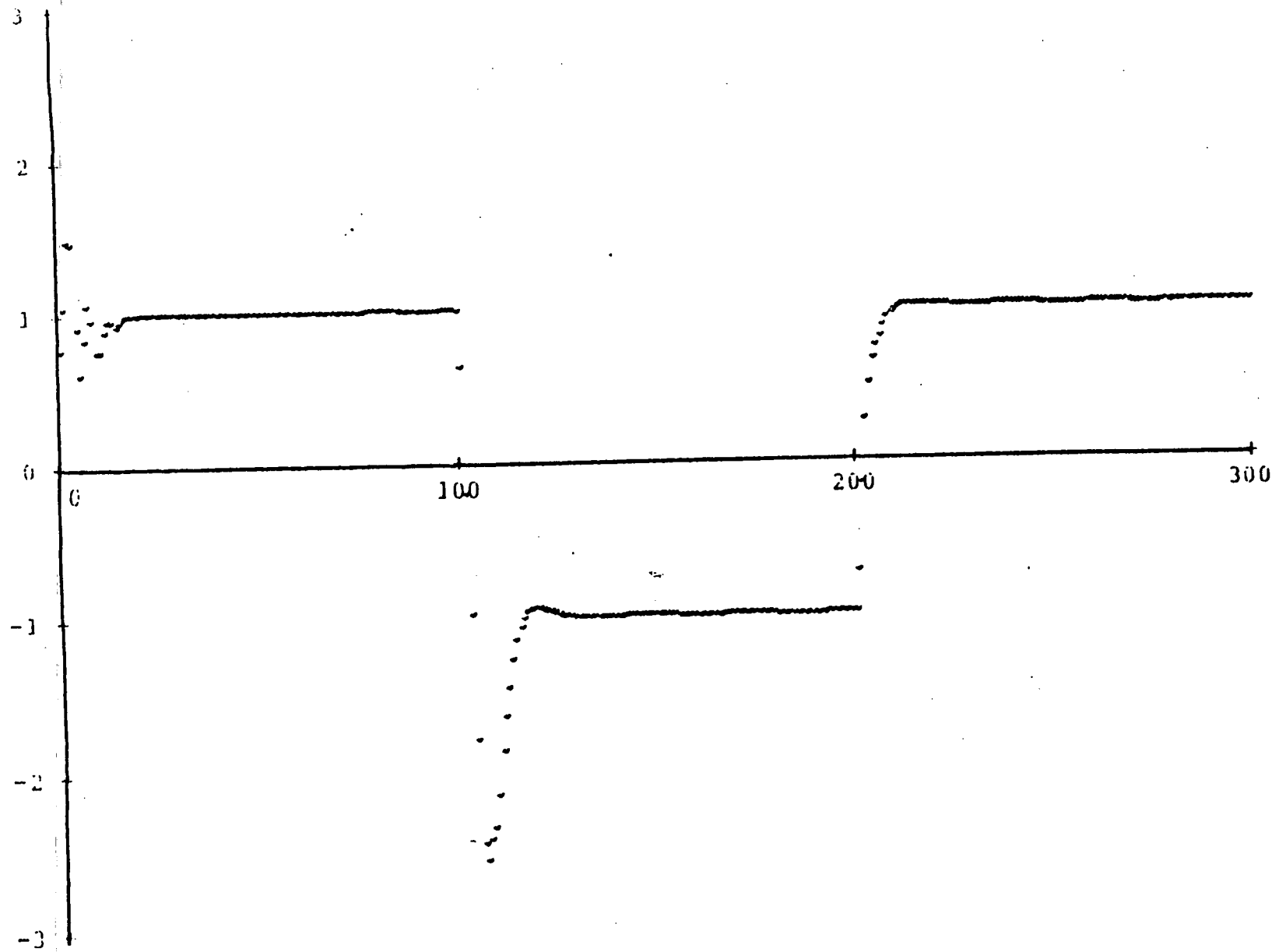


Figure 2 : Sortie pour l'exemple 4.4.2-1.

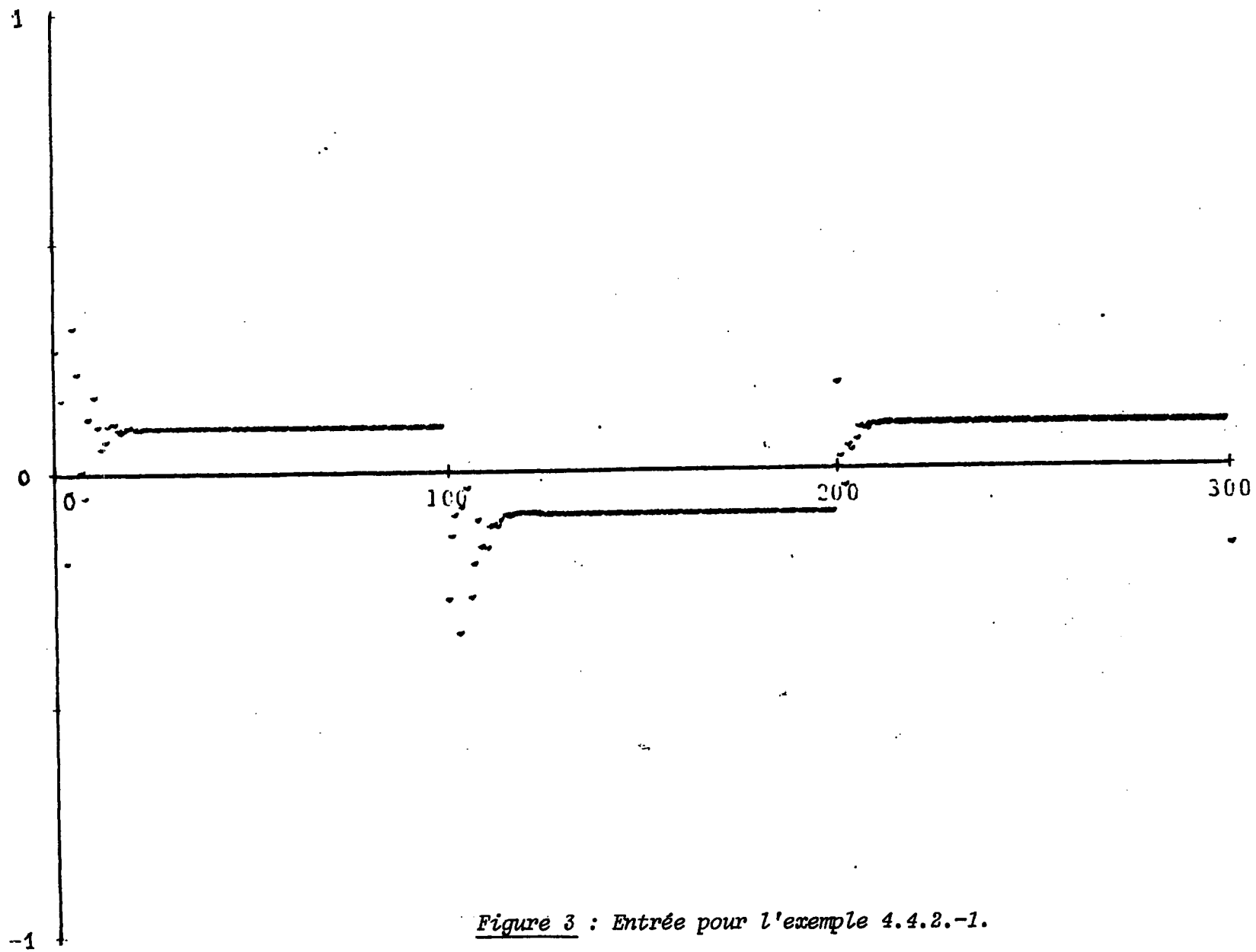


Figure 3 : Entrée pour l'exemple 4.4.2.-1.



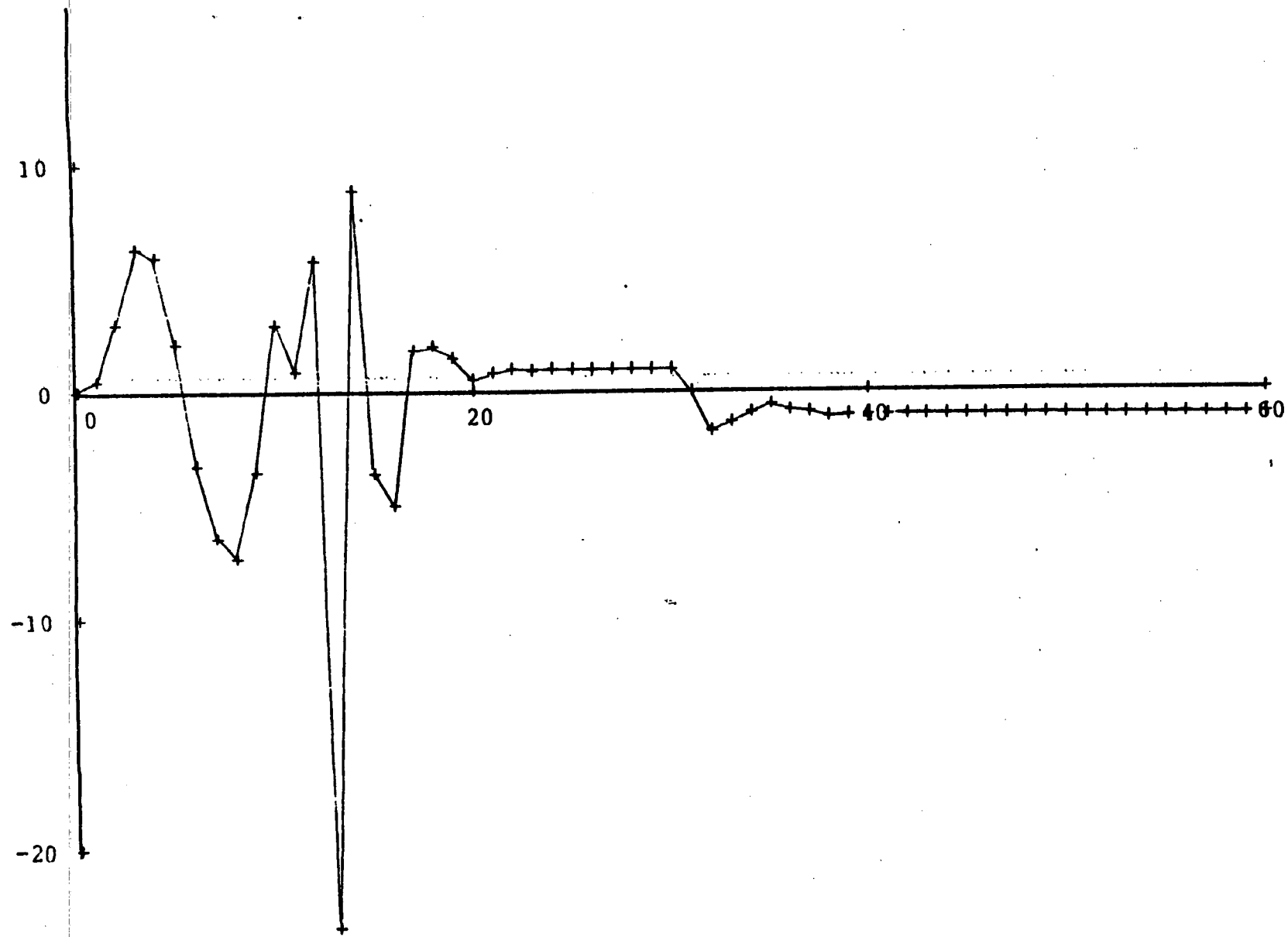


Figure 4 : Sortie pour l'exemple 4.4.2.-2.

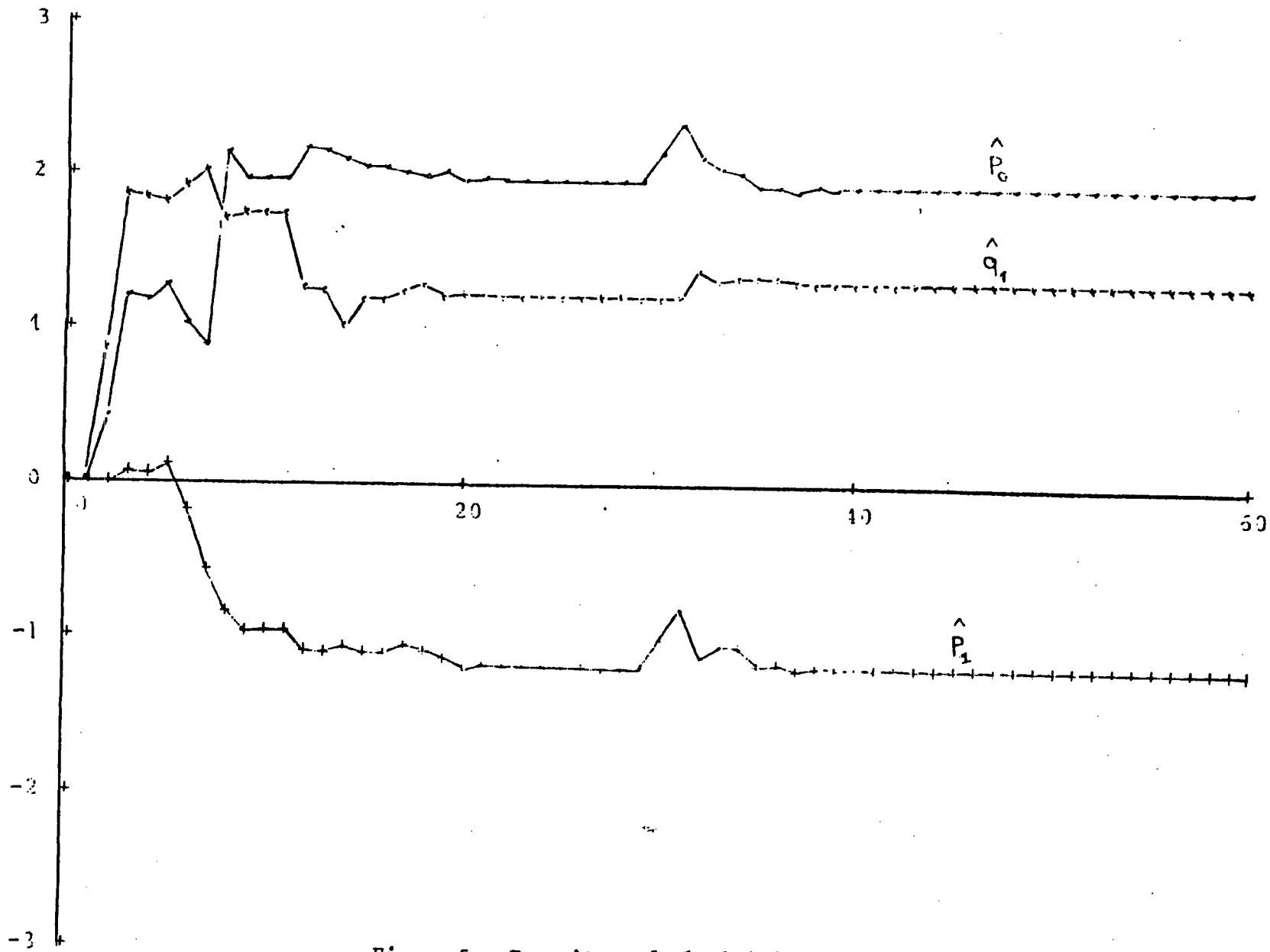


Figure 5 : Paramètres de la loi de commande, exemple 4.4.2.-2.

#### 4.5. Conclusions.

Dans ce quatrième chapitre, nous avons introduit deux schémas de commande adaptative par placement de pôles permettant de traiter le problème de la régulation et de la poursuite adaptative. La principale caractéristique de ces schémas est l'absence de calcul explicite du type : factorisation de deux polynômes, résolution d'une identité polynomiale. Il nous semble que les avantages d'une telle approche sont :

- un temps de calcul moindre
- et
- la suppression des difficultés liées aux questions de commandabilité du modèle identifié.

Nous espérons que le développement méticuleux de ces algorithmes (§ 4.2.1-4.2.3) sera utile pour la compréhension des difficultés que soulève la commande adaptative des systèmes à phase non minimale et servira dans l'élaboration d'autres algorithmes. Il reste beaucoup à faire avant de comprendre les possibilités de cette approche. Pour le moment, elle ne repose sur aucun fondement théorique mais les exemples simulés semblent indiquer qu'elle possède des propriétés intéressantes. Les difficultés d'une analyse théorique proviennent principalement de l'interdépendance des deux algorithmes d'identification. De ce point de vue, les schémas de commande strictement indirectes sont plus faciles à étudier, mais il nous semble que cela ne devrait pas pénaliser a priori les travaux futurs sur la commande adaptative directe.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] WITTENMARK, B. : 'A self-tuning regulator', Div. of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Report 7311, 1973.
- [2] SAMSON, C. and FUCHS, J.-J., J. : 'Discrete adaptive regulation of not-necessarily minimum-phase systems', to appear Proc. IEE, Pt. D., 1981.
- [3] SAMSON, C. : 'Commande adaptative à critère quadratique des systèmes linéaires à minimum de phase ou non'; Thèse de Doct.-Ing., Univ. de Rennes, juin 1980.
- [4] ÅSTROM, K.J., WESTERBERG, B., and WITTENMARK, B. : 'Self tuning controllers based on pole-placement design', Lund Report, LUTFD/1-052/, 1978.
- [5] WELLSTEAD, P.E., PRAGER, D., and ZANKER, P. : 'Pole assignment self-tuning regulator', Proc. IEE, 1979, 126, pp. 781-787.
- [6] DE LARMINAT, Ph. : 'On overall stability of certain adaptive control systems', 5th IFAC Symp. on Identification, Darmstadt, 1979, pp. 24-28.
- [7] ÅSTROM, K.J. : 'New implicit pole-zero placement algorithms for non-minimum-phase systems', Lund Report, LUTFD2/1-021/, 1979.
- [8] GOODWIN, G.C., and SIN, K.W. : 'Adaptive control of non-minimum phase systems', Univ. of Newcastle, Australia, Tech. Report EE 7918, 1979.
- [9] KREISSELMEIER, G. : 'Adaptive control via adaptive observation and asymptotic feedback matrix synthesis', IEEE-T-AC, 1980, vol. AC-25, pp. 717-722.
- [10] CLARKE, D.W., and GAWTHROP, P.J. : 'Self-tuning controller', Proc. IEE, 1975, 122, (9), pp. 929-934.
- [11] FUCHS, J.-J., J. : 'Explicit self-tuning methods', Proc. IEE, 1980, 127, Pt. D., (6), pp. 259-264.
- [12] DE LARMINAT, Ph. : 'Unconditional stabilizers for non-minimum phase systems'. Int. Symposium on Adaptive Systems, Ruhr Univ., Bochum, 1980.
- [13] CLARKE, D.W., and GAWTHROP, P.J. : 'Self-tuning control', Proc. IEE, 1979, (6), pp. 633-640.
- [14] FUCHS, J.J. : 'Discrete adaptive control: a sufficient condition for stability and applications', IEEE-T-AC, Oct. 1980, pp. 940-946.

- [15] FUCHS, J.J. et SAMSON, C.: *'Méthodes de commandes adaptatives pour des systèmes stochastiques linéaires'*; Convention DRET/IRISA, n° 77/545, Rapport final, 1979.
- [16] PRAGER, P.L.; WELLSTEAD, P.E.: *'Multivariable pole-assignment self-tuning regulators'*, Proc. IEE, 1980, 128, (1), pp. 9-18.
- [17] EGARDT, B.: *'Unification of some discrete-time adaptive control schemes'*; IEEE-T-AC, 1980, vol. AC-25, pp. 693-697.
- [18] LJUNG, L.: *'On positive real transfer-function and the convergence of some recursions'*, IEEE-T-AC, 1977, vol. AC-22, pp. 539-550.

**Imprimé en France**  
**par**  
**l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique**