



Homogénéisation par éléments finis des modules de comportements élastiques de matériaux composites

D. Begis, G. Duvaut, A. Hassim

► To cite this version:

D. Begis, G. Duvaut, A. Hassim. Homogénéisation par éléments finis des modules de comportements élastiques de matériaux composites. RR-0101, INRIA. 1981. inria-00076459

HAL Id: inria-00076459

<https://inria.hal.science/inria-00076459>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 101

**HOMOGENÉISATION
PAR ÉLÉMENTS FINIS
DES MODULES
DE COMPORTEMENTS ÉLASTIQUES
DE MATÉRIAUX COMPOSITES**

Dominique BEGIS
Georges DUBAUT
Amine HASSIM

Novembre 1981

HOMOGENEISATION PAR ELEMENTS FINIS
DES MODULES DE COMPORTEMENTS ELASTIQUES
DE MATERIAUX COMPOSITES

Dominique BEGIS^{*}, Georges DUVAUT^{**}, Amine HASSIM^{*}.

Résumé :

La méthode d'homogénéisation est utilisée pour calculer le comportement "équivalent" d'un matériau composite élastique à structure périodique. Les essais numériques, effectués par utilisation de la méthode des éléments finis, font apparaître une concordance avec l'expérience pour un matériau renforcé par des fibres unidirectionnelles. Ces résultats numériques sont ensuite utilisés pour calculer les caractéristiques homogénéisées d'un empilement de couches monocliniques.

Abstract :

The homogenization method is used to calculate the effective elastic moduli of composite materials with periodic structure . Numerical computations using a finite element method show a reasonable agreement with the experimental results for a unidirectional (parallel fibers) composite body. These computing results are then used to compute the homogenized elastic moduli of a laminate consisting of monoclinic layers.

* INRIA, B.P. 105, 78153 LE CHESNAY Cedex

** Lab. de Mécanique Théorique, Université Pierre et Marie Curie, PARIS VI
et INRIA.

PLAN

1. INTRODUCTION	1
2. RAPPELS DE LA METHODE D'HOMOGENEISATION	3
2.1. POSITION DU PROBLEME	3
2.2. HOMOGENEISATION - METHODE DE L'ENERGIE	6
3. APPLICATION A UN MATERIAU ELASTIQUE RENFORCE PAR DES FIBRES DE MEME DIRECTION	8
3.1. EQUATIONS REGISSANT $\bar{\chi}^{ij}$	9
3.2. EXPRESSION DES SECONDS MEMBRES	10
3.3. APPROXIMATION DES COEFFICIENTS EQUIVALENTS Q_{ijkh}	12
3.4. CAS OU LE MATERIAU HOMOGENEISE EST ORTHOTROPE	14
3.5. APPLICATIONS NUMERIQUES	15
3.6. DESCRIPTION DU PROGRAMME CAMECO	23
3.6.1. CONTENU PHYSIQUE	23
3.6.2. GENERATION AUTOMATIQUE DU MAILLAGE	23
3.6.3. DONNEES A FOURNIR	25
3.6.4. ACTIVATION DES TACHES	26
3.6.5. PRESENTATION DES RESULTATS	26
3.6.6. EXEMPLES D'UTILISATION	27
4. APPLICATION A UN EMPILEMENT PERIODIQUE DE COUCHES HOMOGENES	33
4.1. CALCUL DES $\bar{\chi}^{ij}$	33
4.2. EXPRESSION DES COEFFICIENTS D'ELASTICITE "HOMOGENEISES"	37
4.3. APPLICATION NUMERIQUE	38
4.4. DESCRIPTION DU PROGRAMME COMULCO	41
4.4.1. CONTENU PHYSIQUE	41
4.4.2. DONNEES A FOURNIR	41
4.4.3. ORGANIGRAMME	43
4.4.4. PRESENTATION DES RESULTATS	44
4.4.5. EXEMPLES D'UTILISATION	44
5. CONCLUSIONS	49
BIBLIOGRAPHIE	50

1. INTRODUCTION

Les matériaux composites formés de fibres à haute résistance imprégnés de résine sont de plus en plus l'objet d'applications nouvelles pour la réalisation de structures à haute performance mécanique. Le calcul direct par éléments finis de la déformation de ces structures pose d'énormes difficultés. Celles-ci sont dues essentiellement au très grand nombre des hétérogénéités du matériau. D'où la nécessité de déterminer les caractéristiques mécaniques d'un matériau homogène équivalent.

Dans ce travail, on applique une méthode d'homogénéisation à des matériaux stratifiés constitués par un empilement périodique de plusieurs couches. Chaque couche considérée individuellement est caractérisée par une direction de fibres (figure 1). Nous considérons pour cela deux types de problèmes.

Le premier type relatif à l'homogénéisation d'une couche où les fibres ont même direction (figure 1).

Le second type relatif à l'homogénéisation d'un empilement périodique de couches (dont les fibres sont d'orientations connues) qui ont fait l'objet d'une homogénéisation du premier type (figure 2).

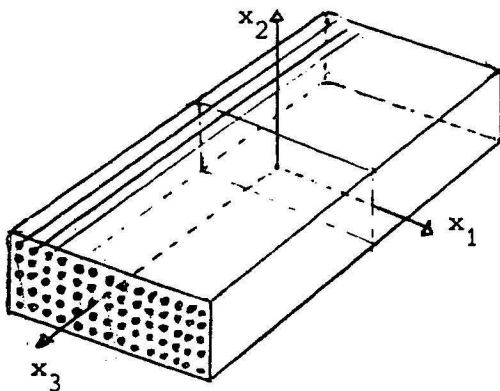


Figure 1 : couche

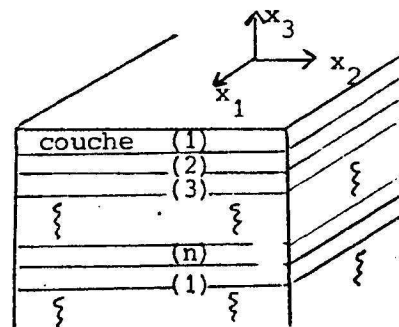


Figure 2 : multicouche

Pour chaque type de problème, nous supposons que :

- 1°) L'hétérogénéité provient de l'assemblage entre matériaux homogènes élastiques de caractéristiques différentes.

- 2°) La distribution géométrique des composants est périodique.
- 3°) Les dimensions d'une période sont petites par rapport à celles de l'échantillon étudié.
- 4°) La cohésion entre constituants est parfaite.

Nous appliquons alors la théorie de homogénéisation développée par A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU [4] , G. DUVAUT [8], L. TARTAR [15], E. SANCHEZ - PALENCIA [14]

Après une modélisation tridimensionnelle classique, la recherche des caractéristiques homogénéisées requiert la connaissance d'une famille de fonction $\vec{X}^{rs}$ ($1 \leq r \leq s \leq 3$), définies sur une période $[0, Y_1] \times [0, Y_2] \times [0, Y_3]$ de R^3 :

$$\vec{X}^{rs}(y) = (X_1^{rs}(y_1, y_2, y_3), X_2^{rs}(y_1, y_2, y_3), X_3^{rs}(y_1, y_2, y_3)).$$

Ces fonctions, de période Y_i en la variable y_i ($1 \leq i \leq 3$), sont solutions d'équations elliptiques du second ordre à coefficients variables. Ces problèmes de nature tridimensionnelle, posés sur V , se transforment en des problèmes :

- . Bi-dimensionnels posés sur $Y = [0, Y_1] \times [0, Y_2]$ pour le premier type.
Les fonctions $\vec{X}^{rs}$ ne dépendent alors que des seules variables y_1, y_2 et se mettent sous la forme :

$$(\vec{X}_1^{rs}(y_1, y_2), \vec{X}_2^{rs}(y_1, y_2), 0), 1 \leq r \leq s \leq 3, (r, s) \neq (1, 3), (r, s) \neq (2, 3), \\ (0, 0, \vec{X}_3^{rs}(y_1, y_2)), (r, s) = (1, 3) \text{ ou } (2, 3).$$

- . Mono-dimensionnels posés sur $[0, Y_3]$ pour le second type. On se ramène alors à la résolution d'un système d'équations différentielles.

La résolution numérique de ces problèmes elliptiques du second ordre à coefficients variables a été réalisée à l'aide de la bibliothèque d'éléments finis MODULEF. [3]

Un certain nombre d'applications numériques est présenté aux paragraphes 3.5. et 4.3.

Ce travail a été réalisé en collaboration avec Mme NUC et Mr BESTAGNO (SNIAS Marignane) dans le cadre d'un contrat de recherche.

2 - RAPPELS DE LA METHODE D'HOMOGENEISATION

2.1. POSITION DU PROBLEME

On considère le problème des petites déformations élastiques d'un milieu composite occupant dans son état non déformé la région ouverte et bornée Ω de $\mathbb{R}^3$, de frontière Γ régulière. Soient Γ_0 une partie de Γ de mesure strictement positive et $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$ ($\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$).

En tout point $x \in \Omega$, on désigne par $\vec{u}(x)$ le champ de déplacement correspondant au milieu encastré sur Γ_0 et soumis aux densités de forces :

$$(2.1) \text{ volumique } \vec{f} = (f_1, f_2, f_3) \in (L^2(\Omega))^3 \text{ dans } \Omega,$$

$$(2.2) \text{ surfacique } \vec{g} = (g_1, g_2, g_3) \in (L^2(\Gamma_1))^3 \text{ sur } \Gamma_1.$$

De la connaissance de $\vec{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, on déduit les composantes ε_{ij} du tenseur $\{\varepsilon\}$ des déformations linéarisé :

$$(2.3) \quad \varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3 ;$$

la loi de comportement (loi de Hooke) donne les composantes σ_{ij} du tenseur $\{\sigma\}$ des contraintes :

$$(2.4) \quad \sigma_{ij}(\vec{u}) = \sum_{k,h=1}^3 c_{ijkh}(x) \varepsilon_{kh}(\vec{u}), \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

où les coefficients $c_{ijkh}(x)$ du tenseur d'élasticité satisfont les propriétés suivantes :

$$(2.5) \text{ symétrie } : c_{ijkh} = c_{jikh} = c_{ijhk}, \quad 1 \leq i, j, h, k \leq 3,$$

$$(2.6) \text{ ellipticité } : \exists \alpha > 0, \text{ tel que}$$

$$\sum_{i,j,k,h=1}^3 c_{ijkh} \xi_{kh} \xi_{ij} \geq \alpha \sum_{i,j=1}^3 |\xi_{ij}|^2, \quad \forall \xi_{ij} \text{ avec } \xi_{ij} = \xi_{ji}.$$

$$(2.7) \quad c_{ijkh} \in L^\infty(\Omega) \quad 1 \leq i, j, k, h \leq 3.$$

Nous nous intéressons ici au cas où la structure élastique caractérisée par les coefficients $c_{ijkh}(y)$ présente un caractère périodique, de période Y_i en la variable y_i ($1 \leq i \leq 3$). Plus précisément soit :

$$(2.8) \quad Y =]0, Y_1[\times]0, Y_2[\times]0, Y_3[\subset \mathbb{R}^3,$$

une période de base et $c_{ijkh}(y)$ ($y \in Y$) des fonctions définies sur Y et prolongées par périodicité à $\mathbb{R}^3$, satisfaisant (2.5), (2.6) et :

$$(2.9) \quad c_{ijkh} \in L^\infty(Y), \text{ soit (2.7).}$$

Pour chaque ε positif destiné à tendre vers zéro, on définit :

$$(2.10) \quad c_{ijkh}^\varepsilon(x) = c_{ijkh}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

de sorte que $c_{ijkh}^\varepsilon(x)$ est périodique en x ($x \in \Omega$), de période εY et satisfait (2.5), (2.6), (2.7).

On introduit alors :

. l'espace V des déplacements admissibles :

$$(2.11) \quad V = \{\vec{v} \in (H^1(\Omega))^3; \vec{v} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_0\},$$

. la forme bilinéaire sur V :

$$(2.12) \quad a^\varepsilon(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} c_{ijkh}^\varepsilon(x) \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \quad (*)$$

. la forme linéaire continue sur V :

$$(2.13) \quad \vec{v} \rightarrow L(\vec{v}) = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_1} g_i v_i d\sigma.$$

(*) Dans toute la suite, la convention de sommation sur l'indice répété est utilisée :

$$c_{ijkh} \varepsilon_{kh} \varepsilon_{ij} \equiv \sum_{i,j,k,h=1}^3 c_{ijkh} \cdot \varepsilon_{kh} \cdot \varepsilon_{ij}.$$

. Les lettres latines $i, j, \dots$ varient de 1 à 3

. Les lettres grecques $\alpha, \beta, \dots$ varient de 1 à 2.

Nous avons alors la formulation variationnelle :

$$(2.14) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et sous les hypothèses (2.1), (2.2), (2.5), (2.6), (2.7),} \\ \text{trouver :} \\ \vec{u}^\varepsilon \in V \text{ tel que} \\ a^\varepsilon(\vec{u}^\varepsilon, \vec{v}) = L(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V \\ \text{où } V \text{ est défini en (2.11), } a(.,.) \text{ en (2.12) et } L(.) \text{ en (2.13).} \end{array} \right.$$

Le problème aux limites (2.14) admet une solution unique $\vec{u}^\varepsilon \in V$.
cf [6,7].

On se propose de chercher si cette solution $\vec{u}^\varepsilon$ possède une limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Prenons $\vec{v} = \vec{u}^\varepsilon$ dans (2.14) et utilisons (2.6), on obtient :

$$(2.15) \quad ||\vec{u}^\varepsilon||_V \leq C \quad (\text{constante}).$$

On peut extraire une sous suite de $\vec{u}^\varepsilon$ (encore notée $\vec{u}^\varepsilon$) qui va converger vers un élément $\vec{u}^0$, soit :

$$(2.16) \quad \vec{u}^\varepsilon \rightarrow \vec{u}^0 \text{ dans } V \text{ faible.}$$

Notre problème est le suivant : quel est $\vec{u}^0$ et vérifie-t-il une équation du type de celle vérifiée par $\vec{u}^\varepsilon$?

Remarque 2.1. : Interprétons (2.14)

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A^\varepsilon \vec{u}^\varepsilon)_i = f_i \quad \text{avec} \quad (A^\varepsilon \vec{u}^\varepsilon)_i = - \frac{\partial}{\partial x_j} [c_{ijkh}(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_h}] \\ \vec{u}^\varepsilon = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma_{ij} \cdot n_j = g_i \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right.$$

Les coefficients de l'opérateur A^ε sont très rapidement oscillants lorsque ε est "petit".

2.2. HOMOGENEISATION. METHODE DE L'ENERGIE :

Par des méthodes d'analyse fonctionnelle reposant sur des estimations à priori, on montre que $\vec{u}^0$ est solution d'un problème "homogénéisé" correspondant à un matériau homogène en général anisotrope. cf [8,15].

Introduisons :

$$(2.18) \quad W(Y) = \{ \vec{v}/\vec{v} \in (H^1(Y))^3, \vec{v} \text{ Y-périodique, i.e. prenant des valeurs égales sur les faces opposées de } Y \}.$$

$$(2.19) \quad a_Y(\vec{u}, \vec{v}) = \int_Y c_{ijkh}(y) \cdot \frac{\partial u_k}{\partial y_h} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in W(Y).$$

Par extension, nous noterons :

$$(2.20) \quad a_Y(\vec{p}^{ij}, \vec{v}) = \int_Y c_{mnkh}(y) \cdot \frac{\partial p_k^{ij}}{\partial y_h} \cdot \frac{\partial v_m}{\partial y_n} dy,$$

où $\vec{p}^{ij}$ est le champ de vecteur sur Y dont la $i^{\text{ème}}$ composante est égale à y_j , toutes les autres étant nulles :

$$(2.21) \quad (\vec{p}^{ij})_k = y_j \delta_{ik} \quad (\delta_{ik} \text{ symbole de Kronecker}).$$

Pour i, j données soit $\vec{X}^{ij}$ solution de :

$$(2.22) \quad \begin{cases} \vec{X}^{ij} \in W(Y) \\ a_Y(\vec{X}^{ij} - \vec{p}^{ij}, \vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v} \in W(Y). \end{cases}$$

$\vec{X}^{ij}$ étant définie à une constante additive près cf [8], on prendra $\vec{X}^{ij} = \vec{0}$ aux coins de Y .

On a alors le résultat fondamental : cf [15].

Théorème 2.1 :

Si $\vec{u}^\varepsilon$ est la solution du problème aux limites (2.14),

$\vec{u}^\varepsilon \rightarrow \vec{u}^0$ dans V faible lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$;

où $\vec{u}^0$ est l'unique solution de (2.23) :

$$(2.23) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \vec{u} \in V \text{ tel que :} \\ A(\vec{u}, \vec{v}) = L(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V \end{cases}$$

avec $L(\cdot)$ définie en (2.13) et

$$(2.24) \quad A(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} Q_{ijkh} \frac{\partial u_k}{\partial x_h} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot dx.$$

où les coefficients Q_{ijkh} sont des constantes calculées à partir des $\vec{X}^{ij}$ solutions de (2.22) et vérifiant :

$$Q_{ijkh} = \frac{1}{|Y|} a_y(\vec{X}^{ij} - \vec{p}^{ij}, \vec{X}^{kh} - \vec{p}^{kh})$$

ou encore

$$(2.25) \quad Q_{ijkh} = \frac{1}{|Y|} \left[\int_Y c_{ijkh}(y) dy - \int_Y c_{khmn}(y) \cdot \frac{\partial X_m^{ij}}{\partial y_n} dy \right]$$

$$(|Y| = Y_1 \times Y_2 \times Y_3)$$

On laisse le lecteur le soin de se reporter à [12] pour la démonstration du théorème.

Les coefficients constants Q_{ijkh} sont appelés coefficients "homogénéisés" ou équivalents ou encore efficaces.

Remarque 2.2. Si des hypothèses plus fortes de régularité sont faites sur les coefficients $c_{ijkh}(y)$, on peut retrouver les résultats précédents par une méthode de développement asymptotique. En plus du comportement limite $\vec{u}^0$, on obtient des termes correcteurs tenant compte de la période εY du milieu cf [4,5].

Remarque 2.3. Les champs $\vec{X}^{rs}$ sont solutions de : cf(2.20), (2.21), (2.22),

$$(2.26) \quad \begin{cases} - \frac{\partial}{\partial y_j} [c_{ijkh}(y) \varepsilon_{kh}(\vec{X}^{rs})] = - \frac{\partial}{\partial y_j} [c_{ijrs}(y)] , \\ + \text{C.L. de périodicité ;} \end{cases}$$

où les indices r, s varient indépendamment. Mais du fait de la symétrie des coefficients :

$$c_{khrs} = c_{khsr},$$

nous avons $\vec{X}^{rs} = \vec{X}^{sr}$. Il n'y a que 6 champs indépendants $(\vec{X}^{11}, \vec{X}^{22}, \vec{X}^{33}, \vec{X}^{23}, \vec{X}^{13}, \vec{X}^{12})$.

3. APPLICATION A UN MATERIAU ELASTIQUE RENFORCE PAR DES FIBRES DE MEME DIRECTION.

On applique les résultats du paragraphe précédent à un matériau élastique formé d'une multitude de fibres unidirectionnelles imprégnées de résine et dont la répartition géométrique est périodique dans un plan perpendiculaire à leur direction x_3 .

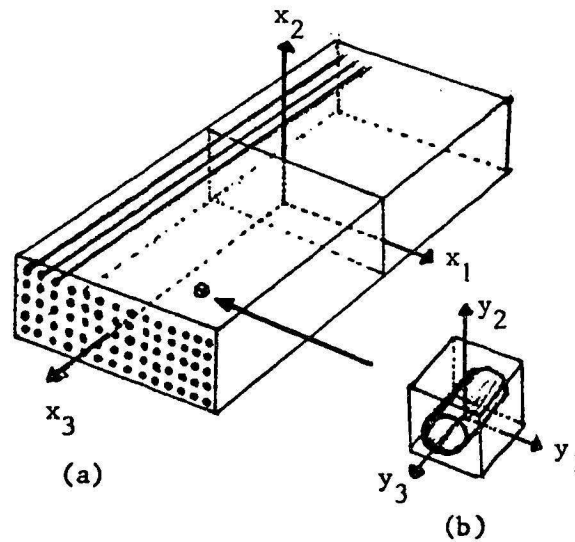


Figure 3

- (a) Structuration des fibres
- (b) Période de base.

Le calcul des coefficients équivalents Q_{ijkh} définis en (2.25) nécessite la résolution de (2.22). Dans le cas présent, les coefficients $c_{ijkh}(y)$ sont indépendants de y_3 , il en résulte que les champs $\vec{X}^{ij}(y)$ sont eux-aussi indépendants de y_3 . Dans (2.22), les différents indices conduisent à une contribution nulle lorsqu'ils se réfèrent à $\frac{\partial}{\partial y_3}$, simplifiant ainsi les équations régissant $\vec{X}^{ij}$.

3.1. EQUATIONS REGISSANT $\vec{X}^{ij}$.

Si nous considérons des composants orthotropes, les coefficients d'élasticité de ces matériaux peuvent se mettre sous la forme :

$$(3.1) \quad \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & c_{1313} & 0 \\ & & & & & c_{1212} \end{bmatrix}$$

Explicitons (2.22) :

$$(3.2) \quad \int_Y c_{mnkh}(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y_h} (X_k^{ij} - P_k^{ij}) \cdot \frac{\partial v_n}{\partial y_m} dy = 0$$

soit l'interprétation au sens des distributions :

$$(3.3) \quad \begin{cases} - \frac{\partial}{\partial y_m} [c_{mnkh}(y) \frac{\partial}{\partial y_h} (X_k^{ij}(y) - P_k^{ij}(y))] = 0 & \text{dans } Y, \\ + \text{C.L. de périodicité} \end{cases}$$

1° Equations pour $\vec{X}^{\alpha\beta}$

(3.3) se réécrit :

$$- \frac{\partial}{\partial y_m} [c_{mnkh}(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y_h} (X_k^{\alpha\beta}(y))] = - \frac{\partial}{\partial y_m} [c_{mnkh}(y) \frac{\partial}{\partial y_h} (P_k^{\alpha\beta}(y))]$$

soit pour $n = 3$: (cf 3.1)

$$(3.4) \quad - \frac{\partial}{\partial y_1} [c_{1331} \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} X_3^{\alpha\beta}] + \frac{\partial}{\partial y_2} [c_{2332} \cdot \frac{\partial}{\partial y_2} X_3^{\alpha\beta}] = 0.$$

Ce problème homogène en $X_3^{\alpha\beta}$ admet une solution unique à une constante additive près. On choisit $X_3^{\alpha\beta} = 0$. D'où :

$$(3.5) \quad \vec{X}^{\alpha\beta}(y) = [X_1^{\alpha\beta}(y_1, y_2), X_2^{\alpha\beta}(y_1, y_2), 0] .$$

2° Equation pour $\vec{X}^{33}$:

réécrivons (3.3) pour $n = 3$:

$$(3.6) \quad - \frac{\partial}{\partial y_1} [c_{1331} \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} X_3^{33}] + \frac{\partial}{\partial y_2} [c_{2332} \cdot \frac{\partial}{\partial y_2} X_3^{33}] = 0.$$

nous avons de même :

$$(3.7) \quad \vec{X}^{33}(y) = [X_1^{33}(y_1, y_2), X_2^{33}(y_1, y_2), 0]$$

3°) Equations pour $\vec{X}^{\alpha 3}$:

Explicitons (3.3) pour $n = 1$ et $n = 2$

$$(3.8) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_1} [c_{1111} \cdot \frac{\partial X_1^{\alpha 3}}{\partial y_1} + c_{1122} \frac{\partial X_2^{\alpha 3}}{\partial y_2}] - \frac{\partial}{\partial y_2} [c_{2121} (\frac{\partial X_1^{\alpha 3}}{\partial y_2} + \frac{\partial X_2^{\alpha 3}}{\partial y_1})] = 0 ; \\ -\frac{\partial}{\partial y_2} [c_{2211} \cdot \frac{\partial X_1^{\alpha 3}}{\partial y_1} + c_{2222} \frac{\partial X_2^{\alpha 3}}{\partial y_2}] - \frac{\partial}{\partial y_1} [c_{1212} (\frac{\partial X_1^{\alpha 3}}{\partial y_2} + \frac{\partial X_2^{\alpha 3}}{\partial y_1})] = 0 . \end{cases}$$

Seules les composantes $X_1^{\alpha 3}$, $X_2^{\alpha 3}$ interviennent et le second membre est nul ; d'où la solution γ périodique choisie :

$$X_1^{\alpha 3} = X_2^{\alpha 3} = 0.$$

Soit :

$$(3.9) \quad X^{\alpha 3}(\gamma) = [0, 0, X_3^{\alpha 3}(\gamma_1, \gamma_2)] .$$

Pour $n = 3$:

$$(3.10) \quad -\frac{\partial}{\partial y_1} c_{1331} \frac{\partial}{\partial y_1} X_3^{\alpha 3} - \frac{\partial}{\partial y_2} c_{2332} \frac{\partial}{\partial y_2} X_3^{\alpha 3} - \frac{\partial}{\partial y_1} c_{1313} \cdot \delta_{\alpha 1} \frac{\partial}{\partial y_2} c_{2323} \cdot \delta_{\alpha 2}$$

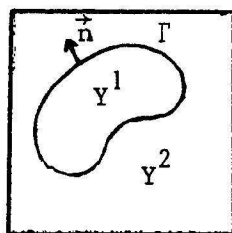
3.2. EXPRESSION DES SECONDS MEMBRES

Le second membre des équations définissant $\vec{X}^{ij}$: cf (2.22)

$$a_{\gamma}(\vec{X}^{ij}, \vec{v}) = a(\vec{P}^{ij}, \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in W(V),$$

se ramène, après intégration par parties, à une densité linéique d'efforts sur l'interface Γ entre la fibre et la résine.

Si $\vec{n} = (n_1, n_2)$ est la normale unitaire à Γ orientée vers l'extérieur de la fibre et si $[[C]]$ désigne la "discontinuité" de C sur Γ ($\overset{\text{fibre}}{c_{ijkh}} - \overset{\text{résine}}{c_{ijkh}}$), on a :



$$(3.11) \quad a_{\gamma}(\vec{P}^{ij}, \vec{v}) = \sum_{I=1,2} \int_{\partial Y^I} c_{ij}^I \ell_k \cdot v_{\ell} \cdot n_k \cdot d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma} [[c_{ijkl}]] n_{\ell} v_k d\Gamma$$

$$Y = Y^1 \cup Y^2$$

qui s'écrit encore :

$$(3.12) \quad \begin{cases} a_Y(\vec{P}^{ij}, \vec{v}) = \int_{\Gamma} \vec{F}^{ij} \cdot \vec{v} \cdot d\Gamma, \\ \text{avec} \\ \begin{cases} F_1^{11} = [c_{1111}] n_1 \\ F_2^{11} = [c_{1122}] n_2 \\ F_1^{12} = [c_{1212}] n_2 \\ F_2^{12} = [c_{1221}] n_1 \end{cases} ; \begin{cases} F_1^{22} = [c_{2211}] n_1 \\ F_2^{22} = [c_{2222}] n_2 \\ F_3^{13} = [c_{1313}] n_1 \\ F_3^{23} = [c_{2332}] n_2 \end{cases} ; \begin{cases} F_1^{33} = [c_{3311}] n_1 \\ F_2^{33} = [c_{3322}] n_2 \end{cases} \end{cases} ;$$

En résumé : Les fonctions $\vec{X}^{ij}$ sont obtenues par la résolution des deux problèmes aux limites (3.13) et (3.14).

$$(3.13) \quad \begin{aligned} &\text{Pour } (i,j) = (1,1), (2,2), (3,3), (1,2) \\ &\text{Trouver } \vec{X}^{ij} \in W_2(Y), \text{ tel que} \\ &\int_Y c_{\alpha\beta\gamma\eta}(y) \cdot \frac{\partial X_{\alpha}^{ij}}{\partial y_{\beta}} \cdot \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial y_{\eta}} \cdot dy = \int_{\Gamma} F_{\alpha}^{ij} \cdot v_{\alpha} \cdot d\Gamma, \quad \forall v \in W_2(Y) \\ &\text{avec} \\ &W_2(Y) = \{ \vec{v}/\vec{v} \in (H^1(Y))^2, v \text{ Y-périodique} \}. \end{aligned}$$

Et

$$(3.14) \quad \begin{aligned} &\text{Pour } \vec{X}^{\alpha 3} \\ &\text{Trouver } X_3^{\alpha 3} \in W_1(Y), \text{ tel que :} \\ &\int_Y c_{3\beta 3\gamma}(y) \cdot \frac{\partial X_3^{\alpha 3}}{\partial y_{\beta}} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial y_{\gamma}} \cdot dy = \int_{\Gamma} F_3^{\alpha 3} \cdot v_3 \cdot d\Gamma, \quad \forall v_3 \in W_1(Y), \\ &\text{et} \\ &W_1(Y) = \{ v/v \in H^1(Y), v \text{ Y-périodique} \}. \end{aligned}$$

Nous renvoyons à [12] pour la résolution de (3.13), (3.14) par utilisation de la bibliothèque d'éléments finis MODULEF.

3.3. APPROXIMATION DES COEFFICIENTS EQUIVALENTS Q_{ijkh} .

Les coefficients Q_{ijkh} ont été définis au théorème 2.1. et s'écrivent

$$(3.15) \quad Q_{ijkh} = \frac{1}{|Y|} \left[\int_Y c_{ijkh}(y) dy - \int_Y c_{khmn}(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y_n} X_m^{ij} dy \right]$$

Les éléments finis Lagrange P1 sont utilisés pour le calcul des $\tilde{X}_m^{ij}$ solutions des problèmes approchés déduits de (3.13) et (3.14). Le 2ème terme de (3.15) est alors approché par

$$\frac{1}{|Y|} \left[\sum_{T \in T_h} c_{khmn} \int_T \frac{\partial \tilde{X}_m^{ij}}{\partial y_n} dy \right]$$

où T est un élément de la discrétisation T_h de Y . Ces intégrales sur l'élément triangulaire T sont constantes et s'écrivent :

$$(3.16) \quad \begin{cases} \int_T \frac{\partial \tilde{X}_m^{ij}}{\partial y_1} dy = \frac{1}{2} [\tilde{X}_m^{ij}(s_1) \cdot (b_2 - b_3) + \tilde{X}_m^{ij}(s_2) \cdot (b_3 - b_1) + \tilde{X}_m^{ij}(s_3) \cdot (b_1 - b_2)] \\ \int_T \frac{\partial \tilde{X}_m^{ij}}{\partial y_2} dy = \frac{1}{2} [\tilde{X}_m^{ij}(s_1) \cdot (a_3 - a_2) + \tilde{X}_m^{ij}(s_2) \cdot (a_1 - a_3) + \tilde{X}_m^{ij}(s_3) \cdot (a_2 - a_1)] \end{cases}$$

où s_i sont les sommets du triangle T de coordonnées (a_i, b_i)

En résumé : Pour chaque triangle $T \in T_h$, il faudra calculer :

$$T_1 = \int_T \tilde{X}_{1,1}^{11} dy \quad ; \quad T_2 = \int_T \tilde{X}_{1,2}^{11} dy \quad ; \quad T_3 = \int_T \tilde{X}_{2,1}^{11} dy ;$$

$$T_4 = \int_T \tilde{X}_{2,1}^{11} dy \quad ; \quad T_5 = \int_T \tilde{X}_{1,1}^{12} dy \quad ; \quad T_6 = \int_T \tilde{X}_{1,2}^{12} dy ;$$

$$T_7 = \int_T \tilde{X}_{2,1}^{12} dy \quad ; \quad T_8 = \int_T \tilde{X}_{2,2}^{12} dy \quad ; \quad T_9 = \int_T \tilde{X}_{1,1}^{22} dy ;$$

$$T_{10} = \int_T \tilde{X}_{2,2}^{22} dy \quad ; \quad T_{11} = \int_T \tilde{X}_{1,1}^{33} dy \quad ; \quad T_{12} = \int_T \tilde{X}_{2,2}^{33} dy ;$$

$$T_{13} = \int_T \tilde{X}_{3,1}^{13} dy \quad ; \quad T_{14} = \int_T \tilde{X}_{3,2}^{13} dy \quad ; \quad T_{15} = \int_T \tilde{X}_{3,2}^{23} dy.$$

$$\text{où } \tilde{X}_{m,n}^{ij} = \frac{\partial \tilde{X}_m^{ij}}{\partial y_n}$$

$$\text{Posons } \overline{c_{ijkh}} = \frac{1}{|Y|} \int c_{ijkh}(y) dy.$$

Nous avons alors :

$$Q_{1111} = \overline{c_{1111}} - \frac{1}{|Y|} \sum_{T \in T_h} [c_{1111} T_1 + c_{1122} T_4]$$

$$Q_{1112} = - \frac{1}{|Y|} \sum_{T \in T_h} c_{1212} (T_2 + T_3)$$

$$Q_{1113} = 0$$

$$Q_{1122} = \overline{c_{1122}} - \frac{1}{|Y|} \sum_{T \in T_h} [c_{2222} T_4 + c_{2211} T_1]$$

$$Q_{1123} = 0$$

$$Q_{1133} = \overline{c_{1133}} - \frac{1}{|Y|} \sum_{T \in T_h} [c_{3311} T_1 + c_{3322} T_4]$$

$$Q_{1212} = \overline{c_{1212}}$$

$$Q_{1213} = 0$$

$$Q_{1222} = - \frac{1}{|Y|} \sum_{T \in T_h} [c_{2211} \cdot T_5 + c_{2222} \cdot T_8]$$

$$Q_{1223} = 0$$

$$Q_{1233} = - \frac{1}{|Y|} \sum_{T \in T_h} [c_{3311} T_5 + c_{3322} T_8]$$

$$Q_{1313} = \overline{c_{1313}} - \frac{1}{|Y|} \sum_{T \in T_h} c_{1313} T_{13}$$

$$Q_{1322} = 0$$

$$Q_{1323} = - \frac{1}{|Y|} \sum_{T \in T_h} c_{2323} T_{14}$$

$$Q_{1333} = 0$$

$$Q_{2222} = \overline{c_{2222}} - \frac{1}{|Y|} \sum_{T \in T_h} [c_{2211} T_9 + c_{2222} T_{10}]$$

$$Q_{2223} = 0$$

$$Q_{2233} = \overline{c_{2233}} - \frac{1}{|Y|} \sum_{T \in T_h} [c_{3311} \cdot T_9 + c_{3322} \cdot T_{10}]$$

$$Q_{2323} = \overline{c_{2323}} - \frac{1}{|Y|} \sum_{T \in T_h} c_{2323} T_{15}$$

$$Q_{2333} = 0$$

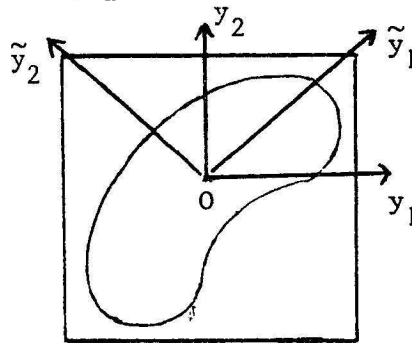
$$Q_{3333} = \overline{c_{3333}} - \frac{1}{|Y|} \sum_{T \in T_h} [c_{3311} \cdot T_{11} + c_{3322} \cdot T_{12}]$$

Il résulte de ces calculs que le matériau homogénéisé est du type monoclinique, ainsi que l'indique le tableau ci-joint cf [9].

$$(3.17) \begin{bmatrix} Q_{1111} & Q_{1122} & Q_{1133} & 0 & 0 & Q_{1112} \\ & Q_{2222} & Q_{2233} & 0 & 0 & Q_{2212} \\ & & Q_{3333} & 0 & 0 & Q_{3312} \\ & -\text{SYM}- & & Q_{2323} & Q_{2313} & 0 \\ & & & & Q_{1313} & 0 \\ & & & & & Q_{1212} \end{bmatrix}$$

3.4. CAS OU LE MATERIAU HOMOGENEISE EST ORTHOTROPE

Si un plan bissecteur des axes Oy_1y_2 est plan de symétrie géométrique de la période de base et si de plus les propriétés mécaniques de la fibre sont identiques dans les directions Oy_1 , Oy_2 , alors le matériau homogénéisé sera orthotrope pour les directions Oy_3 et les directions $O\tilde{y}_1$, $O\tilde{y}_2$ des bissectrices de Oy_1y_2 .



Dans ces axes d'orthotropie (bissecteurs) nous avons :

$$(3.18) \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1111} & Q_{1122} & Q_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{2222} & Q_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & -\text{SYM}- & & Q_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & Q_{1313} & 0 \\ & & & & & Q_{1212} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

et inversement,

$$(3.19) \quad \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

-SYM-

où . E_1, E_2, E_3 sont les modules d'Young dans les 3 directions

$O\tilde{y}_1, O\tilde{y}_2, O\tilde{y}_3$;

. $\nu_{23}, \nu_{13}, \nu_{12}$ les coefficients de Poisson ;

. G_{23}, G_{13}, G_{12} les modules de cisaillement.

3.5. APPLICATIONS NUMERIQUES.

Pour chaque taux d'imprégnation de résine (36%, 50%, 65%, 80%), nous avons calculé les caractéristiques homogénéisées du composite renforcé par des fibres (isotropes ou orthotropes) de formes différentes. Les résultats donnés dans les tableaux ci-après sont exprimés dans un repère d'axes bissecteurs $O\tilde{y}_1\tilde{y}_2\tilde{y}_3$. Pour les fibres cylindriques, les figures (4 à 9) représentent les variations des modules de comportement en fonction du taux d'imprégnation de résine.

Remarque 3.1. :

Dans les tableaux ci-après, C caractérise la dimension de la cellule de base (cf 3-6-1) TX est le taux d'imprégnation de résine pour la discrétisation en NEL triangles.

TAUX D'IMPREGNATION DE RESINE EN VOLUME : 36%

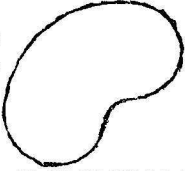
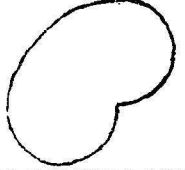
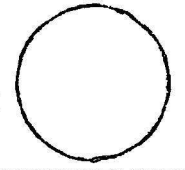
FIBRE

RESINE

FIBRES // à x1

E = 84 000 MPa $\nu = .22$

E = 4000 MPa $\nu = .34$

	MAILLAGE	$E_1 (10^5 \text{ MPa})$	$E_2 (10^5 \text{ MPa})$	$E_3 (10^5 \text{ MPa})$	ν_{23}	ν_{12}	ν_{13}	$G_{23} (10^4 \text{ MPa})$	$G_{12} (10^4 \text{ MPa})$	$G_{13} (10^4 \text{ MPa})$
	C = 0 TX = .3604 NEL = 414	.5519	.1540	.1530	.4217	.2527	.2533	.7230	.7307	.6002
	C = 0.005 TX = .3636 NEL = 370	.5493	.1529	.1514	.4218	.2530	.2538	.7206	.7226	.5939
	TX = .3653 NEL = 184	.5479	.1339	.1339	.4862	.2537	.2537	.8181	.6304	.6304

TAUX D'IMPREGNATION DE RESINE EN VOLUME : 36%

FIBRE

RESINE

FIBRES // à X1

$$E_1 = 3.8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$G_{23} = 2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

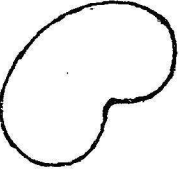
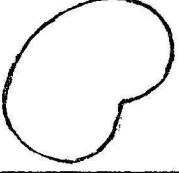
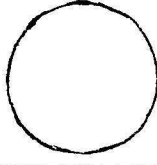
$$\nu_{23} = .25$$

$$E = .0352 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$E_2 = E_3 = .145 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = 3.8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = .22 \quad \nu = .38$$

	MAILLAGE	$E_1 (10^5 \text{ MPa})$	$E_2 (10^5 \text{ MPa})$	$E_3 (10^5 \text{ MPa})$	ν_{23}	ν_{12}	ν_{13}	$G_{23} (10^4 \text{ MPa})$	$G_{12} (10^4 \text{ MPa})$	$G_{13} (10^4 \text{ MPa})$
	C = 0 TX = .3626 NEL = 390	2.435	.1100	.1099	.2708	.2731	.2735	.3238	.6597	.5305
	C = 0.005 TX = .3636 NEL = 350	2.431	.1099	.1099	.2707	.2735	.2733	.3243	.6557	.5305
	TX = .3643 NEL = 184	2.428	.0982	.0982	.3481	.2734	.2734	.3441	.5656	.5656

TAUX D'IMPREGNATION DE RESINE EN VOLUME : 50%

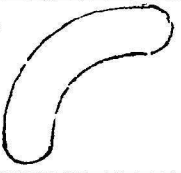
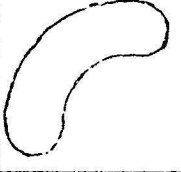
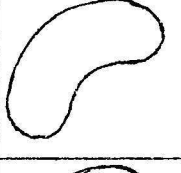
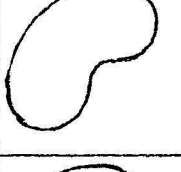
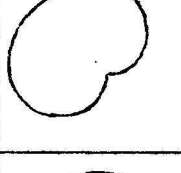
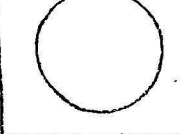
FIBRES // à X1

FIBRE

RESINE

$$E_1 = 3.8 \cdot 10^5 \text{ MPa} \quad G_{23} = 2 \cdot 10^4 \text{ MPa} \quad \nu_{23} = .25 \quad E = .0352 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$E_2 = E_3 = .145 \cdot 10^5 \text{ MPa} \quad G_{12} = G_{13} = 3.8 \cdot 10^4 \text{ MPa} \quad \nu_{12} = \nu_{13} = .22 \quad \nu = .38$$

	MAILLAGE	$E_1 (10^5 \text{ MPa})$	$E_2 (10^5 \text{ MPa})$	$E_3 (10^5 \text{ MPa})$	ν_{23}	ν_{12}	ν_{13}	$G_{23} (10^4 \text{ MPa})$	$G_{12} (10^4 \text{ MPa})$	$G_{13} (10^4 \text{ MPa})$
	C = 0. TX=.4993 NEL=362.	1.920	.0973	.0907	.3329	.2807	.3085	.2452	.5597	.3334
	C = 0.05 TX=.5014 NEL=310	1.912	.0939	.0889	.3478	.2841	.3062	.2496	.5143	.3322
	C = 0.10 TX=.5024 NEL=414	1.908	.0896	.0862	.3695	.2875	.3036	.2532	.4790	.3319
	C = 0.15 TX=.5009 NEL=432	1.914	.0858	.0833	.3924	.2889	.3022	.2586	.4541	.3331
	C = 0.20 TX=.5006 NEL=376	1.915	.0829	.0810	.4097	.2904	.3009	.2623	.4315	.3347
	C = 0.21 TX=.5042 NEL=412	1.902	.0822	.0804	.4132	.2911	.3010	.2613	.4254	.3322
	TX=.5007 NEL=192	1.915	.0762	.0762	.4464	.2960	.2960	.2755	.3632	.3632

TAUX D'IMPREGNATION DE RESINE EN VOLUME : 65%

FIBRE

RESINE

FIBRES // à x1

$$E_1 = 3.8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$G_{23} = 2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\nu_{23} = .25$$

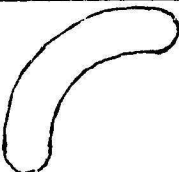
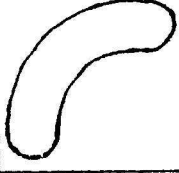
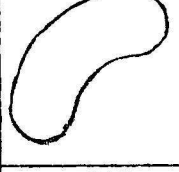
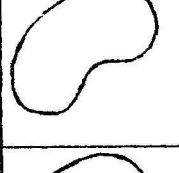
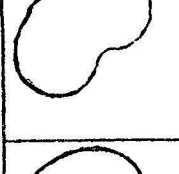
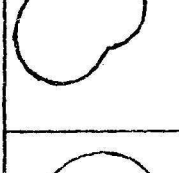
$$E = .0352 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$E_2 = E_3 = .145 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = 3.8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = .22$$

$$\nu = .38$$

	MAILLAGE	$E_1 (10^5 \text{ MPa})$	$E_2 (10^5 \text{ MPa})$	$E_3 (10^5 \text{ MPa})$	ν_{23}	ν_{12}	ν_{13}	$G_{23} (10^4 \text{ MPa})$	$G_{12} (10^4 \text{ MPa})$	$G_{13} (10^4 \text{ MPa})$
	C = 0 TX=.6496 NEL=366	1.354	.0795	.0714	.4275	.2917	.3443	.1941	.5037	.2357
	C =0.10 TX=.6507 NEL=418	1.350	.0756	.0696	.4427	.2979	.3398	.1953	.4228	.2333
	C =.25 TX=.6499 NEL=410	1.353	.0711	.0672	.4637	.3044	.3343	.2001	.3598	.2327
	C=.35 TX=.6509 NEL=352	1.350	.0687	.0658	.4753	.3079	.3317	.2035	.3311	.2331
	C=.50 TX=.6518 NEL=398	1.346	.0655	.06370	.4918	.3121	.3285	.2069	.2988	.2344
	C=.55 TX=.6517 NEL=376	1.346	.0649	.06325	.4956	.3126	.3280	.2092	.2925	.2361
	TX=.6560 NEL=200	1.330	.0621	.0621	.5023	.3213	.3213	.2130	.2526	.2526

FIBRE

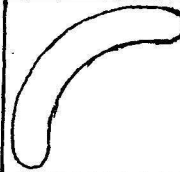
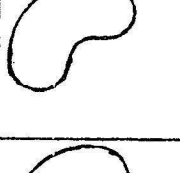
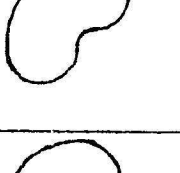
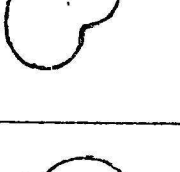
RESINE

TAUX D'IMPREGNATION DE RESINE EN VOLUME : 80%

FIBRES // à X1

$$E_1 = 3.8 \cdot 10^5 \text{ MPa} \quad G_{23} = 2 \cdot 10^4 \text{ MPa} \quad \nu_{23} = .25 \quad E = .0352 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

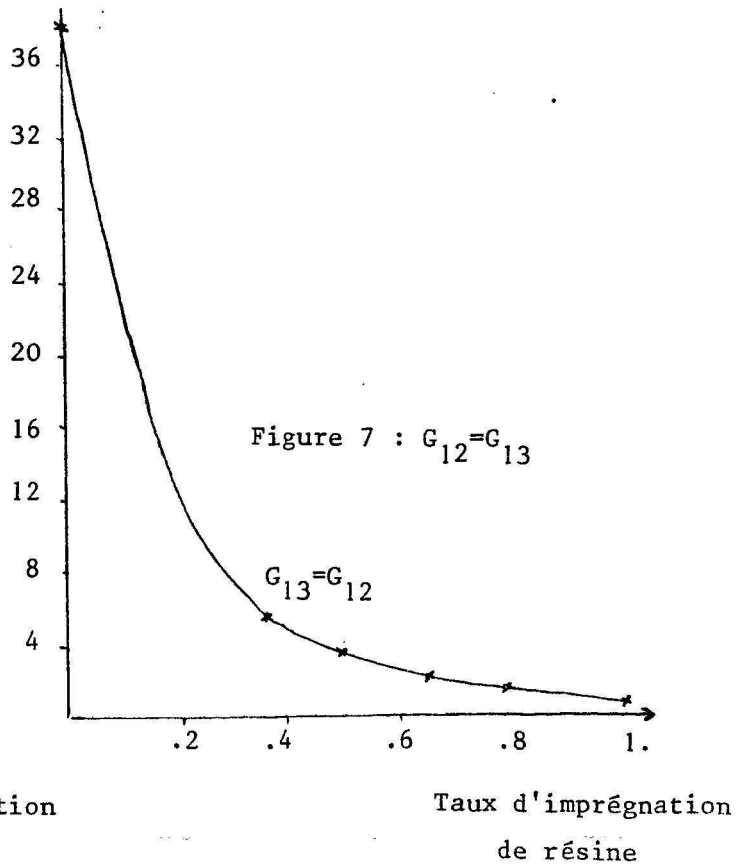
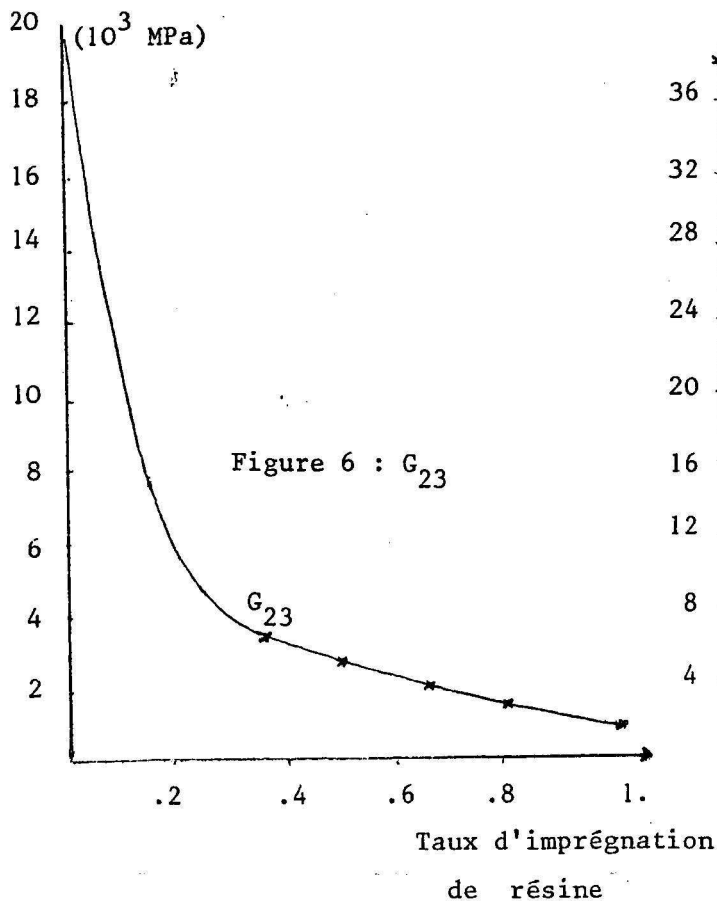
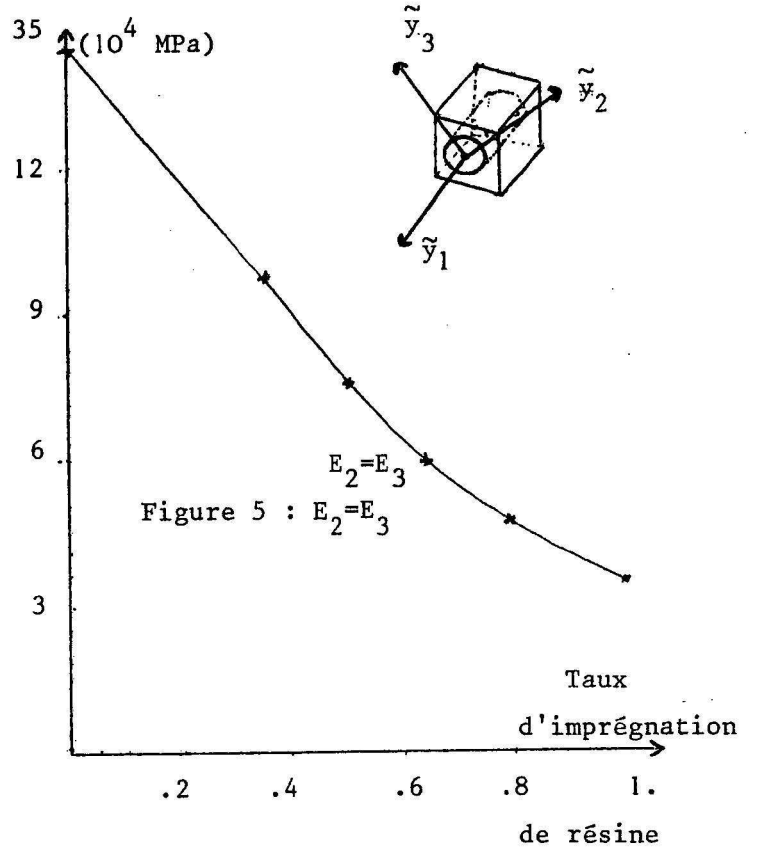
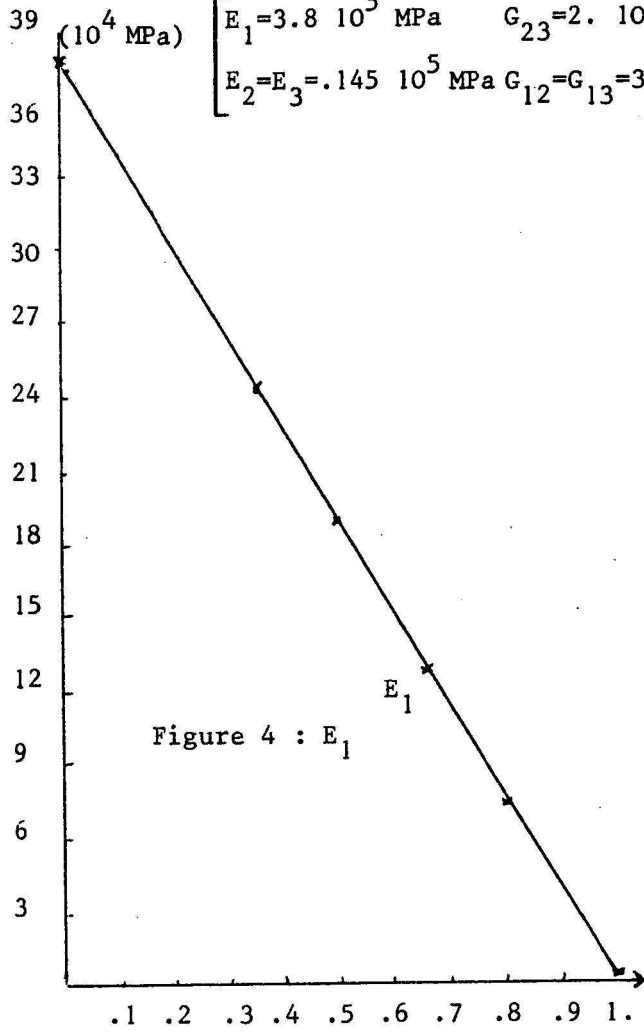
$$E_2 = E_3 = .145 \cdot 10^5 \text{ MPa} \quad G_{12} = G_{13} = 3.8 \cdot 10^4 \text{ MPa} \quad \nu_{12} = \nu_{13} = .22 \quad \nu = .38$$

	MAILLAGE	$E_1 (10^5 \text{ MPa})$	$E_2 (10^5 \text{ MPa})$	$E_3 (10^5 \text{ MPa})$	ν_{23}	ν_{12}	ν_{13}	$G_{23} (10^4 \text{ MPa})$	$G_{12} (10^4 \text{ MPa})$	$G_{13} (10^4 \text{ MPa})$
	C = 0. TX=.7986 NEL=338	.7938	.0625	.0566	.5080	.3120	.3724	.1625	.4284	.1824
	C = 0.25 TX=.7997 NEL=376	.7896	.0588	.0550	.5205	.3219	.3650	.1626	.3109	.1782
	C = 0.50 TX=.7990 NEL=402	.7922	.0568	.0541	.5278	.3277	.3603	.1639	.2638	.1763
	C = 0.75 TX=.7997 NEL=428	.7893	.0550	.0531	.5355	.3325	.3567	.1649	.2339	.1756
	C = 1. TX=.7994 NEL=458	.7906	.0538	.0524	.5402	.3360	.3538	.1661	.2158	.1767
	C = 1.23 TX=.8018 NEL=448	.7817	.0530	.0520	.5425	.3393	.3517	.1662	.2038	.1778
	NEL = 224 TX=.8022	.7801	.0521	.0521	.5412	.3457	.3457	.1674	.1869	.1869

FIBRE

RESINE

$$\left[\begin{array}{cc} E_1 = 3.8 \cdot 10^5 \text{ MPa} & G_{23} = 2 \cdot 10^4 \text{ MPa} \\ E_2 = E_3 = .145 \cdot 10^5 \text{ MPa} & G_{12} = G_{13} = 3.8 \cdot 10^4 \text{ MPa} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \nu_{23} = .25 & E = .0352 \cdot 10^5 \text{ MPa} \\ \nu_{12} = \nu_{13} = .22 & \nu = .38 \end{array} \right]$$



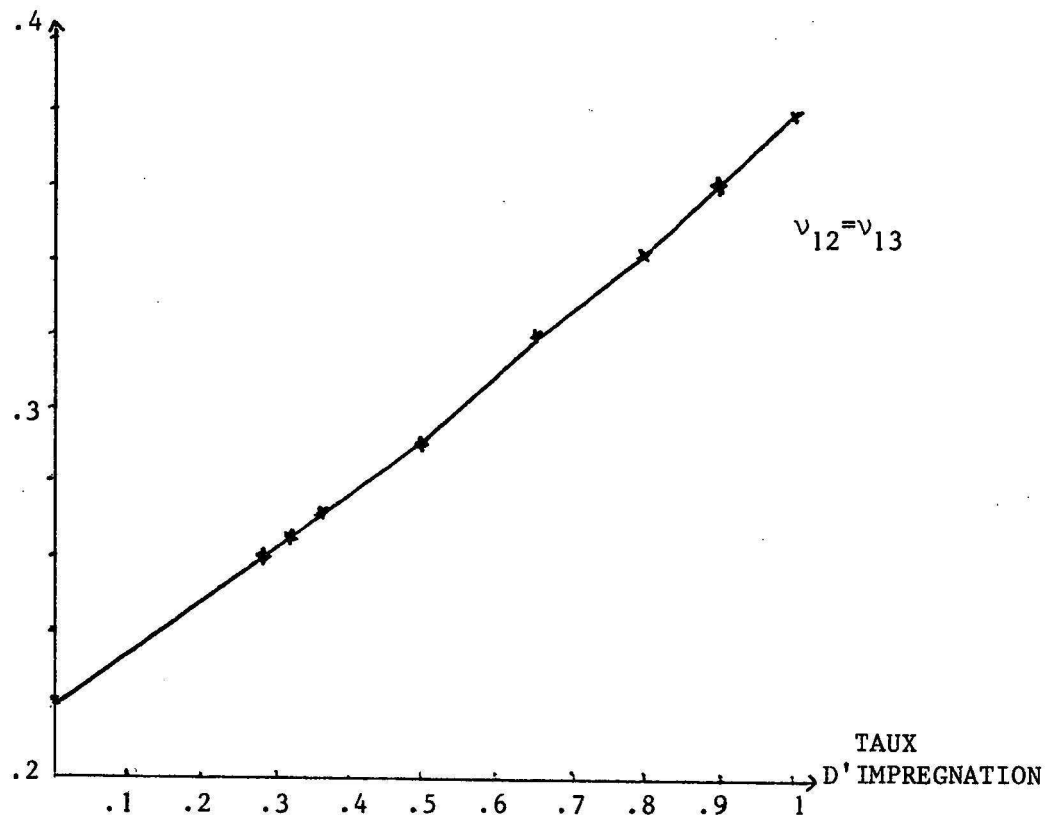


Figure 8 : $v_{12}=v_{13}$

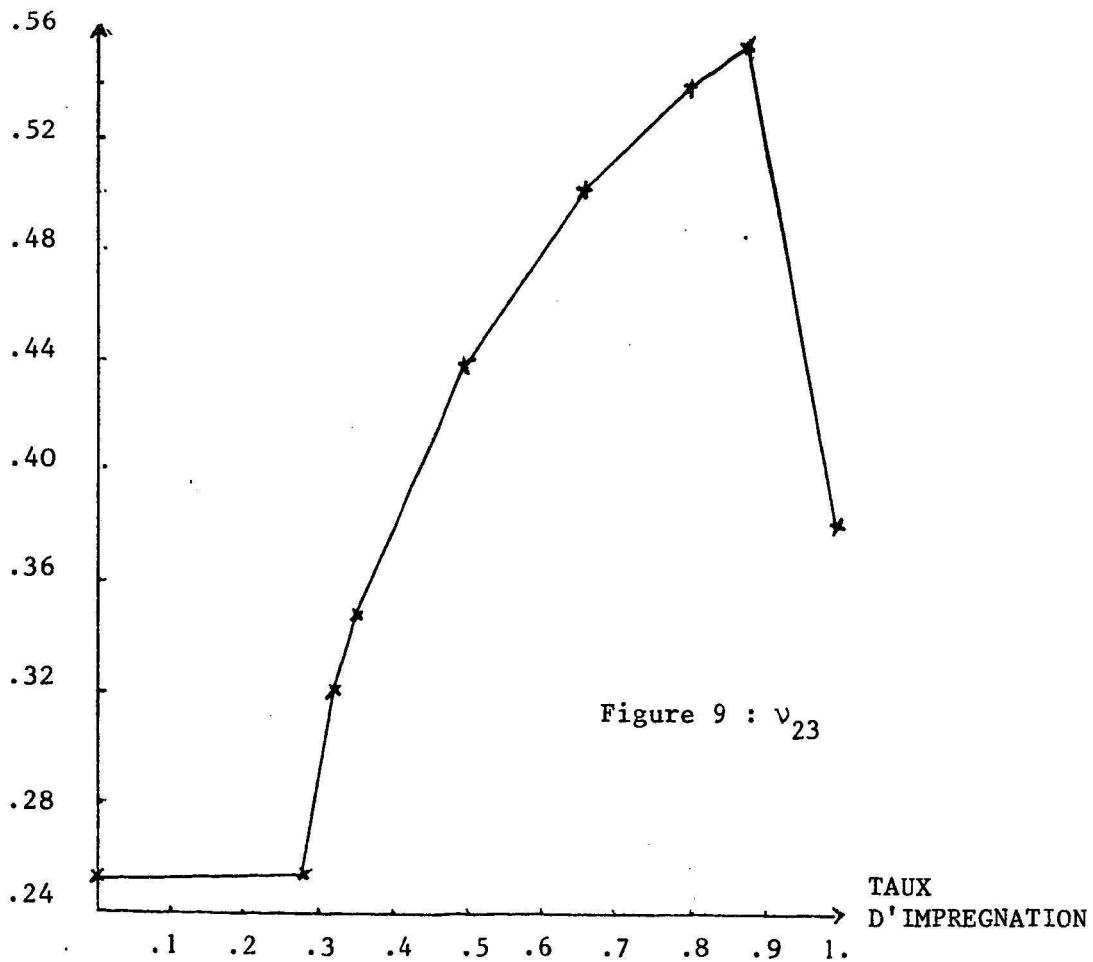


Figure 9 : v_{23}

3.6. DESCRIPTION DU PROGRAMME CAMECO

Afin d'obtenir facilement les CARactéristiques MEcaniques d'un COmposite, le programme "boite noire" CAMECO a été écrit. Ce programme a été réalisé à partir de la bibliothèque MODULEF cf [3]. Sa portabilité est la même que celle de Modulef ; c'est-à-dire très grande.

3.6.1. CONTENU PHYSIQUE

Le programme CAMECO est constitué

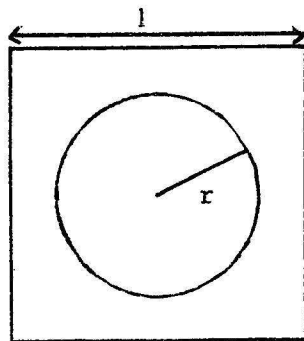
- d'une bibliothèque comprenant
 - . 214 sous programmes écrits en Fortran (22 698 cartes)
 - . 3 sous programmes écrits en Assembleur
- de 2 programmes d'appel
 - . génération des données (28 cartes)
 - . activation des taches (62 cartes)

3.6.2. GENERATION AUTOMATIQUE DU MAILLAGE

Le maillage d'une cellule unité renforcée par une fibre circulaire ou par une fibre "haricot" est généré automatiquement à partir du taux d'imprégnation en résine. Il est fourni pour chaque géométrie le taux minimum. Un paramètre optionnel permet l'affinage du maillage (distance entre 2 noeuds voisins de la frontière interne (fibre/résine) et de la frontière de la cellule).

Remarque 3.6.1. : D'après les résultats obtenus, le calcul des caractéristiques ne demande pas une discrétisation très fine de la cellule. La finesse de la discrétisation n'influence guère les résultats. La précision du calcul est suffisante compte tenu que les informations sur la répartition des fibres, les caractéristiques de chaque composant sont connues au mieux à 10% près.

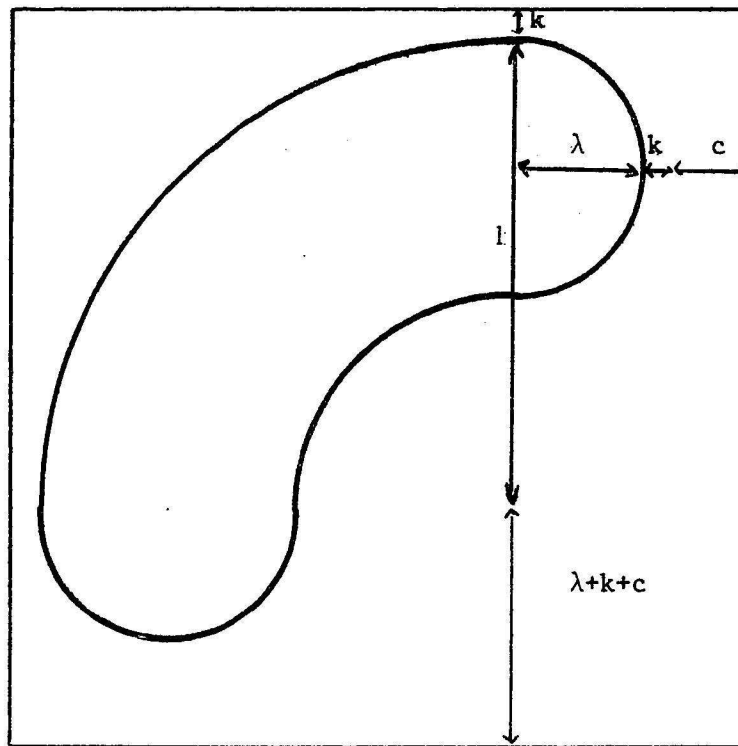
i) Fibre circulaire



$$r = \sqrt{\frac{l - \text{taux}}{\pi}}$$

ii) Fibre haricot

Pour systématiser la génération du maillage, on a considéré le cas d'un haricot constitué par 2 arcs de cercle ayant même centre et réunis par 2 demi-cercles de rayon λ .

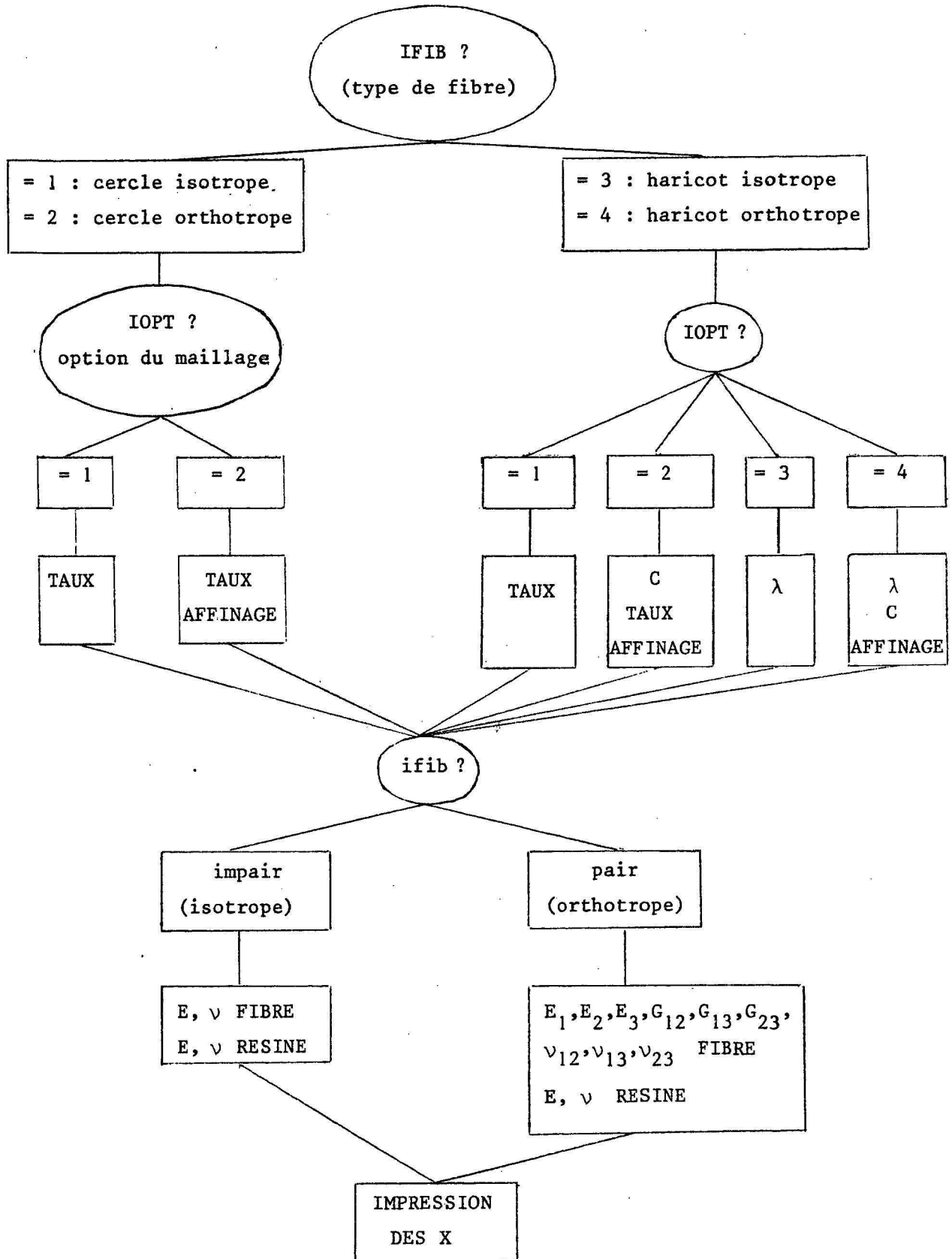


$$\text{taux} = \frac{(1+\lambda+2k+c)^2 - \lambda\pi}{(1+\lambda+2k+c)^2}$$

- k paramètre de valeur petite permettant (techniquement) la génération du maillage (si $k = 0$, la fibre est tangente au bord de la cellule)
- c paramètre permettant pour une forme donnée de haricot (λ fixé) de faire varier le taux d'imprégnation en résine.
- En général les valeurs de k ($=.03$) et c ($=0.0$) sont fixées, λ n'est déterminé qu'en fonction du taux.

3.6.3. DONNEES A FOURNIR

Les identificateurs tapés en lettres majuscules correspondent à des valeurs à fournir.



3.6.4. ACTIVATION DES TACHES

A partir du fichier de données généré à l'étape précédente, le programme réalise :

- le maillage
- la renumérotation des noeuds
- la résolution des 4 problèmes de type élasticité (calcul des X^{ii} et X^{12})
- la résolution des 2 problèmes de type thermique (calcul des $X^{\alpha 3}$)
- le calcul et l'impression des caractéristiques mécaniques du composite.

3.6.5. PRESENTATION DES RESULTATS

Dans le programme CAMECO, les calculs sont menés et les résultats imprimés pour des fibres parallèles à Ox_1 .

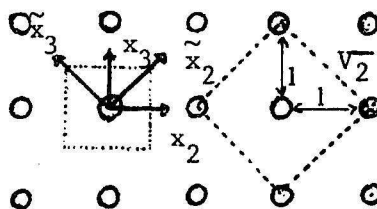
Pour chaque cas on obtient dans le repère $Ox_1x_2x_3$.

- Les caractéristiques des 2 composants
- Le tenseur d'élasticité Q_{ijkl} homogénéisé
- Le tenseur des complaisances (Q^{-1}) homogénéisé

i) Fibre circulaire

Le composite étant orthotrope dans le repère d'axes $Ox_1x_2x_3$, on exprime à partir du tenseur des complaisances, les 9 caractéristiques du matériau homogénéisé.

Egalement, on explicite le tenseur des complaisances et les 9 caractéristiques dans le repère d'axes bissecteurs $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ (rotation de -45° autour de Ox_1). Ceci correspond à un cas particulier de fibres disposés en quinconce i.e.



Remarque 3.6.5. Le programme peut être généralisé à n'importe quel cas de quinconce.

ii) Fibre haricot

Le composite est monoclinique dans tout repère d'axes mais orthotrope dans le repère bissecteur $\tilde{Ox}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ (cf 3.4). Par conséquent, dans le repère $Ox_1x_2x_3$ on n'imprime que les valeurs du tenseur des complaisances. Par contre, dans le repère d'orthotropie $\tilde{Ox}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$, on exprime le tenseur des complaisances ainsi que les 9 caractéristiques mécaniques (modules d'Young, coefficients de Poisson et modules de cisaillement).

3.6.6. EXEMPLES D'UTILISATION

i) Fibre circulaire isotrope

On considère un composite imprégné de 50 % en résine ($E = 4000.$, $\nu = .34$) et renforcé par des fibres de verre ($E = 84\ 000$, $\nu = .22$).

```

IFIB ? ( = 1 FIBRE CYLINDRIQUE ISOTROPE)
        ( = 2 FIBRE CYLINDRIQUE ORTHOTROPE)
        ( = 3 FIBRE-HARICOT ISOTROPE)
        ( = 4 FIBRE-HARICOT ORTHOTROPE)
→ 1
IOPT ? (SI = 1 FOURNIR LE TAUX D IMPREGNATION DE RESINE)
        (SI = 2 FOURNIR LE TAUX ET HDIST : PARAMETRE D AFFINAGE
        DU MAILLAGE)
→ 1
TAUX ? ( > 0.2762 )
→ .50
E, NU = ? (MODULE YOUNG COEFF. POISSON FIBRE ISOTROPE)
→ 84000. .22
E, NU = ? (MODULE YOUNG COEFF. POISSON RESINE ISOTROPE)
→ 4000. .34
IMPRE ? ( < OU = 10 ; PARAMETRE D IMPRESSION DES CORRECTEURS KHI)
→ 0

```

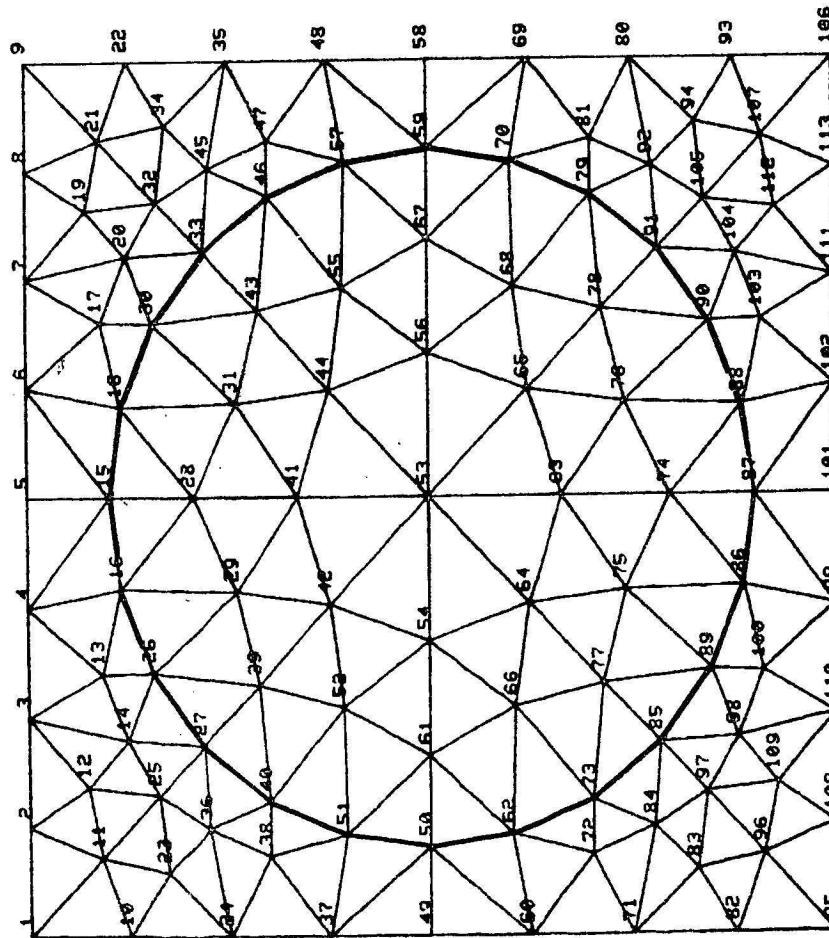
Remarques : 1) Les valeurs fléchées correspondent aux valeurs fournies par l'utilisateur.

2) Pour la génération du maillage on a pris la valeur par défaut (.15) pour l'affinage du maillage.

3) Le taux minimum est indiqué (>0.2762)

HOMOGENEISATION

VOULEZ-VOUS LES NUMEROS DES SOMMETS (T/F)?
 VOUS VOULEZ UNE NOUVELLE FENETRE (T/F)?



REC NO E 01

REC NO S 02

DEF FEN 03

DEP SOM 04

RET SOM 05

0->2T 06

2T->Q 07

2T->4T 08

RET 4T2 09

->DISQ 10

FIN 11

LES FIBRES SONT PARALLELES A X1

NOTATIONS *****
E1,E2,E3 : MODULE D'YOUNG FIBRE (COMPOSITE) DIRECTIONS X1,X2,X3
GIJ : MODULE DE CISAILLEMENT FIBRE (COMPOSITE)
NU(IJ) : COEFFICIENT DE POISSON FIBRE (COMPOSITE)
ER : MODULE D'YOUNG RESINE
NUR : COEFFICIENT DE POISSON RESINE
NEL : NOMBRE D'ELEMENTS
NOE : NOMBRE DE NOEUDS
TXR : TAUX D'IMPREGNATION DE RESINE EN VOLUME

* FIBRE CERCLE ISOTROPE *RESINE ISOTROPE* MAILLAGE *
* *
* E1 = 84000. . G12 = 34426. . NU12 = 0.220 * ER = 4000. * NEL = 192 *
* E2 = 84000. . G13 = 34426. . NU13 = 0.220 * * NOE = 113 *
* E3 = 84000. . G23 = 34426. . NU23 = 0.220 * NUR = 0.340 * TXR = .5057 *

TENSEUR D'ELASTICITE HOMOGENEISE
* *
* 1 1 2 2 3 3 2 3 1 3 1 2 *
* 0.46460+05 0.53130+04 0.53130+04 -0.22750-06 0.00000+00 0.00000+00 *
* 0.53130+04 0.14680+05 0.48350+04 0.55350-06 0.00000+00 0.00000+00 *
* 0.53130+04 0.48350+04 0.14680+05 0.39950-06 0.00000+00 0.00000+00 *
* -0.22750-06 0.55350-06 0.39950-06 0.31270+04 0.00000+00 0.00000+00 *
* 0.00000+00 0.00000+00 0.00000+00 0.00000+00 0.40940+04 0.31810-04 *
* 0.00000+00 0.00000+00 0.00000+00 0.00000+00 0.31810-04 0.40940+04 *

TENSEUR DES COMPLAISANCES HOMOGENEISE
* *
* 1 1 2 2 3 3 2 3 1 3 1 2 *
* 0.22950-04 -0.62480-05 -0.62480-05 0.35740-14 0.00000+00 0.00000+00 *
* -0.62480-05 0.78100-04 -0.23460-04 -0.11280-13 0.00000+00 0.00000+00 *
* -0.62480-05 -0.23460-04 0.78100-04 -0.62800-14 0.00000+00 0.00000+00 *
* 0.35740-14 -0.11280-13 -0.62800-14 0.31980-03 0.00000+00 0.00000+00 *
* 0.00000+00 0.00000+00 0.00000+00 0.00000+00 0.24430-03 -0.18980-11 *
* 0.00000+00 0.00000+00 0.00000+00 0.00000+00 -0.18980-11 0.24430-03 *

* E1 = 0.435652E+05 E2 = 0.128044E+05 E3 = 0.128044E+05 *
* NU23 = 0.300362E+00 NU12 = 0.272214E+00 NU13 = 0.272214E+00 *
* G23 = 0.312690E+04 G12 = 0.409364E+04 G13 = 0.409364E+04 *

ROTATION 45 DEGRES AUTOUR DE X1

TENSEUR DES COMPLAISANCES HOMOGENEISE (AXES BISSECTEURS)
* *
* 1 1 2 2 3 3 2 3 1 3 1 2 *
* 0.22950-04 -0.62480-05 -0.62480-05 -0.72080-12 0.00000+00 0.00000+00 *
* -0.62480-05 0.10730-03 -0.52630-04 0.78210-11 0.00000+00 0.00000+00 *
* -0.62480-05 -0.52630-04 0.10730-03 0.78160-11 0.00000+00 0.00000+00 *
* -0.72080-12 0.78210-11 0.78160-11 0.20310-03 0.00000+00 0.00000+00 *
* 0.00000+00 0.00000+00 0.00000+00 0.00000+00 0.24430-03 0.18210-10 *
* 0.00000+00 0.00000+00 0.00000+00 0.00000+00 0.18210-10 0.24430-03 *

* E1 = 0.435652E+05 E2 = 0.932214E+04 E3 = 0.932214E+04 *
* NU23 = 0.490633E+00 NU12 = 0.272214E+00 NU13 = 0.272214E+00 *
* G23 = 0.492339E+04 G12 = 0.409364E+04 G13 = 0.409364E+04 *

ii) Fibre haricot orthotropie :

On considère un composite imprégné de 50 % en résine ($E = 3520.$, $\nu = .38$) et renforcé par des fibres de carbone orthotrope ($E_1 = 380\ 000.$, $E_2 = E_3 = 14\ 500.$, $G_{12} = G_{13} = 38\ 000.$, $G_{23} = 20\ 000.$, $\nu_{12} = \nu_{13} = .22$, $\nu_{23} = .25$)

```

IFIB ? ( = 1 FIBRE CYLINDRIQUE ISOTROPE)
        ( = 2 FIBRE CYLINDRIQUE ORTHOTROPE)
        ( = 3 FIBRE-HARICOT ISOTROPE)
        ( = 4 FIBRE-HARICOT ORTHOTROPE)
→ 4
IOPT ? (SI = 1 FOURNIR TAUX      : IMPREGNATION RESINE EN VOLUME)
        (SI = 2 FOURNIR C        : EPAISSEUR RESINE SUPPLEMENTAIRE
        TAUX                      :
        HDIST                     : PARAMETRE AFFINAGE MAILLAGE)
        (SI = 3 FOURNIR LAMBDA   : RAYON EXTREMITE FIBRE)
        (SI = 4 FOURNIR LAMBDA   :
        C                          :
        HDIST                     : )
→ IOPT = ?
→ 1
TAUX = ? ( TXMIN = 0.3545 )
→ .5
    TAUX = 0.500 ( TXMIN = 0.3545 )
    LAMBDA = 0.290
    C = 0.000
    HDIST = 0.190
→ E1 , E2 , E3 = ? (FIBRES ORTHOTROPE // A X1)
→ 380000. , 14500. , 14500.
→ G12 , G13 , G23 = ? (FIBRES ORTHOTROPE // A X1)
→ 38000. , 38000. , 20000.
→ NU12 , NU13 , NU23 = ? (FIBRES ORTHOTROPE // A X1)
→ .22 , .22 , .25
→ E , NU = ? (MODULE YOUNG COEFF. POISSON RESINE ISOTROPE)
→ 3520. , .38
→ IMPRE ? ( <OU=10 ; PARAMETRE D IMPRESSION DES CORRECTEURS KHI)
→ 0

```

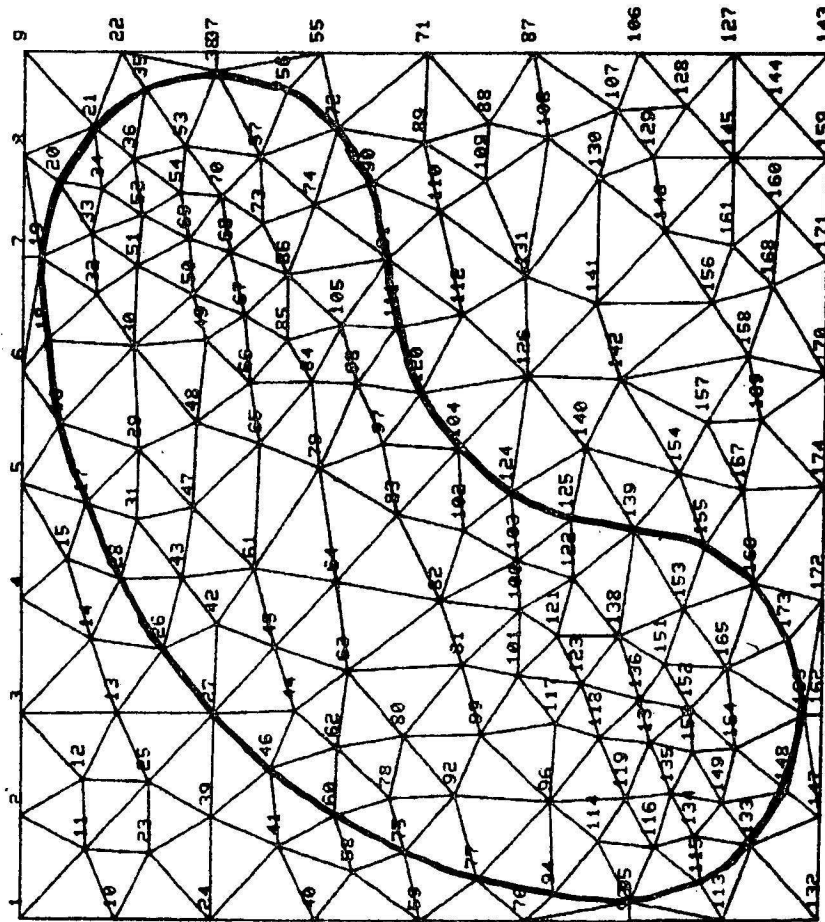
Remarques: 1) Les valeurs fléchées correspondent aux valeurs fournies.

2) Pour la génération du maillage on a choisi l'option (1) dans lequel on prend pour λ , C et hdist les valeurs par défaut, ces valeurs sont imprimées.

3) Le taux minimum est indiqué (>.3545).

HOMOGENEISATION

VOULEZ-VOUS LES NUMEROS DES SOMMETS (T/F)?
VOUS VOULEZ UNE NOUVELLE FENETRE (T/F)?



REC NO E 01

REC NO S 02

DEF FEN 03

DEP SOM 04

RET SOM 05

Q->2T 06

2T->Q 07

2T->4T 08

RET 4T2 09

->DISQ 10

FIN 11

LES FIBRES SONT PARALLELES A X1

NOTATIONS E1,E2,E3: MODULE D'YOUNG FIBRE (COMPOSITE) DIRECTIONS X1,X2,X3
 ***** GIJ : MODULE DE CISAILLEMENT FIBRE (COMPOSITE)
 NU(IJ) : COEFFICIENT DE POISSON FIBRE (COMPOSITE)
 ER : MODULE D'YOUNG RESINE
 NUR : COEFFICIENT DE POISSON RESINE

NEL : NOMBRE D'ELEMENTS
 NOE : NOMBRE DE NOEUDS
 TXR : TAUX D IMPREGNATION DE RESINE EN VOLUME

* FIBRE HARICOT ORTHOTROPE *RESINE ISOTROPE* MAILLAGE *

.....

* E1 = 380000. G12 = 38000. NU12 = 0.220 * ER = 3520. * NEL = 314 *

* E2 = 14500. G13 = 38000. NU13 = 0.220 * * NOE = 174 *

* E3 = 14500. G23 = 20000. NU23 = 0.250 * NUR = 0.380 * TXR = .5041 *

* TENSEUR D ELASTICITE HOMOGENEISE *

.....

1 1	2 2	3 3	2 3	1 3	1 2
0.19270+06	0.41290+04	0.41290+04	0.10180+02	0.00000+00	0.00000+00
0.41290+04	0.94320+04	0.45650+04	0.19010+03	0.00000+00	0.00000+00
0.41290+04	0.45650+04	0.94320+04	0.19010+03	0.00000+00	0.00000+00
0.10180+02	0.19010+03	0.19010+03	0.35380+04	0.00000+00	0.00000+00
0.00000+00	0.00000+00	0.00000+00	0.00000+00	0.44390+04	0.11450+04
0.00000+00	0.00000+00	0.00000+00	0.00000+00	0.11450+04	0.44390+04

* TENSEUR DES COMPLAISANCES HOMOGENEISE *

.....

1 1	2 2	3 3	2 3	1 3	1 2
0.52560-05	-0.15530-05	-0.15530-05	0.15170-06	0.00000+00	0.00000+00
-0.15530-05	0.13900-03	-0.66500-04	-0.38890-05	0.00000+00	0.00000+00
-0.15530-05	-0.66500-04	0.13900-03	-0.38890-05	0.00000+00	0.00000+00
0.15170-06	-0.38890-05	-0.38890-05	0.28310-03	0.00000+00	0.00000+00
0.00000+00	0.00000+00	0.00000+00	0.00000+00	0.24140-03	-0.62260-04
0.00000+00	0.00000+00	0.00000+00	0.00000+00	-0.62260-04	0.24140-03

* AXES D'ORTHOTROPIE *

* TENSEUR DES COMPLAISANCES HOMOGENEISE (AXES BISSECTEURS) *

.....

1 1	2 2	3 3	2 3	1 3	1 2
0.52560-05	-0.14770-05	-0.16280-05	-0.39420-13	0.00000+00	0.00000+00
-0.14770-05	0.10310-03	-0.34530-04	0.42850-12	0.00000+00	0.00000+00
-0.16280-05	-0.34530-04	0.11090-03	0.14130-11	0.00000+00	0.00000+00
-0.39420-13	0.42850-12	0.14130-11	0.41090-03	0.00000+00	0.00000+00
0.00000+00	0.00000+00	0.00000+00	0.00000+00	0.30360-03	-0.66380-11
0.00000+00	0.00000+00	0.00000+00	0.00000+00	-0.66380-11	0.17910-03

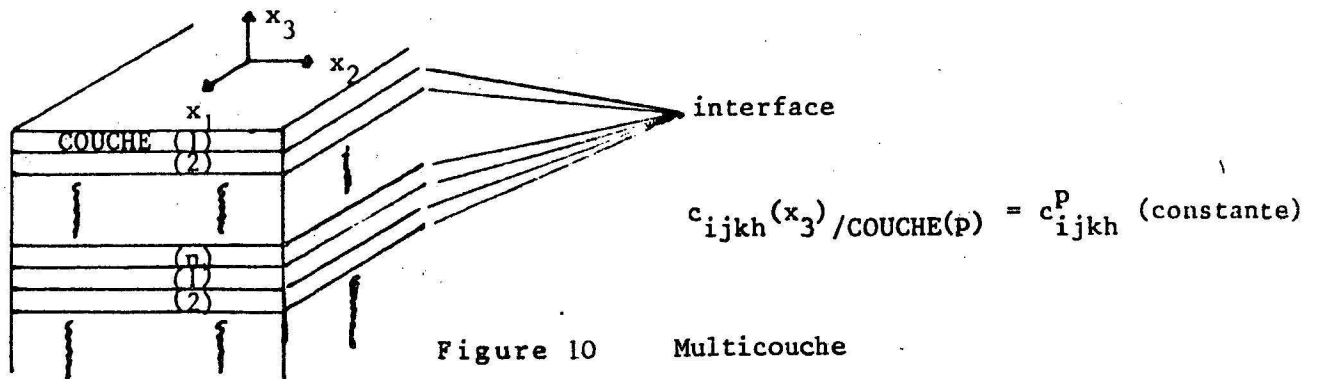
* E1 = 0.190242E+06 E2 = 0.969830E+04 E3 = 0.901806E+04 *

* NU23 = 0.334921E+00 NU12 = 0.280946E+00 NU13 = 0.309807E+00 *

* G23 = 0.243344E+04 G12 = 0.558360E+04 G13 = 0.329355E+04 *

4. APPLICATION A UN EMPILEMENT PERIODIQUE DE COUCHES HOMOGENES.

Nous considérons un empilement périodique d'une multitude de couches homogénéisées. Chaque couche est caractérisée par une direction de fibres. Dans l'empilement ces directions varient périodiquement en restant orthogonales à l'axe $O\vec{X}_3$.



4.1. CALCUL DES $\vec{X}^{ij}$

Le tenseur d'élasticité de chaque couche dans le repère de référence $(0, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ est de la forme :

$$(4.1) \quad \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & c_{1112} \\ & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & c_{2212} \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & c_{3312} \\ \text{SYM} & & & c_{2323} & c_{2313} & 0 \\ & & & & c_{1313} & 0 \\ & & & & & c_{1212} \end{bmatrix}$$

Les coefficients c_{ijkh} du multicouche ainsi construit ne dépendent que de la seule variable x_3 :

$$c_{ijkh}(x) = c_{ijkh}(x_3)$$

et sont Y_3 -périodique en la variable x_3 .

Il en résulte que les champs $\bar{X}^{ij}(y)$ (cf 2.22) ne dépendent que de la variable y_3 . L'expression des coefficients homogénéisés (2.25) s'écrit alors :

$$(4.3) \quad Q_{ijkh} = \frac{1}{|V|} \left[\int_V c_{ijkh}(y_3) dy - \int_V c_{khmn}(y_3) \frac{\partial \bar{X}_m^{ij}(y_3)}{\partial y_n} dy \right]$$

où

$\bar{X}^{ij}(y_3) = [\bar{X}_1^{ij}(y_3), \bar{X}_2^{ij}(y_3), \bar{X}_3^{ij}(y_3)]$ est le champ Y_3 -périodique vérifiant au sens des distributions le système :

$$(4.4) \quad - \frac{\partial}{\partial y_n} [c_{mnkh}(y_3) \cdot \frac{\partial}{\partial y_h} \bar{X}_k^{ij}(y_3)] = - \frac{\partial}{\partial y_n} [c_{mnkh}(y_3) \cdot \frac{\partial}{\partial y_h} P_k^{ij}]$$

Etant donné la forme particulière du tenseur $[c_{ijkh}]$, cf (4.1), et par un raisonnement analogue à celui mené au § 3.1, on montre que le calcul des $\bar{X}_k^{ij}$ solutions de (4.4) se réduit alors à la résolution (analytique) d'équations différentielles.

Equations pour X^{11}

développons (4.4) :

$$- \frac{d}{dy_3} [c_{m3kh}(y_3) \cdot \frac{\partial}{\partial y_h} \bar{X}_k^{ij}(y_3)] = - \frac{d}{dy_3} [c_{m3kh}(y_3) \cdot \frac{\partial}{\partial y_h} P_k^{11}]$$

pour $m = 1, 2$

$$\left\{ \begin{aligned} - \frac{d}{dy_3} [c_{1313}(y_3) \frac{d}{dy_3} (X_1^{11}) + c_{1323}(y_3) \frac{d}{dy_3} (X_2^{11}) + c_{1333}(y_3) \frac{d}{dy_3} (X_3^{11})] &= - \frac{d}{dy_3} [c_{1311}(y_3)] \\ - \frac{d}{dy_3} [c_{2313}(y_3) \frac{d}{dy_3} (X_1^{11}) + c_{2323}(y_3) \frac{d}{dy_3} (X_2^{11}) + c_{2333}(y_3) \frac{d}{dy_3} (X_3^{11})] &= - \frac{d}{dy_3} [2311(y_3)] \end{aligned} \right.$$

Soit avec (4.1)

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{aligned} - \frac{d}{dy_3} [c_{1313}(y_3) \frac{d}{dy_3} X_1^{11} + c_{1323}(y_3) \frac{d}{dy_3} X_2^{11}] &= 0 \\ - \frac{d}{dy_3} [c_{2313}(y_3) \frac{d}{dy_3} X_1^{11} + c_{2323}(y_3) \frac{d}{dy_3} X_2^{11}] &= 0 \end{aligned} \right.$$

Le problème (4.5) ayant un second membre nul, les solutions X_1^{11}, X_2^{11} sont constantes. On choisit :

$$X_1^{11} = X_2^{11} = 0.$$

Pour $m = 3$

$$-\frac{d}{dy_3} [c_{3333}(y_3) \frac{d}{dy_3} x_3^{11}] = -\frac{d}{dy_3} [c_{3311}(y_3)].$$

D'où

$$c_{3333}(y_3) \frac{d}{dy_3} x_3^{11} = c_{3311} + C \quad (C = \text{constante})$$

Cette équation admet une solution x_3^{11} Y_3 -périodique ssi :

$$\int_0^{Y_3} \frac{d}{dy_3} x_3^{11} dy_3 = 0,$$

soit

$$\int_0^{Y_3} \frac{c_{3311}(y_3) + C}{c_{3333}(y_3)} dy_3 = 0$$

d'où

$$C = - \frac{\int_0^{Y_3} \frac{c_{3311}(y_3)}{c_{3333}(y_3)} dy_3}{\int_0^{Y_3} \frac{1}{c_{3333}(y_3)} dy_3}$$

En résumé :

Pour $(i,j) \neq (\alpha,3)$

$\vec{x}^{ij}(y_3)$ est de la forme $[0, 0, x_3^{ij}(y_3)]$,

$$\frac{d}{dy_3} [x_3^{ij}(y_3)] = \frac{c_{33ij}(y_3) + C}{c_{3333}(y_3)} ,$$

(4.6)

avec

$$C = - \frac{\int_0^{Y_3} \frac{c_{33ij}(y_3)}{c_{3333}(y_3)} dy_3}{\int_0^{Y_3} \frac{1}{c_{3333}(y_3)} dy_3} .$$

Pour $(i,j) = (\alpha,3)$, $\vec{x}^{\alpha 3}(y_3)$ est de la forme :

$$\vec{x}^{\alpha 3}(y_3) = [x_1^{\alpha 3}(y_3), x_2^{\alpha 3}(y_3), 0]$$

$$(4.7) \quad \frac{d}{dy_3} x_1^{\alpha 3}(y_3) = \delta_{1\alpha} + C_1 \frac{c_{2323}(y_3)}{c_{1313}(y_3) \times c_{2323}(y_3) - [c_{1323}(y_3)]^2} - C_2 \frac{c_{1323}(y_3)}{c_{1313}(y_3) \times c_{2323}(y_3) - [c_{1323}(y_3)]^2}$$

$$\frac{d}{dy_3} x_2^{\alpha 3}(y_3) = \delta_{2\alpha} - C_1 \frac{c_{1323}(y_3)}{c_{1313}(y_3) \times (c_{2323}(y_3) - [c_{1323}(y_3)]^2)} + C_2 \frac{c_{1313}(y_3)}{c_{1313}(y_3) \times c_{2323}(y_3) - [c_{1323}(y_3)]^2}$$

où les constantes C_1 et C_2 sont déterminées par :

$$\int_0^{Y_3} \frac{d}{dy_3} [x_1^{\alpha 3}(y_3)] dy_3 = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{Y_3} \frac{d}{dy_3} [x_2^{\alpha 3}(y_3)] dy_3 = 0.$$

4.2. EXPRESSION DES COEFFICIENTS D'ELASTICITE "HOMOGENEISES".

(4.3) s'écrit : $(Y =]0,1[\times]0,1[\times]0, Y_3[)$

$$Q_{ijkh} = \frac{1}{Y_3} \int_0^{Y_3} \{ c_{ijkh}(y_3) - c_{m3kh}(y_3) \frac{d}{dy_3} [X_m^{ij}(y_3)] \} dy_3$$

soit avec (4.6), (4.7)

(4.8)

Pour $(i,j) \neq (\alpha,3)$

$$Q_{ijkh} = \overline{c_{ijkh}(y_3)} - \frac{1}{Y_3} \int_0^{Y_3} \{ c_{33kh}(y_3) \left[\frac{c_{33ij}(y_3) + c}{c_{3333}(y_3)} \right] \} dy_3,$$

où

$$c = - \frac{\int_0^{Y_3} \left[\frac{c_{33ij}(y_3)}{c_{3333}(y_3)} \right] dy_3}{\int_0^{Y_3} \left[\frac{1}{c_{3333}(y_3)} \right] dy_3}$$

(4.9)

Pour $(i,j) = (\alpha,3)$

$$Q_{\alpha 3 kh} = \overline{c_{\alpha 3 kh}(y_3)} - \frac{1}{Y_3} \int_0^{Y_3} \{ c_{13kh}(y_3) \frac{d}{dy_3} [X_1^{\alpha 3}(y_3)] + c_{23kh}(y_3) \frac{d}{dy_3} [X_2^{\alpha 3}(y_3)] \} dy_3$$

où $\frac{d}{dy_3} [X_1^{\alpha 3}(y_3)]$ et $\frac{d}{dy_3} [X_2^{\alpha 3}(y_3)]$ sont données par (4.7).

Remarque 4.1. :

Dans le cas des couches homogènes isotropes, l'isotropie transverse est conservée. En effet, en posant :

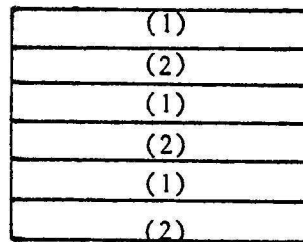
$$I_n = \frac{1}{Y_3} \int_0^{Y_3} \frac{\lambda^n(y_3)}{\lambda(y_3) + 2\mu(y_3)} dy_3 ; J_0 = \frac{1}{Y_3} \int_0^{Y_3} \frac{dy_3}{\mu(y_3)}$$

On obtient :

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_{1111} = Q_{2222} = \frac{I_0 I_2 - (I_1)^2}{(\lambda + 2\mu) I_0} , \\ Q_{1122} = Q_{2211} = \bar{\lambda} - \frac{I_0 I_2 - (I_1)^2}{I_0} , \\ Q_{1133} = Q_{3311} = Q_{2233} = Q_{3322} = \frac{I_1}{I_0} , \\ Q_{3333} = \frac{1}{I_0} , \quad Q_{1212} = \bar{\mu} \\ Q_{1313} = Q_{2323} = \frac{1}{J_0} . \\ Q_{1111} = Q_{1122} + 2Q_{1212} \end{array} \right.$$

4.3. APPLICATION NUMERIQUE

On applique les formules d'homogénéisation [(4.6)-(4.9)] à une plaque constituée d'une superposition périodique de deux couches homogènes (résultant des homogénéisations réalisées au Chapitre II) et se déduisant l'une de l'autre par une rotation d'angle 2θ .

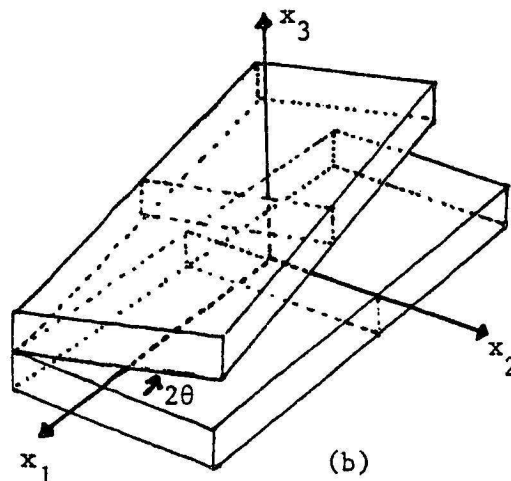


(a)

Figure : 11

(a) Multicouches

(b) Représentation des deux couches.



(b)

On travaille dans le repère d'orthotropie $R(0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ où $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$ sont portés par les bissectrices de l'angle des fibres (dédit de $R(0, x_1, x_2, x_3)$ par rotation d'angle θ). Le tableau ci-après ainsi que les figures 12-15 représentent les variations des caractéristiques en fonction de θ .

ANGLE : θ	E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	E_3 (MPa)	ν_{23}	ν_{12}	ν_{13}	G_{23} (MPa)	G_{12} (MPa)	G_{13} (MPa)
0	120 000	6 000	6 000	.200	.280	.280	2 500	3 800	3 800
5	117 776	6 026	6 004	.198	.411	.251	2 506	4 613	3 785
10	110 153	6 112	6 016	.194	.766	.173	2 526	6 956	3 741
15	95 823	6 274	6 035	.187	1.21	.069	2 558	10 545	3 672
20	76 003	6 546	6 063	.177	1.55	-.020	2 604	14 947	3 582
22,5	65 437	6 740	6 079	.170	1.63	-.048	2 631	17 290	3 531
25	55 329	6 986	6 096	.163	1.64	-.062	2 662	19 632	3 477
30	38 251	7 690	6 132	.144	1.52	-.057	2 733	24 035	3 362
35	26 211	8 819	6 165	.121	1.28	-.025	2 817	27 624	3 244
40	18 435	10 643	6 190	.092	1.02	-.016	2 911	29 967	3 127
45	13 607	13 607	6 198	.056	.79	.056	3 015	30 780	3 015

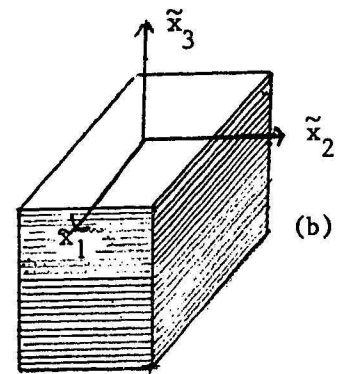
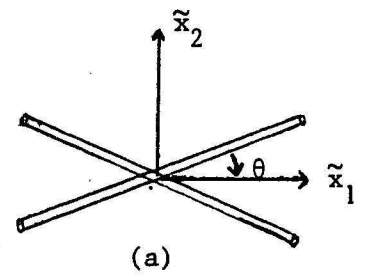
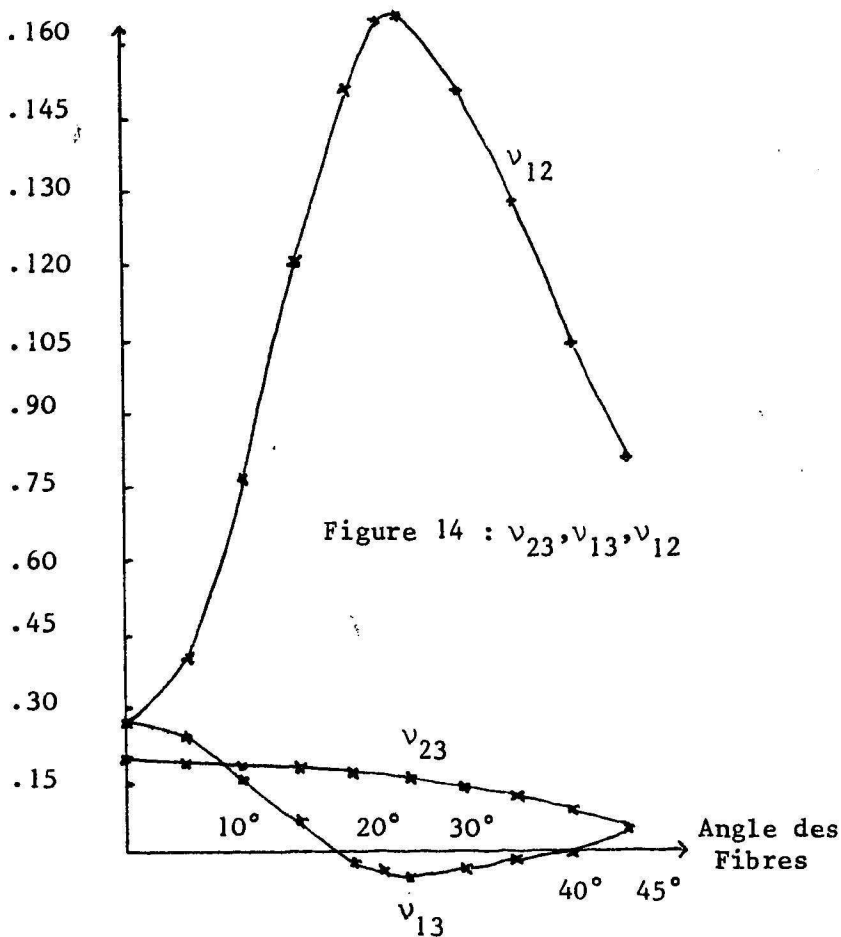
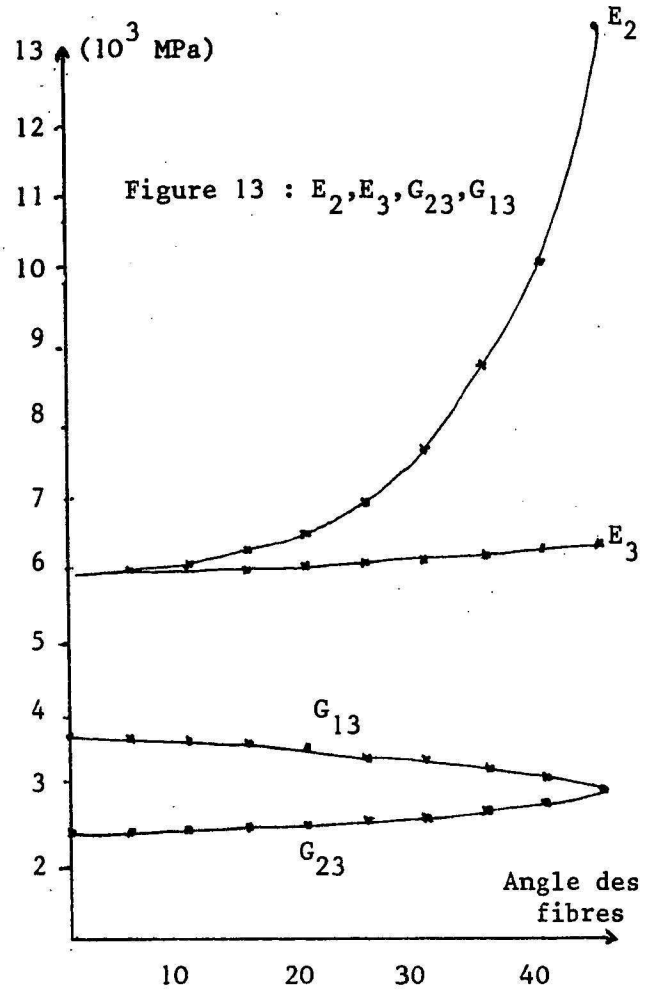
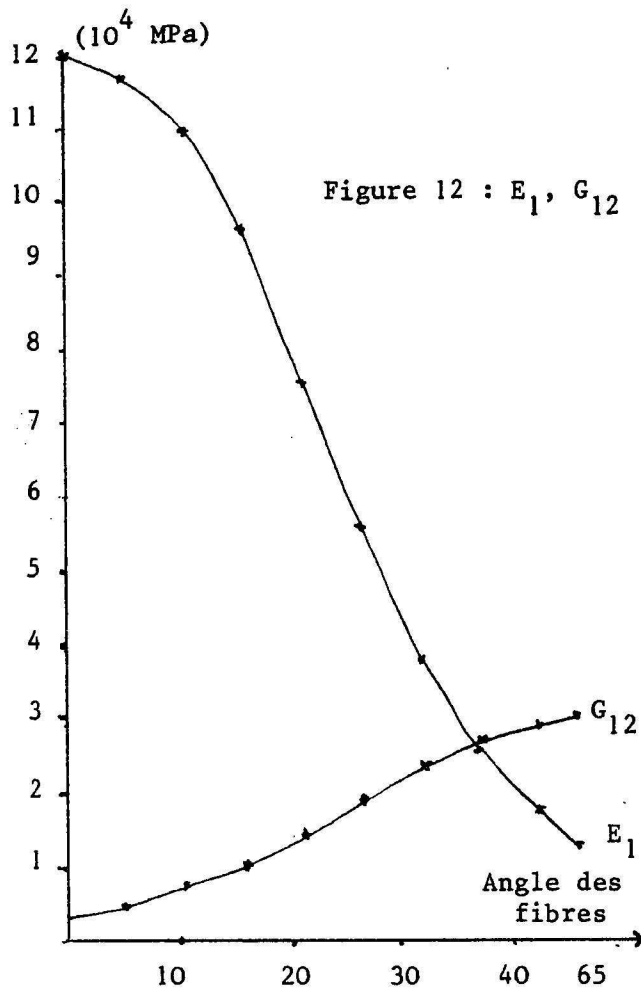


Figure 15 :
(a) angle des fibres
(b) multicouche

4.4. DESCRIPTION DU PROGRAMME COMULCO

Le programme COMULCO calcule les caractéristiques équivalentes d'un Composite MULtiCOuche constitué d'un empilement de matériaux homogénéisés orthotropes.

4.4.1. CONTENU PHYSIQUE

Le programme COMULCO comprend :

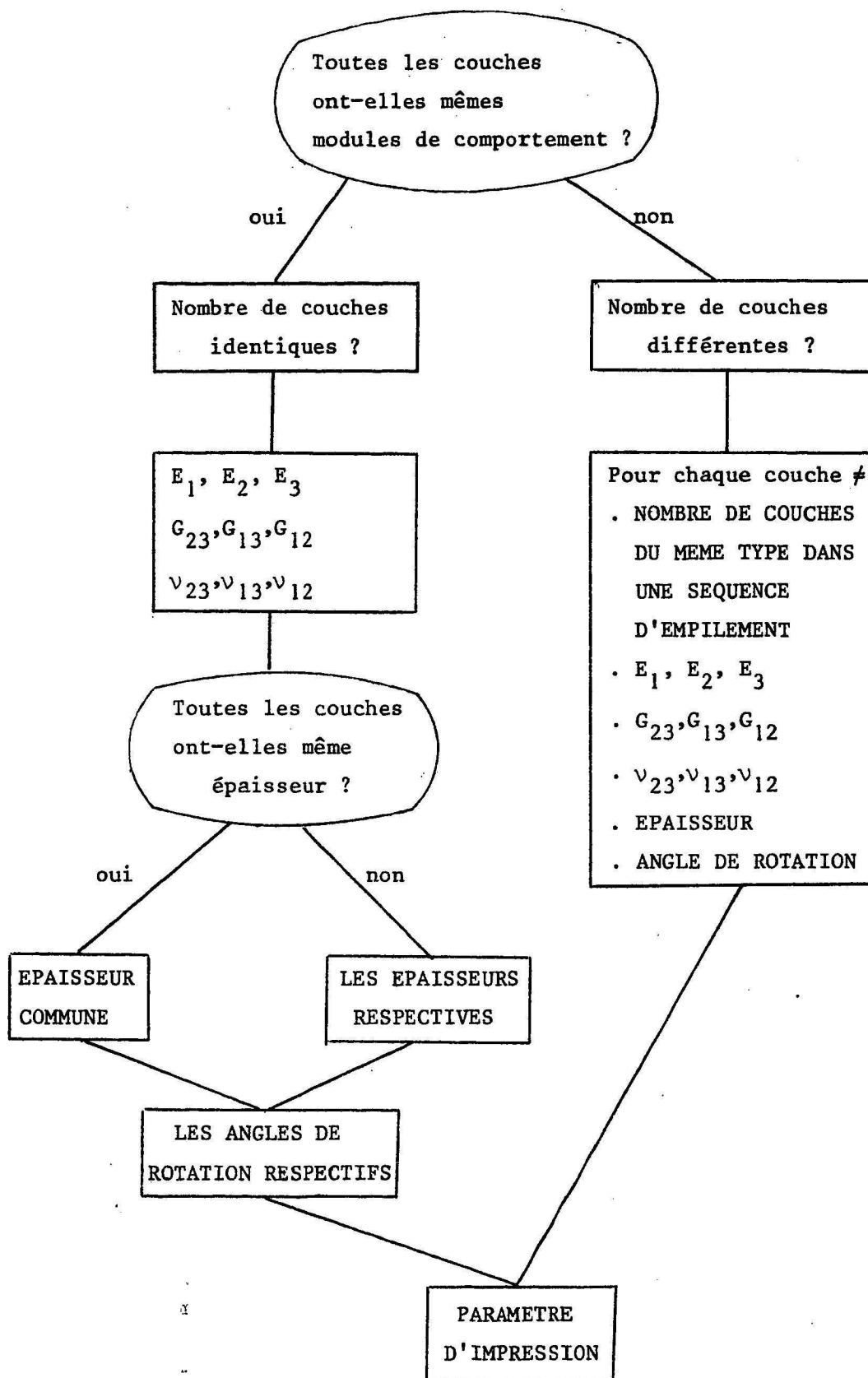
- . 11 sous-programmes écrits en FORTRAN (628 cartes)
- . un programme d'appel (125 cartes)

4.4.2. DONNEES A FOURNIR :

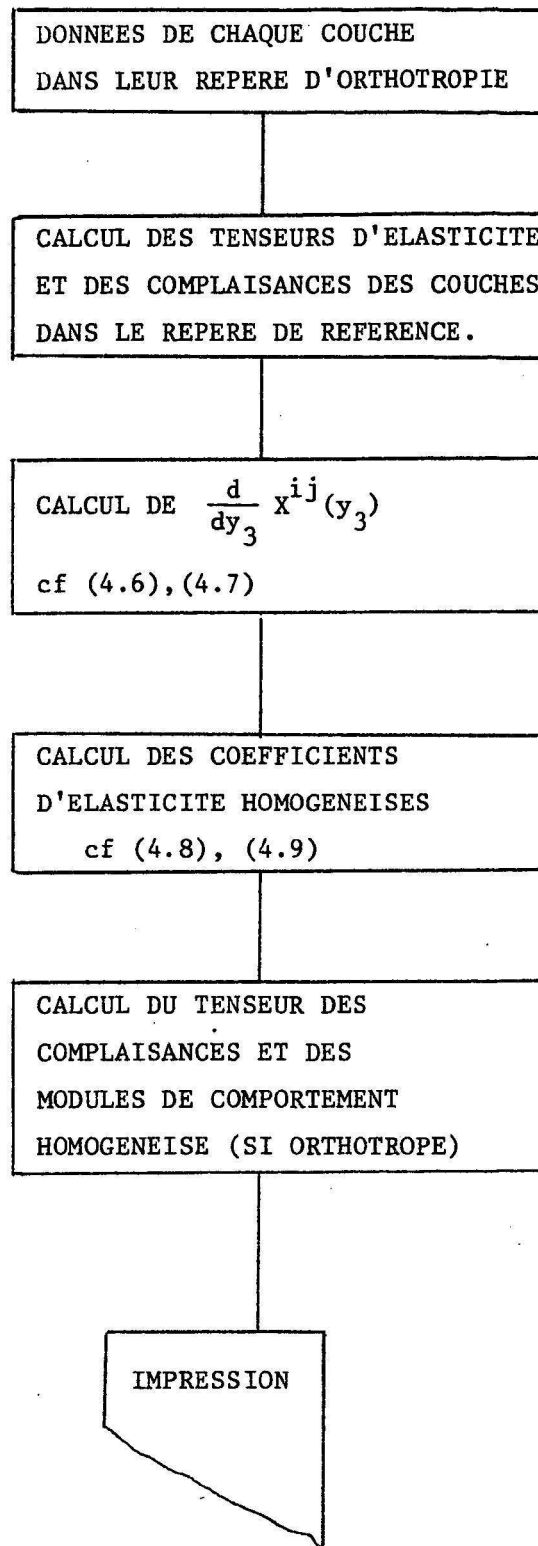
Le calcul des caractéristiques homogénéisées du multicouche nécessite, pour chaque couche, les données suivantes :

- . les modules de comportement dans le repère d'orthotropie lié à la couche.
- . l'angle de rotation : repère référence $\leftrightarrow$ repère d'orthotropie
- . l'épaisseur de la couche.

Lorsque toutes les couches ont les mêmes modules de comportement, ces derniers ne seront fournis qu'une seule fois.



4.4.3. ORGANIGRAMME



4.4.4. PRESENTATION DES RESULTATS

Selon la valeur du paramètre d'impression ($1 \leq \text{IMPRE} \leq 3$), le programme COMULCO imprime :

- 1°) dans le repère d'orthotropie
 - . les caractéristiques mécaniques, les épaisseurs et les angles de rotation fournis ($\text{IMPRE} \geq 1$).
- 2°) dans le repère de référence
 - . les tenseurs d'élasticité ($\text{IMPRE} = 3$)
 - . les tenseurs de complaisance ($\text{IMPRE} \geq 2$)
 - . les résultats : tenseurs d'élasticité, des complaisances homogénéisées et les modules de comportements (si le multicouche est orthotrope) ($\text{IMPRE} \geq 1$).

4.4.5. EXEMPLES D'UTILISATION

1er exemple

	Matériau (1)	Matériau (2)
E_1	120 000 MPa	63 000 MPa
E_2	6 000 MPa	63 000 MPa
E_3	6 000 MPa	4 000 MPa
ν_{23}	.20	.20
ν_{13}	.28	.20
ν_{12}	.28	.03
G_{23}	2 500 MPa	1 300 MPa
G_{13}	3 800 MPa	1 300 MPa
G_{12}	3 800 MPa	3 800 MPa
Epaisseur couche	$18 \cdot 10^{-5}$ m	$32 \cdot 10^{-5}$ m
Angle	0°	0°

Séquence de l'empilage /(1) (1) (2) (1) (1) (2) (1) (1)/

(les axes d'orthotropie des matériaux sont les axes de référence).

TOUTES LES COUCHES ONT MEME MODULE DE COMPORTEMENT ?
(SI OUI = 1 ; = 0 SINON)

→0
NOMBRE DE COUCHES DIFFERENTES DANS UNE SEQUENCE D EMPILEMENT ? (< 11)
→2

DONNEES COUCHE 1 : (AXES D ORTHOTROPIE MATERIELLE DE LA COUCHE)

NOMBRE DE COUCHES (DU MEME TYPE) DANS UNE SEQUENCE D EMPILEMENT
→6
E1 , E2 , E3 = ? (REELS)
→12000. 6000. 6000.
G23 , G13 , G12 = ? (REELS)
→2500. 3800. 3800.
NU23 , NU13 , NU12 = ? (REELS)
→.20 .28 .28
EPAISSEUR COUCHE = ? (REEL)
→18.
ROTATION AUTOUR DE OZ = ? (DEGREES) (REPERE REFERENCE => REPERE ORTHOTROPIE)
→0.

DONNEES COUCHE 2 : (AXES D ORTHOTROPIE MATERIELLE DE LA COUCHE)

NOMBRE DE COUCHES (DU MEME TYPE) DANS UNE SEQUENCE D EMPILEMENT
→2
E1 , E2 , E3 = ? (REELS)
→63000. 63000. 4000.
G23 , G13 , G12 = ? (REELS)
→1300. 1300. 3800.
NU23 , NU13 , NU12 = ? (REELS)
→.20 .20 .03
EPAISSEUR COUCHE = ? (REEL)
→32.
ROTATION AUTOUR DE OZ = ? (DEGREES) (REPERE REFERENCE => REPERE ORTHOTROPIE)
→0
IMPRE = ? PARAMETRE D IMPRESSION.
1 : DONNEES + RESULTATS.
2 : DONNEES + RESULTATS + TENSEUR COMPLAISANCES CHAQUE COUCHE (REPERE REFERENCE)
3 : DONNEES + RESULTATS + TENSEUR COMPLAISANCES CHAQUE COUCHE (REPERE REFERENCE) + TENSEUR ELASTICITE CHAQUE COUCHE (REPERE REFERENCE)
→2

***** DONNEES (AXES D ORTHOTROPIE) *****
2 COUCHES DIFFERENTES

COUCHE 1 : ANGLE DE ROTATION = 0.0

EPAISSEUR = 18.000
NOMBRE DE COUCHES DU MEME TYPE = 6

* E1 = 0.120000E+06 E2 = 0.600000E+04 E3 = 0.600000E+04 *
* NU23 = 0.200000E+00 NU13 = 0.280000E+00 NU12 = 0.280000E+00 *
* G23 = 0.250000E+04 G13 = 0.380000E+04 G12 = 0.380000E+04 *

COUCHE 2 : ANGLE DE ROTATION = 0.0
EPAISSEUR = 32.000
NOMBRE DE COUCHES DU MEME TYPE = 2

* E1 = 0.630000E+05 E2 = 0.630000E+05 E3 = 0.400000E+04 *
* NU23 = 0.200000E+00 NU13 = 0.200000E+00 NU12 = 0.300000E-01 *
* G23 = 0.130000E+04 G13 = 0.130000E+04 G12 = 0.380000E+04 *

Remarque : Les valeurs fléchées correspondent aux valeurs fournies par l'utilisateur.

***** DONNEES (AXES DE REFERENCE) *****

***** TENSEUR DES COMPLAISANCES COUCHE 1 (AXES DE REFERENCE ; ROTATION: 0.0) *****

1 1	2 2	3 3	2 3	1 3	1 2
0.8333D-05	-0.2333D-05	-0.2333D-05	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00
-0.2333D-05	0.1667D-03	-0.3333D-04	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00
-0.2333D-05	-0.3333D-04	0.1667D-03	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.4000D-03	0.0000D+00	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.2632D-03	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.2632D-03

***** TENSEUR DES COMPLAISANCES COUCHE 2 (AXES DE REFERENCE ; ROTATION: 0.0) *****

1 1	2 2	3 3	2 3	1 3	1 2
0.1587D-04	-0.4762D-06	-0.3175D-05	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00
-0.4762D-06	0.1587D-04	-0.3175D-05	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00
-0.3175D-05	-0.3175D-05	0.2500D-03	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.7692D-03	0.0000D+00	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.7692D-03	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.2632D-03

***** RESULTATS *****

***** TENSEUR D ELASTICITE HOMOGENEISE (AXES DE REFERENCE) *****

1 1	2 2	3 3	2 3	1 3	1 2
0.9954D+05	0.2071D+04	0.1500D+04	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00
0.2071D+04	0.2746D+05	0.1067D+04	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00
0.1500D+04	0.1067D+04	0.5197D+04	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.1861D+04	0.0000D+00	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.2215D+04	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.3800D+04

***** TENSEUR DES COMPLAISANCES HOMOGENEISE (AXES DE REFERENCE) *****

1 1	2 2	3 3	2 3	1 3	1 2
-0.1010D-04	-0.6536D-06	-0.2780D-05	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00
-0.6536D-06	0.3675D-04	-0.7354D-05	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00
-0.2780D-05	-0.7354D-05	0.1947D-03	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.5374D-03	0.0000D+00	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.4515D-03	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.2632D-03

E1 = 0.989943E+05 E2 = 0.272139E+05 E3 = 0.513558E+04

NU23 = 0.200135E+00 NU13 = 0.275245E+00 NU12 = 0.647058E-01

G23 = 0.186085E+04 G13 = 0.221502E+04 G12 = 0.380000E+04

2ème exemple (cf 5.4.3.)

	Matériau (1)	Matériau (2)
E_1	120 000 MPa	120 000 MPa
E_2	6 000 MPa	6 000 MPa
E_3	6 000 MPa	6 000 MPa
ν_{23}	.20	.20
ν_{13}	.28	.28
ν_{12}	.28	.28
G_{23}	2 500 MPa	2 500 MPa
G_{13}	3 800 MPa	3 800 MPa
G_{12}	3 800 MPa	3 800 MPa
Epaisseur couche	18.10^{-5} m	18.10^{-5} m
Angle	15°	-15°

Séquences de l'empilage /(1) (2)/

- TOUTES LES COUCHES ONT MEME MODULE DE COMPORTEMENT ?
(SI OUI = 1 ; = 0 SINON)
- 1 NOMBRE DE COUCHES IDENTIQUES DANS UNE SEQUENCE D'EMPILEMENT ? (< 11)
- 2 $E_1, E_2, E_3 = ?$ (REELS)
→120000. 6000. 6000.
- $G_{23}, G_{13}, G_{12} = ?$ (REELS)
→2500. 3800. 3800.
- $\nu_{23}, \nu_{13}, \nu_{12} = ?$ (REELS)
→.20. .28. .28.
- L'ÉPAISSEUR DE CES COUCHES EST-ELLE LA MÊME ? (SI OUI = 1 ; = 0 SINON)
- 1 ÉPAISSEUR COMMUNE = ?
- 18. L'ES 2 ANGLES DE ROTATION AUTOUR DE OZ (REELS)
- 15. -15. ? PARAMÈTRE D'IMPRESSION.
- 1 : DONNÉES + RÉSULTATS.
- 2 : DONNÉES + RÉSULTATS + TENSEUR COMPLAISANCES CHAQUE COUCHE (REPÈRE RÉFÉRENCE)
- 3 : DONNÉES + RÉSULTATS + TENSEUR COMPLAISANCES CHAQUE COUCHE (REPÈRE RÉFÉRENCE) + TENSEUR ÉLASTICITÉ CHAQUE COUCHE (REPÈRE RÉFÉRENCE)
- 2

***** DONNEES (AXES D'ORTHOTROPIE) *****

2 COUCHES IDENTIQUES

ANGLES (REPERE REFERENCE=>REPERE COUCHE)
15.0 -15.0

EPAISSEURS :
18.000 18.000

* E1 = 0.120000E+06 E2 = 0.600000E+04 E3 = 0.600000E+04 *
* NU23 = 0.200000E+00 NU13 = 0.280000E+00 NU12 = 0.280000E+00 *
* G23 = 0.250000E+04 G13 = 0.380000E+04 G12 = 0.380000E+04 *

***** DONNEES (AXES DE REFERENCE) *****

* TENSEUR DES COMPLAISANCES COUCHE 1 (AXES DE REFERENCE ; ROTATION: 15.0) *

1 1	2 2	3 3	2 3	1 3	1 2
0.2416D-04	-0.7552D-05	-0.4410D-05	0.0000D+00	0.0000D+00	0.5766D-04
-0.7552D-05	0.1613D-03	-0.3126D-04	0.0000D+00	0.0000D+00	0.2151D-04
-0.4410D-05	-0.3126D-04	0.1667D-03	0.0000D+00	0.0000D+00	-0.1550D-04
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.3908D-03	0.3421D-04	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.3421D-04	0.2723D-03	0.0000D+00
0.5766D-04	0.2151D-04	-0.1550D-04	0.0000D+00	0.0000D+00	0.2423D-03

* TENSEUR DES COMPLAISANCES COUCHE 2 (AXES DE REFERENCE ; ROTATION: -15.0) *

1 1	2 2	3 3	2 3	1 3	1 2
0.2416D-04	-0.7552D-05	-0.4410D-05	0.0000D+00	0.0000D+00	-0.5766D-04
-0.7552D-05	0.1613D-03	-0.3126D-04	0.0000D+00	0.0000D+00	-0.2151D-04
-0.4410D-05	-0.3126D-04	0.1667D-03	0.0000D+00	0.0000D+00	0.1550D-04
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.3908D-03	-0.3421D-04	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	-0.3421D-04	0.2723D-03	0.0000D+00
-0.5766D-04	-0.2151D-04	0.1550D-04	0.0000D+00	0.0000D+00	0.2423D-03

***** RESULTATS *****

* TENSEUR D'ELASTICITE HOMOGENEISE (AXES DE REFERENCE) *

1 1	2 2	3 3	2 3	1 3	1 2
0.1067D+06	0.8873D+04	0.2065D+04	0.0000D+00	0.0000D+00	0.1374D-14
0.8873D+04	0.7232D+04	0.1343D+04	0.0000D+00	0.0000D+00	-0.1187D-06
0.2065D+04	0.1343D+04	0.6287D+04	0.0000D+00	0.0000D+00	-0.5556D-06
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.2559D+04	-0.1118D-16	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	-0.1118D-16	0.3672D+04	0.0000D+00
0.1374D-14	-0.1187D-06	-0.5556D-06	0.0000D+00	0.0000D+00	0.1055D+05

* TENSEUR DES COMPLAISANCES HOMOGENEISE (AXES DE REFERENCE) *

1 1	2 2	3 3	2 3	1 3	1 2
0.1044D-04	-0.1267D-04	-0.7212D-06	0.0000D+00	0.0000D+00	-0.1806D-15
-0.1267D-04	0.1584D-03	-0.2988D-04	0.0000D+00	0.0000D+00	0.2192D-15
-0.7212D-06	-0.2988D-04	0.1657D-03	0.0000D+00	0.0000D+00	0.8392D-14
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.3908D-03	0.1190D-23	0.0000D+00
0.0000D+00	0.0000D+00	0.0000D+00	0.1190D-23	0.2723D-03	0.0000D+00
-0.1806D-15	0.2192D-15	0.8392D-14	0.0000D+00	0.0000D+00	0.9483D-04

* E1 = 0.958237E+05 E2 = 0.627473E+04 E3 = 0.603591E+04 *
* NU23 = 0.187494E+00 NU13 = 0.691084E-01 NU12 = 0.121407E+01 *
* G23 = 0.255864E+04 G13 = 0.367209E+04 G12 = 0.105452E+05 *

5. CONCLUSIONS :

Nous avons développé un outil informatique, d'un emploi industriel très aisé, qui fournit toutes les caractéristiques "homogénéisées" du composite à partir de la description géométrique et physique des composants (modules d'Young, coefficients de Poisson, modules de cisaillement, taux d'imprégnation de résine, forme de la fibre). Les résultats trouvés sont :

1°) en accord avec l'expérience à 10 % près et en excès, ceci peut s'expliquer :

- par l'insuffisance de précision des données (caractéristiques des composants non connus à mieux de 10%).
- par la présence de défauts dans le composite (décohésion, défauts de périodicité).

2°) pour un même taux d'imprégnation de résine, les coefficients calculés varient relativement peu. Les écarts maximaux sont de 20% et l'écart moyen est de l'ordre de 9%.

3°) le matériau homogénéisé présente une anisotropie transverse qui se manifeste principalement sur les modules de cisaillement alors que les modules d'Young transverses sont les mêmes à moins de 10% près.

Cette anisotropie ne devrait pas être observée dans un composite réel où les fibres seraient à répartition aléatoire. Mais dans notre problème nous avons supposé une périodicité rigoureuse. Il convient d'approfondir ce point afin de déterminer les valeurs à retenir pour le matériau homogène équivalent, ce sera un sujet futur de travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. BABUSKA
"Homogenization and its applications" Mathematical and Computational Problems, Tech. Note BN-821, University of Maryland, July 1975.
- [2] I. BABUSKA
"Solution of interface problems by Homogenization. III",
Tech. Note BN-827, University of Maryland, Septembre 1975.
- [3] D. BEGIS, A. PERRONNET
"Présentation du Club MODULEF", INRIA, Mai 1980.
- [4] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAFANICOLAOU
"Asymptotic analysis for periodic structures", NORTH-HOLLAND
Publishing company, 1978.
- [5] J.F. BOURGAT, A. DERVIEUX
"Méthode d'homogénéisation des opérateurs à coefficients périodiques :
étude des correcteurs provenant du développement asymptotique",
IRIA-LABORIA, Rapport n°278, 1978.
- [6] P.G. CIARLET
"The finite element method for elliptic problems", North-Holland, 1978.
- [7] G. DUVAUT, J.L. LIONS
"Les inéquations en mécanique et en physique", DUNOD (1972).
- [8] G. DUVAUT
"Matériaux élastiques composites à structure périodique. Homogénéisation". Theoretical and applied mechanics, W.T. KOITER, cd NORTH-HOLLAND
publishing company, 1976.
- [9] S. FLÜGGE
"Encyclopedia of physics". Mechanics of solids II, Springer Verlag
volume 2.
- [10] S.K. GARG, V. SVALBONAS, G.A. GURTMAN
"Analysis of structural composite materials", New York (1973).
- [11] P. GERMAIN
Cours de mécanique des milieux continus, Masson Paris (1973).

- [12] A. HASSIM
"Homogénéisation par éléments finis d'un matériau élastique renforcé par des fibres". Thèse de 3ème cycle (TOULOUSE 1980).

- [13] F. LENE, D. LEGUILLON
"Etude de l'influence d'un glissement entre les constituants d'un matériau composite sur ses coefficients de comportement effectifs".
Journal de Mécanique, Vol. 20 n°2, 1981.

- [14] E. SANCHEZ-PALENCIA
"Non-homogeneous media and vibration theory", Lectures Notes in
Physics, 127, 1980.

- [15] L. TARTAR
"Cours Peccot", Collège de France, 1977.

