



HAL
open science

Application du controle optimal et de la methode des elements finis a la resolution par penalisation des equations de Navier-Stokes

L. Loth

► **To cite this version:**

L. Loth. Application du controle optimal et de la methode des elements finis a la resolution par penalisation des equations de Navier-Stokes. RR-0184, INRIA. 1983. inria-00076374

HAL Id: inria-00076374

<https://inria.hal.science/inria-00076374>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Rapports de Recherche

N° 184

**APPLICATION
DU CONTRÔLE OPTIMAL
ET DE LA MÉTHODE
DES ÉLÉMENTS FINIS
À LA RÉOLUTION
PAR PÉNALISATION
DES ÉQUATIONS
DE NAVIER-STOKES**

Laurent LOTH

Janvier 1983

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél 954 90 20

APPLICATION DU CONTROLE OPTIMAL ET DE LA METHODE
DES ELEMENTS FINIS A LA RESOLUTION
PAR PENALISATION DES EQUATIONS
DE NAVIER - STOKES

Laurent LOTH

Résumé :

Dans ce travail, on décrit l'application des méthodes de contrôle optimal et d'éléments finis à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes dans les cas stationnaires et évolutifs.

Le problème de contrôle optimal est obtenu par une formulation de type moindres carrés fonctionnels et résolu par un algorithme de gradient conjugué avec préconditionnement.

Nous présentons ici l'application de ces méthodes à une discrétisation par un élément fini mixte Q2 - Q1 avec pénalisation, et nous donnons les résultats numériques correspondants.

Abstract :

Application of Optimal control and finite element method for stationary and unsteady incompressible Navier Stokes flows is described.

The Optimal Control problem is derived from a least square formulation and solved by a conjugate gradient algorithm with scaling.

We present some applications to a mixed finite element Q2 - Q1 with penalty method.



SOMMAIRE

NOTATIONS

INTRODUCTION

I - POSITION DU PROBLEME

II - LE CAS STATIONNAIRE

- A) Le problème continu.
- B) Le problème perturbé.
- C) Le problème discret.
- D) La méthode d'éléments finis.
- E) Application des moindres carrés fonctionnels.

III - LE CAS EVOLUTIF

- A) Le problème continu.
- B) Le problème perturbé.
- C) Le problème discret.
- D) La méthode d'éléments finis.
- E) Application des moindres carrés fonctionnels.

IV - IMPLANTATION ET RESULTATS NUMERIQUES

- A) Présentation du cas traité.
- B) Organigramme.
- C) Le cas stationnaire.
- D) Le cas évolutif.

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXE

NOTATIONS

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$	variable d'espace dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n
t	variable de temps
Γ	frontière de Ω
$\partial_i = \partial/\partial x_i$	
$\partial_t = \partial/\partial t$	
∇	opérateur $\begin{matrix} \partial/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial x_n \end{matrix}$
$D(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact sur Ω
$L^2(\Omega)$	espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur Ω
$H^m(\Omega)$	espace de Sobolev $= \{v \in L^2(\Omega) , D^\alpha v \in L^2(\Omega) , \alpha \leq m\}$ $D^\alpha = \partial^{\alpha_1}/\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \partial^{\alpha_2}/\partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_n}/\partial x_n^{\alpha_n}$
$H_0^m(\Omega)$	$= \{v \in H^m(\Omega) , D^\alpha v = 0 \text{ sur } \Omega, \alpha \leq m-1\}$
$(u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx$	produit scalaire sur $L^2(\Omega)$
$\ u\ = (u, v)^{1/2}$	norme associée

INTRODUCTION

La modélisation des écoulements de fluides visqueux incompressibles par les équations de Navier-Stokes présentent plusieurs difficultés et en particulier :

- La non linéarité des équations
- La contrainte d'incompressibilité
- La complexité de la géométrie lors d'applications industrielles
- La finesse du phénomène à simuler.

La méthode des éléments finis et un algorithme de gradient conjugué avec préconditionnement donneront des réponses aux deux dernières de ces difficultés. Ceci nous permettra d'obtenir une bonne représentation du phénomène et l'efficacité dans la résolution.

Pour surmonter la non linéarité des équations, l'outil développé ici sera une formulation de type moindres carrés fonctionnels. Cette méthode, décrite dans BRISTEAU-GLOWINSKI-PERIAUX-PERRIER-PIRONNEAU-POIRIER [5], bien adaptée à d'assez gros systèmes, nous permettra de décomposer le problème initial en une suite de problèmes linéaires, ici des problèmes de Stokes. Outre sa souplesse d'utilisation, elle permet un couplage fiable avec d'autres équations ou entre différents domaines.

Pour résoudre les problèmes de Stokes, suivant en cela TEMAM [25] et BERCOVIER [1]-[2], nous traiterons la contrainte d'incompressibilité par pénalisation et choisirons un élément fini mixte. Cette méthode, plus souple, est mieux adaptée aux problèmes stationnaires que celles à traitement incompressible séparé.

Le couplage PENALISATION-MOINDRES CARRÉS nous permettra de profiter des avantages de ces deux approches à condition qu'au problème pénalisé, qui est un problème raide, corresponde un préconditionnement compensant cette raideur. Un des buts de cette étude est de montrer que cela est possible et efficace.

Nous traiterons tout d'abord du problème stationnaire avant d'aborder le cas évolutif. De ce dernier, nous donnons ici une version inconditionnellement stable avec un schéma en temps à deux niveaux. Des résultats numériques pour les problèmes de la cavité carré et de la marche compléteront cet exposé :

- d'abord pour le problème stationnaire,
- puis l'application à ce dernier de la version évolutive par une méthode asymptotique en temps.

En annexe, nous présenterons à titre de comparaison, les résultats obtenus par l'utilisation d'une méthode de Newton pour la résolution du même problème de la cavité carrée.

I - POSITION DU PROBLEME

Nous allons dans cette partie donner les équations du problème et définir quelques espaces fonctionnels nécessaires à la résolution. Le modèle proposé n'est établi que pour une température uniforme et constante dans le temps.

L'état du fluide est caractérisé par les valeurs du champ des vitesses u et des pressions hydrostatiques p . Les données du problème sont : les constantes physiques ou le nombre de Reynolds, les conditions limites et initiales et les forces volumiques.

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à GERMAIN [10], TEMAM [26].

Soit un fluide newtonien, visqueux incompressible. Si Ω et Γ sont respectivement le domaine de l'écoulement et sa frontière, le mouvement du fluide est gouverné par les équations de Navier-Stokes qui sous forme adimensionnalisée s'écrivent :

$$(1.1) \quad \partial_t u - \frac{1}{R} \nabla^2 u - (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f \quad \text{sur } \Omega$$

$$(1.2) \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

avec : $u = u(x,t)$ champ des vitesses
 p champ des pressions hydrostatiques
 R nombre de Reynolds caractérisant le fluide
 f forces volumiques extérieures.

Aux équations (1.1) et (1.2), nous ajoutons les conditions limites et initiales :

$$u(x,0) = u_0$$
$$u = \alpha \text{ sur } \Omega$$

D'autres conditions peuvent être données :

- conditions de périodicité
- conditions non homogènes.

Dans la suite de l'exposé nous considérons $\alpha = 0$, c'est à dire un champ de vitesse nulle sur la frontière.

Nous définissons également les espaces suivants :

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial_i v \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v/\Gamma = 0\}$$

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega), \nabla \cdot v = 0 \text{ pp dans } \Omega\}$$

$$\mathcal{N} = \{v \in D(\Omega), \nabla \cdot v = 0\}$$

et nous avons :

$$V = \overline{\mathcal{N}}^{H_0^1(\Omega)}$$

II - LE CAS STATIONNAIRE

A) Le problème continu

Soient Ω ouvert borné de \mathbb{R}^n , Γ sa frontière.

Nous cherchons à résoudre le problème suivant :

$$(2.1) \quad -\frac{1}{R} \nabla^2 u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \text{ sur } \Omega$$

$$(2.2) \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

$$(2.3) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

Si f, u, p sont des fonctions régulières satisfaisant (2.1)-(2.2)-(2.3), prenons alors le produit scalaire de (2.1) avec une fonction $v \in \mathcal{K}$.

Nous obtenons :

$$\left(-\frac{1}{R} \nabla^2 u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p, v\right) = (f, v)$$

soit en intégrant par partie :

$$\frac{1}{R} (\nabla u, \nabla v) + ((u \cdot \nabla)u, v) = (f, v)$$

et ce pour tout $v \in \mathcal{K}$.

Chaque terme de l'égalité précédente dépendant continuellement et linéairement de v , celle-ci est encore vraie pour tout $v \in V$.

Introduisons sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ la forme bilinéaire a définie par :

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)$$

et sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ les formes trilinéaires :

$$b(u, v, w) = ((u \cdot \nabla)v, w)$$

$$\hat{b}(u, v, w) = \frac{1}{2}(b(u, v, w) - b(u, w, v))$$

Remarque 2.1 : $(u, v, w) \rightarrow b(u, v, w)$ est continue sur $V \times V \times V$ pour $n \leq 3$.

$$n \leq 3 ; \text{ donc } H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$$

$$u \in H_0^1(\Omega) , w \in H^1(\Omega) , \text{ d'où } u \in L^4(\Omega) \text{ et } w \in L^4(\Omega)$$

$$v \in H_0^1(\Omega) , \text{ d'où } \partial_i v_j \in L^2(\Omega)$$

et donc par l'inégalité de Hölder

$$u_i (\partial_i v_j) w_j \in L^1(\Omega)$$

$$\left| \int_{\Omega} u_i (\partial_i v_j) w_j \, dx \right| \leq \|u_i\|_{L^4} \|v_j\|_{L^2} \|w_j\|_{L^4} < \infty$$

Remarque 2.2 : $b(u, v, v) = 0$ pour tout $u \in V$ et tout $v \in H_0^1(\Omega)$

pour $u \in \mathcal{C}^p$ et $v \in D(\Omega)$ nous avons

$$\begin{aligned} b(u, v, v) &= \sum_{i,j} \int_{\Omega} u_i (\partial_i v_j) v_j \, dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \int_{\Omega} u_i \partial_i (v_j)^2 \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{ij} \int_{\Omega} (v_j)^2 \partial_i u_i \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \sum_j \int_{\Omega} (v_j) \nabla \cdot u \, dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat par continuité pour $u \in V$ et $v \in H_0^1(\Omega)$.

Remarque 2.3 : $b(u,v,w) = -b(u,w,v)$ pour tout $u \in V$, tout $y \in H_0^1(\Omega)$
et $w \in H_0^1(\Omega)$

Ceci découle directement de la remarque 2.2, en l'appliquant à $b(u,v+w,v+w)$.

Nous pouvons donc introduire la formulation variationnelle du problème (2.1)-(2.3).

(2.4) Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$1/R a(u,v) + \hat{b}(u,u,v) = (f,v) \text{ pour tout } v \in V.$$

Théorème 2.1 : Si $f \in H^{-1}(\Omega)$, le problème (2.4) admet au moins une solution $u \in V$, et il existe une distribution $p \in L_{loc}^1(\Omega)$ satisfaisant (2.1) (2.2).

Théorème 2.2 : Si $n \leq 4$ et si f satisfait :

$$(H1) . \|f\|_{V,R^2} < C(n)$$

la solution est unique.

Le lecteur trouvera la démonstration de ces théorèmes dans TEMAM [26], chap. II, § 1.

B) Le problème perturbé

Une des difficultés de la résolution réside dans le traitement de la contrainte d'incompressibilité

$$(2.2) \quad \nabla \cdot u = 0 \text{ sur } \Omega$$

La construction de base à divergence nulle suivant HECHT [28] est une réponse à ce problème mais nous choisissons ici d'appliquer une méthode proposée et appliquée par LIONS [16], TEMAM [25], BERCOVIER [1],[2], ODEN [19][20], REDDY [23][24], ODEN et al [18]. Nous ajoutons un terme de pénalisation qui transformera le problème initial en un problème sans contrainte.

Nous introduisons une famille de problèmes perturbés dépendant d'un paramètre positif ε qui approche à la limite les équations de Navier-Stokes, et ce sans contenir de contrainte.

Soit le problème suivant :

Trouver u tel que

$$(2.5) \quad 1/R \nabla^2 u_\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon + 1/2 (\nabla \cdot u_\varepsilon) u_\varepsilon - 1/\varepsilon \nabla (\nabla \cdot u_\varepsilon) = f$$

$$(2.3) \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma$$

Remarque 2.4 : Si $\text{div } u = 0$, nous retrouvons le problème originel

$$(2.1) - (2.3).$$

Remarque 2.5 : La contrainte $\nabla \cdot u$ est ici remplacée par le terme de pénalisation $\frac{1}{\varepsilon} \nabla (\nabla \cdot u_\varepsilon)$ correspondant à l'équation :

$$(2.6) \quad p_\varepsilon + \nabla \cdot u_\varepsilon = 0$$

Remarque 2.6 : L'introduction du terme $1/2 (\nabla \cdot u_\varepsilon) u_\varepsilon$ est due à TEMAM [25]. C'est un terme de stabilisation qui correspond à la substitution de la forme trilineaire b par la forme trilineaire \hat{b} .

En effet si $\nabla \cdot u = 0$, $b(u, u, v) = \hat{b}(u, u, v)$.

Dans le cas contraire, pour $u \in D(\Omega)$ et $v \in D(\Omega)$ nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{b}(u, u, v) &= 1/2 \cdot (b(u, u, v) - b(u, v, u)) \\ &= b(u, u, v) - 1/2 (b(u, u, v) + b(u, v, u)) \\ &= b(u, u, v) - 1/2 \sum_{i,j} \int_{\Omega} u_i [(\partial_i u_j) v_j + (\partial_i v_j) u_j] dx \\ &= b(u, u, v) - 1/2 \sum_{i,j} \int_{\Omega} u_i \partial_i (u_j \cdot v_j) dx \\ &= b(u, u, v) + 1/2 \sum_j \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) \cdot u_j v_j dx \\ &= b(u, u, v) + 1/2 ((\nabla \cdot u) u, v) \end{aligned}$$

ce que nous étendons à $u \in H_0^1(\Omega)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$.

Si $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ satisfont aux équations (2.6), (2.5), (2.3), multiplions (2.5) et (2.6) scalairement par $v \in D(\Omega)$ et $q \in D(\Omega)$.

$$\text{Il en résulte : } \begin{aligned} 1/R a(u_\varepsilon, v) + \hat{b}(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) + 1/\varepsilon (\nabla \cdot u_\varepsilon, \nabla \cdot v) &= (f, v) \\ \varepsilon(p_\varepsilon, q) + (\nabla \cdot u_\varepsilon, q) &= 0 \end{aligned}$$

ceci restant valable pour $v \in H_0^1(\Omega)$ et $q \in L^2(\Omega)$.

Nous pouvons maintenant introduire la formulation variationnelle du problème perturbé (2.3), (2.5) et (2.6).

Trouver (u_ε, p) tels que

$$(2.7) \quad 1/R a(u_\varepsilon, v) + \hat{b}(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) + 1/\varepsilon (\nabla \cdot u_\varepsilon, \nabla \cdot v) = (f, v)$$

$$(2.8) \quad \varepsilon(p_\varepsilon, q) + (\nabla \cdot u_\varepsilon, q) = 0$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et tout $q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$

Comme pour le problème (2.4), nous avons les théorèmes suivants :

Théorème 2.3 : Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ vérifiant l'hypothèse (H1).

Le problème (2.7)-(2.8) admet une solution unique.

Théorème 2.4 : Pour $f \in H^{-1}(\Omega)$ vérifiant l'hypothèse (H1), nous avons :

$$\|u - u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} + \|p - p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C_\varepsilon$$

avec (u, p) solution de (2.1), (2.3)

$(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ solution de (2.7), (2.8)

C constante dépendant de f, Ω, R mais non de ε .

Une preuve de résultat peut être trouvée dans BERCOVIER [1].

C) Le problème discret

Le propos de ce paragraphe est de discuter l'approximation des problèmes (2.4) et (2.7)-(2.8).

Nous nous donnons tout d'abord une approximation interne stable et convergente des espaces $H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ par la donnée de V_h et W_h deux espaces de dimension finie contenus respectivement dans $H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

Nous introduisons également l'opérateur bilinéaire $(\text{div}_h(\cdot), \cdot)$ défini sur $H_0^1(\Omega) \times W_h$ par :

$$(\text{div}_h u, p_h) = (\nabla \cdot u, p_h) \text{ pour tout } u_h \in H_0^1(\Omega) \text{ et tout } p_h \in W_h.$$

Soit f_h projection de f sur V_h

et

$$N_h = \sup \frac{b(u_h, v_h, w_h)}{\|u\|_{V_h} \|v_h\|_{V_h} \|w\|_{V_h}} \quad u_h \in V_h, \quad v_h \in V_h, \quad w_h \in V_h$$

Considérons les problèmes :

Trouver $(u_h, p_h) \in V_h \times W_h$ tels que

$$(2.9) \quad 1/R a(u_h, v_h) + \hat{b}(u_h, u_h, v_h) - (p_h, \text{div}_h v_h) = (f_h, v_h)$$

$$(2.10) \quad (\text{div}_h u_h, q_h) = 0$$

pour tout $v_h \in V_h$ et tout $q_h \in W_h$

et le problème perturbé correspondant :

Trouver $(u_{h\epsilon}, p_{h\epsilon}) \in V_h \times W_h$ tels que

$$(2.11) \quad 1/R a(u_{h\epsilon}, v_h) + \hat{b}(u_{h\epsilon}, u_{h\epsilon}, v_h) - (p_{h\epsilon}, \text{div}_h v_h) = (f_h, v_h)$$

$$(2.12) \quad (p_{h\epsilon}, q_h) + (\text{div}_h u_{h\epsilon}, q_h) = 0$$

pour tout $v_h \in V_h$ et tout $q_h \in W_h$.

Le théorème ci-dessous nécessite de nouvelles hypothèses :

$$(H1') \quad N_h R^2 \|f_h\|_{V_h} \leq 1 - \delta, \quad \delta > 0$$

et celle fondamentale (voir BREZZI [4])

(H2) il existe $k > 0$ tel que

$$\sup_{u_h} \frac{(\operatorname{div}_h u_h, p_h)}{\|u_h\|_{V_h}} \geq k \|p_h\|_{W_h} \quad \text{pour tout } p_h \in W_h$$

Nous trouverons alors dans BERCOVIER [1] la démonstration du

Théorème 2.5 : Sous les hypothèses (H1), (H1'), (H2)

si $(u_{h\varepsilon}, p_{h\varepsilon})$ est solution unique de (2.11) et (2.12)

(u_h, p_h) est solution unique de (2.9) et (2.10)

(u, p) est solution unique de (2.4)

$$\text{alors } \|u - u_{h\varepsilon}\|_{V_h} + \|p - p_{h\varepsilon}\|_{W_h} \leq C_1 \varepsilon + \|u - u_h\|_{V_h} + \|p - p_h\|_{W_h}$$

Ce théorème montre, qu'une fois choisi l'approximation V_h et W_h , les équations perturbées donneront une solution aussi voisine que l'on veut de (u_h, p_h) . Nous pouvons donc résoudre le problème perturbé sans perte de précision significative par rapport au problème original pourvu que ε soit assez petit.

Le choix du paramètre de pénalisation ε a été souvent abordé dans la littérature. Citons BERCOVIER ENGELMAN [2], HUGHES, LIU, BROOKS [13], JOHNSON, PITKARANTA [15].

Dans [2] BERCOVIER préconise une valeur de ce paramètre égale à $10^{-2} \cdot h^2$, h étant le pas de la discrétisation.

Dans ce travail, nous exposerons les résultats obtenus pour des valeurs de ε échelonnées de 10^{-1} à 10^{-6} . Aucune variation quant à la vitesse de convergence n'a pu être relevé. Nous donnons en partie IV tous ces résultats en les comparant avec ceux obtenus avec d'autres algorithmes de résolution que celui exposé en III.

D) La méthode d'éléments finis

La méthode d'éléments finis exposée dans ce paragraphe est semblable à celle utilisée dans BERCOVIER ENGELMAN [2] ; c'est à dire un élément fini mixte Q2 - Q1 avec integration réduite. Citons également ENGELMAN-SANI-GRESHO-BERCOVIER [8].

Le point central du théorème 2.5 est l'hypothèse (H2) et une définition correcte de l'opérateur bilinéaire (div(.),.). Suivant FORTIN [9] et CROUZEIX, RAVIART [7], nous étendons la définition de (div(.),.) à un élément quadrilatéral.

Eliminant dans (2.11) le terme $p_{h\epsilon}$ nous obtenons :

$$(2.13) \quad 1/R a(u_{h\epsilon}, v_h) + \hat{b}(u_{h\epsilon}, u_{h\epsilon}, v_h) + 1/\epsilon (\text{div}_h u_h, \text{div}_h v_h) = (f, v_h)$$

Nous avons donc à construire la matrice correspondante au terme

$$1/\epsilon (\text{div}_h u_{h\epsilon}, \text{div}_h v_h) .$$

Tout d'abord, définissons l'élément fini de degré 2 que nous allons utiliser.

Soit Q le quadrangle de référence (cf Fig. 1) dans le plan. Nous considérons un élément fini Q2 à noeuds où Qs est l'espace des polynomes de degré S.

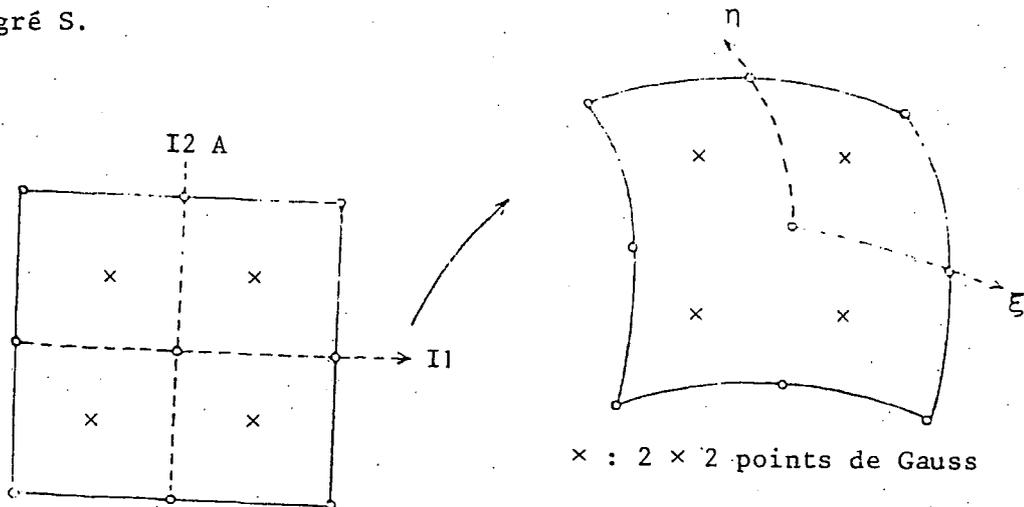


Fig. 1 : Elément isoparamétrique à 9 noeuds

Sur cet élément, les fonctions de base sont données par :

$$e_1(x) = 4 (x_1 - 1/2) (x_1 - 1) (x_2 - 1/2) (x_2 - 1)$$

$$e_2(x) = 4 x_1 (x_1 - 1/2) (x_2 - 1/2) (x_2 - 1)$$

$$e_3(x) = 4 x_1 x_2 (x_1 - 1/2) (x_2 - 1/2)$$

$$e_4(x) = 4 x_2 (x_1 - 1/2) (x_1 - 1) (x_2 - 1/2)$$

$$e_5(x) = -8 x_1 (x_1 - 1) (x_2 - 1/2) (x_2 - 1)$$

$$e_6(x) = -8 x_1 x_2 (x_1 - 1/2) (x_2 - 1)$$

$$e_7(x) = -8 x_1 x_2 (x_1 - 1) (x_2 - 1/2)$$

$$e_8(x) = -8 x_2 (x_1 - 1/2) (x_1 - 1) (x_2 - 1)$$

$$e_9(x) = 16 x_1 x_2 (x_1 - 1) (x_2 - 1)$$

Nous nous donnons donc une discrétisation du domaine en quadrangles et nous définissons V_h comme l'ensemble des fonctions continues qui sont Q2 sur chaque quadrangle.

Pour la définition de W_h , nous utiliserons un élément Q1 discontinu.

Projetons donc $\text{div}_h u$ sur l'espace des polynômes de degré 1 :

$$(2.14) \quad \int_{\hat{Q}} \text{div}_h u \phi(x) dx = \int_{\hat{Q}} \widehat{\text{div}}(u) \phi(x) dx \quad \text{pour tout } \phi \in Q_1.$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les quatre points de Gauss sur \hat{Q} .

Ceux-ci sont Q1 unisolvents et une base de Q1 est déterminée par les valeurs des quatre fonctions de base aux points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ de sorte que (2.14) est équivalent aux quatre équations

$$\int_{\hat{Q}} \widehat{\text{div}}_h u \phi_i(x) dx = \int_{\hat{Q}} \widehat{\text{div}}(u) \phi_i(x) dx \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } 4.$$

Si $u \in Q_2$, $\text{div}(u) \phi_i \in Q_3$. Or les quatre points de Gauss donnent une intégration exacte pour tout polynôme de Q3.

Par définition des ϕ_i , nous obtenons finalement les quatre identités

$$\text{div}_h u(\alpha_i) = \text{div}(u)(\alpha_i) \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } 4.$$

Comme $\text{div}_h(\cdot)$ est dans Q_1 , nous avons sur \hat{Q}

$$\text{div}_h u(x) = \sum_{i=1}^4 \text{div}(u)(\alpha_i) \phi_i(x)$$

Pour résoudre (2.13), nous avons à calculer les matrices A, B, K correspondantes aux termes $1/R a(u_{h\varepsilon}, v_h)$, $\hat{b}(u_{h\varepsilon}, u_{h\varepsilon}, v_h)$ et $1/\varepsilon (\text{div}_h u_{h\varepsilon}, \text{div}_h v_h)$.

$$\begin{aligned} K \text{ est telle que } \int_{\hat{Q}} \text{div}_h^2 u \, dx &= U^T K U \\ &= \sum_{i=1}^4 w_i \text{div}_h^2 u(\alpha_i) \end{aligned}$$

avec U vecteur des valeurs nodales de u sur \hat{Q} ,

w_i le poids des points d'intégration α_i .

E) Application des moindres carrés fonctionnels

1) Définition du problème

Pour traiter la non linéarité du problème, nous allons employer la méthode des moindres carrés fonctionnels, suivant une démarche analogue à celle exposée dans BRISTEAU-GLOWINSKI-PERIAUX-PERRIER-PIRONNEAU-POIRIER [5] et PERIAUX [21]. Nous arriverons ainsi à la structure d'un problème de contrôle optimal tel que le définit LIONS [17]. Notre problème sera alors décomposé en la résolution de problèmes de Stokes successifs.

Nous utiliserons dans ce paragraphe les espaces de Sobolev :

$$H^1(\Omega) = \{ \phi \in L^2(\Omega) , \partial_i \phi \in L^2(\Omega) \}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{ \phi \in H^1(\Omega) , \phi|_{\Gamma} = 0 \}$$

Nous voulons résoudre :

$$(2.5) \quad -1/R \nabla^2 u + (u \cdot \nabla)u + 1/2 (\nabla \cdot u)u - 1/\varepsilon \nabla(\nabla \cdot u) = f \text{ sur } \Omega$$

$$(2.3) \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma$$

dont une formulation variationnelle est :

$$(2.7) \quad 1/R \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \hat{b}(u, u, v) + 1/\varepsilon \int_{\Omega} \nabla \cdot u \, \nabla \cdot v \, dx = (f, v) \\ \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega)$$

A $u \in H_0^1(\Omega)$, nous pouvons associer $w = w(u) \in H_0^1(\Omega)$ défini par :

$$(2.15) \quad -1/R \nabla^2 w - 1/\varepsilon \nabla(\nabla \cdot w) = f - (u \cdot \nabla)u - 1/2 (\nabla \cdot u)u .$$

(2.15) est un problème de Stokes perturbé dont la formulation variationnelle est :

$$(2.16) \quad \text{Trouver } w \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ 1/R a(w, v) + 1/\varepsilon (\nabla \cdot w, \nabla \cdot v) = (f, v) - \hat{b}(u, u, v) \\ \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Et donc si $w(u) = u$, le problème (2.5) est résolu.

Nous allons donc essayer de minimiser $u - w(u)$ dans une norme adaptée au problème.

$$\text{Posons } [\phi, \psi] = 1/R a(\phi, \psi) + 1/\varepsilon (\nabla \cdot \phi, \nabla \cdot \psi)$$

[.,.] définit sur $H_0^1(\Omega)$ un produit scalaire.

Soit $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

Le dual de $L^2(\Omega)$ étant $L^2(\Omega)$, nous avons l'inclusion :

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

Notons $\langle ., . \rangle$ la forme bilinéaire de la dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

$$\text{Soit : } \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall f \in H^{-1}(\Omega), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Nous définissons la fonctionnelle $J(.)$ par :

$$J(v) = 1/2 [v - w(v), v - w(v)] .$$

Une formulation par moindres carrés fonctionnels du problème (2.9) est donnée par :

$$(2.17) \quad \text{Min}_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v) = \text{Min}_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2} [v-w, v-w]$$

avec w solution de :

$$(2.18) \quad [w, \eta] = (f, \eta) - \hat{b}(v, v, \eta) \quad \text{pour tout } \eta \in H_0^1(\Omega)$$

Se référant à LIONS [17], il est clair que (2.17)-(2.18) à la structure d'un problème de contrôle optimal où

v désigne le vecteur contrôle

w désigne le vecteur état

(2.13) est l'équation état

J est la fonctionnelle coût .

Remarque 2.7 : La contrainte d'incompressibilité $\nabla \cdot u$ est prise en compte dans la fonctionnelle J aux travers du terme

$$1/\varepsilon \int_{\Omega} \text{div}(v-w) \text{div}(v-w) \, dx.$$

Ce choix pour la fonctionnelle J est important sur le plan numérique par son influence sur la vitesse de convergence.

C'est pourquoi nous ne laissons dans le second membre que le terme de force et le terme non linéaire $\hat{b}(v, v, \eta)$.

2) Résolution par un algorithme de gradient conjugué

Pour résoudre efficacement le problème d'optimisation (2.17)-(2.18), nous utiliserons la version de POLAK-RIBIERE [22] du gradient conjugué. Voici ci-dessous la description de l'algorithme.

Initialisation

Une initialisation suffisamment proche de la solution est un facteur de rapidité. Nous prenons ici la solution du problème de Stokes.

Soit donc v_0 solution de

$$\begin{aligned} -1/R \nabla^2 v + \nabla p &= f \quad \text{sur } \Omega \\ \nabla \cdot v &= f \quad \text{sur } \Omega \\ v &= 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

dont la formulation du problème perturbé correspondant est

$$-1/R \nabla^2 v + 1/\varepsilon \nabla(\nabla \cdot v) = f \quad \text{sur } \Omega$$

$$v = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

Nous calculons donc v_0 solution du problème variationnel :

$$[v, \eta] = \langle f, \eta \rangle \quad \text{pour tout } \eta \in H_0^1(\Omega)$$

Nous pouvons alors chercher g_0 direction de descente comme solution de :

$$[g, \eta] = \langle J'(v_0), \eta \rangle \quad \text{pour tout } \eta$$

posons alors $\xi^0 = g_0$.

Pour le calcul de $J'(v_0)$, nous renvoyons au paragraphe suivant préférant décrire tout d'abord l'algorithme dans son ensemble.

étape 1

Connaissant v_n, g_n, ξ^n nous allons minimiser $J(v)$ dans la direction de descente g .

Pour cela nous cherchons λ tel que

$$(2.19) \quad J(v_n - \lambda \xi^n) \leq J(v_n - \mu \xi^n) \quad \text{pour tout } \mu.$$

Et posons alors :

$$v_{n+1} = v_n - \lambda \xi^n.$$

A ce stade, nous testons la convergence de l'algorithme par le calcul de $J(v_{n+1})$.

étape 2

Il s'agit de construire une nouvelle direction de descente. Nous définissons tout d'abord $g_{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$(2.20) \quad [g_{n+1}, \eta] = \langle J'(v_{n+1}), \eta \rangle \quad \text{pour tout } \eta \in H_0^1(\Omega)$$

puis

$$\gamma = \frac{[g_{n+1}, g_{n+1} - g_n]}{[g_n, g_n]}$$

Ceci nous permet de définir alors ξ^{n+1} nouvelle direction de descente par :

$$\xi^{n+1} = g_{n+1} + \gamma \xi^n$$

posant $n = n + 1$ nous retournons à l'étape 1.

Les deux points importants de cet algorithme sont :

- le calcul de λ réalisant le minimum de la fonctionnelle $J(\cdot)$ dans (2.19).
- le calcul de g_{n+1} .

Le calcul de λ .

Pour que cet algorithme de gradient reste efficace, le calcul de λ doit être assez précis. Nous pratiquerons ici par dichotomie et extrapolation parabolique suivant en cela CEA ([6], ALG 7).

3) Calcul du gradient g_{n+1}

Ce calcul nécessite la résolution de deux problèmes de Stokes à chaque itération ; soient

$$(2.18) \quad \text{pour obtenir } w_{n+1} \text{ de } v_{n+1}$$

(2.20) pour obtenir g_{n+1} de v_{n+1} et w_{n+1} .

Nous allons maintenant exprimer le gradient de la fonctionnelle $J(\cdot)$ en fonction de v_{n+1} et w_{n+1} pour la résolution de (2.20).

Soit $\delta v \in H_0^1(\Omega)$, $J'(v)$ se définit par :

$$\langle J'(v), \delta v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(v+t\delta v) - J(v)}{t}$$

Par définition de J , nous obtenons :

$$(2.21) \quad \langle J'(v), \delta v \rangle = [v-w, \delta(v-w)]$$

Différentiant (2.18), nous avons

$$(2.22) \quad [\delta w, \eta] = -\hat{b}(\delta v, v, \eta) - \hat{b}(v, \delta v, \eta) \quad \text{pour tout } \eta \in H_0^1(\Omega)$$

d'où

$$(2.23) \quad \langle J'(v), \delta v \rangle = [v-w, \delta v] + \hat{b}(\delta v, v, v-w) + \hat{b}(v, \delta v, v-w)$$

Par conséquent, $J'(v) \in H^{-1}(\Omega)$ peut être identifié à la fonctionnelle linéaire définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$\phi \rightarrow [v-w, \phi] + \hat{b}(\phi, v, v-w) + \hat{b}(v, \phi, v-w)$$

Et donc g_{n+1} est solution du problème variationnel

$$g_{n+1} \in H_0^1(\Omega)$$

$$[g_{n+1}, \phi] = [v_{n+1} - w_{n+1}, \phi] + \hat{b}(\phi, v_{n+1}, v_{n+1} - w_{n+1}) + \hat{b}(v_{n+1}, \phi, v_{n+1} - w_{n+1})$$

pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$

où w_{n+1} est solution de

$$(2.18) \quad [w_{n+1}, \eta] = (f, \eta) - \hat{b}(v_{n+1}, v_{n+1}, \eta) \quad \text{pour tout } \eta \in H_0^1(\Omega).$$

III. - LE CAS EVOLUTIF

A) Le problème continu

Soient Ω ouvert borné de \mathbb{R}^n , $n \leq 4$,
 Γ sa frontière.

Nous voulons résoudre le problème :

trouver une fonction vectorielle $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$
une fonction scalaire $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$
telles que :

$$(3.1) \quad \partial_t u - \frac{1}{R} \nabla^2 u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f \quad \text{sur } \Omega \times [0, T]$$

$$(3.2) \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0, T]$$

$$(3.3) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T]$$

$$(3.4) \quad u(x, 0) = u_0 \quad \text{sur } \Omega$$

les fonctions u_0 , f étant données et définies sur Ω et $\Omega \times [0, T]$ respectivement.

Définissons également les deux espaces :

$$V = \{\phi \in H_0^1(\Omega) \quad , \quad \nabla \cdot \phi = 0\}$$

$$H = \{\phi \in L^2(\Omega) \quad , \quad \nabla \cdot \phi = 0\}$$

$V \subset H$ et V est dense dans H avec injection continue.

Si V' et H' sont les espaces duals de V et H , l'opérateur adjoint est linéaire continue de H' dans V' . H' peut donc être identifié à un sous espace dense de V' . Nous arrivons donc aux inclusions

$$V \subset H \equiv H' \subset V'$$

chaque espace étant dense dans son suivant et les injections continues. En conséquence, le produit scalaire (f,u) dans H pour $u \in V$ et $f \in H$ est égal au produit scalaire dans la dualité entre V' et V .

Nous introduisons par un procédé identique à celui utilisé dans le cas stationnaire une formulation variationnelle du problème (3.1)-(3.4).

Pour $f \in L^2(0,T;V')$, $u_0 \in H$
trouver $u \in L^2(0,T;V)$ tel que

$$(3.5) \quad (\partial_t u, v) + \frac{1}{R} a(u, v) + \hat{b}(u, u, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{pour tout } v \in V'$$

$$(3.4) \quad u(x, 0) = u_0$$

l'existence et l'unicité de la solution sont données par les théorèmes suivants dont la démonstration se trouve dans TEMAM [26], chap III, § 3.

Théorème 3.1 : Soient $f \in L^2(0,T;V')$, $u_0 \in H$,

il existe au moins une fonction u satisfaisant (3.4), (3.5).
De plus $u \in L^\infty(0,T;H)$ et est faiblement continue de $[0,T]$ dans H .

Théorème 3.2 : Sous les hypothèses du théorème 3.1, si $n = 2$ la solution u est unique et presque partout égale à une fonction continue de $[0,T]$ dans H .

B) Le problème perturbé

Comme dans le paragraphe II, B, nous introduisons une famille de problème perturbé du problème (3.1)-(3.4).

Trouver $u_\varepsilon, p_\varepsilon$ tels que

$$(3.6) \quad \partial_t u_\varepsilon - \frac{1}{R} \nabla^2 u_\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon + \frac{1}{2} (\nabla \cdot u_\varepsilon) u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f \text{ sur } \Omega \times [0, T]$$

$$(3.7) \quad \varepsilon p_\varepsilon + \nabla \cdot u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Omega \times [0, T]$$

$$(3.3) \quad u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0, T]$$

$$(3.4) \quad u_\varepsilon(x, 0) = u_0 \text{ sur } \Omega$$

$$(3.8) \quad p_\varepsilon(x, 0) = p_0 \text{ sur } \Omega$$

La formulation variationnelle correspondante est la suivante

pour $\varepsilon > 0, u_0 \in H, f \in L^2(0, T; V')$, $p_0 \in L^2(\Omega)$
 trouver $u_\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$
 $p_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$
 tels que :

$$(3.9) \quad (\partial_t u_\varepsilon, v) + \frac{1}{R} a(u_\varepsilon, v) + \hat{b}(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) + (\nabla p_\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle$$

$$(3.10) \quad \varepsilon(p_\varepsilon, q) + (\nabla \cdot u_\varepsilon, q) = 0$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et tout $q \in L^2(\Omega)$

$$u_\varepsilon(x, 0) = u_0$$

$$p_\varepsilon(x, 0) = p_0$$

Remarque 3.1 : L'initialisation p_0 , qui est absente de la formulation (3.1)-(3.4), est choisie arbitrairement dans $L^2(\Omega)$ indépendamment de ε .

Les deux théorèmes suivants (voir TEMAM [26], chap III, § 8) assureront l'existence et l'unicité de la solution.

Théorème 3.3 : Soient $\varepsilon > 0$, $f \in L^2(0, T; H)$, $p_0 \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in H$,
il existe au moins une solution satisfaisant le problème
(3.6)-(3.7).
De plus $u_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $p_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$
et u_ε et p_ε sont faiblement continues de $[0, T]$ dans $L^2(\Omega)$.

Théorème 3.4 : Sous les hypothèses du théorème 3.3, si $n \leq 2$, la
solution est unique et u_ε est continue de $[0, T]$ dans $L^2(\Omega)$.

La convergence de la solution $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ vers la solution du
problème continu est donnée par le théorème 3.5 ci-dessous.

Théorème 3.5 : Pour $n = 2$ si
 (u, p) est solution du problème continu
 $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ solution du problème perturbé
alors $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ fortement
 $\nabla p_\varepsilon \rightarrow \nabla p$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

C) Le problème discret

Nous allons, dans ce paragraphe, discrétiser spatialement
et temporellement les équations (3.4), (3.5) et (3.9), (3.10). Pour
cela nous nous donnons une approximation stable et convergente des
espaces $H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$. Soient $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ et $W_h \subset L^2(\Omega)$ les espaces
de discrétisation pour la variable d'espace.

Pour la variable de temps, nous utiliserons un schéma
implicite à deux niveaux et nous noterons Δt le pas de temps.

Connaissant $u_h^n = u_h(x, n \cdot \Delta t)$, nous voulons calculer u_h^{n+1}
solution de :

$$(3.11) \quad \frac{1}{\Delta t} (u_h^{n+1} - u_h^n, v_h) + \frac{1}{R} a(u_h^{n+1}, v_h) + \hat{b}(u_h^n, u_h^{n+1}, v_h) = (f^{n+1}, v_h)$$

$$(3.12) \quad u_h(x, 0) = u_{o_h}$$

pour le problème continu (3.4), (3.5) ;

et pour le problème perturbé correspondant :

$$(3.13) \quad \frac{1}{\Delta t} (u_{h\epsilon}^{n+1} - u_{h\epsilon}^n, v_h) + \frac{1}{R} a(u_{h\epsilon}^{n+1}, v_h) + \hat{b}(u_{h\epsilon}^n, u_{h\epsilon}^{n+1}, v_h) + (p_{h\epsilon}^{n+1}, v_h) = (f^{n+1}, v)$$

$$(3.14) \quad (p_{h\epsilon}^{n+1}, q_h) + (\operatorname{div}_h u_{h\epsilon}^{n+1}, q_h) = 0$$

pour tout $v \in V_h$, tout $q \in W_h$

Éliminant p dans (3.13) à l'aide de (3.14), nous obtenons :

$$(3.15) \quad \frac{1}{\Delta t} (u_{h\epsilon}^{n+1} - u_{h\epsilon}^n, v_h) + \frac{1}{R} a(u_{h\epsilon}^{n+1}, v_h) + \hat{b}(u_{h\epsilon}^n, u_{h\epsilon}^{n+1}, v_h) + \frac{1}{\epsilon} (\operatorname{div}_h u_{h\epsilon}^{n+1}, \operatorname{div}_h v_h) = (f^{n+1}, v_h)$$

Le problème (3.11), nous conduit à la résolution d'un système linéaire de la forme :

$$(3.16) \quad A_h(u_h^{n+1}, v_h) = L_h(v_h)$$

$$\text{avec } A_h(u, v) = \frac{1}{\Delta t} (u, v) + \frac{1}{R} a(u, v) + \hat{b}(u_h^n, u, v)$$

$$L_h(v) = \left(\frac{1}{\Delta t} u_h^n + f^{n+1}, v \right)$$

A_h est coercive puisque

$$A_h(v, v) = \frac{1}{\Delta t} (v, v) + \frac{1}{R} a(v, v) + \hat{b}(u_h^n, v, v)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \|v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{R} a(v, v) > \frac{1}{\Delta t} \|v\|_{L^2}^2$$

L'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.16) est donc conséquence directe du théorème de projection :

Théorème 3.6 : Soient W espace de Hilbert

a forme bilinéaire continue sur $W \times W$

Si a est coercive, alors pour toute forme f linéaire sur W , il existe un unique u tel que

$$a(u,v) = \langle f,v \rangle \text{ pour tout } v \in W .$$

Remarque 3.1 : Le calcul de u_h^{n+1} demande l'inversion d'une matrice

M définit par $Mu = A_h(u,v)$.

Soient A la matrice correspondante au terme

$$\frac{1}{\Delta t} (u_h^{n+1}, v_h) + \frac{1}{R} a(u_h^{n+1}, v_h)$$

B celle correspondante à $\hat{b}(u_h^n, u_h^{n+1}, v_h)$

A est symétrique positive, B est antisymétrique.

$$X^T M X = X^T A X + X^T B X$$

$$\text{Or } X^T B X = - X^T B^T X = - (X^T B X)^T \text{ puisque } B = - B$$

$$\text{d'où } X^T B X = 0$$

$$\text{et donc } X^T (A+B) X = X^T M X \geq 0$$

De même, le problème perturbé (3.15) est équivalent à la résolution d'un système linéaire de la forme

$$(3.17) \quad B_h(u_{h\epsilon}^{n+1}, v_h) = L_h(v_h)$$

$$\text{avec } B_h(u,v) = \frac{1}{\Delta t} (u,v) + \frac{1}{R} a(u,v) + \hat{b}(u_{h\epsilon}^n, u,v) + \frac{1}{\epsilon} (\text{div}_h u, \text{div}_h v)$$

$$L_h(v) = \left(\frac{1}{\Delta t} v_{h\epsilon}^n + f^{n+1}, v \right)$$

Là encore la forme B_h est coercive, ϵ étant positif. Et donc l'existence

et l'unicité de la solution de l'équation (3.17) sont données par le théorème 3.6.

Remarque 3.3 : Pour résoudre (3.17) nous devons inverser une matrice $M = A + K + B$ définie par $Mu = B_h(u, v_h)$ avec :

$$\begin{aligned} Au &= A_h(u, v_h) \\ Ku &= \frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{div}_h u, \operatorname{div}_h v_h) \\ Bu &= \hat{b}(u_{h\varepsilon}^n, u, v_h) \end{aligned}$$

Nous montrons comme pour la remarque 3.2 que puisque $X^T(A+K)X \geq 0$ pour tout X , $X^T M X \geq 0$

D) La méthode d'éléments finis

Supprimant les indices ε et h pour plus de clarté, l'équation à résoudre est :

$$\begin{aligned} (3.18) \quad \frac{1}{\Delta t} (u^{n+1}, v) + \frac{1}{R} a(u^{n+1}, v) + \hat{b}(u^n, u^{n+1}, v) + \frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{div} u^{n+1}, \operatorname{div} v) \\ = (f^{n+1}, v) + \frac{1}{\Delta t} (u^n, v) . \end{aligned}$$

Pour définir l'élément utilisé et le terme $\frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{div} u, \operatorname{div} v)$ nous procédons exactement de la même façon que pour le paragraphe II, D dans le cas stationnaire.

E) Application des moindres carrés fonctionnels

1) Définition du problème

Le problème à résoudre, défini en III, B, est le suivant :

$$(3.19) \quad \partial_t u - \frac{1}{R} \nabla^2 u + (u \cdot \nabla) u + \frac{1}{2} (\nabla \cdot u) u - \frac{1}{\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot u) = f \quad \text{sur } \Omega \times]0, T$$

$$(3.3) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, T$$

$$(3.4) \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{sur } \Omega$$

Avec la discrétisation temporelle adoptée, nous obtenons :

$$(3.20) \quad \frac{1}{\Delta t} u^{n+1} - \frac{1}{R} \nabla^2 u^{n+1} + (u^n \cdot \nabla) u^{n+1} + \frac{1}{2} (\nabla \cdot u^n) u^{n+1} - \frac{1}{\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot u^{n+1}) \\ = f^{n+1} + \frac{1}{t} u^n$$

que nous devons résoudre à chaque pas de temps.

Se reportant au paragraphe II, E, nous voyons que ce problème est identique à celui résolu dans le cas stationnaire. On aurait simplement remplacé $-\frac{1}{R} \nabla^2$ par $(\frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{R} \nabla^2)$ dans (2.5) et f par $f^{n+1} + \frac{1}{\Delta t} u^n$.

Pour résoudre (3.20), nous allons donc suivre la même démarche que pour le cas stationnaire et nous arrivons alors au problème de minimisation suivant :

Trouver $v = v(x, (n+1)\Delta t) \in H_0^1(\Omega)$ tel que v réalise le minimum de

$$J(v) = \frac{1}{2} [v-w, v-w]$$

avec w solution de

$$[w, \eta] = (f^{n+1}, \eta) - \hat{b}(v, v, \eta) + \frac{1}{\Delta t} (u^n, \eta) \text{ pour tout } \eta \in H_0^1(\Omega)$$

et

$$[\phi, \psi] = \frac{1}{\Delta t} (\phi, \psi) + \frac{1}{R} a(\phi, \psi) + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \cdot \phi, \nabla \cdot \psi)$$

2) Résolution par un algorithme de gradient conjugué

Nous suivons également la démarche décrite en II, E, 2 à chaque pas de temps. Connaissant u^n , nous calculons u^{n+1} , l'initialisation du contrôle étant égale à v^n .

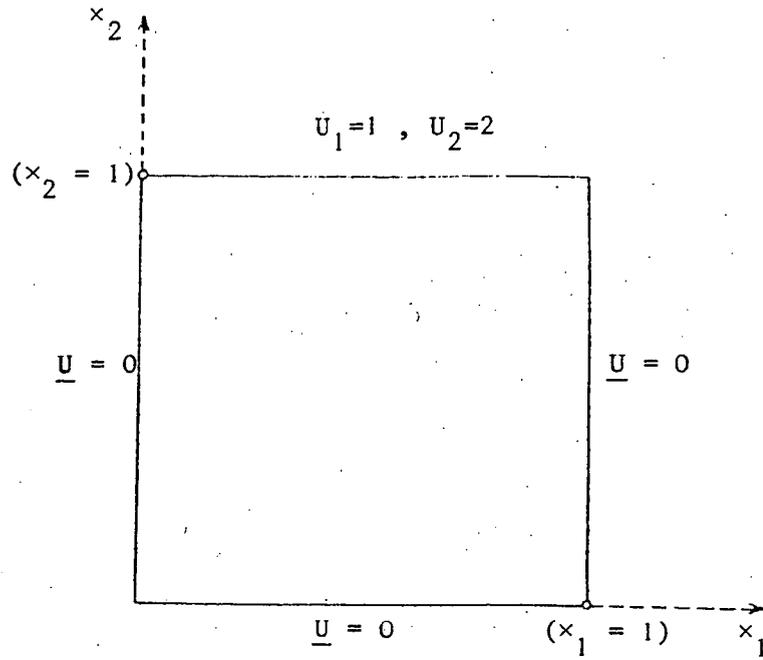


Fig. 2 : Problème de la Cavité Carrée

IV - IMPLANTATION ET RESULTATS NUMERIQUES

Une fois exposés le cas traité et la structure du programme, nous donnons deux séries de résultats : pour le cas stationnaire d'une part et pour le problème évolutif.

Le schéma temporel mis en oeuvre est celui décrit au paragraphe III, C, c'est-à-dire un schéma implicite à deux niveaux. Celui-ci sera inconditionnellement stable et permettra donc l'utilisation de grands pas de temps.

Nous l'appliquons au calcul d'une solution stationnaire par une méthode asymptotique en temps. Nous obtenons ainsi la convergence pour des nombres de Reynolds plus élevés.

A) Présentation du cas traité

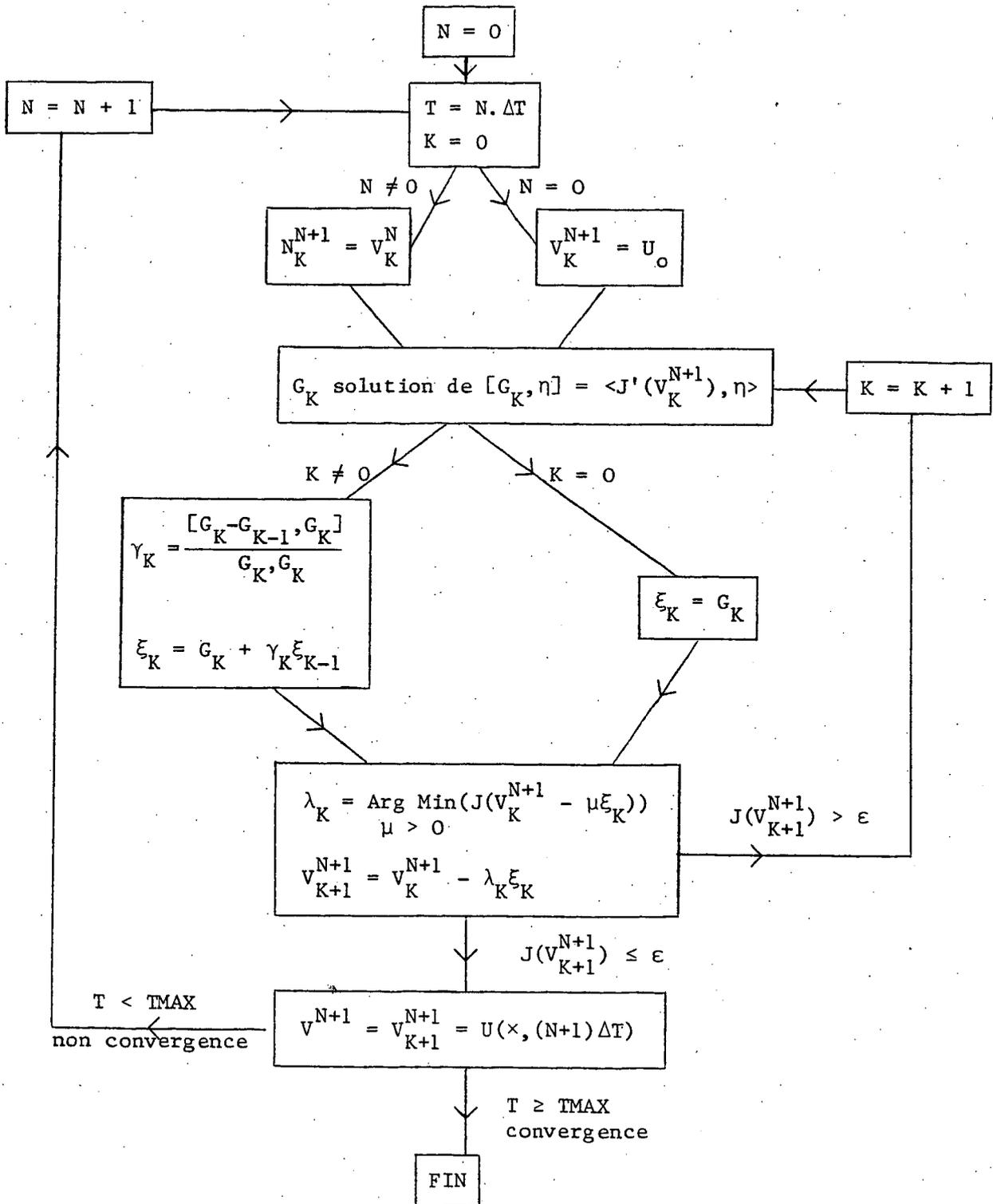
Pour tester le couplage pénalisation-moindres carrés, nous avons choisi le problème de la cavité carrés décrit par la figure 2. Les maillages utilisés sont réguliers sur l'ensemble du domaine. Ils sont ici de trois tailles :

8 × 8	. soit 64 quadrangles et 289 noeuds
10 × 10	. soit 100 quadrangles et 441 noeuds
12 × 12	. soit 144 quadrangles et 625 noeuds

Les temps de calcul indiqués sont en secondes pour un multiprocesseur DPS 68 MULTICS de la CII.HB.

Nous considérons, dans l'algorithme de gradient conjugué, avoir convergé si la fonctionnel J est inférieure ou égale à 10^{-9} .

B) Organigramme



C) Cas stationnaire

Trois séries de tests sont présentées, pour les divers paramètres du problème :

- * Le paramètre de pénalisation ,
- * le nombre de Reynolds ,
- * La taille du maillage.

1) Le paramètre de pénalisation

vaieur de	:	10^{-1}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
nombre d'itérations	:	49	49	49	49	49
temps calcul	:	2668	2672	2673	2671	2674

TAB 1 : Influence du paramètre de pénalisation

Nous avons choisi pour tester l'influence du paramètre de pénalisation un maillage 10×10 - soit 882 degrés de liberté - et un nombre de Reynolds égal à 400.

Les résultats rassemblés dans le tableau TAB 1 montrent que celui-ci n'a pas d'influence sur la vitesse de convergence et donc sur le temps nécessaire à la résolution.

Par contre la précision reste liée à la valeur du paramètre de pénalisation. Les résultats obtenus sont en concordance avec ceux donnés dans BERCOVIER [2]. Une valeur de paramètre inférieure ou égale à 10^{-3} fut nécessaire pour un calcul suffisamment précis. Nous présentons avec les figures 3 et 4 le profil des vitesses le long de la médiane et le graphe du gradient et de la fonctionnelle cout en fonction de l'itération. Pour un paramètre de pénalisation variant de 10^{-1} à 10^{-6} , nous obtenons les mêmes tracés, le traceur ne permettant pas de relever le manque de précision pour ϵ supérieur à 10^{-3} .

3) Le nombre de Reynolds

Valeur de R	:	100	400	1000
<hr/>				
	:			
nombre d'itérations	:	9	53	247
temps calcul	:	1012	4642	pas de convergence

TAB 2 : Influence du nombre de Reynolds

Pour ces essais, nous avons utilisé le maillage 12×12 - soit 1250 degrés de liberté - et un paramètre de pénalisation égal à 10^{-5} .

Le TAB 2 montre les limites de la méthode dans le cas stationnaire. En effet, nous n'avons pu atteindre la convergence pour un nombre de Reynolds de 1000 alors ceci fut possible avec une méthode directe (voir Annexe). Une initialisation par la solution du problème de Stokes n'était pas adaptée à ce cas.

L'utilisation d'une méthode asymptotique en temps permet de surmonter cette difficulté.

Les figures 5 à 9 donnent pour ces divers essais les courbes de la fonctionnelle et de son gradient ainsi que le profil des vitesses le long de la médiane.

3) La taille du maillage

maillage	:	8×8	10×10	12×12
<hr/>				
	:			
nombre d'itérations:	:	46	49	53
temps calcul	:	1406	2671	4642

TAB 3 : Influence du maillage

Cas stationnaire : Influence du paramètre de Pénalisation

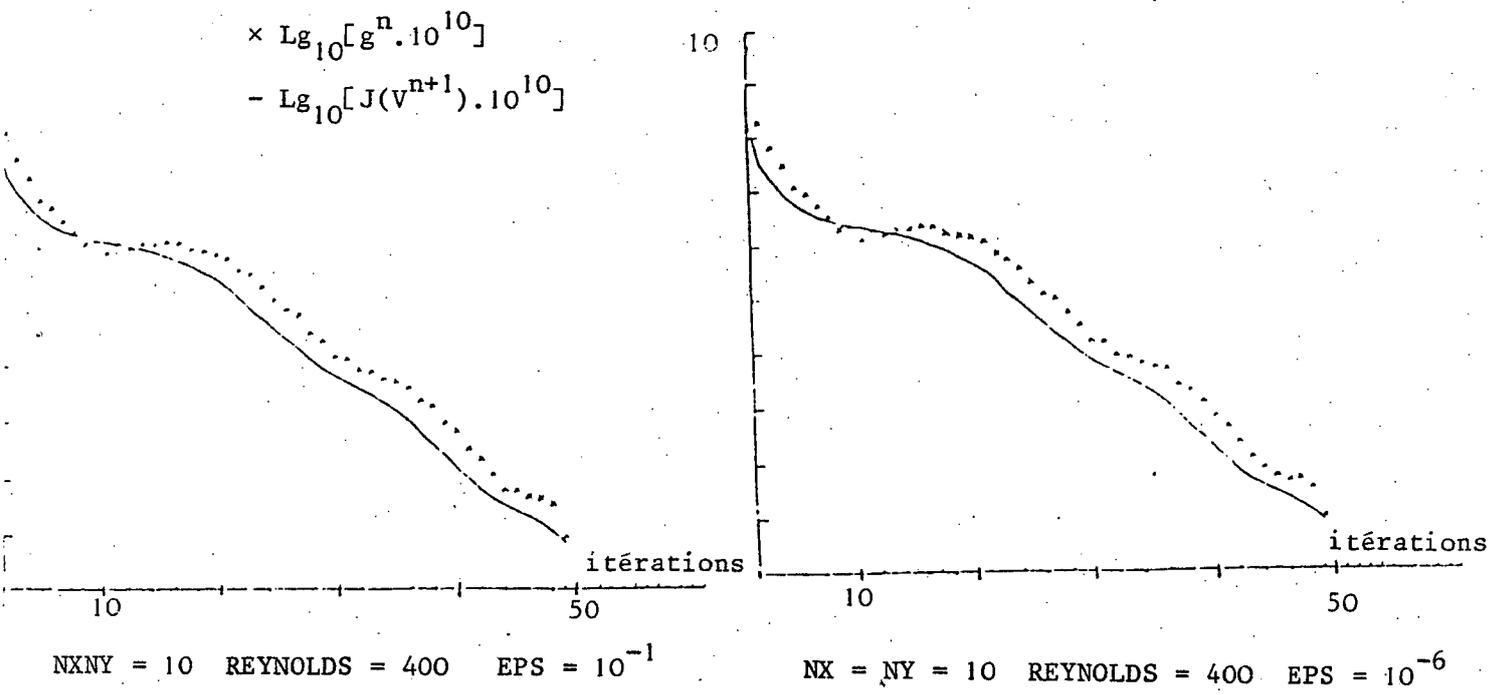
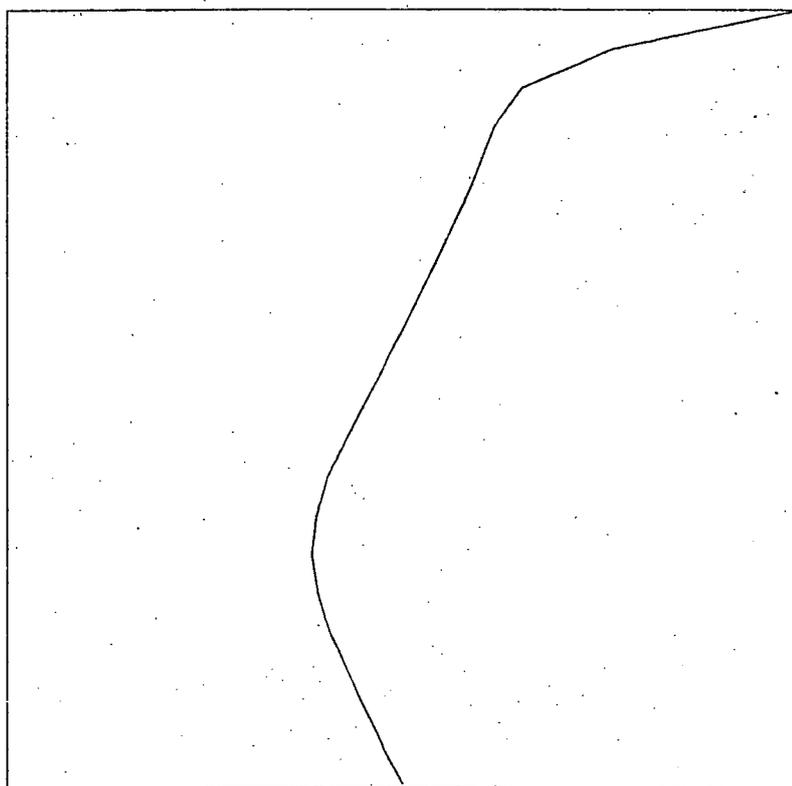


Fig. 3 : Vitesse de convergence



REYNOLDS = 400 NX = NY = 10

Fig. 4 : Profil des vitesses le long de la médiane

Cas stationnaire, montée en Reynolds : Vitesse de convergence

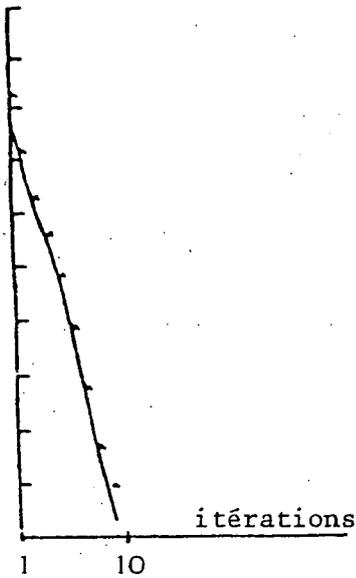


Fig. 5

$NXNY = 12$ REYNOLDS = 100 EPS = 10^{-5}

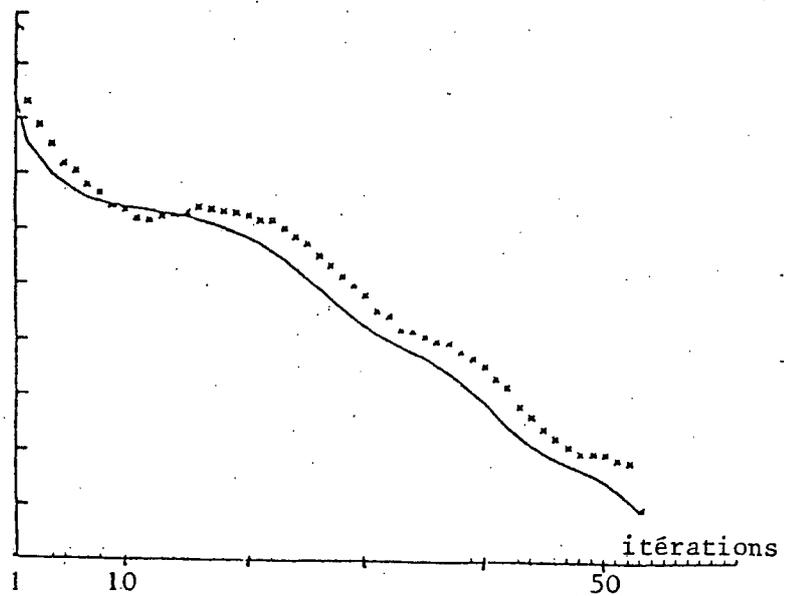


Fig. 6

$NX = NY = 12$ REYNOLDS = 400 EPS = 10^{-5}

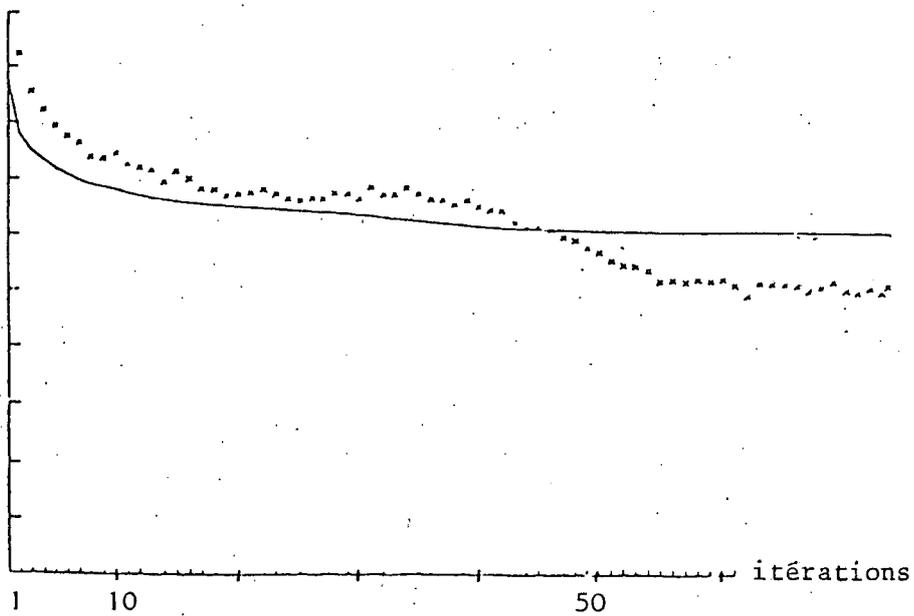


Fig. 7

$NX = NY = 12$ REYNOLDS = 10^3 EPS = 10^{-5}

X courbe du gradient $\lg_{10}(g^n \cdot 10^{10})$
- courbe de la fonctionnelle $\lg_{10}(J(v^{n+1}) \cdot 10^{10})$

Cas stationnaire, montée en REYNOLDS : Profil des vitesses le long
de la médiane

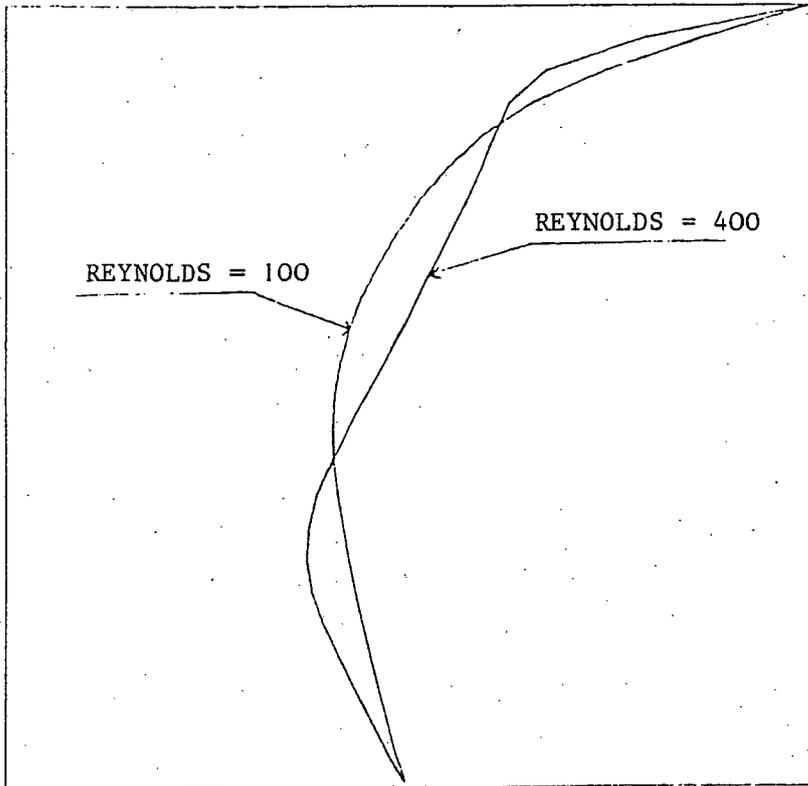


Fig. 8 : $NX = NY = 12$ $EPS = 10^{-5}$

Pour un Reynolds de 1000, nous n'avons pu obtenir la convergence. Les valeurs obtenues pour la fonctionnelle et le gradient deviennent constantes, et le profil des vitesses le long de la médiane ne ressemble en rien à celui attendu.

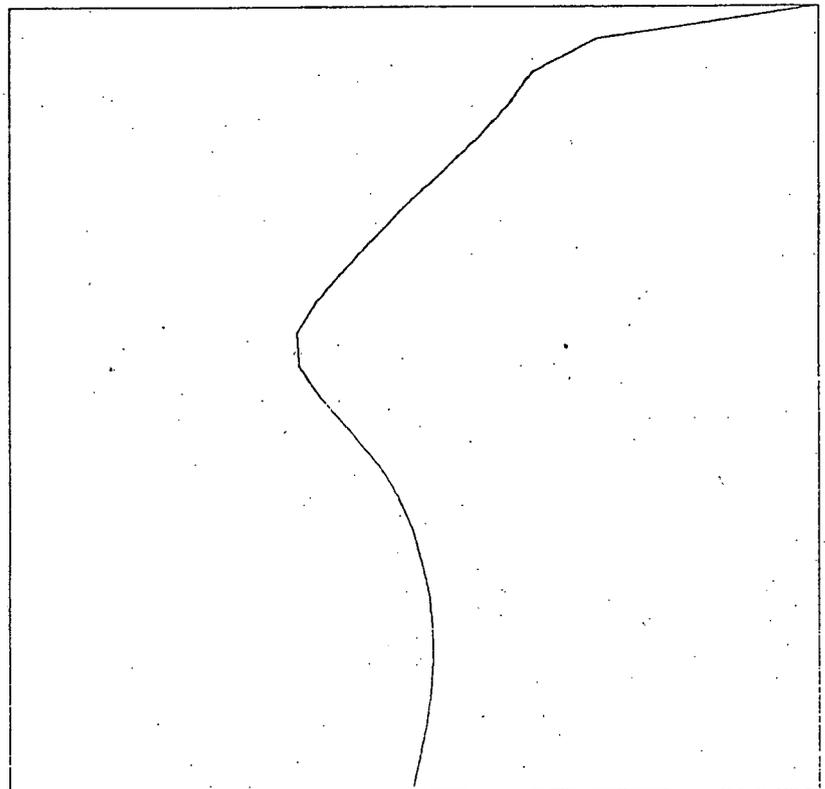


Fig. 9 : $NX = NY = 12$ REYNOLDS = 1000
 $EPS = 10^{-5}$

Cas stationnaire : Test de divers maillages

- Courbe de la fonctionnelle : $Lg_{10}(J(V^{n+1}) \cdot 10^{10})$

Fig. 11

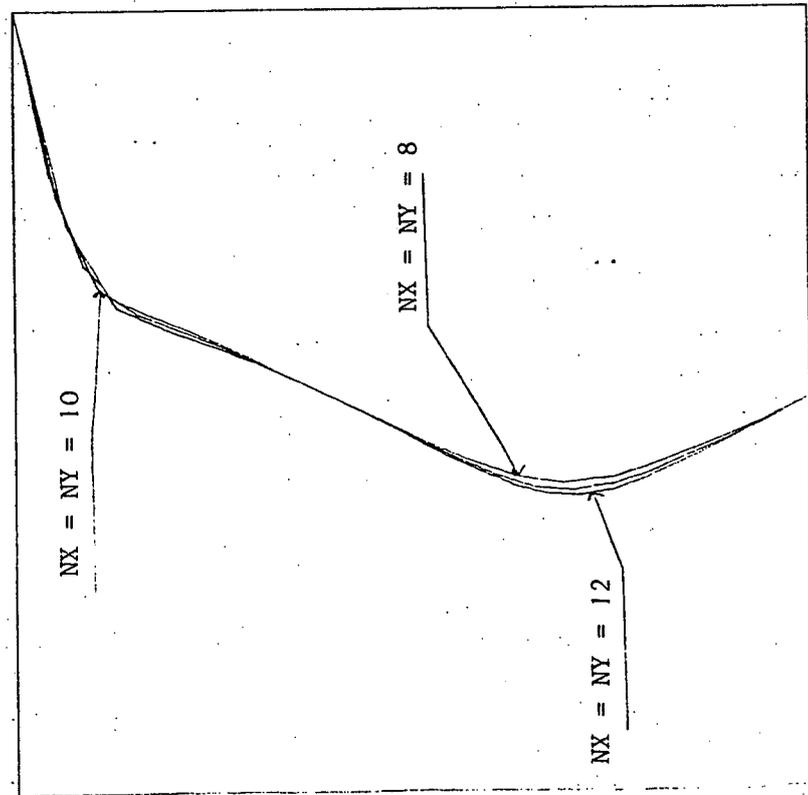
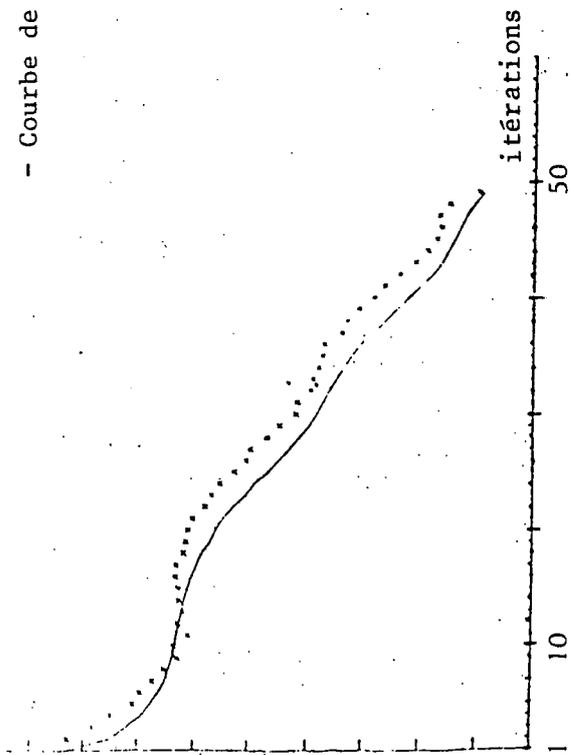


Fig. : REYNOLDS = 400 · EPS = 10^{-5}

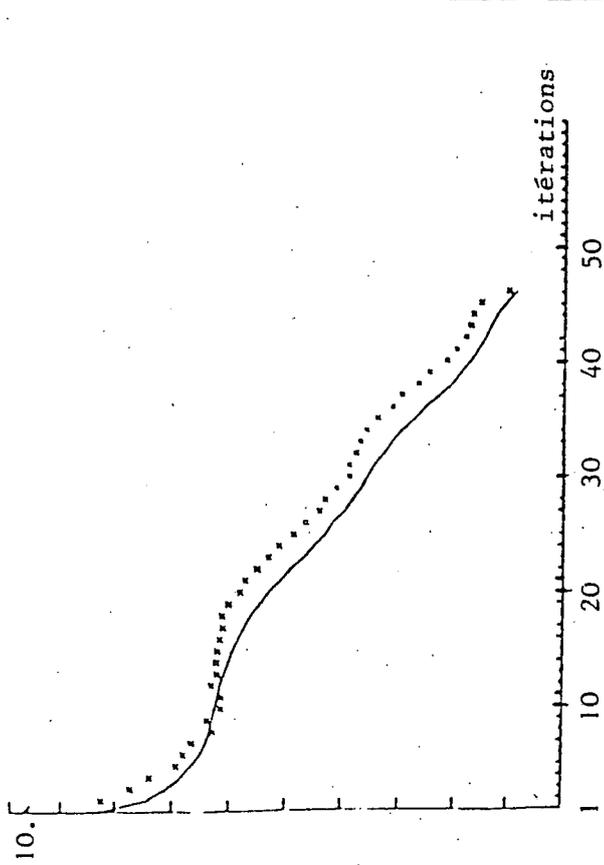


Fig. 10 : $NX = NY = 8$ REYNOLDS : 400 EPS = 10^{-3}

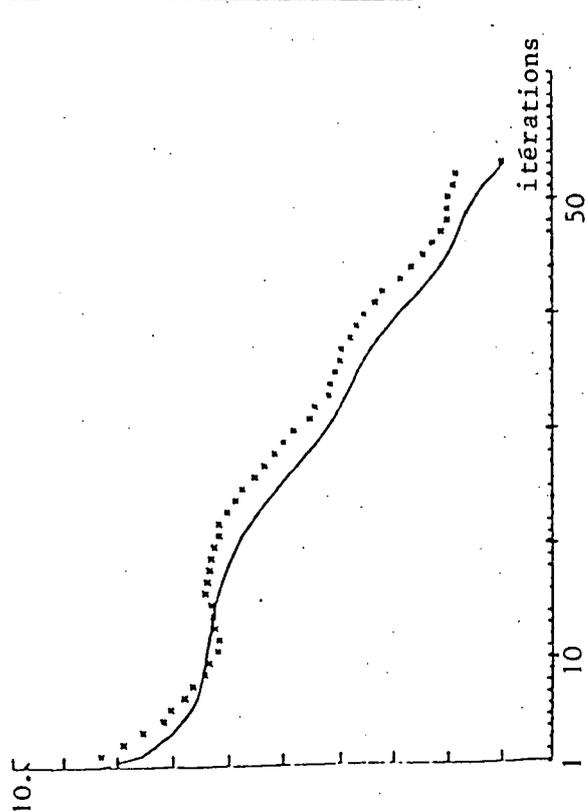


Fig. 12 : $NX = NY = 12$ REYNOLDS = 400 EPS = 10^{-5}

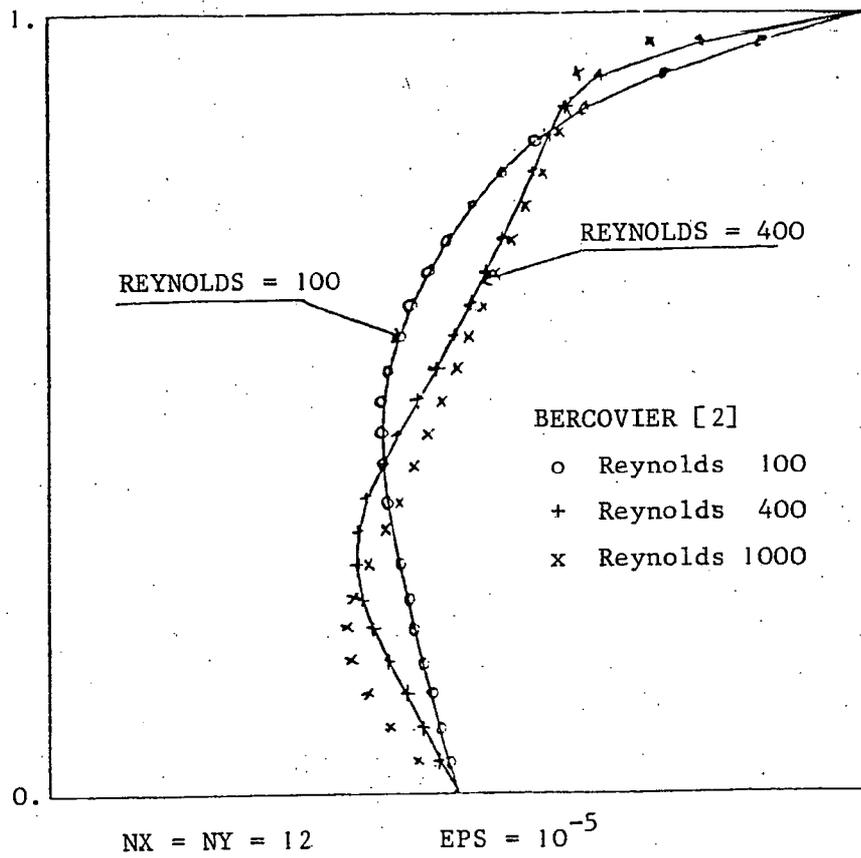


Fig. 13 : Profil des vitesses le long de la médiane

Comparaison avec les résultats obtenus par
BERCOVIER, ENGELMAN [2]

Pour un nombre de Reynolds égal à 400 et un paramètre de pénalisation égal à 10^{-5} , le tableau TAB 3 montre les résultats obtenus. Le nombre d'itération est peu différent d'un cas sur l'autre, seul le temps calcul, liés au nombre d'inconnues, croit avec la finesse de la discrétisation.

Les figures 10 à 13 donnent les graphiques obtenus tandis que la figure 14 compare pour des nombres de Reynolds 100 et 400, les résultats avec ceux présentés dans BERCOVIER-ENGELMAN [2].

D) Le cas évolutif

Nous avons tout d'abord reproduit deux cas de calcul déjà traités en stationnaire ; soit :

- maillage 8×8 reynolds 400 pénalisation 10^{-5}
- maillage 12×12 reynolds 1000 pénalisation 10^{-5}

Dans le deuxième cas, nous n'avions pu attendre la convergence par un traitement stationnaire.

Nous avons également testé des nombres de reynolds plus élevés :

- maillage 10×10 Reynolds 2000 pénalisation 10^{-5}
- maillage 10×10 Reynolds 4000 pénalisation 10^{-5}

Le schéma en temps étant inconditionnellement stable, nous avons pu utiliser divers pas de temps. Mais un pas de temps trop grand n'apporterait pas d'amélioration par rapport au problème stationnaire, la contribution du terme $\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t}$ devenant négligeable devant les termes du gradient et de la convergence. Il est intéressant par contre de faire varier le pas de temps au cours du temps.

En effet, recherchant par une méthode asymptotique la solution stationnaire, un pas de temps faible favorisera la convergence de l'algorithme de minimisation de la fonctionnelle coût. Ayant ainsi obtenu une approximation de la solution, nous pourrions alors utiliser des pas de temps plus grand.

Nous testerons la convergence vers la solution stationnaire par le calcul de la différence entre deux itérés successifs. Nous considérerons avoir atteint la solution si

$$\max_i |V^N(i) - V^{N+1}(i)| < 10^{-4} \quad i \text{ degré de liberté.}$$

Pour les deux premiers essais nous donnons le profil des vitesses le long de la médiane et le champ des vitesses au temps initial et en fin de programme ainsi que l'évolution du profil au cours du temps.

Figures 14 à 18 pour le maillage 8×8 , Reynolds 400
Convergence à $t = 16.10$

Figures 19 à 23 pour le maillage 12×12 , Reynolds 1000
Convergence à $t = 56.20$

La Figure 24 compare pour le deuxième cas les résultats avec ceux donnés dans BERCOVIER-ENGELMAN [2].

Dans le cas d'un nombre de Reynolds égal à 1000 deux pas de temps furent utilisés. Le tableau TAB 4 donne le nombre d'itérations nécessaires pour minimiser la fonctionnelle coût J en fonction du pas de temps et du temps.

t	:	0	3	6	9	11.2	20,2	30,2	40,2	56.2
Δt	:		0.1					1.		
nombres d'itérations	:	9	5	4	4	3	13	10	5	4
	:									
	:									

TAB 4

INITIALISATION

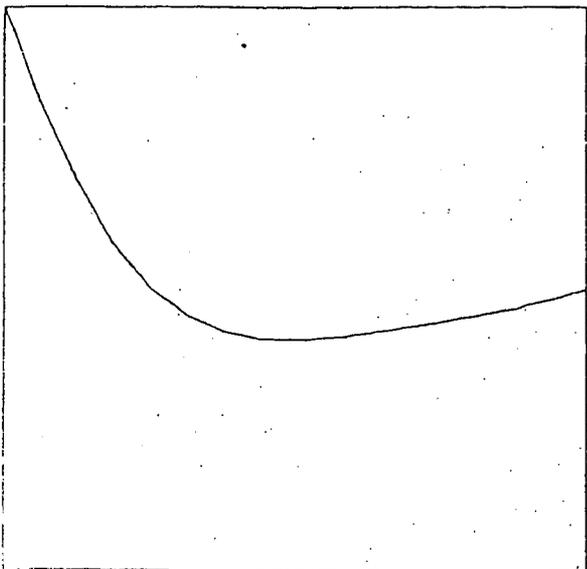


Fig. 14

: NX = NY = 8 REYNOLDS = 400 EPS = 10^{-5}

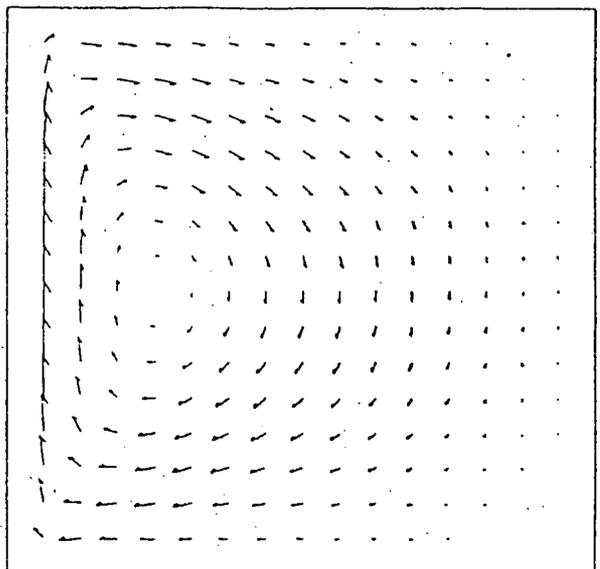


Fig. 15

Profil des vitesses le long de la médiane

t = 0

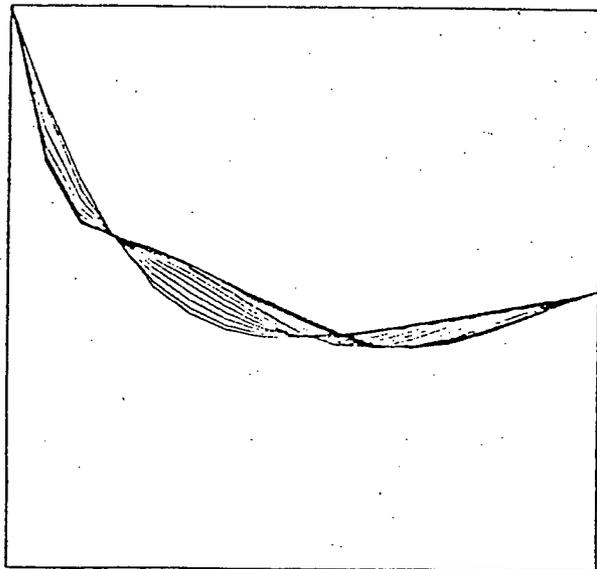
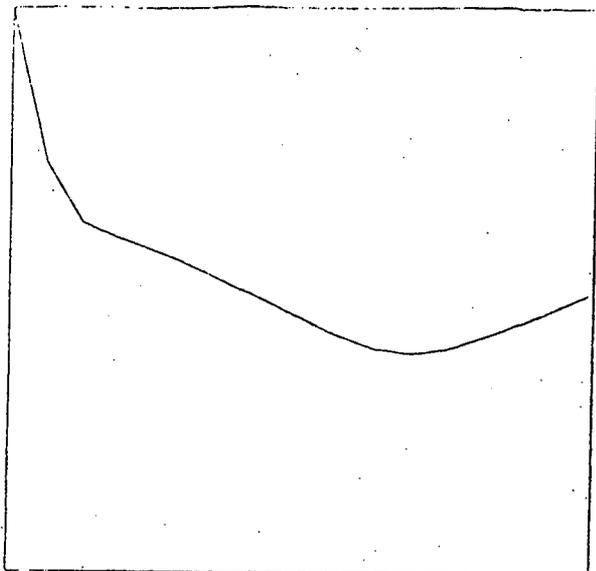


Fig. 18 : Evolution du profil

RESULTAT FINAL



t = 16.10

Fig. 16

: NX = NY = 8 REYNOLDS = 400 EPS = 10^{-5}

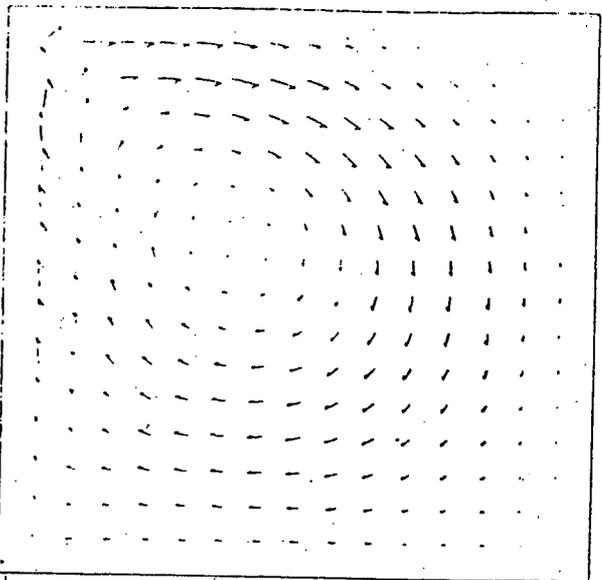


Fig. 17

← Champ des vitesses →

CAS EVOLUTIF

RESULTAT FINAL

t = 56.2

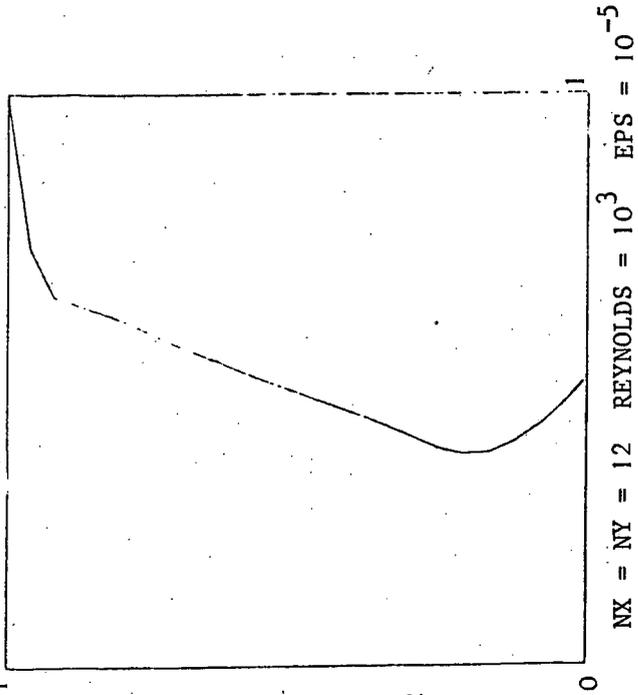


Fig. 19 - 21

Profil des vitesses le long de la médiane

t = 0

INITIALISATION

NX = NY = 12 REYNOLDS = 1000 EPS = 10^{-5}

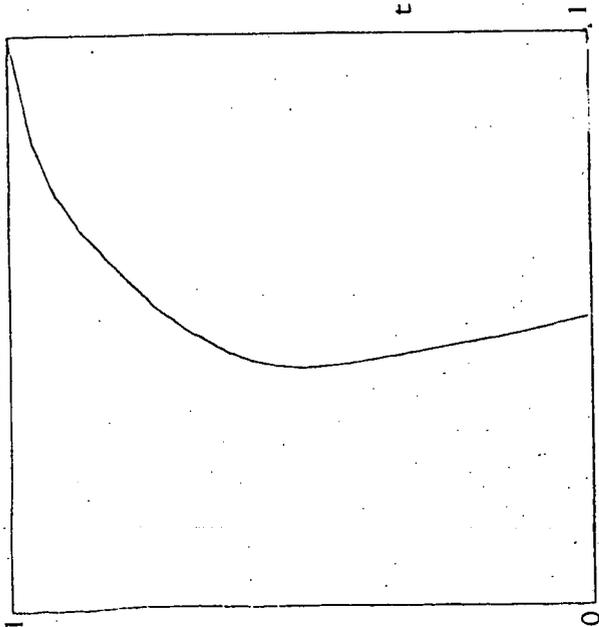
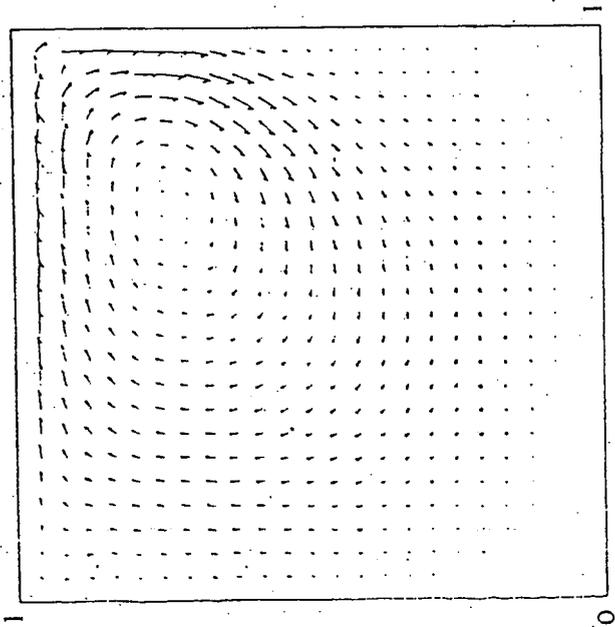
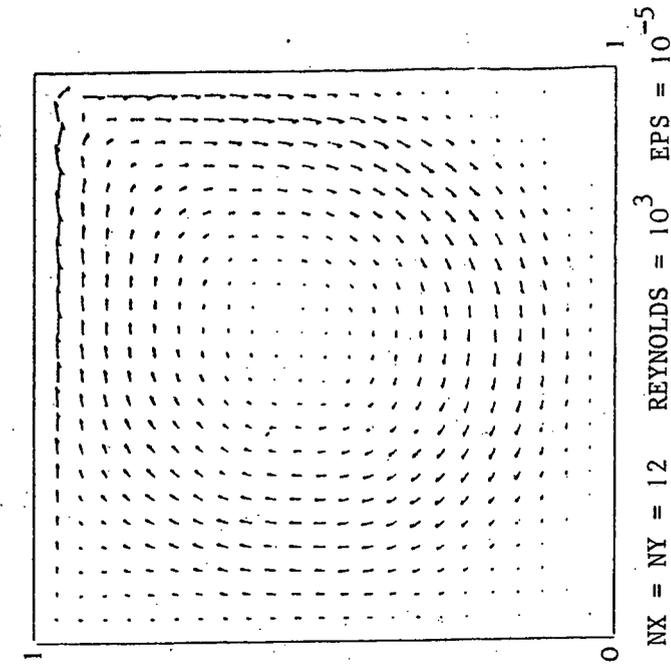


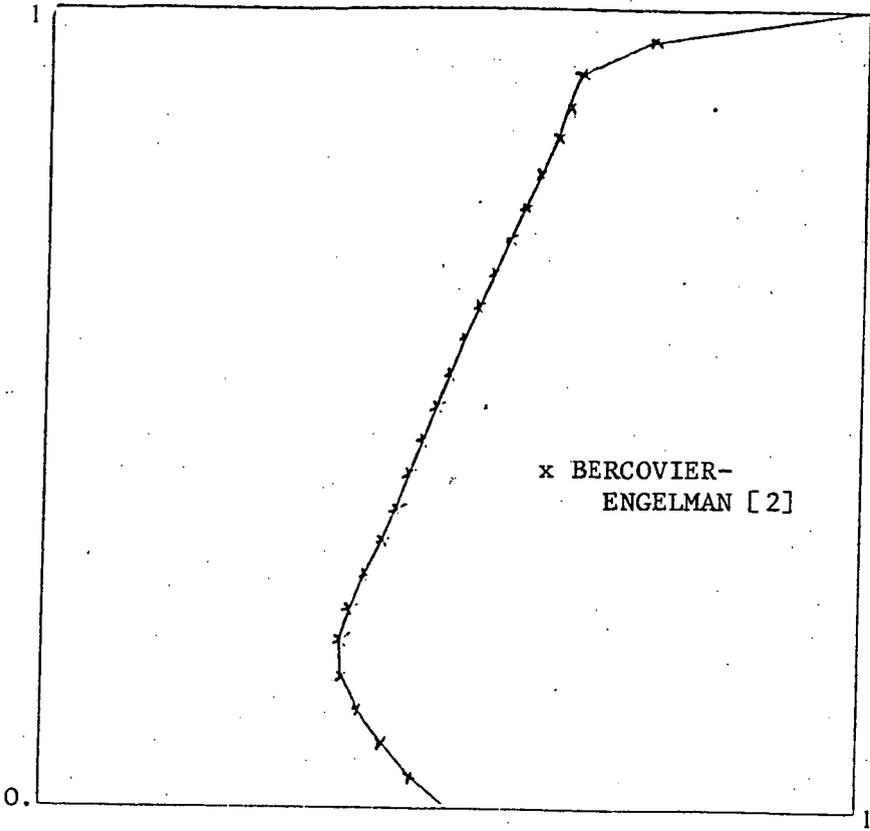
Fig. 20 - 22

Champ des vitesses

NX = NY = 12 REYNOLDS = 1000 EPS = 10^{-6}



CAS EVOLUTIF



Profil des vitesses le long
de la médiane

Comparaison avec
BERCOVIER-ENGELMAN [2]

Fig. 24 : $NX = NY = 12$ REYNOLDS = 10^3 EPS = 10^{-5}

Profil des vitesses le long
de la médiane

EVOLUTION DU PROFIL

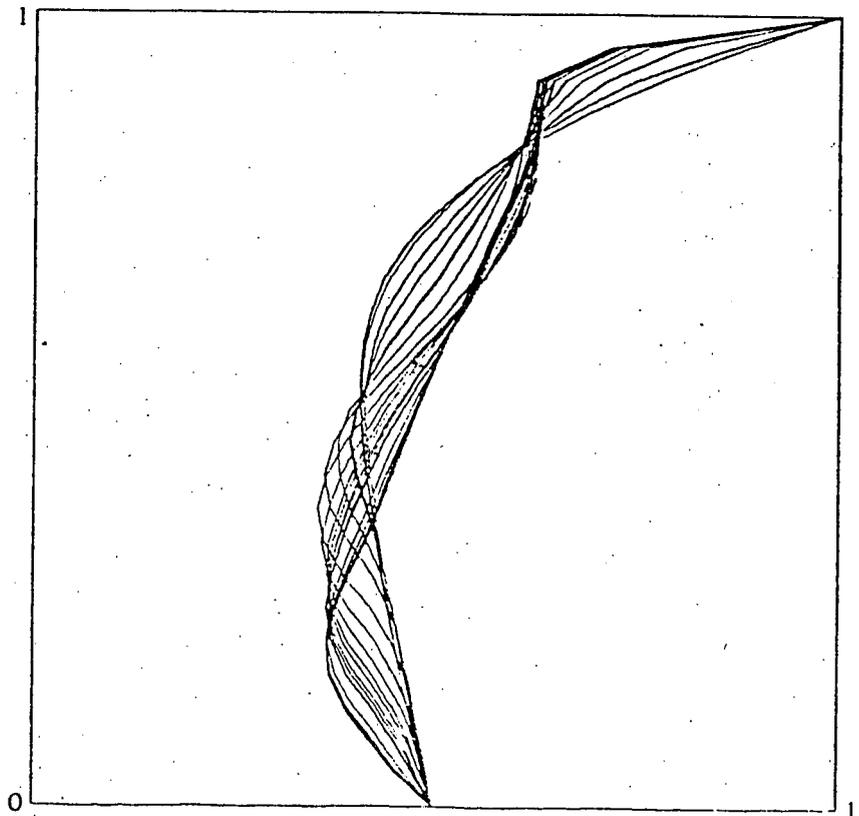
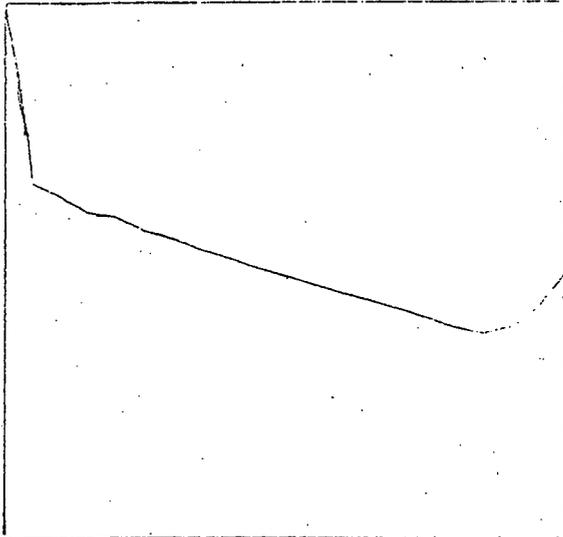


Fig. 23 : $NX = NY = 12$ REYNOLDS = 10^3 EPS = 10^{-5}
évolution : $t = 0.$ à $t = 56.2$

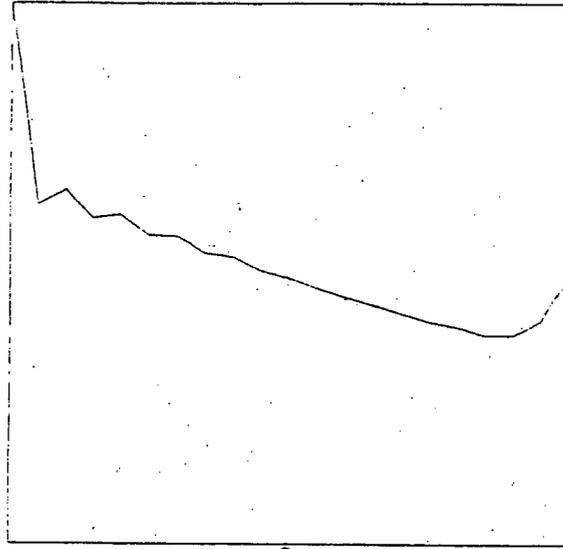
CAS EVOLUTIF



t = 55.50

Profil des
vitesses le
long de la
médiane

Fig. 25 : NX = NY = 10
REYNOLDS = 2000 EPS = 10⁻⁵



t = 20.16

Fig. 26 : NX = NY = 10
REYNOLDS = 4000 EPS = 10⁻⁵

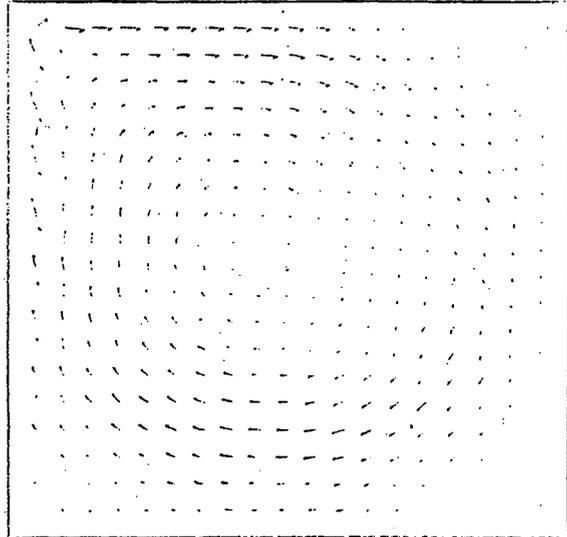


Fig. 26 : NX = NY = 10
REYNOLDS = 2000 EPS = 10⁻⁵

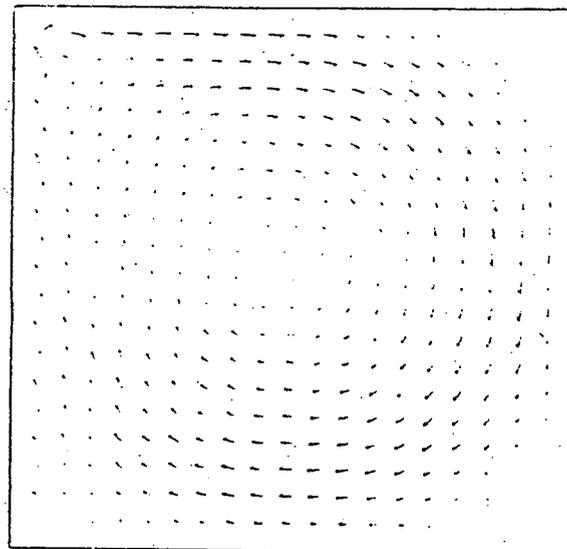


Fig. 28 : NX = NY = 10
REYNOLDS = 4000 EPS = 10⁻⁵

Champ des vitesses

Nous donnons également le profil des vitesses le long de la médiane et le champ des vitesses pour les deux cas de calcul suivants

- Maillage 10×10 , Pénalisation 10^{-5}
 - . Reynolds 2000 (Figures 25-26)
 - . Reynolds 4000 (Figures 27-28)

L'initialisation choisit était dans le premier cas, la solution à Reynolds 1000, et pour le second celle du premier.

Nous voyons apparaître, en particulier pour Reynolds 4000 des oscillations au voisinage de la frontière $y = 1$. C'est le signe (voir GRESHO-LEE [11]) qu'un des paramètres est inadapté au phénomène à modéliser. Le maillage employé ne compte que 882 degrés de liberté de surcroît uniformément répartis. Il est donc conseillé de raffiner la discrétisation près de la frontière $y = 1$.

Nous avons également traité de façon évolutive le problème de la marche tel qu'il est défini pour le Séminaire GAMM-Bièvre 1983. Le domaine est décrit par la figure Fig. 29

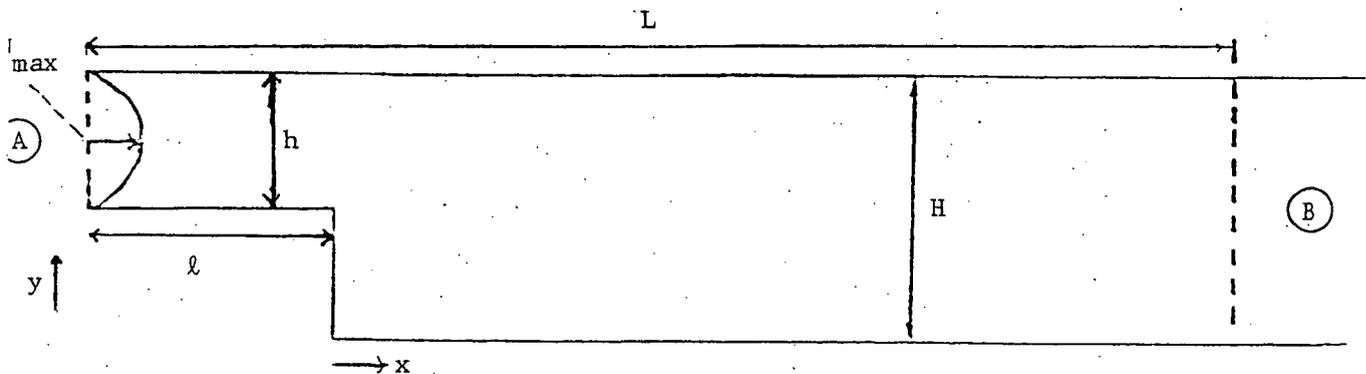


Fig. 29 : Le problème de la marche

Sont fixés : $L = 22$
 $l = 3$
en (A) profil parabolique.

Nous avons choisi $U_{max} = 1$ en (A).

Nous avons testé le modèle sur deux domaines caractérisés par

$H = 1.5$ et $h = 1$.

$H = 1$ et $h = 0.5$

Les figures 30 et 31 montrent les maillages utilisés.

Les conditions limites choisies ici sont de Dirichlet

en (A) $V_y = 0$

V_x de profil parabolique avec $U_{max} = 1$

en (B) $V_y = 0$

V_x de profil parabolique et tel que le flux d'entrée en (A) soit égal au flux de sortie en (B).

Pour ce problème, les critères de convergence sont identiques à ceux utilisés pour le problème de la cavité carré ; c'est à dire :

$J(V) < \epsilon_1 = 10^{-9}$ pour l'étape de gradient conjugué

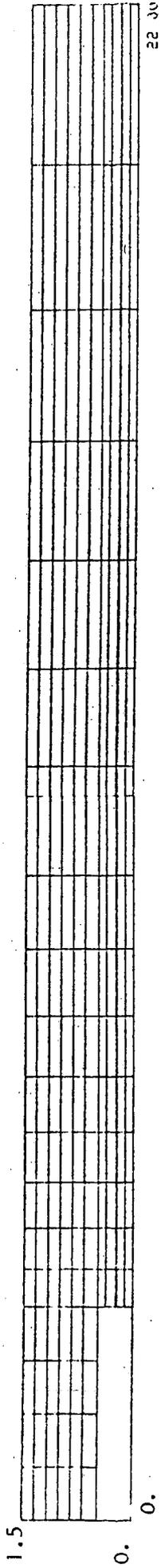
$\sup_{\text{noeud}} |V^{n+1}(i) - V^n(i)| < \epsilon_2 = 10^{-4}$ pour la convergence en temps.

Le paramètre ϵ_1 doit être choisi petit. En effet, s'il ne l'est pas assez, nous obtiendrons assez rapidement une initialisation $V^n = V_o^{n+1}$ de l'algorithme de gradient conjugué vérifiant le critère et donc V^{n+1} sera égal à V^n .

De plus recherchant une solution stationnaire, il est conseillé de prendre un pas de temps grand en fin d'expérience, ou mieux d'effectuer un dernier passage dans le cas stationnaire.

Pour chaque essai, nous donnons :

Le champ des vitesses, ainsi que les lignes de courant, des grossissements étant effectués pour mieux visualiser le tourbillon.

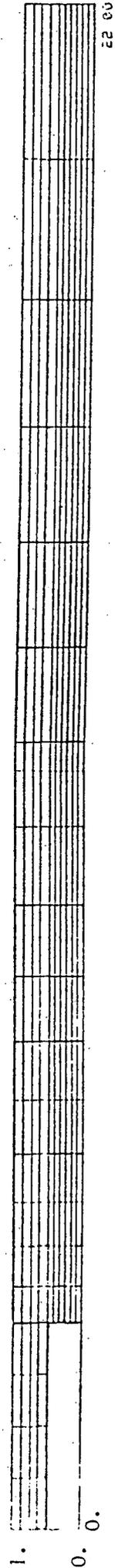


184 Quadrangles

797 Noeuds

Fig. 30 : $H = 1.5$, $h = 1$.

1594 Degrés de liberté



184 Quadrangles

765 Noeuds

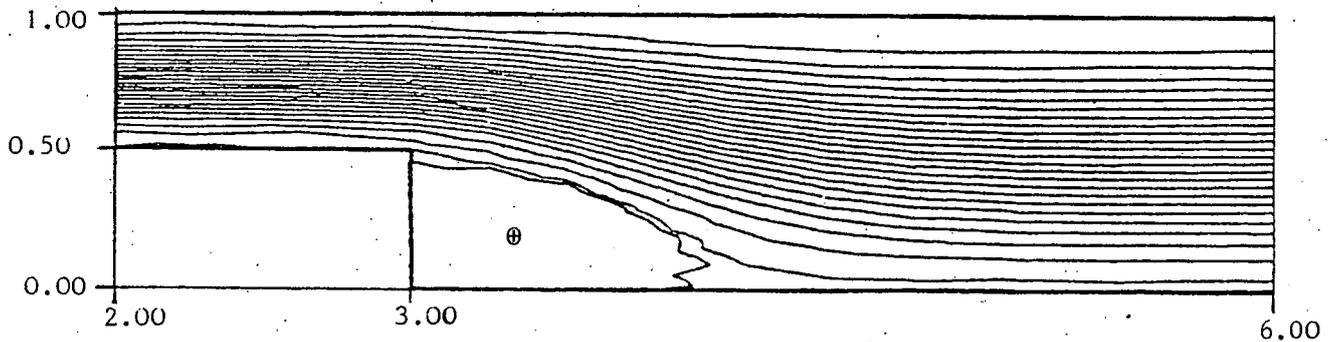
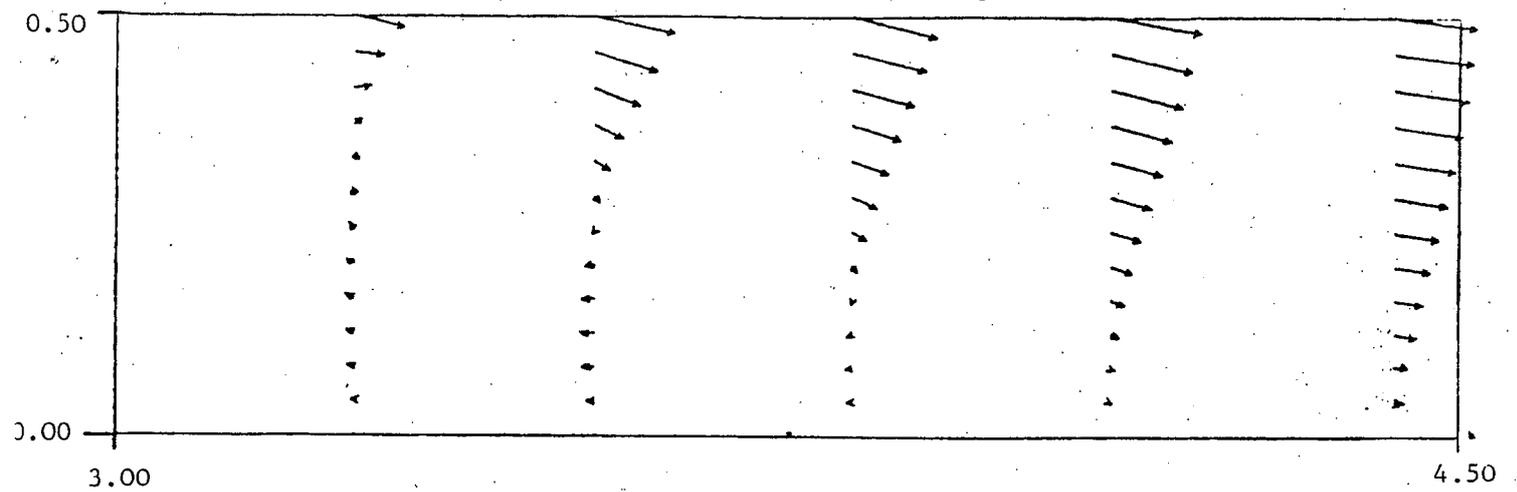
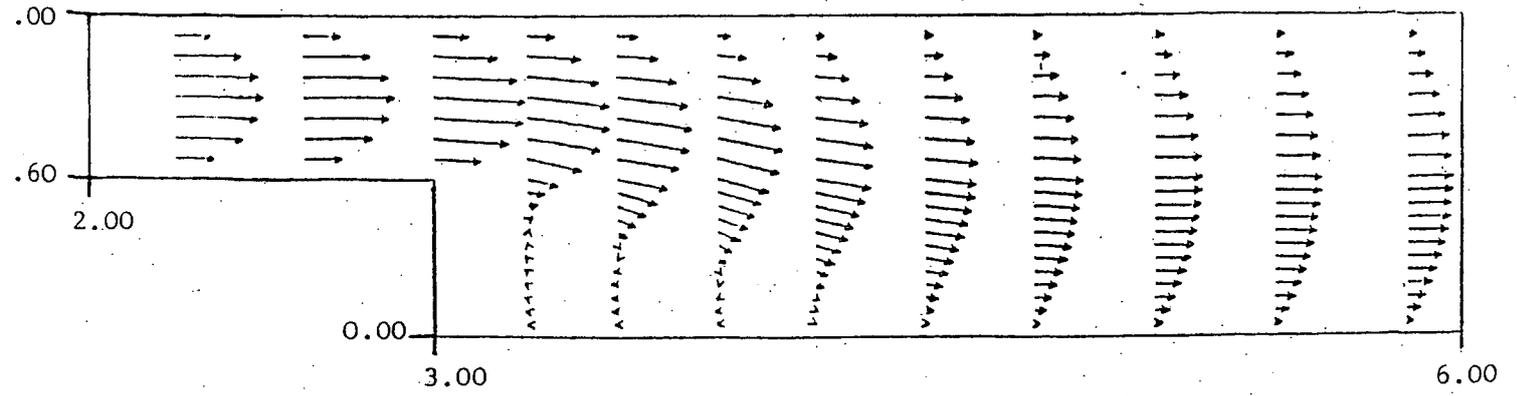
Fig. 31 : $H = 1$, $h = 0.5$

1530 Degrés de liberté

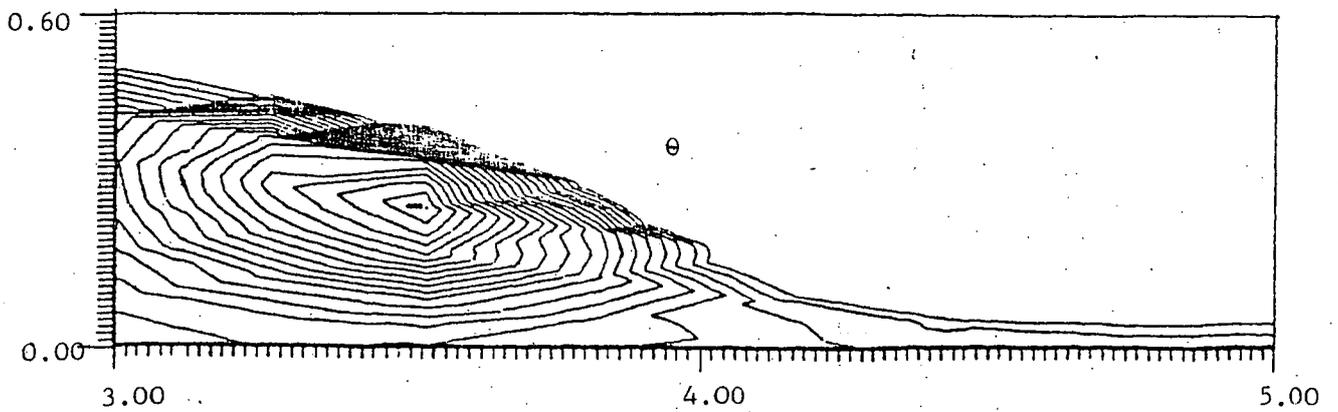
H = 1.00

h = 0.50

REYNOLDS = 100.



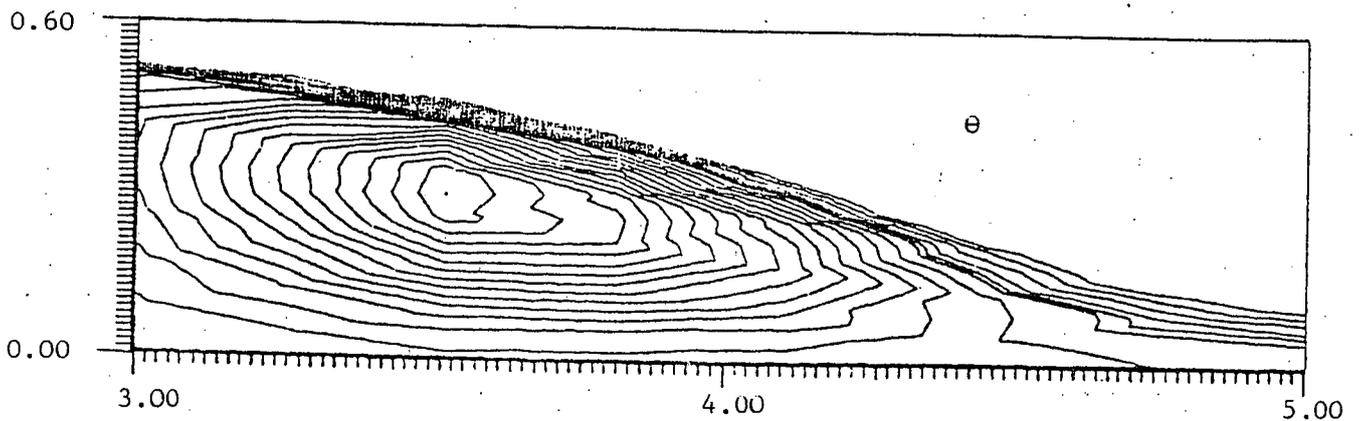
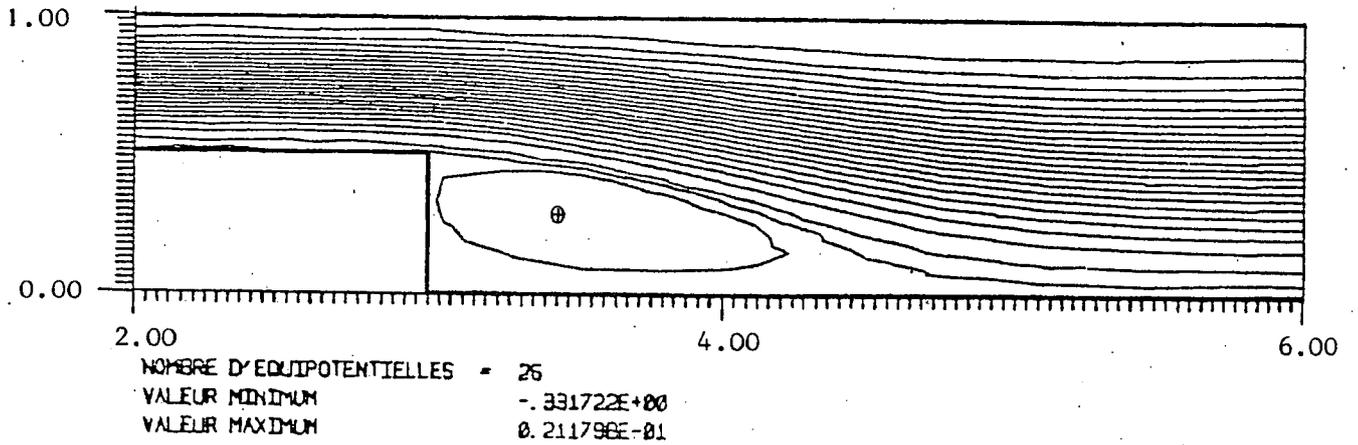
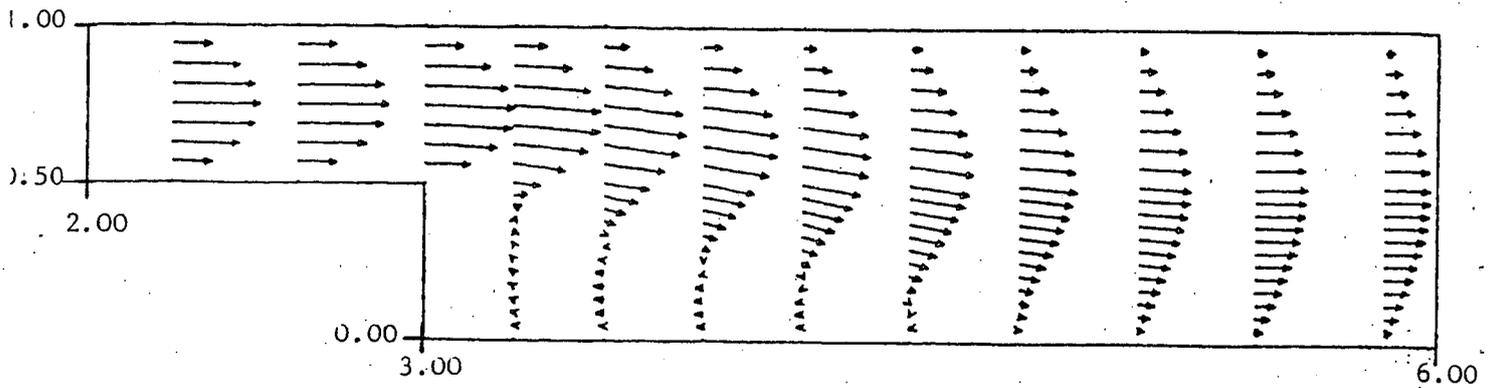
OMBRE D'EQUIPOTENTIELLES = 26
VALEUR MINIMUM = -331651E+00
VALEUR MAXIMUM = 0.165010E-01



H = 1.00

h = 0.50

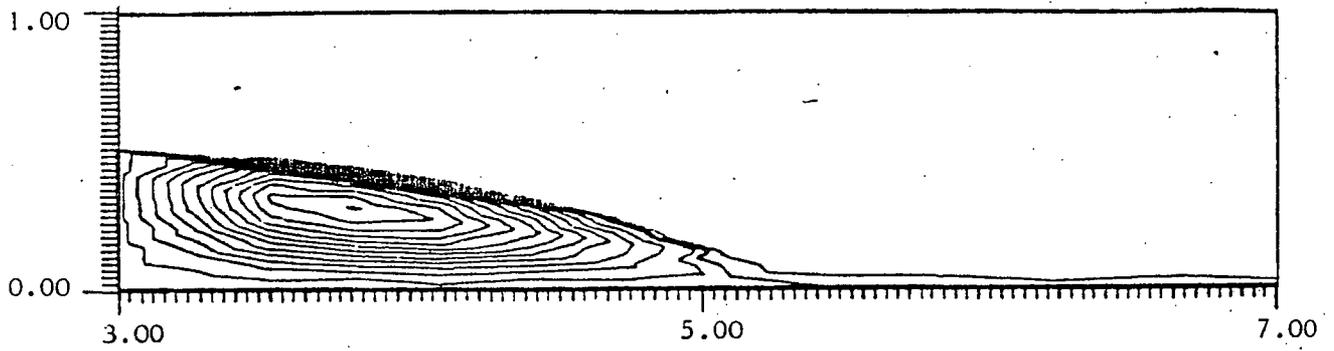
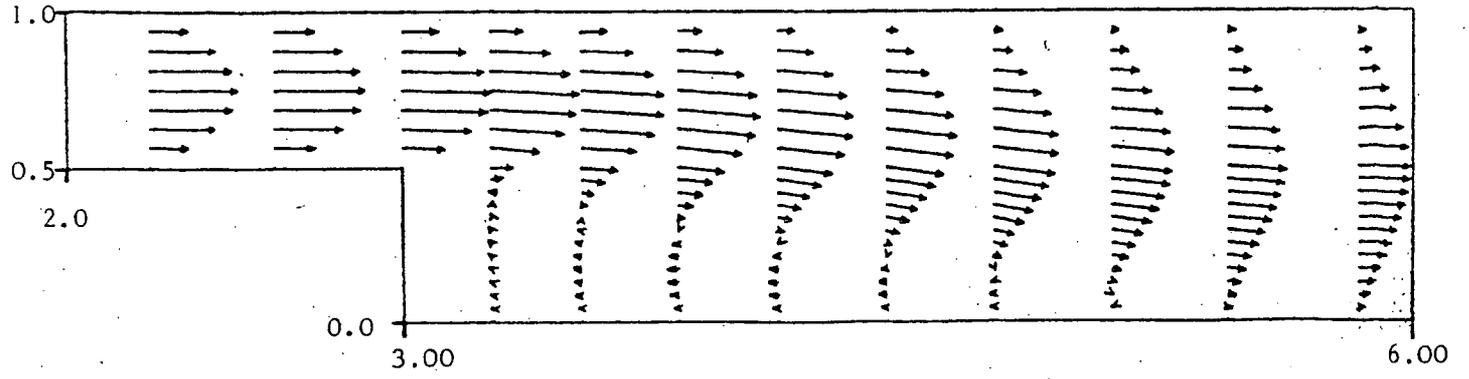
REYNOLDS = 160



H = 1.00

h = 0.50

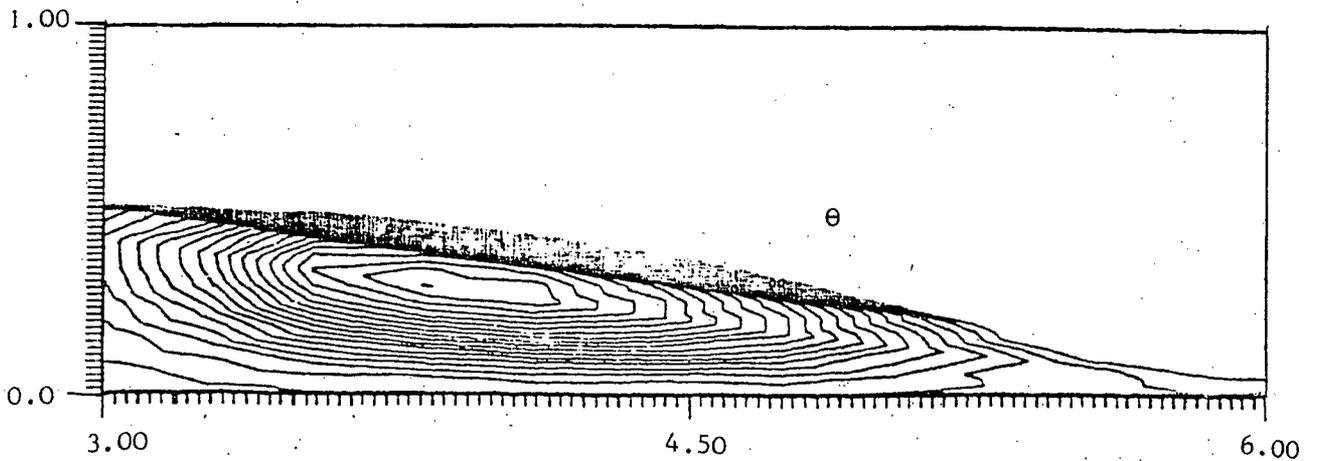
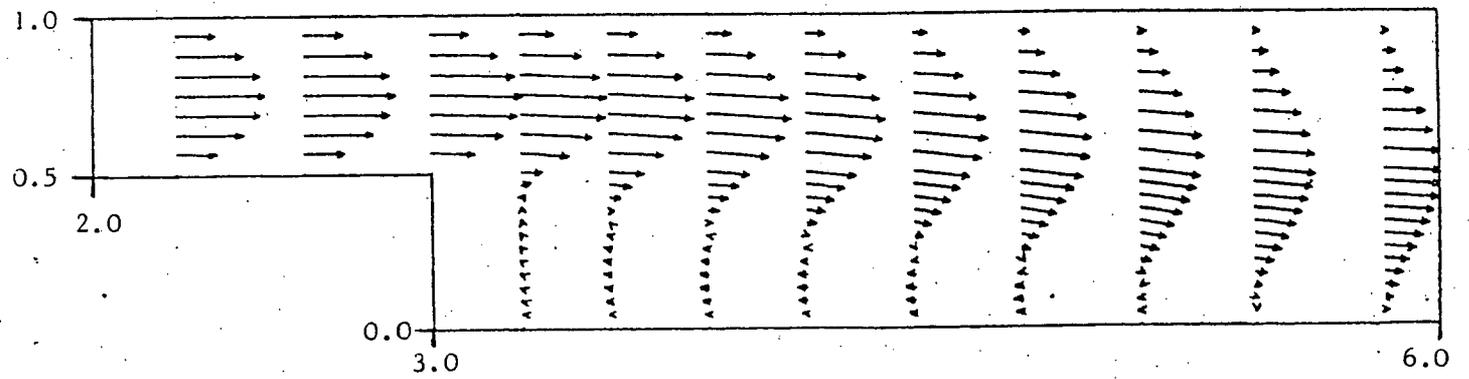
REYNOLDS = 250



H = 1.00

h = 0.50

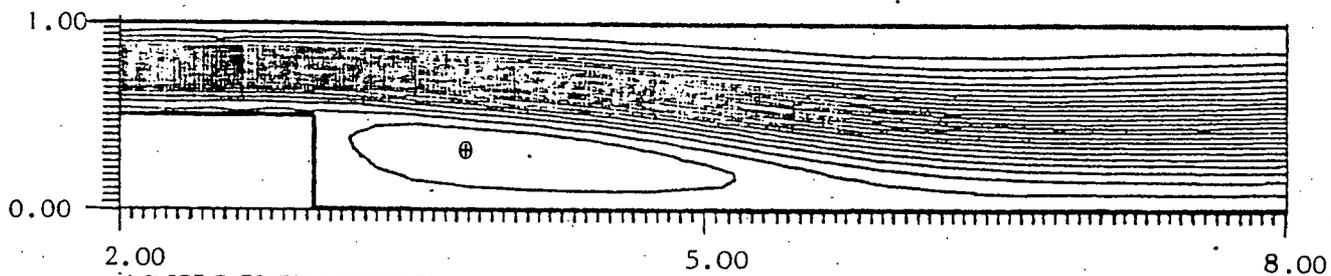
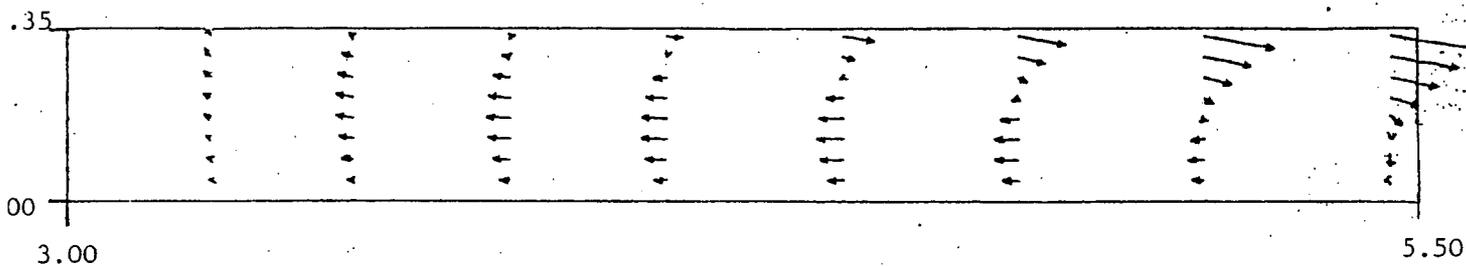
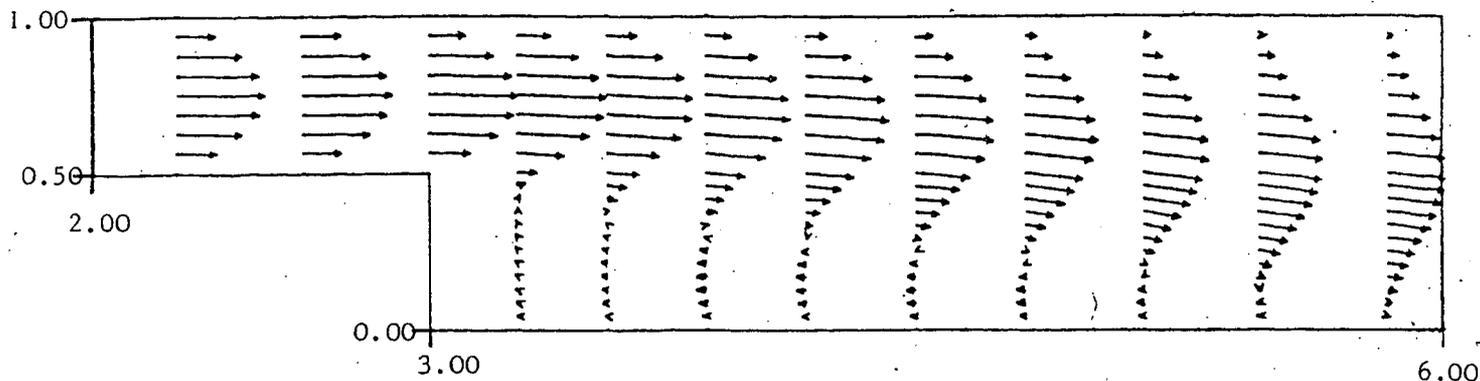
REYNOLDS = 300



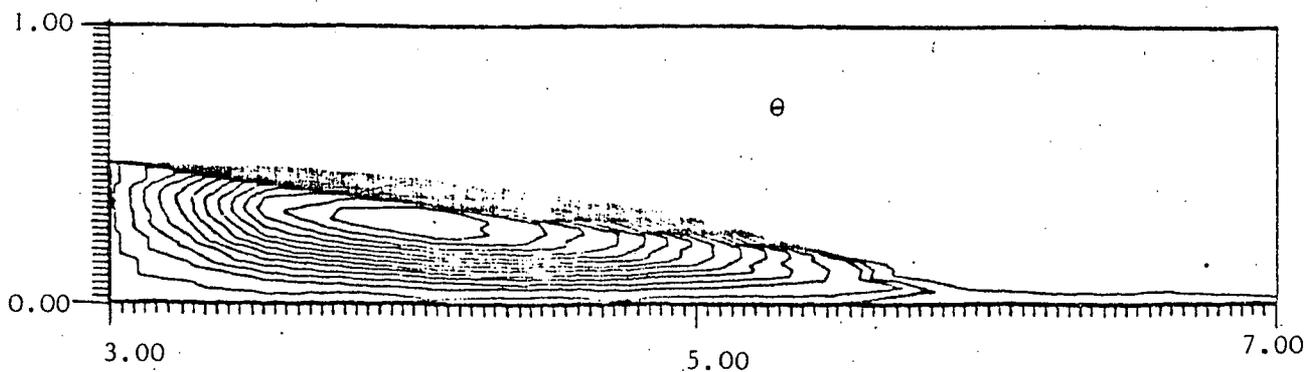
H = 1.00

h = 0.50

REYNOLDS = 350



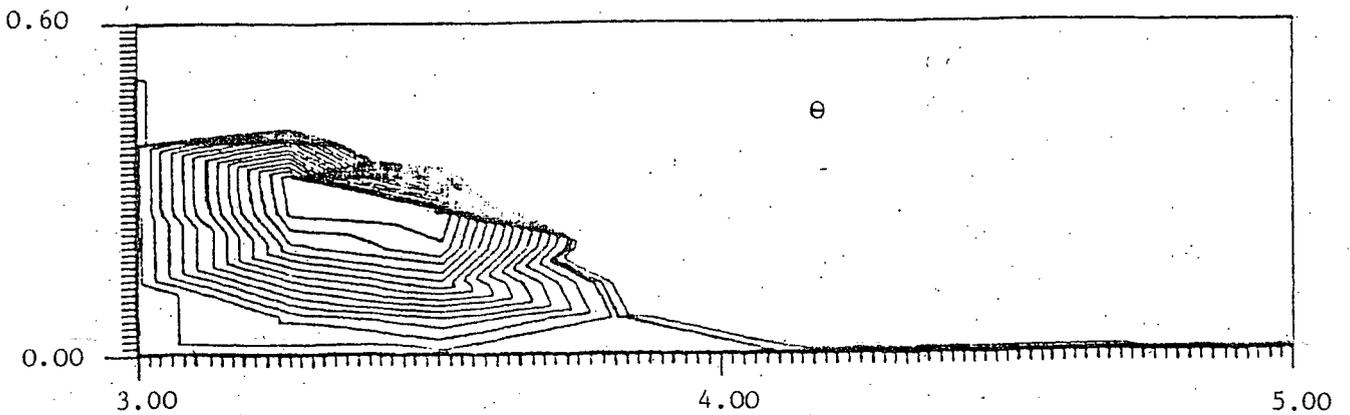
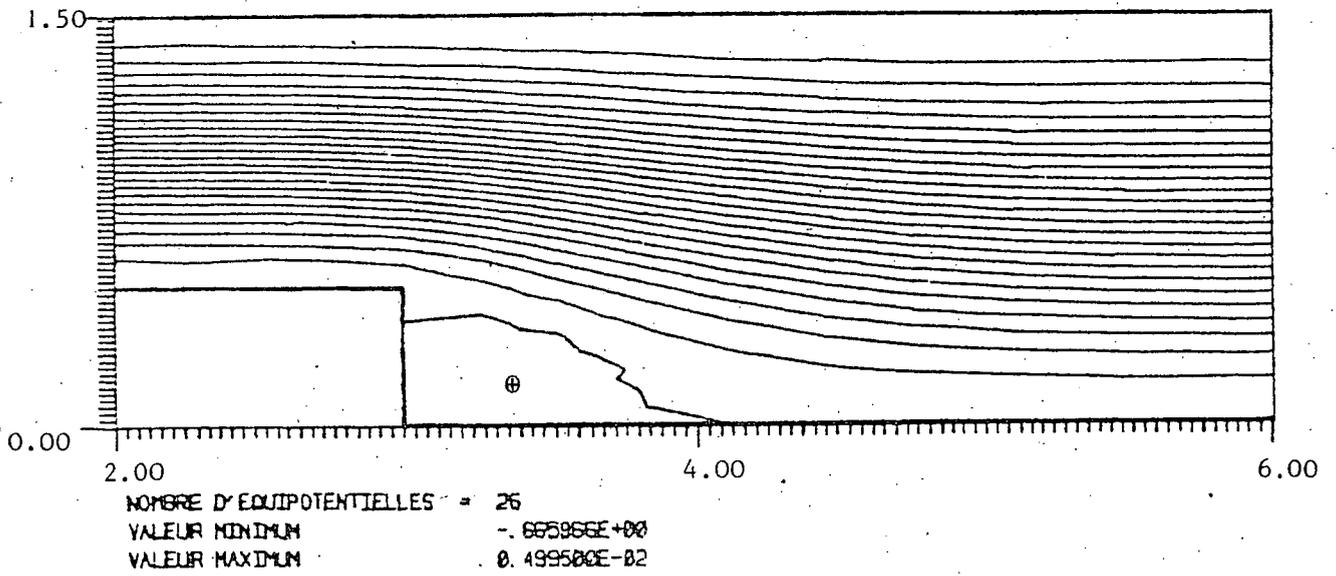
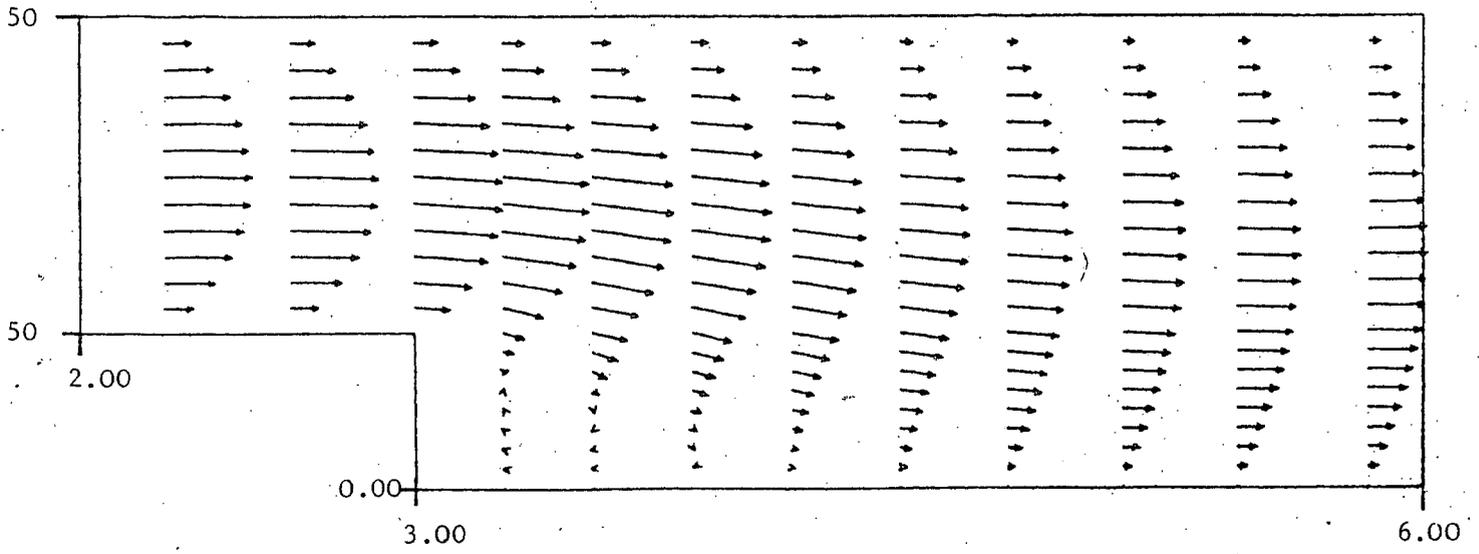
NOBRE D'EQUIPOTENTIELLES = 26
VALEUR MINIMUM = - 331881E+00
VALEUR MAXIMUM = 0.234898E-01



H = 1.50

h = 1.00

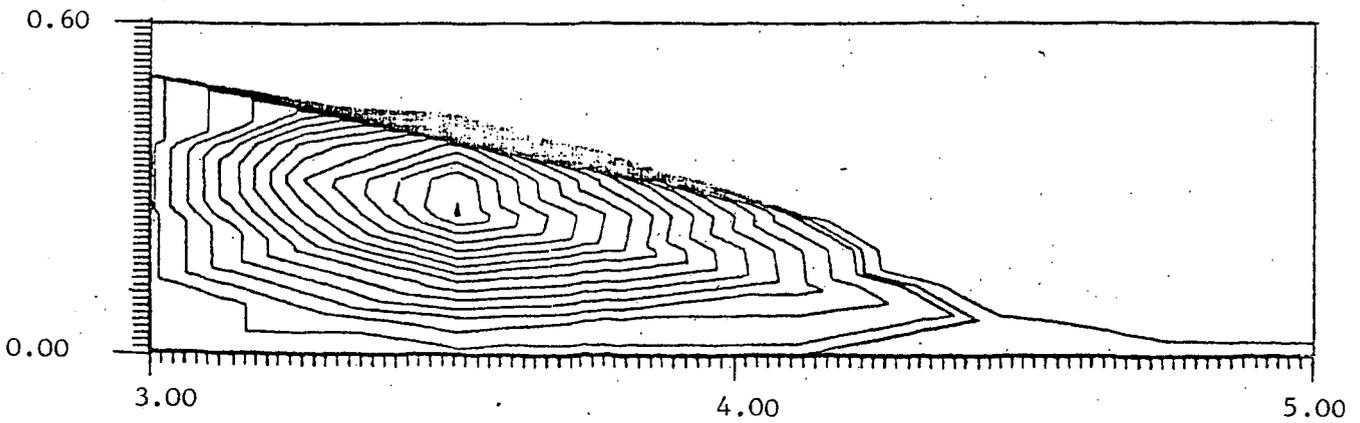
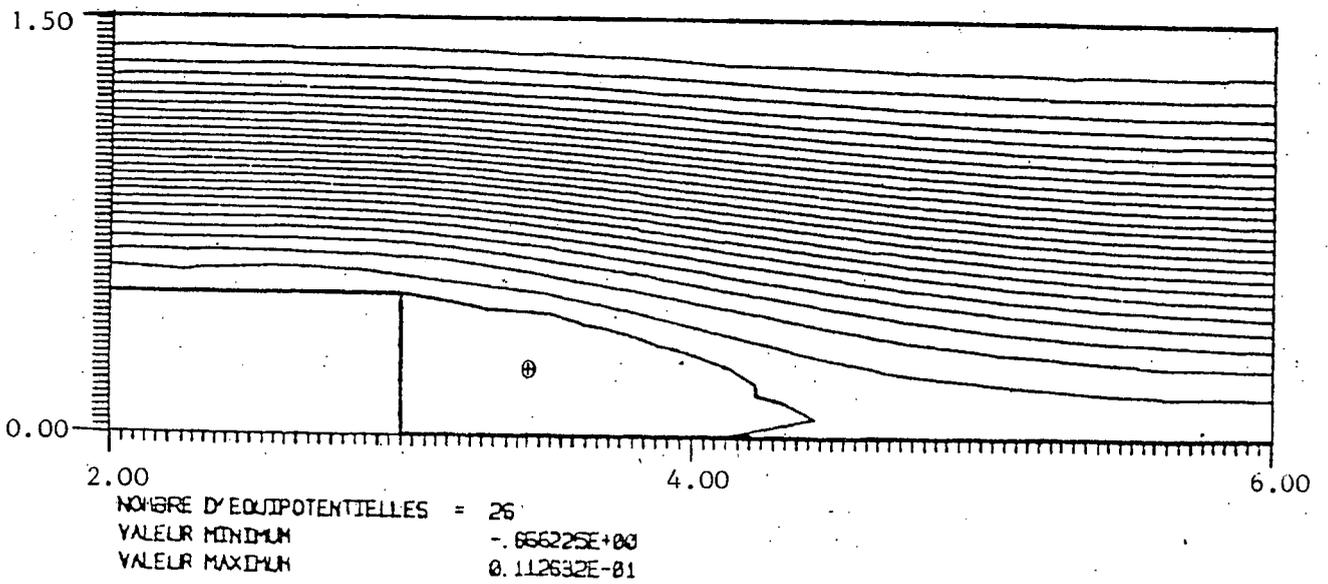
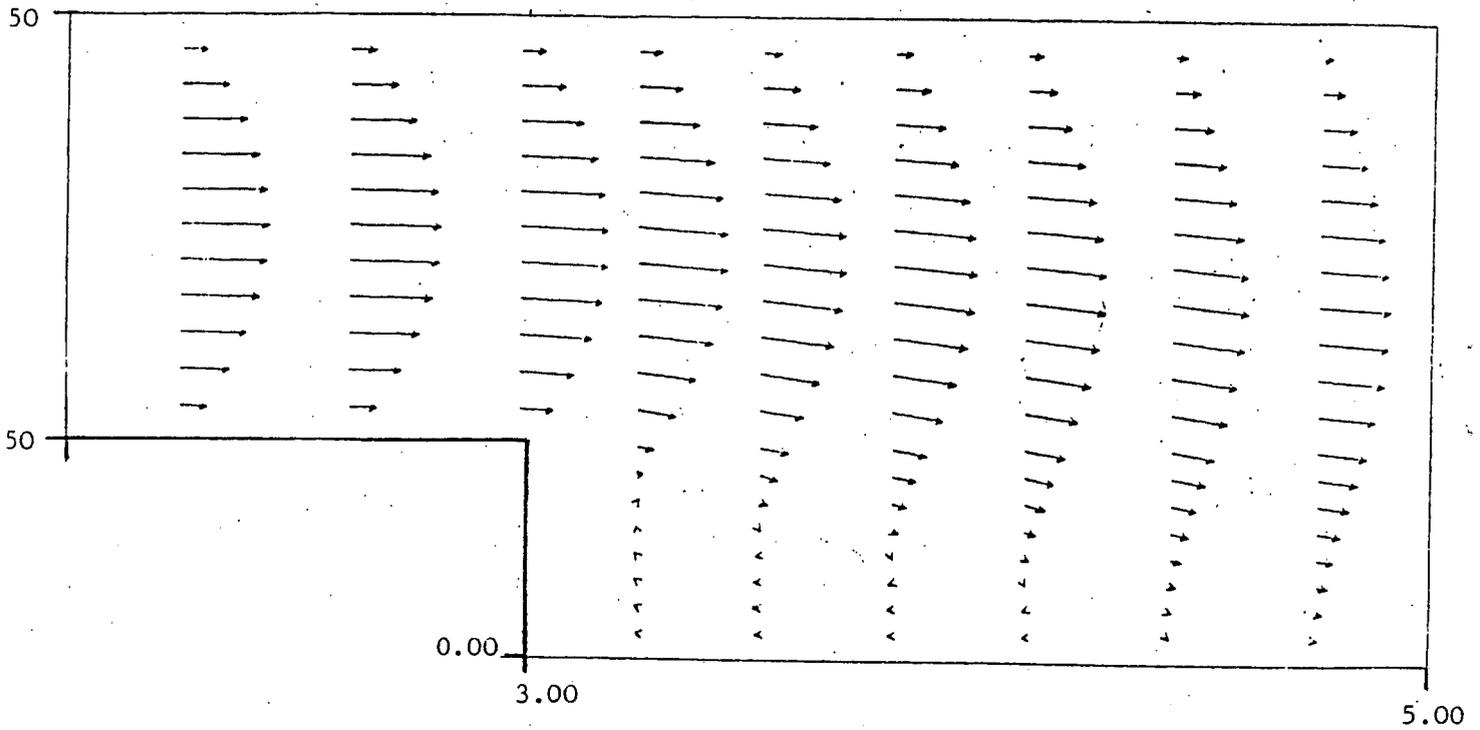
REYNOLDS = 50.



H = 1.50

h = 1.00

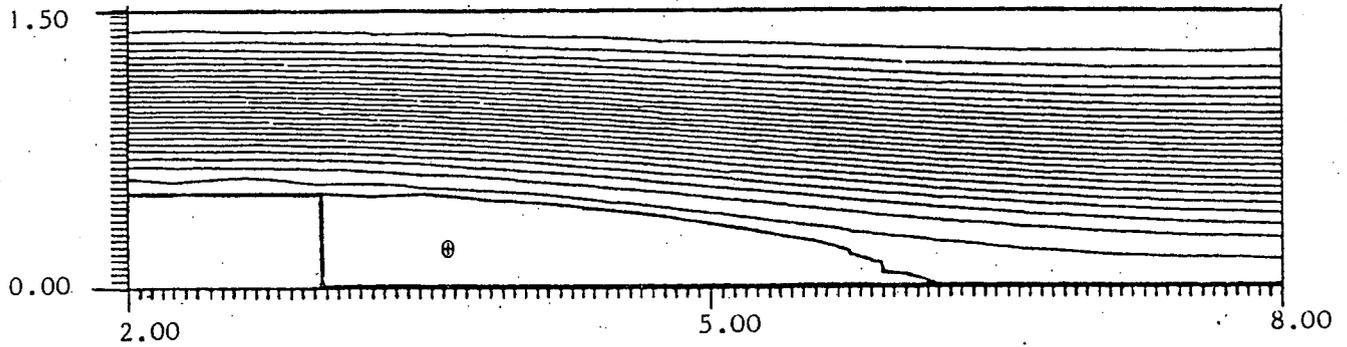
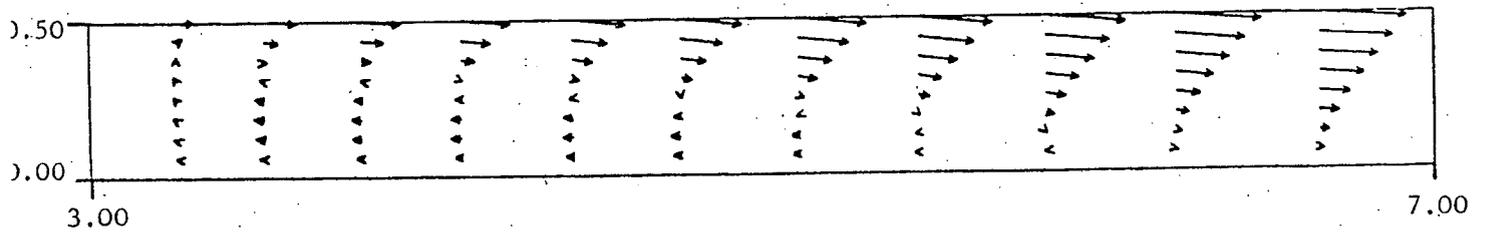
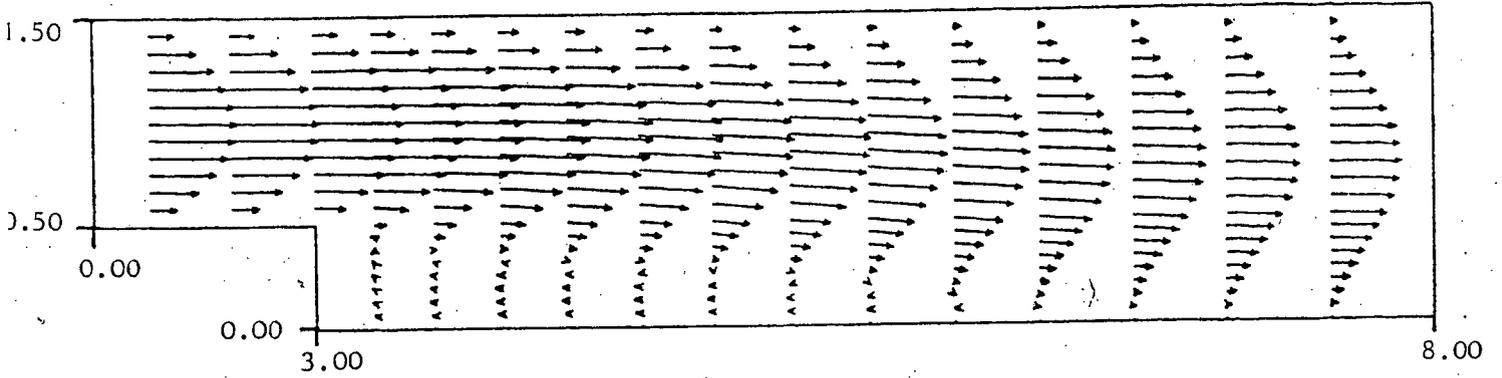
REYNOLDS = 100.



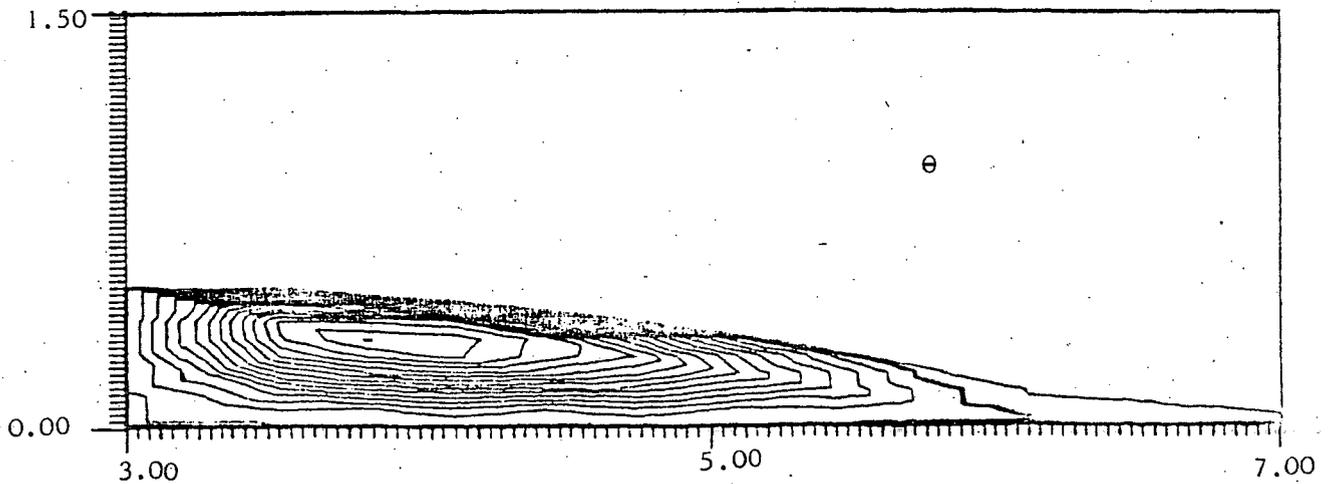
H = 1.50

h = 1.00

REYNOLDS = 300.



NOMBRE D'EQUIPOTENTIELLES = 26
VALEUR MINIMUM = -.666356E+00
VALEUR MAXIMUM = 8.149347E-01



CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons donc montré qu'une formulation de type moindres carrés fonctionnels associée à un algorithme de gradient conjugué préconditionné permet de résoudre efficacement un problème non linéaire traité par une méthode de pénalisation et d'éléments finis.

L'usage de la pénalisation, éliminant la pression, diminue d'autant le nombre d'inconnues du système et évite un traitement spécial de la non linéarité.

Les moindres carrés et le gradient conjugué, nous donnent une méthode souple et résistante pour la résolution. De plus les performances - précision, rapidité - de cette méthode sont tout à fait comparable à celles des méthodes directes couramment utilisées.

La méthode employée ici se généralise aisément. En particulier, il serait intéressant de traiter d'une façon identique des équations couplées et un problème en dimension. L'étude effectuée montre déjà l'intérêt et les possibilités d'une telle approche.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BERCOVIER : Régularisation dual des problèmes variationnels mixtes. Applications aux éléments finis mixtes et extension à quelques problèmes non linéaires. Thèse de Doctorat. Rouen 1976.
- [2] M.B. COULER, M. ENGELMAN : A finite element for the numerical solution of Viscous Incompressible flows . Journal of Comput Physics, Vol 30, p.181-201, 1979.
- [3] M. BERCOVIER : Perturbation of mixed variational problems, Application to mixed finite element methods. RAIRO, Analyse Numérique, Vol 12, n° 3, pp.211-236, 1978.
- [4] F. BREZZI : On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers. RAIRO, R.2., p.129-191, 1974.
- [5] M.O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI, J. PERLAUX, P. PERRIER, O. PIRONNEAU, G. POIRIER : Application of optimal control and finite element methods to the calculation of transonic flows and incompressible viscous flows. Rapport de Recherche INRIA, n° 294, Avril 1978.
- [6] J. CEA : Optimization Theorie et Algorithme. Paris, DUNOD, 1971.
- [7] M. CROUZEIX, P.A. RAVIART : Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary stokes equations I. RAIRO, R.3, p.33-76, 1973.
- [8] M. ENGELMAN, L.L. SANI, P.M. GRISHO, M. BERCOVIER : Consistent vs reduced integration penalty methods for incompressible media using several old and new elements. Int. Jour. for numerical methods in fluids. Vol 2, p.25-42, 1982.

- [9] M. FORTIN : Thèse de Doctorat, Paris, 1972.
- [10] P. GERMAIN : Mécanique des milieux continus, Masson, 1962.
- [11] P.M. GRESHO, R.L. LEE : Don't suppress the wiggles. They're telling you something ! Finite element methods for Convection Dominated flows, New York, 2-7 Dec. 79.
- [12] J.C. HEINRICH, R.S. MARSHALL, O.C. ZIENKIEWICZ : Penalty fonction solution of coupled convective and conductive heat transfer. First Int. Conf. in Numerical methods in laminar and turbulent flow. SWANSEA, 17-21 Juillet 1978.
- [13] T.J.R. HUGHES, W.K. LIU, A. BROOKS : Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation. J. of Comput. Physics, Vol 3, p. 1-60, 1979.
- [14] P.S. HUYAKORN, C. TAYLOR, R.L. LEE, P.M. GRESHO : A comparaisn of various mixed interpolation finite element in the velocity pressure formulation of the Navier Stokes Equations. Comput. and Fluids, Vol 6, p.23-35, 1978.
- [15] C. JOHNSON, J. PIRKARANTA : Analysis of some mixed finite element methods related to reduced integration. University of Goteborg, Suède.
- [16] J.L. LIONS : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, 1969.
- [17] J.L. LIONS : Controle Optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod-Gauthier-Villars, 1968.
- [18] J.T. ODEN, N. KIKUCHI, Y.F. SONG : Penalty finite element for the analysis of Stokesian flows. TICOM, Report 81-11, July 1981.

- [19] J.T. ODEN : Penalty methods and solutive reduced integration for stokesian flows. 3th Int. Conf. on finite element in flow problems. BANFF, ALBERTA, 10-13, June 1980.
- [20] J.T. ODEN : A theory of penalty method for finite element approximations of highly non linear problems in continuum mechanics. Computers and Structures, Vol 8, pp.445-449, 1978.
- [21] J. PERIAUX : Résolution de quelques problèmes non linéaires en aérodynamique par des méthodes d'éléments finis et de moindres carrés fonctionnels. Thèse de 3ème cycle, Juin 1979.
- [22] C. POLAK : Computational methods in optimization. Academic Press, New York, 1971.
- [23] J.N. REDDY : On the mathematical theory of penalty finite element for Navier-Stokes equation.
- [24] J.N. REDDY : On the finite element method with penalty for incompressible fluid flow problems, Academic Press, London, 1979.
- [25] R. TEMAM : Une méthode d'approximation des équations de Navier Stokes. Bull. soc. Math., France, 1968.
- [26] R. TEMAM : Navier Stokes Equations. North Holland, Amsterdam, 1975.
- [27] F. THOMASSET : Implementation of finite element methods for Navier Stokes equations. Springer-Verlag, 1981.
- [28] F. HECHT : Construction d'une base de fonction P_1 non conforme à div nulle dans \mathbb{R}^3 . RAIRO, 1981.

ANNEXE

Le but de ce paragraphe est d'exposer les résultats obtenus sur le problème de la cavité carré avec des méthodes directes. Ces méthodes ne sont appliquées ici que pour le problème stationnaire. Nous avons à résoudre

$$\frac{1}{R} a(u,v) + \hat{b}(u,u,v) + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla.u, \nabla.v) = (f,v)$$

Nous appliquons à cette équation le schéma implicite suivant

$$\frac{1}{R} a(u^{n+1}, v) + \hat{b}(u^n, u^{n+1}, v) + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla.u^{n+1}, \nabla.v) = (f,v)$$

$$u^0 = u_0 .$$

Nous décidons de la convergence si

$$\max_i |u^{n+1}(i) - u^n(i)| < 10^{-4} \quad i \text{ degré de liberté}$$

Nous donnons ci-dessous les résultats correspondants à deux méthodes. Tout d'abord une résolution par méthode frontal, puis par décomposition de CROUT.

Les temps calcul indiqués sont donnés en seconde pour un multiprocesseur DPS 68 MULTICS de CII-HB.

1) Méthode frontale

Pour tous les essais, le paramètre de pénalisation était fixé à 10^{-5} . Les maillages sont identiques à ceux utilisés précédemment et

deux valeurs du nombre de Reynolds furent testées $R = 400$

$R = 1000$

Les tableaux TAB 5 et TAB 6 donnent les résultats obtenus

REYNOLDS 400

Maillage	8 × 8	10 × 10	12 × 12
Nb d'itérations	12	11	11
Temps calcul	2034	2423	5639

TAB 5 : Reynolds 400

REYNOLDS 1000

Maillage	8 × 8	10 × 10	12 × 12
Nb d'itérations	21	26	23
Temps calcul	2409	5678	11700

TAB 6 : Reynolds 1000

2) Décomposition CROUT

Nous avons testé par cette méthode l'influence du paramètre de pénalisation, du maillage et du nombre de Reynolds.

* paramètre de pénalisation

Les résultats sont donnés dans le tableau TAB 7 et sont à comparer à ceux du tableau TAB 1 puisque nous avons utilisé le même maillage 10 × 10 et un Reynolds égal à 400.

Valeur de ϵ	10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}
nombre d'itérations	17	17	17
temps calcul	2439	2443	2447

TAB 7 : Influence du paramètre de pénalisation

Nous remarquons comme au paragraphe IV 3 que le paramètre de pénalisation est sans influence sur la vitesse de convergence et que les temps calcul sont du même ordre.

* Influence du nombre de Reynolds

- Maillage 8×8
- Paramètre de pénalisation 10^{-5}

REYNOLDS	:	100	400
nombre d'itération	:	11	18
temps calcul	:	721	1167

TAB 8 : Influence du Reynolds

* Influence du maillage

- Nombre de Reynolds 400
- Paramètre de pénalisation 10^{-5}

MAILLAGE	:	8×8	10×10
nombre d'itérations	:	18	17
temps calcul	:	1167	2447

TAB 9 : Influence du maillage

Nous voyons donc au travers de ces résultats que les diverses méthodes employées sont équivalentes.

Ceci montre donc l'intérêt du couplage Pénalisation Moindres carrés, du fait de sa souplesse d'utilisation, de sa fiabilité et de son efficacité.

