



**HAL**  
open science

# Simulation numerique de la turbulence par homogenisation des structures de sous-maillages. 1re partie

D. Mc Laughin, G. Papanicolaou, Olivier Pironneau

► **To cite this version:**

D. Mc Laughin, G. Papanicolaou, Olivier Pironneau. Simulation numerique de la turbulence par homogenisation des structures de sous-maillages. 1re partie. RR-0188, INRIA. 1983. inria-00076370

**HAL Id: inria-00076370**

**<https://inria.hal.science/inria-00076370>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. 954 90 20

## Rapports de Recherche

N° 188

### **SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA TURBULENCE PAR HOMOGENISATION DES STRUCTURES DE SOUS-MAILLES**

*Première Partie*

David Mc LAUGHIN  
Georges PAPANICOLAOU  
Olivier PIRONNEAU

Février 1983



CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél: 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 188

**SIMULATION NUMÉRIQUE  
DE LA TURBULENCE  
PAR HOMOGENISATION DES  
STRUCTURES DE SOUS-MAILLES**

*Première Partie*

David McLAUGHIN  
Georges PAPANICOLAOU  
Olivier PIRONNEAU

Février 1983

Simulation Numérique de la Turbulence  
par Homogénéisation des structures de sous-mailles

=====

Première Partie

David Mc Laughin (University of Arizona)  
Georges Papanicolaou (Courant Institute)  
Olivier Pironneau<sup>+</sup> (Université Paris 13 and INRIA)

=====

(<sup>+</sup>) Recherches subventionnées par la DRET (contrat 81/683).

Abstract :

This report shows that it is possible to establish turbulence models of the type  $k-\epsilon$  by using the techniques of homogenization theory in the Navier-Stokes equations.

The model is discussed for shear flows and tested numerically on pipe flows.

Connections with the Kolmogorov subgrid turbulence is established. The validity of the model is limited to flows where the subgrid turbulence is clearly separated (in waves numbers) from the large structures.

Resumé :

Ce rapport montre qu'il est possible d'établir des modèles de turbulence du type  $k-\epsilon$  en utilisant les techniques de l'homogénéisation dans les équations de Navier-Stokes.

Le modèle est étudié sur les écoulements de Poiseuille et testé numériquement sur les écoulements dans les conduites.

Les rapports avec les échelles de Kolmogorov sont établis. La validité du modèle est limitée aux écoulements ayant des petites structures homogènes bien séparées (dans l'espace de Fourier), des grosses structures.

=====

## Notations

- $u$  : vecteur vitesse
- $p$  : pression
- $u_{,t}$  :  $\partial u / \partial t$
- $u_{i,j}$  :  $\partial u_i / \partial x_j$
- $u_{i,J}$  :  $\partial u_i / \partial y_j$
- $u \otimes v$  : tenseur d'ordre 2 de composante  $u_i v_j$
- $\text{tr}(B)$  : trace du tenseur d'ordre 2,  $B = \sum_{ij} B_{ij}$
- $\nabla \cdot B$  : vecteur dont la ième composante est  $\sum_j B_{ji,j}$
- $\hat{u}$  : transformée de Fourier de  $u$
- $\bar{u}$  : moyenne statistique (ou en temps) de  $u$
- $\langle u \rangle$  : moyenne en espace de  $u$
- $u'$  : variation de  $u$  par rapport à l'écoulement moyen
- $u^0$  : condition initiale sur  $u$
- $u_T$  : condition au bord sur  $u$
- $\Omega$  : domaine des EDP
- $\Gamma$  : frontière de  $\Omega$
- $\Sigma$  :  $\{\{x,t\} : x \in \Gamma, u(x,t)n(x) < 0\}$   $n$  normale externe à  $\Gamma$
- $g$  : conditions aux limites pour l'équation d'Euler sur  $u$
- $\varepsilon$  : petite échelle de longueur reliée à la taille de la grille de discrétisation
- $w$  : partie "turbulente" (périodique) de  $u$
- $\theta(x,t)$  : coordonnée Lagrangienne
- $q$  : énergie cinétique turbulente (de  $w$ )
- $C = \nabla \theta^T \nabla \theta$
- $\tilde{w} = \nabla \theta^T w$
- $w' = w / \sqrt{q}$

INTRODUCTION

---

1. Position du problème

Les équations de Navier-Stokes

- (1)  $u_{,t} + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p - \nu \Delta u = 0$  dans  $\Omega \times ]0, T[$
- (2)  $\nabla \cdot u = 0$
- (3)  $u(t=0) = u^0$  dans  $\Omega$
- (4)  $u = u_\Gamma$  dans  $\Gamma \times ]0, T[$

régissent les vitesses  $u$  et les pressions  $p$  des fluides visqueux Newtoniens incompressibles ;  $\Omega$  désigne le domaine occupé par le fluide,  $\Gamma$  sa frontière,  $]0, T[$  l'intervalle de temps d'étude du phénomène,  $u^0$  les conditions initiales de l'écoulement et  $u_\Gamma$  les vitesses des parois. On suppose que par changement d'échelle on s'est ramené au cas où le diamètre de  $\Omega$  est de l'ordre de l'unité ainsi que  $u^0$  et/ou  $u_\Gamma$  ; donc  $\nu$  représente l'inverse du nombre de Reynolds.

On sait que lorsque  $\nu$  tend vers zéro, la solution de (1)-(4) devient de plus en plus oscillante en  $x$  et en  $t$ . En effet, la transformée de Fourier  $\hat{u}$ , de  $u$  par rapport à  $x$  :

(5) 
$$\hat{u}(k, t) = \int_{\Omega} e^{-2i\pi k \cdot x} u(x, t) dx$$

a une fonction d'énergie

(6) 
$$K \rightarrow E(K) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{|k|=K} |\hat{u}(k, t)|^2 k^2 dk$$

qui indique (cf. figure 1) que les plus petites oscillations en espace de  $u$  se font sur des distances de l'ordre de  $\nu^{3/4}$  (cf. Monin-Yaglom[1], Craya [2] par exemple).

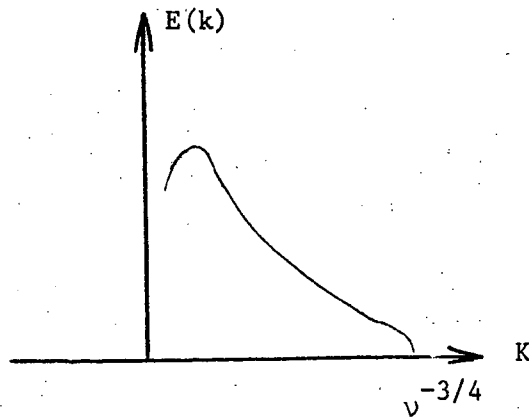


Figure 1

Forme générale des résultats de mesure sur  $E$  pour des écoulements turbulents.

Toute tentative de simulation numérique de (1)-(4) devrait donc théoriquement avoir une discrétisation de  $\Omega$  d'une finesse  $h \approx \nu^{3/4}$  pour permettre au plus petit tourbillon d'être représentable sur la grille de discrétisation. Compte tenu de notre convention sur le diamètre de  $\Omega$  on ne pourra donc dépasser, avec  $N^3$  points de discrétisation, les nombres de Reynolds de l'ordre de  $N^{4/3}$  c'est-à-dire avec les ordinateurs actuels, le millier.

Les calculs complets d'écoulements turbulents ne sont donc pas possibles pour des grands nombres de Reynolds. Cependant, si on s'intéresse aux moyennes statistiques telle que

- $\bar{u}(x,t)$  vitesse moyenne en  $x$  et  $t$
- $\frac{1}{2} \overline{u \otimes u}$  tenseur moyen d'énergie cinétique

alors le problème n'est plus numérique mais théorique : la dérivation d'équations pour ces quantités à partir de (1)-(4).

## 2. Equations moyennées

L'observation expérimentale montre que le champ de vitesse à un instant donné peut être décomposé en un champ moyen  $\bar{u}$  et une perturbation  $u'$  tellement perturbée qu'elle ressemble à la réalisation d'un champ aléatoire en  $x$  de moyenne nulle. Cette observation amène à étudier le problème (1)-(4)



avec une condition initiale aléatoire  $u^0 + u'^0$ . Aux instants ultérieurs, si la solution est décomposée en  $\bar{u} + u'$ , en prenant la moyenne statistique de (1), on obtient

$$(7) \quad \bar{u}_{,t} + \bar{u}\bar{v}u - \nu\Delta\bar{u} + \nabla\bar{p} = -\nabla \cdot (\overline{u' \otimes u'})$$

car  $u'\bar{v} + \bar{u}v'$  a une espérance nulle.

Les équations (2) - (4), (7) sont les équations de Reynolds ; le problème dit de fermeture est alors de relier le "tenseur de Reynolds"  $u' \otimes u'$  à l'écoulement moyen. Avant d'étudier ce problème, mentionnons une autre approche.

En suivant Léonard [3] , par exemple, on peut définir  $\bar{u}$  comme

$$(8) \quad \bar{u}(x,t) = (G * u)(x,t) = \int_{\Omega \times ]0, T[} G(x-x', t-t') u(x', t') dx' dt'$$

G est alors un filtre et si on pose

$$(9) \quad u' = u - \bar{u}$$

et si on convole l'équation (1) avec le filtre G on obtient

$$(10) \quad \bar{u}_{,t} + \nabla \cdot \overline{\bar{u} \otimes \bar{u}} + \nabla\bar{p} - \nu\Delta\bar{u} = -\bar{u}'_{,t} - \nabla \cdot (\overline{u' \otimes \bar{u} + \bar{u} \otimes u'}) - \nabla \cdot \overline{u' \otimes u'} + \nu\Delta\bar{u}'$$

Dans le cas où on aurait

$$(11) \quad \bar{u}' = \bar{u} \quad , \quad \bar{u}' = 0$$

(9) se simplifierait pour donner

$$(12) \quad \bar{u}_{,t} + \nabla \cdot (\bar{u} \otimes \bar{u}) + \nabla\bar{p} - \nu\Delta\bar{u} = -\nabla \cdot [\overline{u' \otimes u'} + \overline{u' \otimes \bar{u}} + \overline{\bar{u} \otimes u'} + \overline{\bar{u} \otimes \bar{u}} - \overline{u' \otimes \bar{u}}]$$

Cette équation est aussi une équation de Reynolds mais le tenseur de Reynolds n'a pas la même définition. (Il y a au moins un cas où (11) est vérifié : lorsque G est un filtre passe bas en fréquence ; c'est-à-dire que  $\bar{u}$  est le transformé de Fourier inverse de la transformée de Fourier en espace tronquée aux

modes inférieurs à K :

$$(13) \quad \bar{u} = F^{-1}[(Fu)(k)\chi(|k_i| < K)] \quad (\chi = \text{fonction caractéristique})$$

Remarque

L'équation (12) montre qu'il faut se garder d'interpréter u' dans (7) comme les oscillations en espace ou en temps de u. Il y a un cas où cette interprétation est cependant correcte c'est lorsqu'on peut écrire :

$$(14) \quad u(x,t) = u(x,t,\frac{t}{\tau})$$

et où G opère de la façon suivante

$$(15) \quad \bar{u}(x,t) = G * u = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma)u(x,t,\sigma)d\sigma$$

avec

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma)d\sigma = 1$$

Alors (11) est vérifiée et (12) est identique à (7). L'hypothèse (14) signifie que les oscillations de u se font sur une échelle de temps très différente de celle de  $\bar{u}$ .

3. Fermetures des équations de Reynolds.

La fermeture des équations de Reynolds sous la forme (7) ou (12) est un problème très difficile évidemment et peut être même impossible ! Il y a de nombreuses approches : le lecteur est renvoyé à Reynolds [4] pour une revue des principales méthodes. On en rappelle deux qui sont utilisées pour la simulation numérique d'écoulement turbulent inhomogène :

La méthode la plus simple consiste à supposer avec Smagorinski [5]

$$(17) \quad \nabla \cdot \overline{u' \otimes u'} = - \mu \nabla \cdot [ (|\nabla u^t + \nabla u|) \nabla u ]$$

c'est-à-dire que le tenseur de Reynolds agit comme une viscosité proportionnelle au gradient de la vitesse.

On peut donner quelques arguments vers une démonstration de (17)

(Leslie [6], [7]) dans le cadre de (10), avec un filtre G correspondant à un

moyennage spatial :

$$(18) \quad \bar{u} = \int_{\pi]x_i - \frac{\Delta x_i}{2}, x_i + \frac{\Delta x_i}{2} [} u(\xi, t) d\xi$$

c'est l'approche dite de "modélisation de sous maille" (Subgrid scale modelling) poursuivie par Deardorff, [8], Horiuti [9], Moin-Kun [10], Schumann [11].

La méthode k-ε développée par Launder [12], Patankar [13] et étudiée en France entre autres, par Benque [14], Coeffé [15], Viollet [16],

pose

$$(19) \quad \nabla \cdot \overline{u' \otimes u'} = -a \nabla \cdot \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla u \right)$$

où k et ε sont solutions de

$$(20) \quad k_{,t} + \bar{u} \nabla k - b \nabla \cdot \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla k \right) - a \frac{k^2}{\varepsilon} \text{trace}(\nabla \bar{u} (\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^t)) - c k^{3/2} = 0$$

$$(21) \quad \varepsilon_{,t} + \bar{u} \nabla \varepsilon - d \nabla \cdot \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) - e k \text{trace}[\nabla \bar{u} (\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^t)] - \varepsilon^2/k = 0$$

et où a, b, c, d, e, f, sont des constantes numériques.

Les équations (20) - (21) sont déduites semi empiriquement de (1) - (4).

#### 4. Objectifs, résultats et plan du rapport

Les modèles de sous-maillages et en k-ε permettent de reproduire correctement les écoulements moyens dans un nombre non négligeable de situations en particulier pour les écoulements dans les conduites et les écoulements de couches limites.

Ils sont moins bons (ou même mauvais) pour les écoulements moyens instationnaires comme les jets et les sillages.

En 1978 [17] il est apparu que les techniques de développement asymptotique de l'homogénéisation pouvaient peut être apporter un début de solution au problème de la fermeture des équations de Reynolds.

Dans [18], [19] on a étudié le problème

$$(22) \quad u_{,t} + (u + w) \nabla u + \nabla p - \nu \Delta u = 0, \quad \nabla \cdot u = 0$$

où  $w$  est une fonction très oscillante (périodique dans [18], aléatoire dans [19]). On a montré par un développement asymptotique, que l'écoulement moyen satisfait à une équation du type

$$(23) \quad \bar{u}_{,t} + \bar{u} \nabla \bar{u} + \bar{p} - \nabla \cdot (\underline{M} \nabla u) = 0 \quad \nabla \cdot \bar{u} = 0$$

où  $\underline{M}$  est un tenseur (de viscosité) dépendant de  $w$ .

Ainsi ces résultats ont montré qu'un des termes de l'équation de Reynolds, au moins, a un effet de viscosité turbulente.

Dans [20] [21] on s'est intéressé au problème

$$(24) \quad u_{,t}^{\varepsilon} + u^{\varepsilon} \nabla u^{\varepsilon} + \nabla p^{\varepsilon} = 0 \quad \nabla \cdot u^{\varepsilon} = 0$$

$$(25) \quad u^{\varepsilon}(x,0) = u^0(x) + w^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

et on a montré (formellement) qu'à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $u^{\varepsilon}$  vérifiait

$$(26) \quad \bar{u}_{,t} + \bar{u} \nabla \bar{u} + \bar{p} + \nabla \cdot \overline{k w \otimes w} = 0 \quad \nabla \cdot \bar{u} = 0$$

où  $\overline{k w \otimes w}$  est une fonction de  $\nabla \theta$ ,  $\theta$  la coordonnée Lagrangienne du problème et  $k$  l'énergie cinétique turbulente étant solutions de

$$(27) \quad \theta_{,t} + u \nabla \theta = 0$$

$$(28) \quad k_{,t} + u \nabla k + k \operatorname{trace} (\overline{w \otimes w} \nabla u) + \nabla \cdot (k^{3/2} g) = 0.$$

La justification de ces résultats est basée sur un développement asymptotique de  $u^{\varepsilon}$  de la forme

$$(29) \quad u^{\varepsilon}(x,t) = \bar{u}(x,t) + \varepsilon k w \left(\frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}, x,t\right) + \varepsilon u^1 \left(\frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}, x,t\right) + \varepsilon^2 u^2 + \dots$$

on notera la similitude de (25) et de (21) ; cette approche serait-elle un début de justification des modèles type  $k-\varepsilon$  ?

Les objectifs de ce rapport sont donc les suivants :

1. Présenter en détails les résultats (24) - (27) dans le chapitre 1.
2. Etudier analytiquement et numériquement le tenseur  $\overline{k w \otimes w}$  (fonction de  $\nabla \theta$ ) dans le chapitre 2.
3. Simuler numériquement les équations (25) - (27) pour des écoulements dans une conduite, en dimension 1, 2 et 3 dans le chapitre 3.
4. Enfin, dans le chapitre 4, généraliser les résultats aux cas visqueux et interpréter l'analyse dans le cadre des échelles de Kolmogorov.

Chapitre 1 : Construction d'un modèle  
de turbulence par perturbation des  
conditions initiales.

1. Position du problème

On considère les équations d'Euler des fluides Newtoniens incompressibles non visqueux :

$$(1) \quad u_{,t} + u \nabla u + \nabla p = 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[$$
$$(2) \quad \nabla \cdot u = 0$$

avec les notations suivantes :

$u(x,t)$  : vitesse des fluides au point  $x$  à l'instant  $t$

$p(x,t)$  : pression

$\Omega$  : domaine de  $\mathbb{R}^3$  occupé par le fluide

On va s'intéresser aux conditions initiales suivantes

$$(3) \quad u(x,0) = u^0(x) + w^0\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)$$

où  $u^0$  et  $w$  sont des fonctions données mais  $w$  a deux échelles d'espace caractéristiques, la deuxième étant très petite par rapport à la première ; ceci signifie que lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro  $w$  oscille de plus en plus mais sa moyenne  $\langle w \rangle$  reste régulière.

Naturellement la solution de (1)-(3) dépend de  $\varepsilon$  et le problème est de trouver sa limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pour que le problème soit bien posé on rajoute une condition au bord  $\Gamma$  de  $\Omega$  sur  $u$  :

$$(4) \quad u(x,t) \cdot n(x) = g \quad \forall \{x,t\} \in \Sigma = \{x,t : u(x,t) \cdot n(x) < 0\}$$

( $n(x)$  = normale extérieure en  $x \in \Gamma$ ).

Le bon formalisme pour étudier le problème (1)-(4) serait de supposer  $w$  aléatoire et de chercher les limites des statistiques de  $u$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ce problème a reçu un début de solution dans [2] pour l'équation de

Burger ; il semble hors de portée pour les équations d'Euler ; pour cette raison on se restreint au cas

$$(5) \quad w(y,x) \text{ y-périodique sur } Y = ]0,1[$$

$$(6) \quad \langle w \rangle(x) = \int_Y w(y,x) dy = 0$$

Enfin, pour éviter les interactions au bord on suppose dans ce chapitre que le support de  $w$  est inclus dans l'intérieur de  $\Omega$  :

$$(7) \quad \text{supp } w \cap \Gamma = \emptyset$$

## 2. Développement asymptotique

Soit  $\{u^\varepsilon, p^\varepsilon\}$  la solution de (1)-(4). On va chercher  $u^\varepsilon$  et  $p^\varepsilon$  sous la forme :

$$(8) \quad u^\varepsilon(x,t) = u(x,t) + (w(y,x,t) + \varepsilon u^1(y,x,t) + \varepsilon^2 u^2 + \dots) \Big|_{y = \frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}}$$

$$(9) \quad p^\varepsilon(x,t) = p(x,t) + (\pi(y,x,t) + \varepsilon p^1(y,x,t) + \varepsilon^2 p^2 + \dots) \Big|_{y = \frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}}$$

avec  $w, u^1, u^2, \dots, \pi, p^1, p^2, \dots$  Y-périodique en y et de moyenne nulle en y. Les fonctions  $u^i, p^i$  et  $\theta$  vont être déterminées en reportant (8), (9) dans (1)-(4).

On a les formules de dérivations suivantes :

$$(10) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) (w_i + \varepsilon u_i^1 + \varepsilon^2 u_i^2 + \dots) \right] \Big|_{y = \frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}}$$

$$(11) \quad \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) (w_i + \varepsilon u_i^1 + \varepsilon^2 u_i^2 + \dots) \right] \Big|_{y = \frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}}$$

On fait les conventions de notations suivantes

$$(12) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v',_t$$

$$(13) \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} = v',_i$$

$$(14) \quad \frac{\partial v}{\partial y_i} = v',_I$$

Donc (10), (11) se réécrivent

$$(15) \quad u_{i,t}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} w_{i,K} \theta_{k,t} + u_{i,t} + w_{i,t} + u_{i,K}^1 \theta_{k,t} + \varepsilon (u_{i,t}^1 + u_{i,K}^2 \theta_{k,t}) + \dots$$

$$(16) \quad u_{i,j}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} w_{i,K} \theta_{k,j} + u_{i,j} + w_{i,j} + u_{i,K}^1 \theta_{k,j} + \varepsilon (u_{i,j}^1 + u_{i,K}^2 \theta_{k,j}) + \dots$$

En reportant ces expressions dans (1) on obtient

$$(17) \quad \begin{aligned} & \varepsilon^{-1} w_{i,K} \theta_{k,t} + u_{i,t} + w_{i,t} + u_{i,K}^1 \theta_{k,t} + \varepsilon(\dots) \\ & + (u_j + w_j + \varepsilon u_j^1 + \varepsilon^2 (u_j^2 + \dots)) (\varepsilon^{-1} w_{i,K} \theta_{k,j} + u_{i,j} + \\ & + u_{i,K}^1 \theta_{k,j} + \varepsilon(\dots)) \\ & + \varepsilon^{-1} \pi_{,K} \theta_{k,i} + p_{,i} + \pi_{,i} + p_{,K}^1 \theta_{k,i} + \varepsilon(\dots) = 0. \end{aligned}$$

L'équation (2) devient

$$(18) \quad u_{i,i} + \varepsilon^{-1} w_{i,K} \theta_{k,i} + w_{i,i} + u_{i,K}^1 \theta_{k,i} + (\dots) = 0$$

On a utilisé la convention suivante : les indices répétés sont sommés de 1 à 3 même si l'un est minuscule et l'autre majuscule.

### 3. Cascade d'équations

On identifie les puissances de  $\varepsilon$  dans chacune des équations

(17) et (18), ce qui donne :

termes en  $\varepsilon^{-1}$  :

$$(19) \quad \begin{aligned} & w_{i,K} (\theta_{k,t} + u_j \theta_{k,j}) + w_j \theta_{k,j} w_{i,K} + \pi_{,K} \theta_{k,i} = 0 \\ & w_{i,K} \theta_{k,i} = 0 \end{aligned}$$

On se propose de choisir  $\theta$  tel que

$$(20) \quad \begin{aligned} & \theta_{,t} + u \nabla \theta = 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ & \theta(x, 0) = x \\ & \theta|_{\Sigma} = x \end{aligned}$$

En posant

$$(21) \quad \tilde{w}_k = w_j \theta_{k,j} \quad \text{i.e.} \quad \tilde{w} = (\nabla\theta)^t w$$

et en multipliant (19.a) par  $\theta_{\ell,i}$  on obtient :

$$(22) \quad \tilde{w}_k w_{i,K} \theta_{\ell,i} + \pi_{,K} \theta_{k,i} \theta_{\ell,i} = 0$$

c'est-à-dire avec (10.b)

$$(23) \quad \tilde{w} \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y \pi = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0 \quad \forall y \in Y$$

où C est une matrice  $3 \times 3$  fonction de x et t :

$$(24) \quad C = (\nabla_x \theta)^t \nabla_x \theta$$

Les conditions aux limites (3) et (4) imposent

$$(25) \quad w(y,x,0) = w^0(y,x) \quad \forall x,y ; \quad \text{supp}_x w \cap \Gamma = \emptyset$$

termes en  $\varepsilon^0$

De (17) on tire

$$(26) \quad u_{i,K}^1 (\theta_{k,t} + u_j \theta_{k,j}) + u_j^1 w_{i,K} \theta_{k,j} + w_j^1 u_{i,K}^1 \theta_{k,j} + p_{i,K}^1 \theta_{k,i} \\ + (u_j + w_j)(u_{i,j} + w_{i,j}) + u_{i,t} + w_{i,t} + p_{,i} + \pi_{li} = 0$$

soit, compte tenu de (20) et avec des notations identiques à (21) :

$$(27) \quad \tilde{u}_k^1 w_{i,K} + \tilde{w}_k u_{i,K}^1 + p_{,K}^1 \theta_{k,i} + ((u+w)\nabla(u+w) + u_{,t} + w_{,t} + \nabla p + \nabla\pi)_i = 0$$

Comme précédemment on multiplie par  $\theta_{\ell,i}$  et on somme en i :

$$(28) \quad \tilde{u}^1 \nabla_y \tilde{w} + \tilde{w} \nabla_y \tilde{u}^1 + C \nabla_y p^1 = -(\nabla\theta)^t ((u+w)\nabla(u+w) + u_{,t} + w_{,t} + \nabla(p+\pi))$$

Enfin de (18) on tire

$$(29) \quad \nabla_y \cdot \tilde{u}^1 + \nabla_x \cdot (u+w) = 0$$



Les conditions aux limites donnent

$$(30) \quad \tilde{u}^1(y, x, 0) = 0 \quad ; \quad \text{supp}_x u^1 \cap \Gamma = 0$$

Remarque :

Lorsque la variable n'est pas mentionnée dans les opérateurs  $\nabla$  et  $\nabla \cdot$ , il s'agira toujours de  $x$ .

#### 4. Conditions de compatibilités

Par rapport à  $y$  les équations (28) et (29) sont du type

$$(31) \quad \begin{aligned} \tilde{u}^1 \nabla_y \tilde{w} + \tilde{w} \nabla_y \tilde{u}^1 + C \nabla_y p^1 &= f^1, \quad \nabla_y \cdot u^1 = g^1 \\ \tilde{u}^1 \text{ Y-périodique en } y, \quad \langle \tilde{u}^1 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Les variables  $x$  et  $t$  ne sont que des paramètres passifs intervenant dans  $f^1$ ,  $g^1$ ,  $\tilde{w}$ ,  $C$ .

#### Première condition

Comme on peut réécrire (31.a) en

$$(32) \quad (\tilde{u}_j^1 \tilde{w}_i + \tilde{w}_j \tilde{u}_i^1 + C_{ij} p^1)_{,j} = \tilde{w}_i \tilde{u}_{j,j}^1 + f_i^1 = \tilde{w}_i g^1 + f_i^1$$

et comme  $\tilde{u}^1$ ,  $\tilde{w}^1$ ,  $p^1$  sont périodiques en moyennant (32) on obtient :

$$(33) \quad \langle \tilde{w} g^1 + f^1 \rangle = \int_Y (\tilde{w} g^1 + f^1) dy = 0.$$

Soit en revenant à (28)-(29) :

$$(34) \quad -(\nabla \theta)^t \langle u + w \nabla(u+w) \rangle + u_{,t} + \langle w_{,t} \rangle + \nabla p + \langle \nabla \pi \rangle - \langle w \nabla_x(u+w) \rangle = 0;$$

c'est-à-dire, compte tenu de  $\langle w \rangle = 0$ ,  $\langle \pi \rangle = 0$  et de (21)

$$(35) \quad u_{,t} + u \nabla u + \langle w \nabla w \rangle + \nabla p + \langle w \nabla_x \cdot w \rangle = 0$$



soit

$$(42) \quad \left\langle \frac{1}{2} |w|^2 \right\rangle_{,t} + u \nabla \left\langle \frac{1}{2} |w|^2 \right\rangle + \langle w_i w_j \rangle u_{i,j} + \nabla_x \cdot \left\langle \left( \pi + \frac{1}{2} |w|^2 \right) w \right\rangle = 0$$

### 5. Le système complet d'équations

Cette dernière équation peut se réécrire

$$(43) \quad q_{,t} + u \nabla q + q \operatorname{tr}[\langle w' \otimes w' \rangle \nabla u] + \nabla \cdot [q^{3/2} \langle (\pi' + \frac{1}{2} |w'|^2) w' \rangle] = 0$$

$$q(x,0) = q^0(x) \quad ; \quad q|_{\Sigma} = 0$$

$$(44) \quad w' = w / \sqrt{q}$$

$$(45) \quad q = \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle$$

On remarque alors que l'équation (23) est homogène et ne définit  $\tilde{w}$  qu'à un facteur multiplicatif constant en  $y$  près ; l'équation pour  $w'$  devient :

$$(46) \quad \tilde{w}' \nabla_y \tilde{w}' + C \nabla_y \pi' = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w}' = 0 \quad \text{dans } Y, \forall x, t$$

$$\tilde{w}' \text{ Y-périodique en } y \quad \langle \tilde{w}' \rangle = 0 \quad ; \quad \frac{1}{2} \langle |w'|^2 \rangle = 1$$

$$(47) \quad w' = \nabla \theta^{-t} \tilde{w}'$$

On rappelle que  $C$  et  $\theta$  sont définis par

$$(48) \quad \begin{aligned} \theta_{,t} + u \nabla \theta &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \theta(x,0) &= x \\ \theta|_{\Sigma} &= x \end{aligned}$$

$$C = (\nabla \theta)^t \nabla \theta \quad ,$$

Enfin  $u$  et  $p$  sont donnés par (36) c'est-à-dire

$$(49) \quad \begin{aligned} u_{,t} + u \nabla u + \nabla p + \nabla \cdot q \langle w' \otimes w' \rangle &= 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ u(x,0) &= u^0(x) \quad \text{dans } \Omega \\ u \cdot n|_{\Sigma} &= g \end{aligned}$$

## 6. Discussion

On peut comparer ce système d'équation aux modèles de turbulence en  $k-\epsilon$ . Avec nos notations  $k$  est ici  $q$  et l'équation (43) ressemble étrangement à l'équation pour  $k$  utilisée par exemple dans [15] car  $\langle w \otimes w \rangle$  est une fonction de  $\nabla \theta \nabla \theta^t$  c'est-à-dire de  $\nabla u \nabla u$  intégré sur les lignes de courant.

En revanche l'équation pour  $\epsilon$  est remplacée par une équation vectorielle pour les échelles de longueur  $\theta$  données par (48).

Par ailleurs,  $\theta$  représente les coordonnées Lagrangiennes du problème ; le développement (8)-(9) est donc justifié par la physique de la turbulence puisqu'on sait que les lois de Kolmogorov pour la turbulence localement homogène sont valables dans un repère convecté par l'écoulement moyen.

Sur le plan mathématique nous souhaiterions évidemment pouvoir justifier le calcul formel précédent. Malheureusement il s'agit là d'un problème très difficile lié aux points suivants :

1. Le système (46) admet-il une solution qui dépend continûment de  $C$  ?
2. Le système (31) admet-il d'autres conditions de compatibilité et si oui quels sont les paramètres modulables correspondant dans (46) ?

Comme on le verra dans la suite on peut supposer d'autres développements asymptotiques que (8)-(9) mais le calcul formel donne des résultats assez semblables. Signalons que dans certains cas particuliers on a obtenu une démonstration du résultat [18] [19].

Finalement la seule justification pragmatique du calcul précédent reste les essais numériques et la comparaison des résultats avec l'expérience.

Pour intégrer numériquement le système (43)-(49) on va procéder de la manière suivante :

1. On tabule  $\langle w_i^! w_j^! \rangle$  solution de (46) en fonction des 5 paramètres de  $C$ . Soit  $F_{ij}(C)$  cette fonction.
2. On intègre (43), (48), (49) par un schéma usuel éléments finis ou différences finies avec  $\langle w_i^! w_j^! \rangle$  remplacé par  $F_{ij}(\nabla \theta^t \nabla \theta)$ .

Chapitre 2 : Etude de l'équation en w

1. Position du problème

Le modèle établi au chapitre 1 implique la connaissance de la fonction

$$C \rightarrow \langle \tilde{w}'_i \tilde{w}'_j \rangle = \int_Y \tilde{w}'_i \tilde{w}'_j dx$$

où  $\tilde{w}'$  est solution de

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{w}' \nabla \tilde{w}' + C \nabla \pi' &= 0, \quad \nabla \cdot \tilde{w}' = 0 \quad \text{dans } Y = ]0,1[ \times ]0,1[ \times ]0,1[ \\ \langle \tilde{w}' \rangle &= 0, \quad \frac{1}{2} \langle \tilde{w}' C^{-1} \tilde{w}' \rangle = 1, \\ \tilde{w}' &\text{ Y-périodique en y} \end{aligned}$$

et où C est une matrice indépendante de y et de la forme

$$(2) \quad C = K^{-1} K^{-T} \quad (K^{-T} = \nabla \theta)$$

Remarque 1

Si  $\tilde{w}'$  est solution de (1) sauf pour la condition sur  $\langle \tilde{w}' C^{-1} \tilde{w}' \rangle$ , en changeant  $\tilde{w}'$  en  $\lambda \tilde{w}'$  on peut satisfaire à la condition manquante.

2. Solutions explicites de (1)

Comme solution de (1) on a toutes les fonctions de la forme

$$(3) \quad \tilde{w}' = \text{Re } \hat{w} e^{2i\pi k \cdot y}$$

avec  $k \cdot \hat{w} = 0$ ,  $\hat{w}$  indépendant de y, k a composantes entières.

En effet :

$$(4) \quad (2\pi)^{-1} \tilde{w}' \nabla \tilde{w}' = \text{Re}(i(\tilde{w}' \cdot k) \hat{w} e^{2i\pi k y}) = 0$$

Mais comme ces solutions ne dépendent pas de C essayons d'autres méthodes. On rappelle que l'identité vectorielle

$$(5) \quad w \nabla w = \frac{1}{2} \nabla |w|^2 - w \times \nabla \times w$$

peut être généralisée avec une matrice constante quelconque K :

$$(6) \quad w \nabla w = \frac{1}{2} K^{-1} K^{-t} \nabla |Kw|^2 - K^{-1} [(Kw) \times ((K^{-t} \nabla) \times Kw)]$$

$$(B \nabla)_i = b_{ij} \partial / \partial y_j$$

Donc en prenant

$$(7) \quad \pi' = - \frac{1}{2} |Kw'|^2 = - \frac{1}{2} \langle \tilde{w}' | K^t K \tilde{w}' \rangle = - 1$$

L'équation (1.a) devient

$$(8) \quad K \tilde{w}' \times [(K^{-t} \nabla) \times K \tilde{w}'] = 0 \quad \nabla \cdot \tilde{w}' = 0$$

c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$(9) \quad (K^{-t} \nabla) \times K \tilde{w}' = \lambda K \tilde{w}' \quad \nabla \cdot \tilde{w}' = 0$$

On prend la transformée de Fourier des équations :

$$(10) \quad i \hat{k} \times \hat{w} = \hat{w} \quad \hat{k} \cdot \hat{w} = 0$$

où

$$(11) \quad \hat{w} = K \hat{\tilde{w}}' \quad \hat{k} = K^{-t} k / |K^{-t} k|$$

Ce système se résout et donne pour chaque  $\lambda$  un  $w'$  :

$$(12) \quad \tilde{w}' = \beta \operatorname{Re} \sum_{\substack{|K^{-t} k| = \lambda / 2\pi \\ k \in \mathbb{Z}^3}} K^{-1} [i \hat{k} \times \mu_k - \hat{k} \cdot \mu_k + \mu_k] e^{2i\pi k \cdot y}$$

où  $\beta$  est ajusté pour que  $\langle \tilde{w}' | C^{-1} \tilde{w}' \rangle / 2 = 1$  et où les  $\mu_k$  sont des constantes quelconques. Malheureusement la sommation n'aura que 2 termes au plus si  $K$  n'a pas de symétrie puisqu'on doit chercher les intersections à valeurs entières avec les axes de coordonnées d'un ellipsoïde de module  $\lambda / 2\pi$ .

En revanche cette solution présente l'avantage de dépendre de  $C$  et de généraliser les solutions de Henon [22] (qu'on sait à peu près stable [23]); on donne le tenseur  $w w$  moyenné sur une répartition uniforme des  $\mu_k$  (indépendants) :  $\langle \mu_k \rangle = 0, \langle (\mu_k)_i (\mu_k)_j \rangle = \delta_{ij}$

$$(13) \quad \langle w' \otimes w' \rangle = N^{-1} \sum_{\substack{|K^{-t}k| = \lambda/2\pi \\ k \in Z^3}} \begin{bmatrix} \hat{k}_2^2 + \hat{k}_3^2 & -\hat{k}_1 \hat{k}_2 & -\hat{k}_1 \hat{k}_3 \\ -\hat{k}_1 \hat{k}_2 & \hat{k}_1^2 + \hat{k}_3^2 & -\hat{k}_2 \hat{k}_3 \\ -\hat{k}_1 \hat{k}_3 & -\hat{k}_2 \hat{k}_3 & \hat{k}_1^2 + \hat{k}_2^2 \end{bmatrix}, \quad \hat{k} = \frac{\nabla \theta^t k}{|\nabla \theta^t k|}$$

$$(w' = K \tilde{w}')$$

N étant le nombre de termes dans la sommation. Ce tenseur dépend assez peu de  $\lambda$  dans la mesure où il n'existe que 3 groupes de valeurs donnant des résultats différents.

Le même calcul donne

$$(14) \quad \langle (\pi + \frac{1}{2} |w|^2) w \rangle = 0$$

### 3. Tabulation du tenseur $w \otimes w$ en dimension 2

En prenant la divergence de (1.a) on déduit

$$(15) \quad C \Delta \pi' = -\nabla \cdot (\tilde{w}' \nabla \tilde{w}')$$

Donc

$$(16) \quad C^{-1} \tilde{w}' \nabla \tilde{w}' + \nabla \pi' = [I - \nabla \Delta^{-1} (\nabla \cdot)] C^{-1} \tilde{w}' \nabla \tilde{w}'$$

Supposons que  $\tilde{w}'$  soit tronqué à  $2N+1$  mode en chaque variable :

$$(17) \quad \tilde{w}' = \sum_{-N \leq k_i \leq N} a(k) e^{2i\pi k \cdot y};$$

alors

$$(18) \quad C^{-1} \tilde{w}' \nabla \tilde{w}' = \sum_{n,k} C_m^{-1} a_m(k) [k \cdot a(\ell-k)]$$

donc pour résoudre (1) on peut chercher la solution du problème discret

$$(19) \quad \min_{a \in A} \sum_{\substack{|\ell_i| \leq N, |k_i| \leq N, \\ |\ell_i - k_i| \leq N, n, m}} \left| \sum (\delta_{pn} - \frac{\ell p \ell n}{|\ell|^2}) C_{nm}^{-1} a_m(k) [k \cdot a(\ell-k)] \right|^2$$

avec

$$(20) \quad A = \{a : \exists b \text{ avec } a(k) = (k_2, -k_1) b(k), b(-k) = -\bar{b}(k) \forall |k| \leq N\}$$

(ici le  $\bar{\phantom{x}}$  indique le complexe conjugué).

Les degrés de liberté dans l'optimisation (19) sont donc les modes de  $b$  réels et imaginaires correspondants à

$$(21) \quad k_1 > 0 \text{ ou bien } k_1 = 0 \text{ et } k_2 > 0$$

Soit  $E(b)$  la fonctionnelle à minimiser dans (19). Les méthodes de gradients conjugués pour résoudre (19) impliquent la connaissance des dérivées de  $E$ ; ( $b = b^r + i b^i$ ) :

$$(22) \quad \frac{\partial E}{\partial b_k} = \sum_{|k_i| \leq N} 2 \operatorname{Re} \left[ \left( \delta_{pn} - \frac{\ell p \ell n}{|\ell|^2} \right) C_{nm}^{-1} a_m(k') \cdot k \cdot a(\ell - k') \right] \lambda_k$$

avec

$$(23) \quad \lambda_k = i \left( 1 - \frac{\ell \times \ell}{|\ell|^2} \right) C^{-1} \left[ (\ell - k) \times b(\ell - k) \cdot k \cdot k \times 1 + (k \times 1) \cdot (\ell - k) (\ell - k) \cdot b(\ell - k) \right. \\ \left. + i \left( (\ell - k) \times b(\ell - k) \cdot k \cdot k \times 1 + (k \times 1) \cdot ((\ell - k) (\ell - k) \times b(\ell - k)) \right. \right. \\ \left. \left. - (\ell + k) \times b(\ell + k) \cdot k \cdot k \times 1 + (k \times 1) \cdot (\ell + k) (\ell + k) \times b(\ell + k) \right. \right. \\ \left. \left. + i \left( (\ell + k) \times b(\ell + k) \cdot k \cdot k \times 1 - (k \times 1) \cdot (\ell + k) (\ell + k) \times b(\ell + k) \right) \right]$$

On voit que le calcul de toutes les dérivées demande  $N^4$  opérations ce qui va rendre le temps de calcul très élevé dès que  $N$  est grand ; ici on ne peut pas utiliser directement les techniques de FFT usuelles en calcul d'Euler spectral parce qu'on a besoin du gradient discret exact de  $E$ .

On présentera ultérieurement une autre technique (par discrétisation en éléments finis) qui évite cet écueil.

#### Résultats numériques : stabilité

L'expérience a montré que les solutions calculées  $w^n$  en dimension 2 sont très loin d'être uniques ; elles dépendent de la condition initiale  $w^0$  dans l'algorithme du gradient conjugué ( $w^n$  est calculé à partir de  $w^{n+1}$  et donc  $w^0$  doit être donné).

La figure 1 montre 3 solutions calculées avec  $N=7$  et 20 itérations de gradient conjugué (ce qui amène en général  $E(w^{20}) \approx 10^{-3} E(w^0)$ ) pour 3  $w^0$  initiaux différents.

Soit  $w^{20}(w^0)$  la solution calculée à partir de  $w^0$  et 20 itérations. Pour étudier la stabilité de la méthode numérique pour la tabulation de



$w \otimes w$ , on a comparé dans le tableau 1  $\langle w_i^{20}(w^0) w_j^{20}(w^0) \rangle$  avec les statistiques des deux quantités suivantes :

$$(24) \quad \langle w_i^{20} w_j^{20} \rangle = \int_Y w_i^{20}(w^0 + \beta_p; y) w_j^{20}(w^0 + \beta_p; y) dy$$

$$(25) \quad \langle w_i^{20} w_j^{20} \rangle_B = \frac{1}{80} \sum_{p=1..20} \sum_{q=1..4} w_i^{20}(w^0 + \beta_p; y_{pq}) w_j^{20}(w^0 + \beta_p; y_{pq})$$

où  $y_{pq}$  est un point aléatoire dans  $Y$  et où,  $\alpha_p(k)$  désignant une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance 1 pour chaque  $k$  et chaque  $p$ , on a

$$(26) \quad \alpha_p(y) = \sum_{|k| \leq N} \alpha_p(k) e^{2i\pi k \cdot y}$$

Dans cette expérience le  $w^0$  choisi a un spectre en  $|k|^{-2}$  sauf éventuellement le dernier mode  $\{-N, -N\}$  qui est fixé dans les deux premiers cas.

#### Résultats numériques : tabulations

La matrice  $C$  est symétrique, on peut l'écrire

$$(27) \quad C^{-1} = \mu \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$$

Comme (1) est homogène, la solution  $\tilde{w}$  ne dépend pas de  $\mu$ . Pour se ramener à un interval borné, on pose

$$(28) \quad \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right) \quad \beta = \operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}\right)$$

ce qui permet de réécrire

$$(29) \quad C^{-1} = \mu' \begin{bmatrix} \sin a(1+\cos b) & (1+\cos a)(1+\cos b) \\ (1+\cos a)(1+\cos b) & \sin b(1+\cos a) \end{bmatrix}$$

et d'avoir des valeurs de  $C_{ij}$  comprises entre -4 et +4 avec une tabulation à faire pour des valeurs de  $a$  et  $b$  dans l'intervall borné  $]-\pi, +\pi[$ .

De plus, on peut réduire l'intervalle de tabulation en exploitant les symétries.

Posons

$$F(a,b) = \langle \tilde{w}'_1 \rangle^2 / \langle |\tilde{w}'|^2 \rangle$$

$$G(a,b) = \langle \tilde{w}'_1 \tilde{w}'_2 \rangle / \langle |\tilde{w}'|^2 \rangle$$

il est facile de voir que si (1) avait une solution unique on devrait avoir

$$F(a,b) = 1-F(b,a) \quad ; \quad G(a,b) = G(b,a)$$

$$F(a,b) = F(-a,-b) \quad ; \quad G(a,b) = G(-a,-b)$$

Cette remarque permet de réduire l'intervalle de tabulation à

$$0 \leq |b| \leq a \leq \pi.$$

La figure 2 donne les lignes de niveau de F et G obtenus numériquement avec N=8, 20 itérations de gradient conjugué à partir d'un  $w^0$  avec un spectre en  $k^{-2}$  sauf pour le dernier mode artificiellement multiplié par 10.

	$\frac{\langle w_1^{20} w_2^{20} \rangle}{\langle  w^{20} ^2 \rangle}$ lorsque $\alpha_p(k)=0 \forall k$	$\frac{1}{20} \sum_{p=1}^{20} \frac{\langle w_{1p}^{20} w_{2p}^{20} \rangle}{\langle  w_p^{20} ^2 \rangle}$	$\frac{\langle w_i^{20} w_j^{20} \rangle}{\langle  w ^2 \rangle} B$
$\hat{w}^0(-N, -N) = 0.5$ $\alpha_p(-N, -N) = 0 \forall p$	- 0.48	- 0.47	- 0.43
$\hat{w}^0(-N, -N) = 0.1$ $\alpha_p(-N, -N) = 0 \forall p$	- 0.080	- 0.121	- 0.076
$\hat{w}^0(-N, -N) = 1/N^2$ $\alpha_p(-N, -N)$ Gaussien	- 0.078	- 0.071	- 0.006

Table 2.1.

Trois méthodes pour calculer la valeur moyenne de  $w_1 w_2$  sont comparées pour trois solutions correspondant à des choix de  $w^0$  initiaux différents dans l'algorithme du gradient conjugué. L'intérêt de forcer le dernier mode de  $w^0$  (deux premiers cas) réside dans le fait qu' en 2-d le transfert d'énergie se fait des grands modes vers les petits modes.

$\frac{a}{2\pi}$	0.25	.49	.49	.49	.40	.40	.30	.25
$\frac{b}{2\pi}$	.0	.0	.10	.20	.35	.40	.30	.25
100. $\langle (\pi + \frac{1}{2} w ^2)w_1 \rangle$	-.06	-.2	-.2	-.1	-.3	-.3	-.9	-.4
100 $\langle (\pi + \frac{1}{2} w ^2)w_2 \rangle$	.0	-.1	.1	-.1	-.3	-.2	-.8	-.6

Table 2.2.

Tabulation de  $\langle (\pi + \frac{1}{2}|w|^2)w_i \rangle$  pour quelques valeurs des paramètres a et b.  
 On constate que cette fonction reste petite par rapport à  $\langle w \otimes w \rangle$ .

Figure 2.1. : Lignes de courant de trois  $w$  calculées par moindres carrés en spectral et gradient conjugué à partir de trois  $w^0$  initiaux différents.

Figure 2.2. : Ligne de niveau des fonctions

$$F = \langle \tilde{w}'_1 \rangle^2 / \langle \tilde{w}'_2 \rangle^2 \text{ et } G = \langle \tilde{w}'_1 \rangle \langle \tilde{w}'_2 \rangle / \langle \tilde{w}' \rangle$$

en fonction des paramètres  $a$  et  $b$  de la matrice  $C = \sqrt{\theta} \nabla \theta$ .

La ligne discontinue représente le chemin qu'il faut parcourir pour tracer  $\langle w_1 w_2 \rangle$  en fonction du seul paramètre  $\alpha$  intervenant dans  $C$  pour les écoulements monodimensionnels (cf. (3.3)) lorsque  $\alpha$  varie de 0 à  $\infty$ .

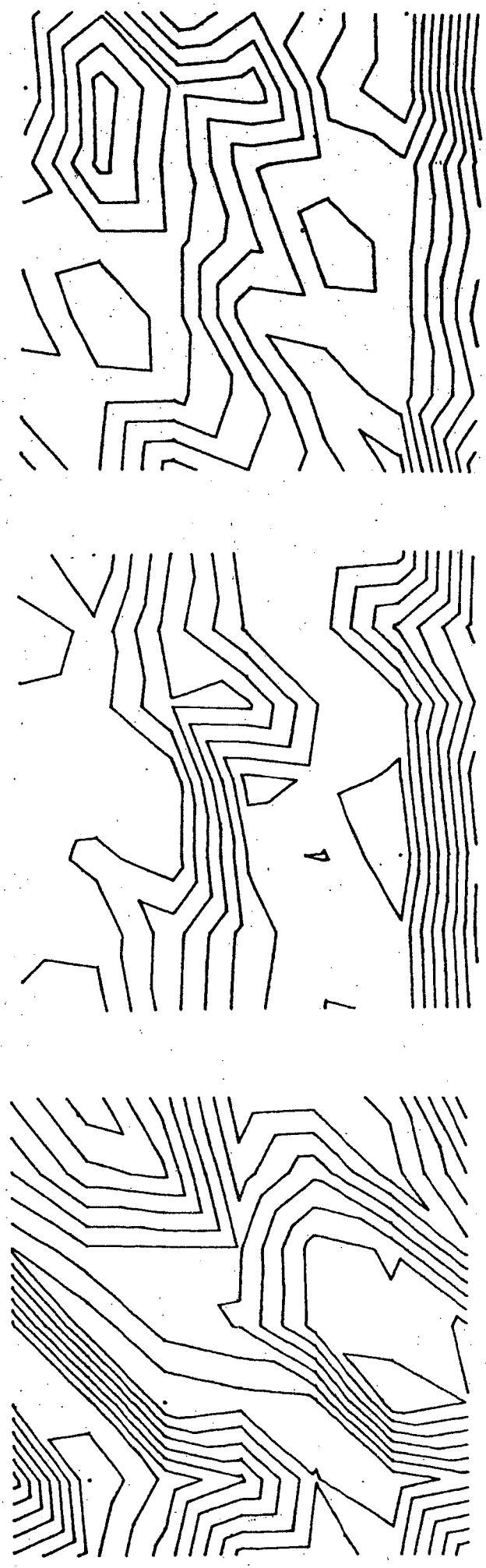


Fig. 2.1.

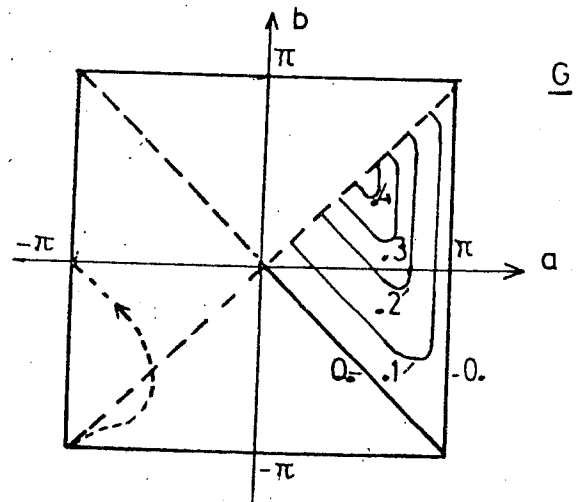
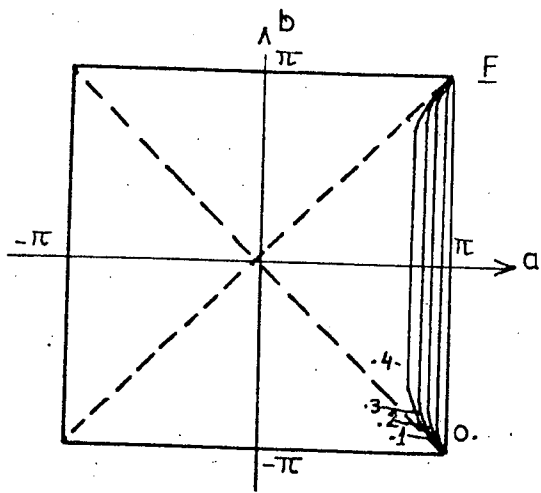


Fig. 2.2.

Chapitre 3 : Ecoulements dans une conduite

1. Ecoulement monodimensionnel

a) étude analytique

On suppose dans ce paragraphe que  $u$  est de la forme

$$(1) \quad u(x,t) = (u_1(x_2,t), 0, 0)^t$$

L'équation (48) en  $\theta$  s'intègre à vue

$$(2) \quad \theta(x,t) = (x_1 - \int_0^t u_1(x_2,s) ds, x_2, x_3)^t$$

ce qui donne

$$(3) \quad \nabla\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c = \nabla\theta^t \nabla\theta = \begin{bmatrix} 1 + \alpha^2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où

$$(4) \quad \alpha = - \int_0^t u_{1,2}(x_2,s) ds$$

On déduit de (3) et de (46) que  $w$  ne dépend aussi que de  $x_2$  et  $t$  ce qui donne pour (49)

$$(5) \quad u_{1,t} + \langle w_1, w_2 \rangle_{,2} + p_{,1} = 0$$

$$(6) \quad \langle w_2, w_2 \rangle_{,2} + p_{,2} = 0$$

$$(7) \quad \langle w_3, w_2 \rangle_{,2} + p_{,3} = 0$$

On intègre (6) en  $x_2$  :

$$(8) \quad p = - \langle w_2, w_2 \rangle + \overset{0}{p}(x_3, x_1, t)$$

et on reporte (8) dans (5) et (7) pour obtenir

$$(9) \quad p = - \langle w_2 w_2 \rangle + \langle w_3 w_2 \rangle_{,2} x_3 + p^1(t)$$

et la condition de compatibilité

$$(10) \quad \langle w_3 w_2 \rangle_{,22} = 0$$

Donc finalement (5) est réduit à

$$(11) \quad u_{1,t} + [q \langle w'_1 w'_2 \rangle]_{,2} = 0$$

L'équation sur l'énergie (43) se réduit aussi à

$$(12) \quad q_{,t} + u_{1,2} q \langle w'_1 w'_2 \rangle + [q^{3/2} \langle (\pi' + \frac{1}{2} |w'|^2) w' \rangle]_{,2} = 0$$

D'après (46) on peut poser

$$(13) \quad \langle w'_1 w'_2 \rangle = m(\alpha)$$

et d'après le chapitre 2 on peut supposer qu'en première approximation

$$(14) \quad \langle \pi' + \frac{1}{2} |w'|^2 w' \rangle \approx 0$$

Alors comme d'après (4)  $u_{1,2} = -\alpha_{,t}$ , l'équation (12) s'intègre à vue

$$(15) \quad q(x_2, t) = q^0(x_2) \exp[M(\alpha)]$$

avec

$$(16) \quad M(\alpha) = \int_0^\alpha m(\beta) d\beta$$

On reporte (15) dans (11) en posant

$$(17) \quad v = \int_0^t u_1(x_2, \sigma) d\sigma, \quad g(-\alpha) = m(\alpha) \exp M(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \exp M(\alpha)$$

ce qui donne (cf. (41))

$$(18) \quad \left[ \begin{array}{l} v_{,tt} + [q^0(x_2) g(v_{,2})]_{,2} = 0 \\ v_{,t}(x_2, 0) = u_1^0, \quad v(x_2, 0) = 0 \\ q^0 v \text{ donné en } x_2 = 0 \text{ et } x_2 = L \end{array} \right.$$



Pour que ce système soit bien posé il faut que

$$(19) \quad 0 \leq g(-\alpha) = \alpha m(\alpha) \exp M(\alpha).$$

Donc d'après (13)  $\langle w'_1 w'_2 \rangle$  doit être positif. D'après cette théorie les écoulements purement monodimensionnels avec "turbulence" bidimensionnelle sont instables en général puisque les tabulations de G dans la figure 2.2 donnent un signe négatif à  $\langle w'_1 w'_2 \rangle$ . La formule (2.13) montre qu'on ne peut pas choisir tous les  $\langle w_i w_j \rangle$  positifs ; mais si dans (2.13) on prend  $k_3 = 0$ , (1.a) est satisfait et

$$(20) \quad \langle w'_1 w'_2 \rangle = -\frac{1}{2} k_2 (k_1 + \alpha k_2) / (k_2^2 + (k_1 + \alpha k_2)^2) = -\frac{k_1 k_2}{2|k|^2} - \alpha \frac{(k_2^2 - k_1^2) k_2^2}{2|k|^4} + o(\alpha)$$

En choisissant  $|k_2| < |k_1|$  c'est-à-dire une condition initiale qui oscille plus en  $x_1$  qu'en  $x_2$ , on obtient un écoulement monodimensionnel avec "turbulence" tridimensionnelle stable à l'origine ayant des oscillations :

$$(21) \quad u_1(x_2, t) = \sin \frac{\pi}{L} (x_2 + t \sqrt{q^0 \frac{(k_1^2 - k_2^2) k_2^2}{2|k|^4}}) + \sin \frac{\pi}{L} (x_2 - t \sqrt{q^0 \frac{(k_1^2 - k_2^2) k_2^2}{2|k|^4}})$$

(lorsque  $q^0$  est constant,  $u^0$  est approprié, et  $u|_{\Gamma} = 0$ )

#### b) étude numérique

Pour étudier l'effet de stabilisation d'une viscosité turbulente éventuelle on a résolu numériquement le système

$$(22) \quad \begin{aligned} V_{,tt} + qm(-V_{,x}) - \nu V_{,txx} &= 0 \\ q_{,t} + V_{,xt} qm(-V_{,x}) - \mu q_{,xx} &= 0 \quad \text{dans } ]0,1[ \times ]0,T[ \end{aligned}$$

Ce système correspond aux équations (11), (12), (14) dans lesquelles on a rajouté une dissipation visqueuse  $\nu u_{,xx}$  et  $\mu q_{,xx}$  dans chacune des équations.

On prend comme conditions aux limites :

$$(23) \quad \begin{aligned} V(x,0) &= 0, \quad V_{,t}(x,0) = \sin(\pi x), \quad q(x,0) = q^0 \\ q(0,t) &= q(1,t) = q^0, \quad v(0,t) = v(1,t) = 0 \end{aligned}$$

Pour  $\langle w'_1 w'_2 \rangle$  on prend une fonction ayant la même forme que celle donnée par la figure 2.2 :

$$m(-v_{,x}) = 2 v_{,x} / (1 + v_{,x}^2)$$

On utilise un schéma aux différences finies explicite en temps, centré :

$$(24) \quad v_i^{n+1} = 2v_i^n - v_i^{n-1} + \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \left[ m \left( \frac{v_i^n - v_{i+1}^n}{\Delta x} \right) \left( \frac{q_{i+1}^n + q_i^n}{2} \right) - m \left( \frac{v_{i-1}^n - v_i^n}{\Delta x} \right) \left( \frac{q_i^n + q_{i-1}^n}{2} \right) \right] \\ + v \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \left[ (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) - (v_{i+1}^{n-1} - 2v_i^{n-1} + v_{i-1}^{n-1}) \right]$$

$$(25) \quad q_i^{n+1} = q_i^n + \mu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n) - \frac{q_i^n}{2\Delta x} (v_{i+1}^n - v_{i-1}^n - (v_{i+1}^{n-1} - v_{i-1}^{n-1})) m \frac{(v_{i-1}^n - v_{i+1}^n)}{2\Delta x}$$

toutefois on utilise la solution explicite de (22.b) lorsque  $\mu = 0$  :

$$(26) \quad q = q^0 / (1 + v_{,x}^2)$$

Les résultats numériques des figures 1-4 montrent que

1. Lorsque  $\mu = 0$  ou  $v = 0$  il y a pour chaque  $q^0$  un  $v(q^0)$  ou un  $\mu(q^0)$  en dessus duquel le système est stable (il semble qu'on puisse quand même développer des singularités).
2. Lorsque  $\mu$  et  $v$  sont non nuls le système semble être stable au dessous d'une valeur critique  $q^0(\mu, v)$ .
3. Lorsque  $v = \mu = 0$  le système est instable probablement mais la diffusion numérique rend cette instabilité assez diffuse; tout dépend probablement du comportement de  $m(\alpha)$  lorsque  $\alpha \rightarrow \infty$ .

#### Conclusions.

Quoique le système soit théoriquement instable, la viscosité numérique permet d'obtenir des solutions stables pour des niveaux de turbulence faible.

Ce modèle ne donne pas les profils aplatis des écoulements dans les conduites car il semble que ceci sera dû à l'effet de viscosité turbulente non linéaire étudié au chapitre 4.

Compte tenu du fait que les couches limites ne sont pas traitées explicitement, le modèle donne un comportement d'énergie turbulente  $x \rightarrow q(x, T)$  creusé au centre, conforme à l'expérience.

Profils de vitesse et d'énergie pour des écoulements monodimensionnels dans une conduite.

Instant final  $T = 2$

Vitesse horizontale  $u$

Energie cinétique turbulente  $\ell$

Figure 3.1. (en haut à gauche)

$x \rightarrow u(x,2)$  et  $t \rightarrow u(\frac{1}{2},t)$  dans le cas sans viscosité et pour  $q^0 = 0.01$ , sans viscosité ( $\nu = \mu = 0$ ). On remarque que la solution est numériquement stable lorsque  $t \rightarrow \infty$  mais qu'une singularité apparaît au milieu.

Figure 3.2. (en haut à droite)

$x \rightarrow u(x,2)$  et  $t \rightarrow u(\frac{1}{2},t)$  dans le cas sans viscosité avec  $q^0 = 1.0$ . En plus de la singularité la solution tend vers l'infini en  $t$ .

Figure 3.3. (en bas à gauche)

$x \rightarrow u(x,2)$   $t \rightarrow u(\frac{1}{2},t)$  et  $x \rightarrow \ell(x,2)$  avec  $q^0 = 0.01$  et une viscosité  $\mu = 0.1$  dans l'équation d'énergie (pas de viscosité en  $u$  :  $\nu = 0$ ).

On constate la disparition de la singularité sur  $t$  mais la singularité sur  $u$  reste.

Figure 3.4. (en bas à droite).

$x \rightarrow u(x,2)$ ,  $t \rightarrow u(\frac{1}{2},t)$  et  $x \rightarrow \ell(x,2)$  dans le cas  $q^0 = 0.01$  avec une viscosité  $\mu = 0.1$  dans l'équation d'énergie et une viscosité  $\nu = 0.1$  dans l'équation de la vitesse  $u$ . On constate la disparition de la singularité.

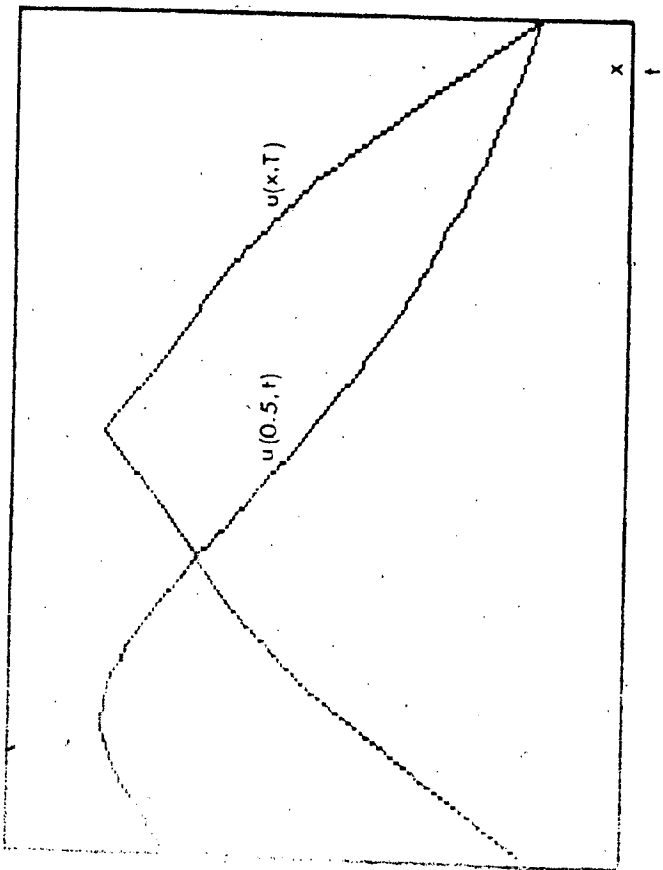


Fig. 3.1.

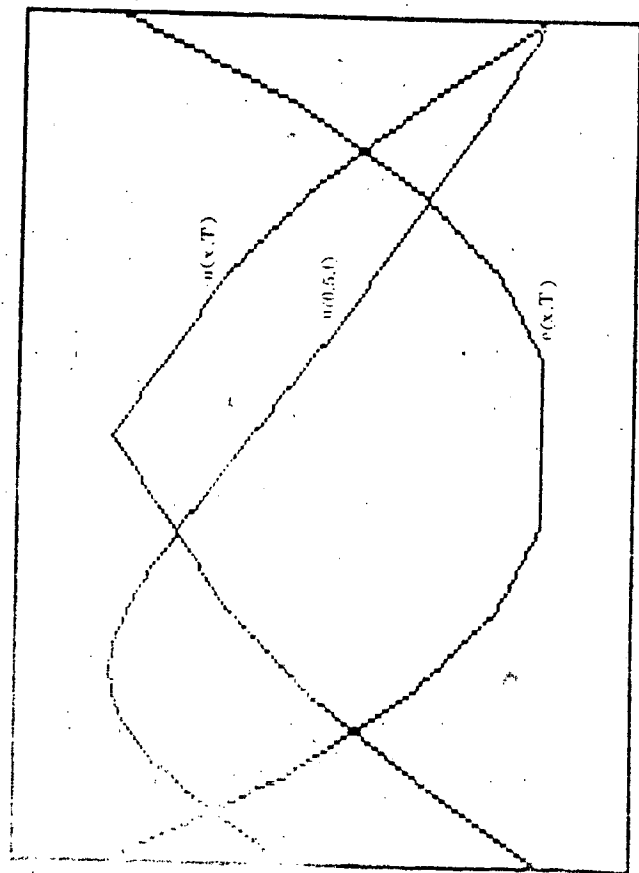


Fig. 3.3.

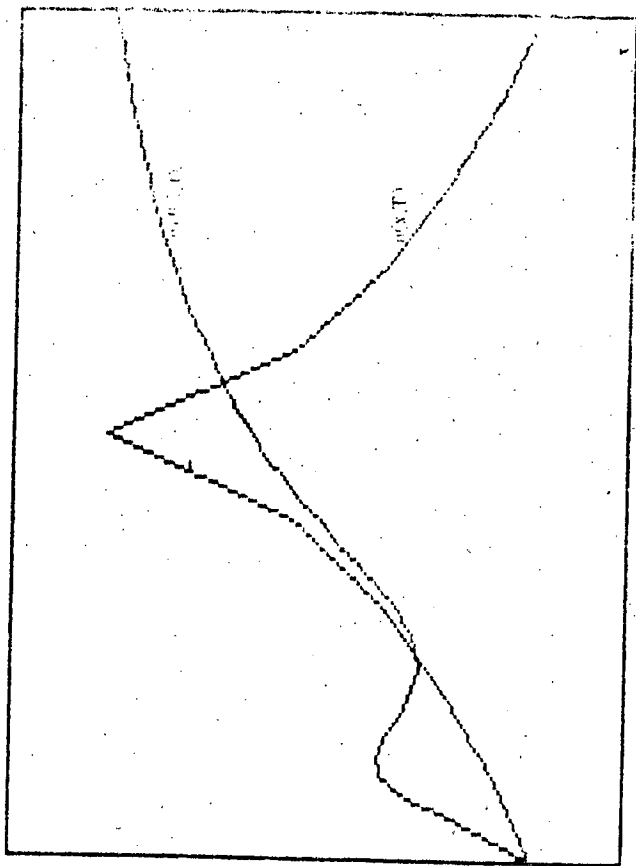


Fig. 3.2.

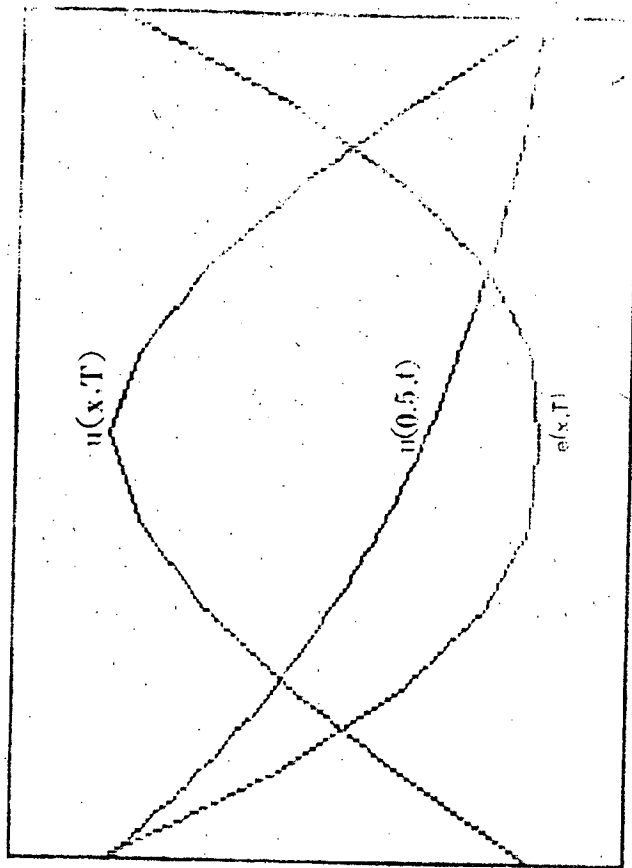


Fig. 3.4.

2. Écoulements bidimensionnels avec turbulence bidimensionnelle

Sur un domaine de la forme

$$(27) \quad \Omega = ]0, L[ \times ]0, 1[ \times \mathbb{R}$$

On va chercher des solutions de la forme

$$(28) \quad u(x, t) = (u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), 0)^t$$

L'équation sur la 3e composante de (1.49 a) s'écrit

$$(29) \quad p_{,3} + (q \langle w'_1 w'_3 \rangle)_{,1} + (q \langle w'_2 w'_3 \rangle)_{,2} = 0.$$

Pour que l'écoulement reste bidimensionnel il faut que  $(q \langle w'_1 w'_3 \rangle)_{,1} + (q \langle w'_2 w'_3 \rangle)_{,2}$  soit indépendant de  $x_1, x_2$  c'est-à-dire pratiquement

$$(30) \quad \langle w'_1 w'_3 \rangle = \langle w'_2 w'_3 \rangle = 0$$

Dans ces conditions on peut écrire (49) en fonction de courant  $\psi$  et en vorticité  $\omega$  :

$$(31) \quad u = \nabla \times \psi = (\psi_{,2}, -\psi_{,1}, 0)^t$$

$$(32) \quad -\Delta\psi = \omega \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[$$

$$(33) \quad \omega_{,t} + u\nabla\omega + \nabla \times \nabla \cdot (q \langle w' \otimes w' \rangle) = 0$$

Afin d'étudier le phénomène sur une longue échelle de temps on a pris les conditions aux limites suivantes :

$$(34) \quad \omega(x, 0) = \omega^0(x), \quad \psi(0, x_2, 0) = \psi^0(x_2), \quad \psi(x_1, 0, t) = 0, \quad \psi(x_1, 1, t) = 1$$

$$(35) \quad \psi, \omega \quad x_1\text{-périodique sur } ]0, L[.$$

Les équations pour  $\theta$  sont

$$(36) \quad \theta = \theta' + x \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[$$

$$(37) \quad \theta'_{,t} + u\nabla\theta' = -u$$

$$(38) \quad \theta'(x, 0) = 0, \quad \theta'(0, x_2, t) = 0$$

(Il n'est pas possible de demander  $\theta'$   $x_1$ -périodique car cela conduit à une ligne de choc, correspondant à l'entrée du tube, se déplaçant à la vitesse  $u$ )

Les fonctions  $F$  et  $G$  étant données par la figure 2.2 on a

$$(39) \quad \langle w_1^2 \rangle = [(\theta_{2,2}^2 - \theta_{1,2}^2)F + \theta_{1,2}^2 - 2\theta_{1,2} \theta_{2,1}G] \lambda$$

$$(40) \quad \langle w_2^2 \rangle = [(\theta_{2,1}^2 - \theta_{1,1}^2)F + \theta_{1,1}^2 - 2\theta_{1,1} \theta_{2,1}G] \lambda$$

$$(41) \quad \langle w_1^1 w_2^1 \rangle = [(\theta_{1,1} \theta_{1,2} - \theta_{2,1} \theta_{2,2})F - \theta_{1,1} \theta_{1,2} + (\theta_{1,1} \theta_{2,2} + \theta_{1,2} \theta_{2,1})G] \lambda$$

$$(42) \quad \lambda = 2 / [(\theta_{2,2}^2 + \theta_{2,1}^2)F + (\theta_{1,2}^2 + \theta_{1,1}^2)(1-F) - 2G(\theta_{2,2} \theta_{1,2} + \theta_{1,1} \theta_{2,1})]$$

Enfin les équations pour  $q$  avec l'approximation (2.14) :

$$(43) \quad \ell_{,t} + u \nabla \ell + \langle w_i^1 w_j^1 \rangle u_{i,j} = 0$$

$$(44) \quad \ell(x,0) = \ell^0, \quad \ell \text{ } x_1\text{-périodique sur } ]0, L[$$

$$(45) \quad q = \exp(\ell)$$

### Discrétisation

Dans les équations (33), (37), (43) on a utilisé l'approximation suivante :

$$(46) \quad \phi_{,t} + u \nabla \phi = (\phi^{n+1}(x) - \phi^n(x - u^n(x) \Delta t)) / \Delta t$$

qui correspond à une discrétisation différence finie de la dérivée totale de  $\phi$ . Ensuite si  $\Pi$  désigne l'opérateur d'interpolation  $Q^1$  (bilinéaire) avec les 4 sommets les plus proches, on obtient un schéma type "Lax-Wendroff" inconditionnellement stable

$$(47) \quad (\phi_{,t} + u \nabla \phi)_{ij} \approx (\phi_{ij}^{n+1} - \Pi \phi^n(x_{ij} - u_{ij}^n \Delta t)) / \Delta t$$

où  $ij$  désigne l'évaluation en  $x_{ij} = (i \Delta x_1, j \Delta x_2)^t$ .

On note donc par

$$(48) \quad \Pi_{ij}^n \phi^n = \Pi \phi(x_{ij} - u_{ij}^n \Delta t)$$

et on obtient le schéma explicite suivant (dans le cas  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$ ) :

$$(49) \quad 4 \psi_{ij}^{n+1} - \psi_{i+1j}^{n+1} - \psi_{ij+1}^{n+1} - \psi_{i-1j}^{n+1} - \psi_{ij-1}^{n+1} = \omega_{ij}^{n+1} (\Delta x)^2$$

$$(50) \quad u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2} (\psi_{ij+1}^{n+1} - \psi_{ij-1}^{n+1}, \psi_{i-1j}^{n+1} - \psi_{i+1j}^{n+1}) / \Delta x$$

$$(51) \quad \omega_{ij}^{n+1} = \Pi_{ij}^n \omega^n - \Delta t (\nabla \times \nabla)_{ij} \cdot q^n \langle w' \otimes w' \cdot ((\nabla_{ij} \theta^t \nabla_{ij} \theta)^n) \rangle$$

$(\nabla \times \nabla)_{ij}$  = approximation centrée différence finie de  $\nabla \times \nabla$  en  $x_{ij}$ .

$$(52) \quad \theta_{ij}^{n+1} = \Pi_{ij}^n \theta^n + u_{ij}^{n+1} \Delta t$$

$$(53) \quad \ell_{ij}^{n+1} = \Pi_{ij}^n \ell^n - \Delta t \langle w'_k w'_m \rangle \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \right)_{ij} u_k^{n+1}$$

$$(54) \quad q_{ij}^{n+1} = \exp \ell_{ij}^{n+1}$$

Le système linéaire (49) est résolu par la méthode de surrelaxation.

#### Remarque

1. La formulation (37) pour  $\theta$  est plus stable numériquement sur ce problème.
2. La formulation (45) pour  $q$  a l'avantage de conserver après discrétisation la propriété importante pour la stabilité :  $q > 0$ .

#### Expérience 1 (figure 5)

Pour une discrétisation  $32 \times 16$  un pas de temps de 0.1,  $L = 3.0$ , et les conditions initiales

$$(55) \quad q^0 = 0.1,$$

$\omega^0, \psi^0$  tels que le champ de vitesse soit parabolique  $u = (x_2(1-x_2), 0, 0)$ , i.e.

$$(56) \quad \psi^0 = x_2^2 (0.5 - x_2/3), \quad \omega^0 = 1 - 2x_2,$$

On a calculé la solution du problème jusqu'à explosion du calcul. Ce problème est identique à l'écoulement monodimensionnel du paragraphe précédent qui est instable. On voit que l'écoulement moyen se ralentit et devient instable

lorsqu'il passe par zéro où il devient brutalement bidimensionnel mais le schéma numérique ne résiste pas à ce changement et explose.

Expérience 2 (Figure 6-9).

Afin d'étudier les effets de  $w$  sur les larges structures on a choisi d'ajouter à  $w^0$  une ligne de vortex ponctuels

$$(57) \quad w^0 = 1 - 2x_2 + \sum_i^{32} \delta(x_p^i) w_p$$

Pour intégrer (33) on a décomposé  $w$  en deux parties : une partie continue  $w_c(x,t)$  et une partie vortex ponctuels  $w_p(x,t)$ . La partie  $w_c$  est intégrée avec le schéma (51) et les conditions initiales (56). La partie  $w_p$  est intégrée par la méthode des vortex :

$$(58) \quad w_p^{n+1} = \sum_i^{32} \delta(x_p^i + \Delta t u(x_p^i)) w_p$$

On a choisi  $w_p = 10.0$  dans (57), les autres paramètres ont la même valeur sauf  $q^0$ .

La figure 6 montre d'abord l'évolution du phénomène sans turbulence ( $q^0 = 0$ ) ; l'enroulement de la ligne de vortex sur elle-même s'effectue lentement.

La figure 7 montre le même phénomène avec le même pas de temps mais  $q^0 = 0.005$ . L'enroulement est beaucoup plus rapide et une onde de grande amplitude (vague) apparaît.

La figure 8 montre aussi le même phénomène mais avec  $q^0 = 0.05$  ; le phénomène est numériquement instable.

Enfin on trouvera dans les figures 9 et 10 l'évolution de la vorticité continue  $w_0$  et de l'énergie cinétique  $q$  correspondant au cas de calcul de la figure 7 mais avec 16 points de vortex au lieu de 32. On constate que l'énergie  $q$  décroit avec le temps sans jamais croitre.

Exp rence 3 (figure 11-12).

On étudie le même phénomène lorsque  $\langle w' \otimes w' \rangle$  est tabulé à partir de (2.13).



Conclusion

1. On retrouve les résultats des calculs monodimensionnels : stabilité numérique pour des petits  $q^0$  instabilité au dessus d'un seuil critique  $q_{\max}(\Delta x)$  ; lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$   $q_{\max} \rightarrow 0$ . La stabilité est donc due à la viscosité numérique.

2. Les figures 3.9 et 3.12 semblent indiquer que :

- l'énergie des petites structures 2-d dans un écoulement 2-d diminue
- l'énergie des petites structures 3-d dans un écoulement 2-d diminue en moyenne mais beaucoup plus lentement (diffusion numérique ?) et augmente de temps en temps.

Ce phénomène est conforme à l'expérience

3. Enfin le modèle de turbulence a un effet déstabilisateur très net ; il provoque plus tôt des phénomènes qualitativement corrects.

-1.04	-1.21	-0.14	-0.78
-0.56	-1.36	-1.57	-1.08
-0.56	-1.29	-0.52	-0.73
-1.25	-1.11	-0.37	-0.64
-1.35	-0.86	-0.48	-0.67
-1.14	-1.00	-0.90	-0.84
-0.93	-1.13	-1.37	-0.66
-1.17	-1.15	-0.32	-0.62

-0.21	-0.25	-0.61	-0.07
-1.08	-0.55	-0.78	-0.15
-1.57	-0.18	-0.05	-0.07
-1.63	-0.22	-0.01	-0.07
-1.66	-0.27	-0.02	-0.07
-1.64	-0.69	-0.04	-0.17
-1.51	-0.37	-1.49	-0.57
-0.15	-0.69	-0.49	-0.54

Table 3.1.

Valeurs de  $\log\left(\frac{q(x,T)}{q^0}\right)$  a  $T = 2$  dans la conduite

- à gauche avec le w bidimensionnel tabulé : en tout point q a diminué.
- à droite avec le w tridimensionnel analytique : il y a des points où  $q > q^0$ .

Écoulements d'Euler bidimensionnels  
dans une conduite avec condition périodique  
amont aval

1. Instabilité de l'écoulement monodimensionnel
  2. Etude de l'enroulement d'une nappe de vortex
- $\Delta t = 0.1$

Les figures se lisent de gauche à droite et de bas en haut.

Figure 3.5. (grille  $32 \times 16$ )

L'écoulement parabolique est instable dans le modèle turbulent. On constate bien un début d'oscillation; l'écoulement tend vers zéro puis au bout de 9 pas de temps ( $T = 0.9$ ) le code explose car l'écoulement devient brusquement bidimensionnel. Ici  $q^0 = 1.0$ .

Figure 3.6. (grille  $64 \times 32$ )

Evolution d'une nappe de 32 vortex dans un écoulement parabolique sans modèle de turbulence ( $q^0 = 0$ ).

Figure 3.7. (grille  $64 \times 32$ )

Même calcul qu'en 3.6 avec le modèle de turbulence et  $q^0 = 0.005$ . On note l'apparition d'oscillations à grande longueur d'onde en plus de l'enroulement des vortex et surtout de déclenchement du phénomène beaucoup plus tôt qu'en 3.6.

Figure 3.8. (grille  $64 \times 32$ )

Même calcul qu'en 3.7 avec  $q^0 = 0.05$ . Le calcul explose au bout de 10 pas de temps.

Figure 3.9. (grille  $32 \times 16$ )

Lignes de niveaux de l'énergie turbulente  $q$  aux temps 0, 0.1, 0.2, ... pour une ligne de 16 vortex. La dissymétrie est due au sens des vortex. On note que l'énergie décroît pour devenir nulle.

Figure 3.10. (grille  $32 \times 16$ )

Lignes de niveaux de la vorticité pour le même calcul qu'en 3.9.

Figure 3.11. (grille  $32 \times 16$ )

Evolution d'une ligne de 10 vortex avec le modèle de turbulence et  $\langle w'w' \rangle$  donné par (2.13) (calcul analytique sur une turbulence petite échelle 3-d) avec  $q^0 = 0.4$ . A comparer avec les points de vortex de la figure 3.9.

Figure 3.12. (grille  $3 \times 16$ )

Lignes de niveaux de  $q$  lorsque  $\langle w'w' \rangle$  est donné par (2.13),  $q^0 = 0.4$ . A comparer avec 3.9. On constate que  $q$  tend beaucoup moins vite vers zéro et qu'il croit en certains endroits parfois.

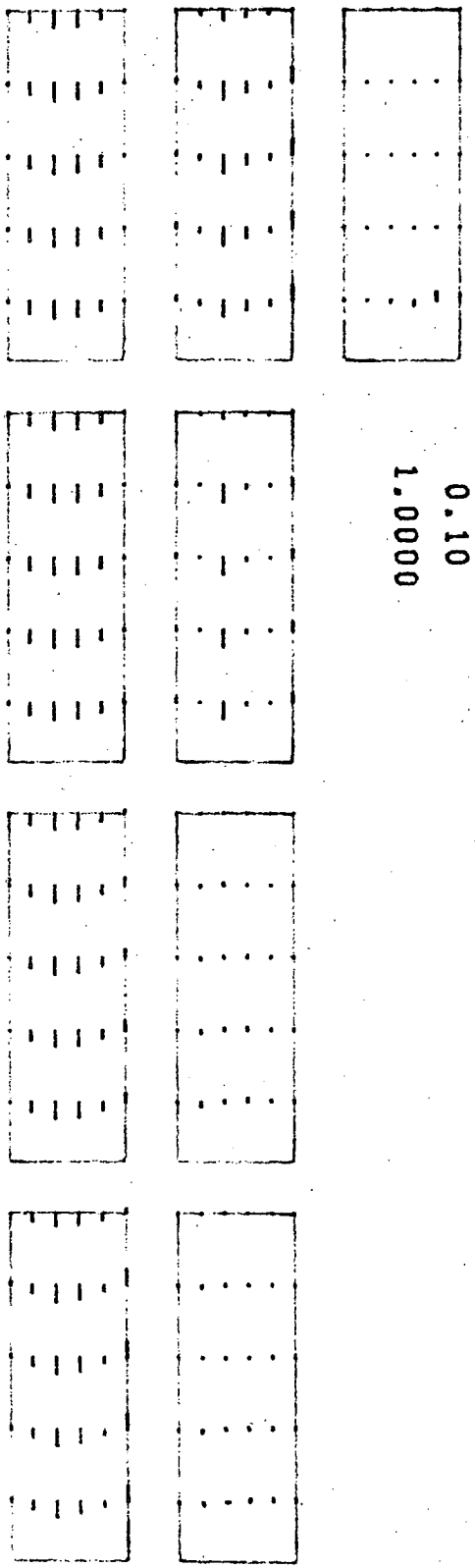


Fig. 3.5.

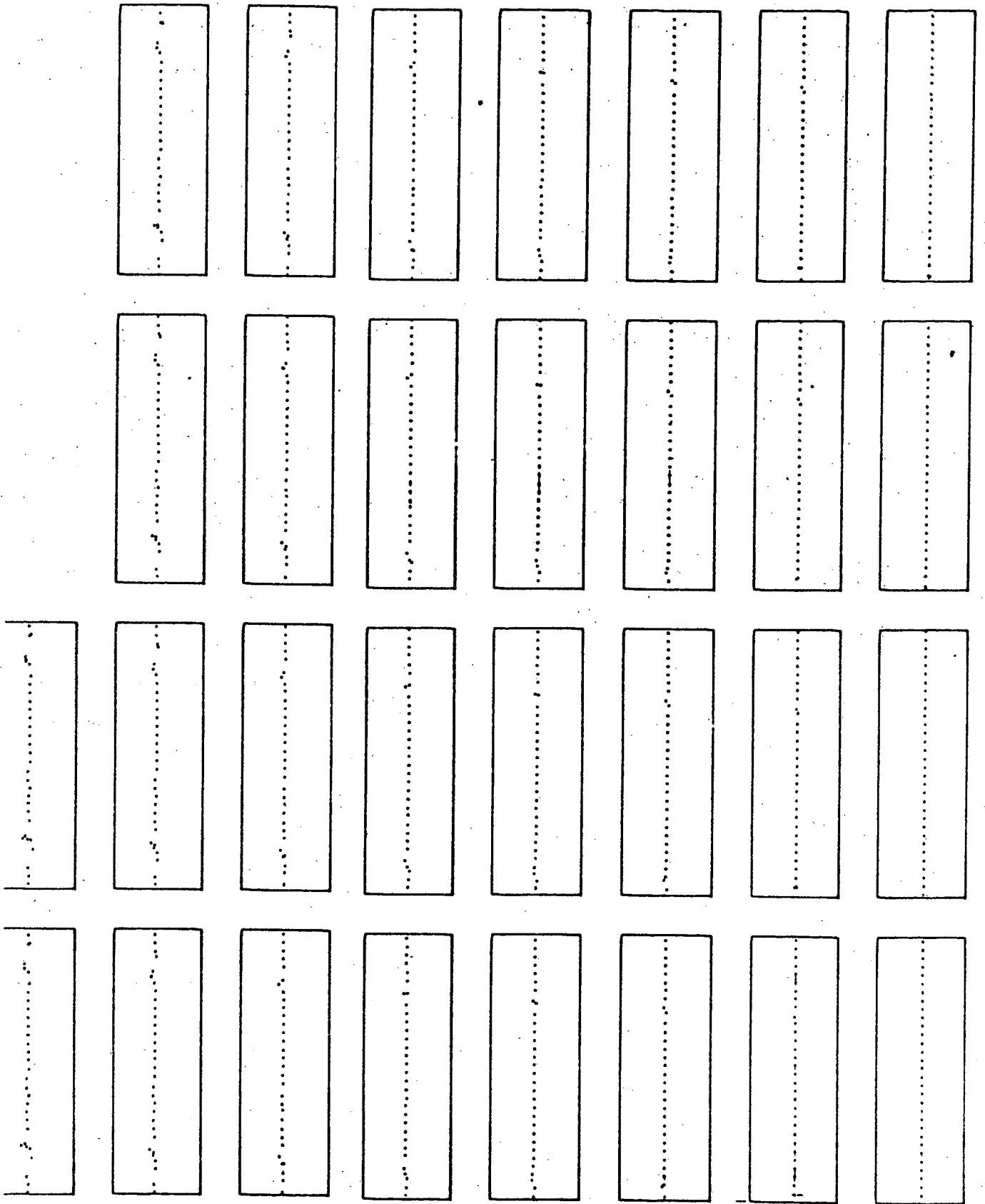


Fig. 3.6.

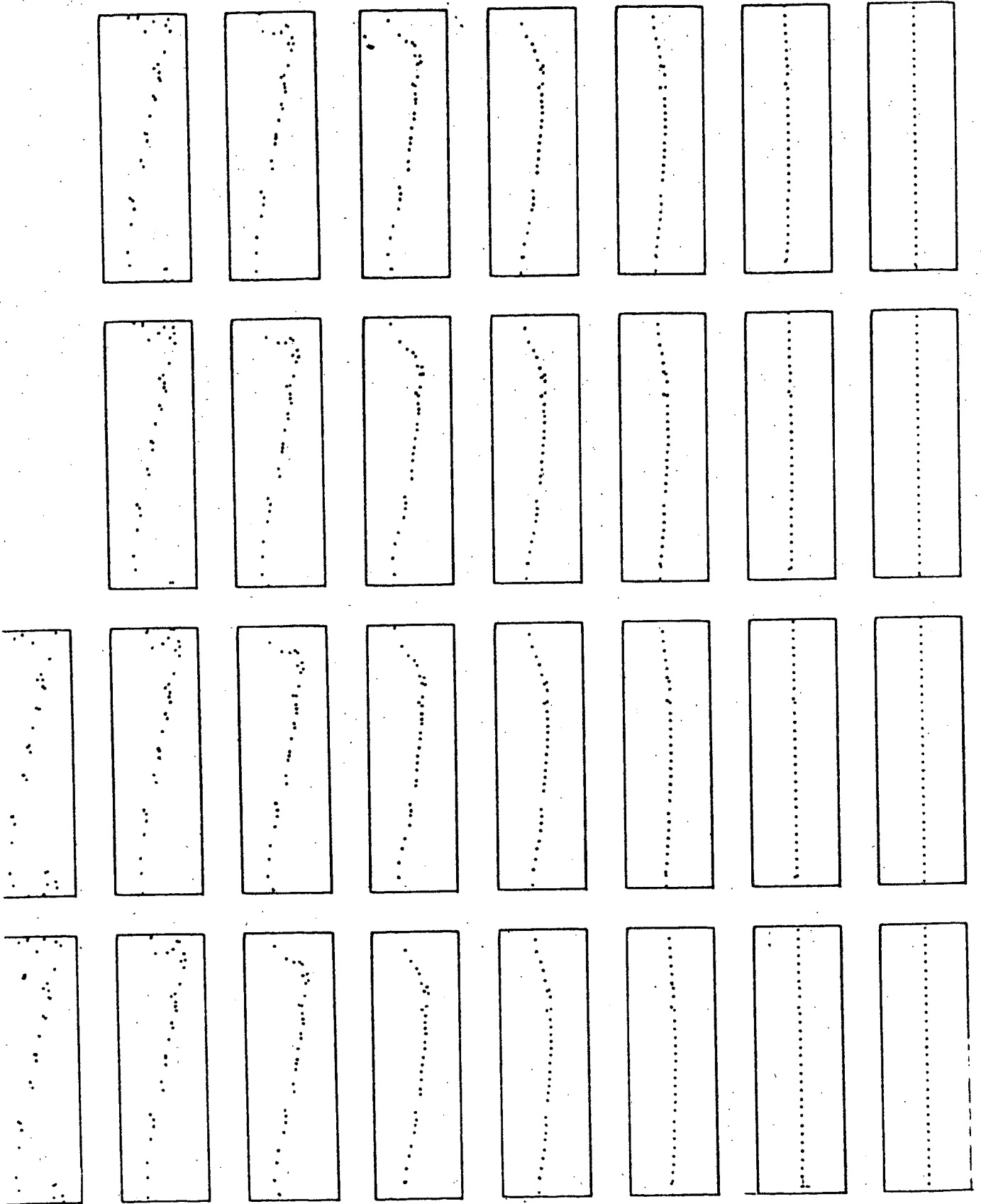


Fig. 3.7.

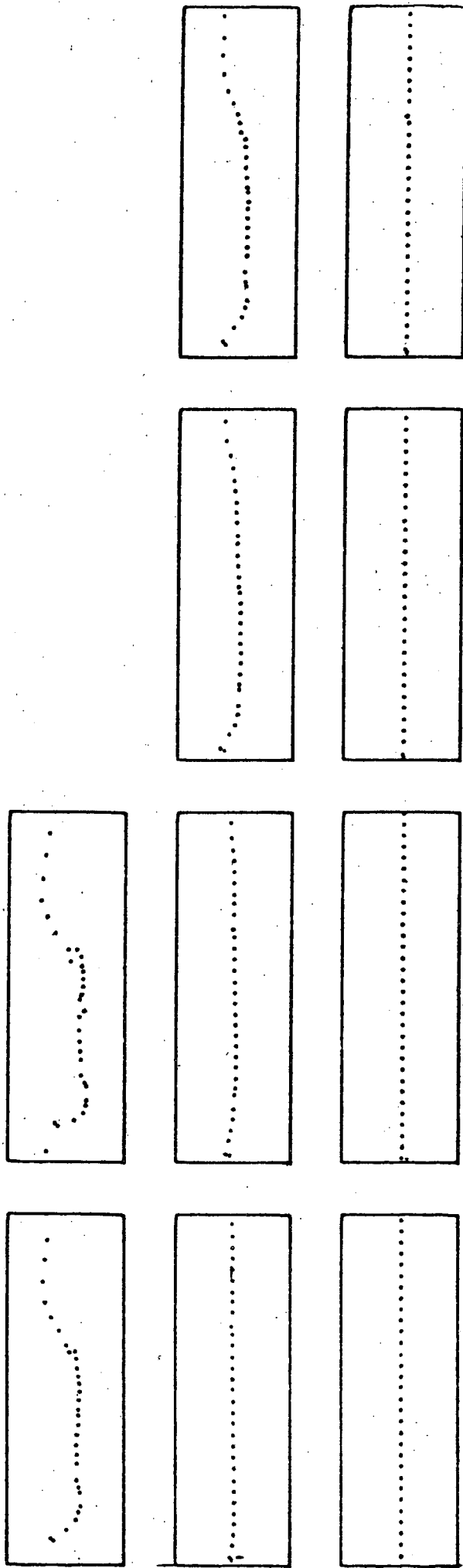


Fig. 3.8.

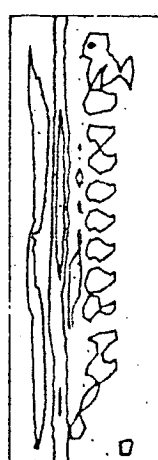
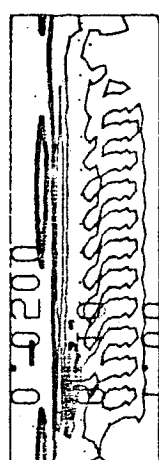
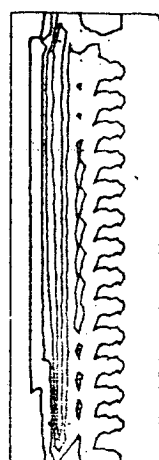
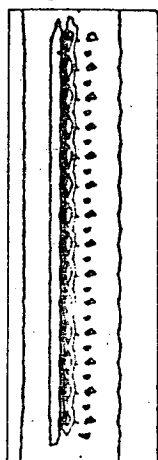
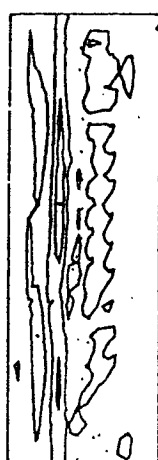
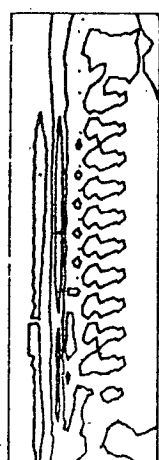
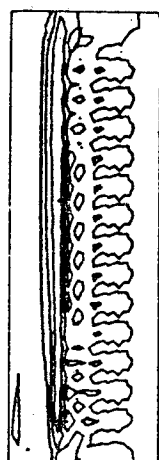
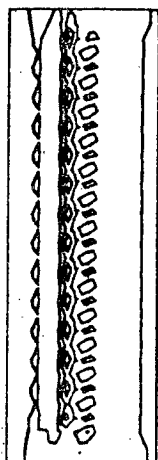
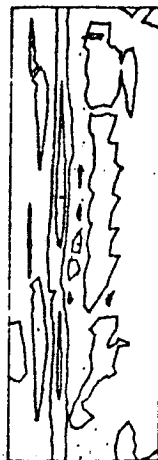
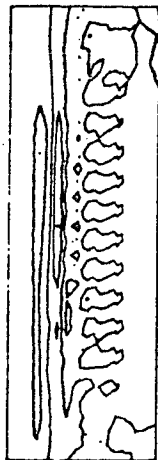
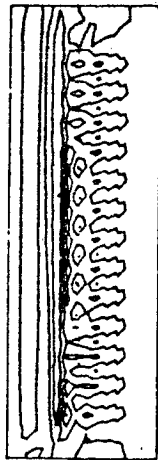
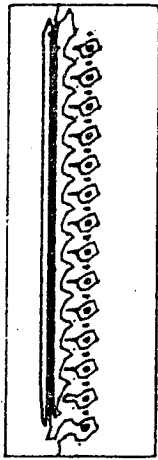
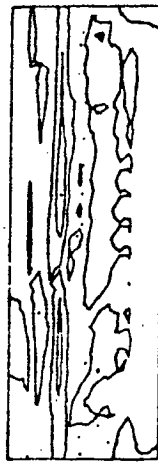
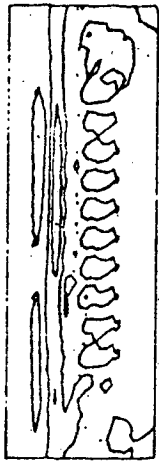
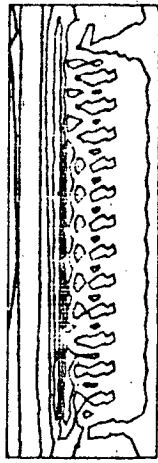
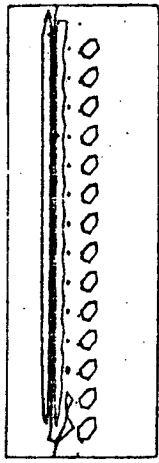


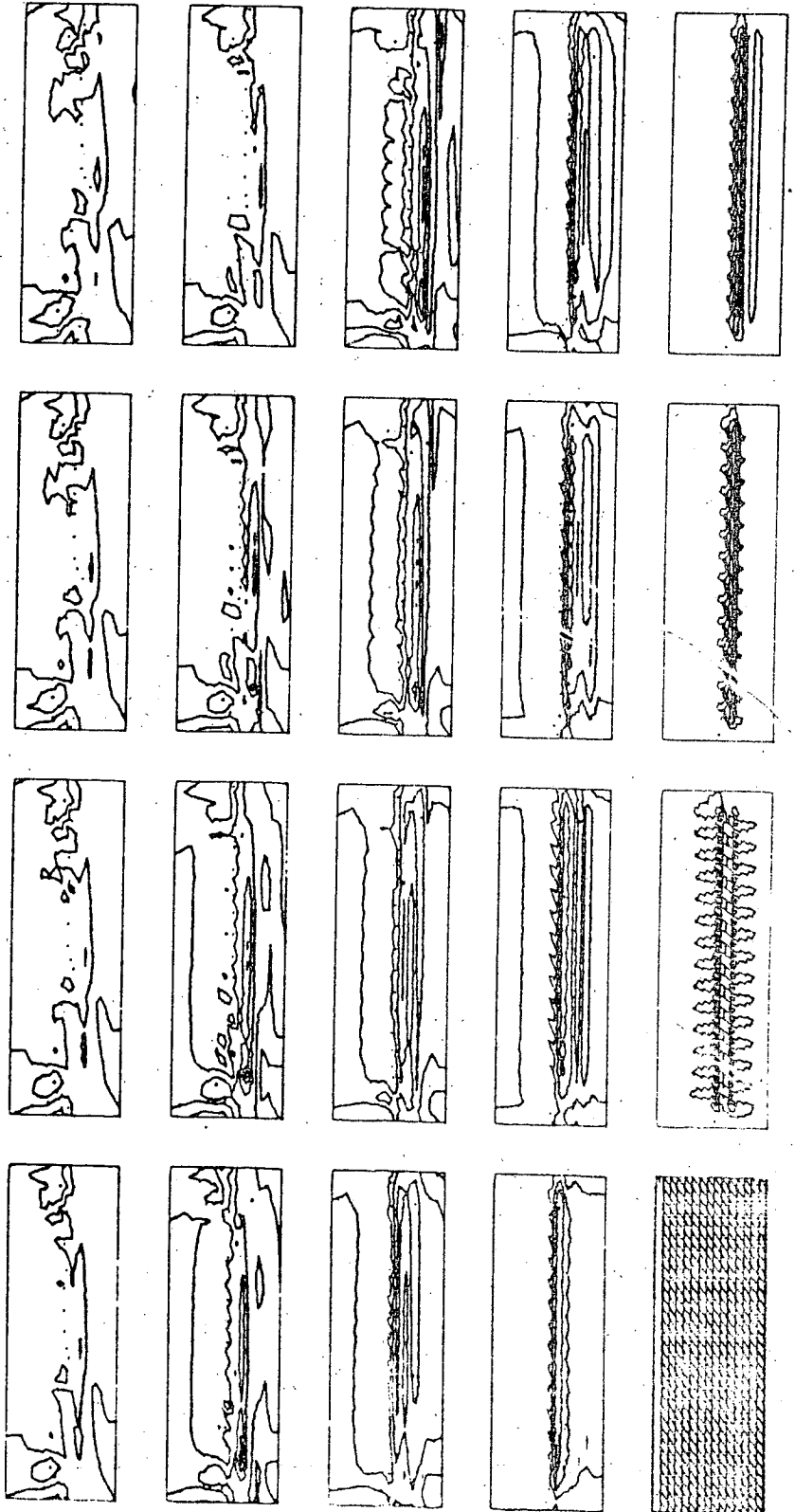


Fig. 3.9.

2.00

0.10

0.0500



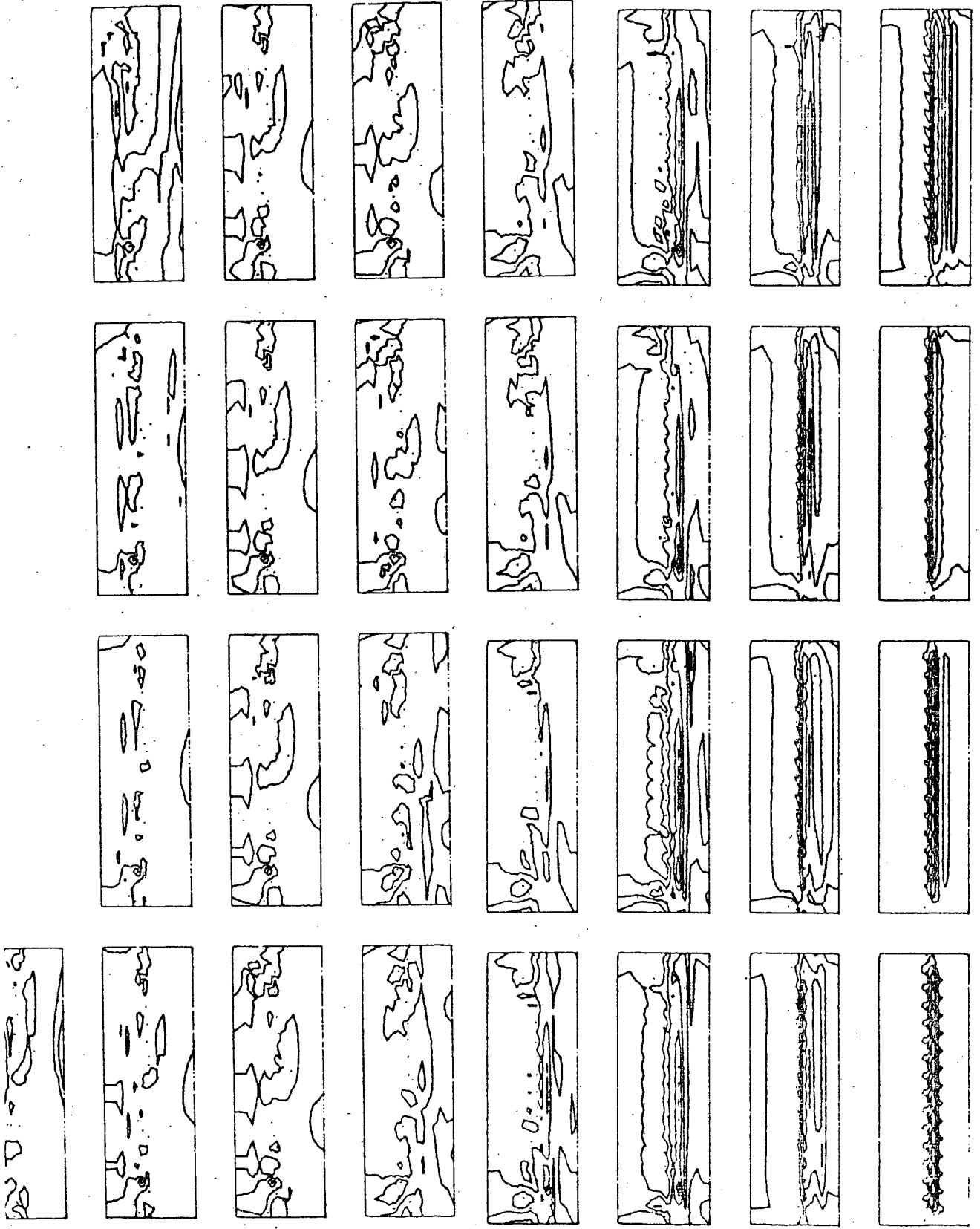


Fig. 3.10.

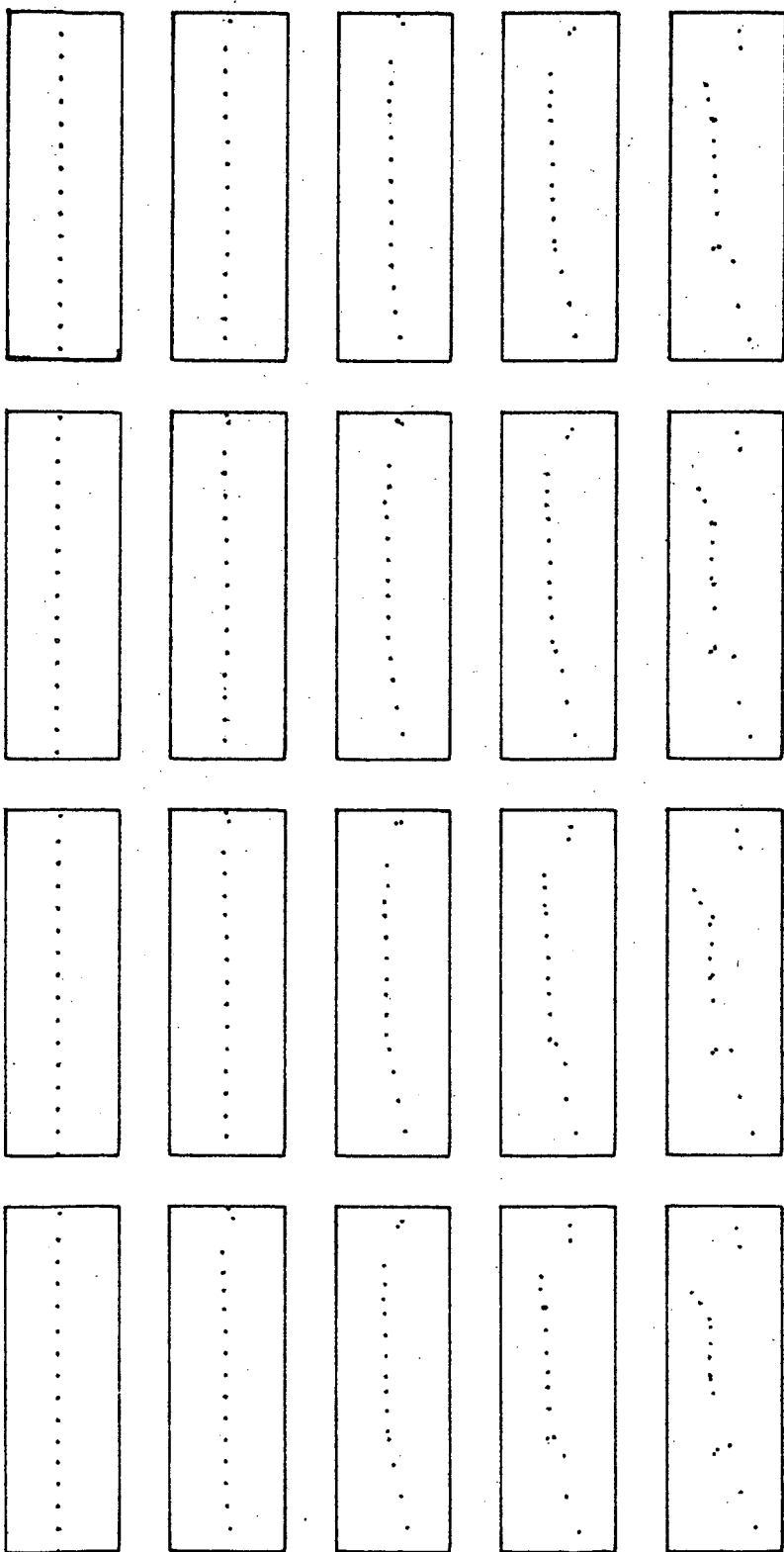
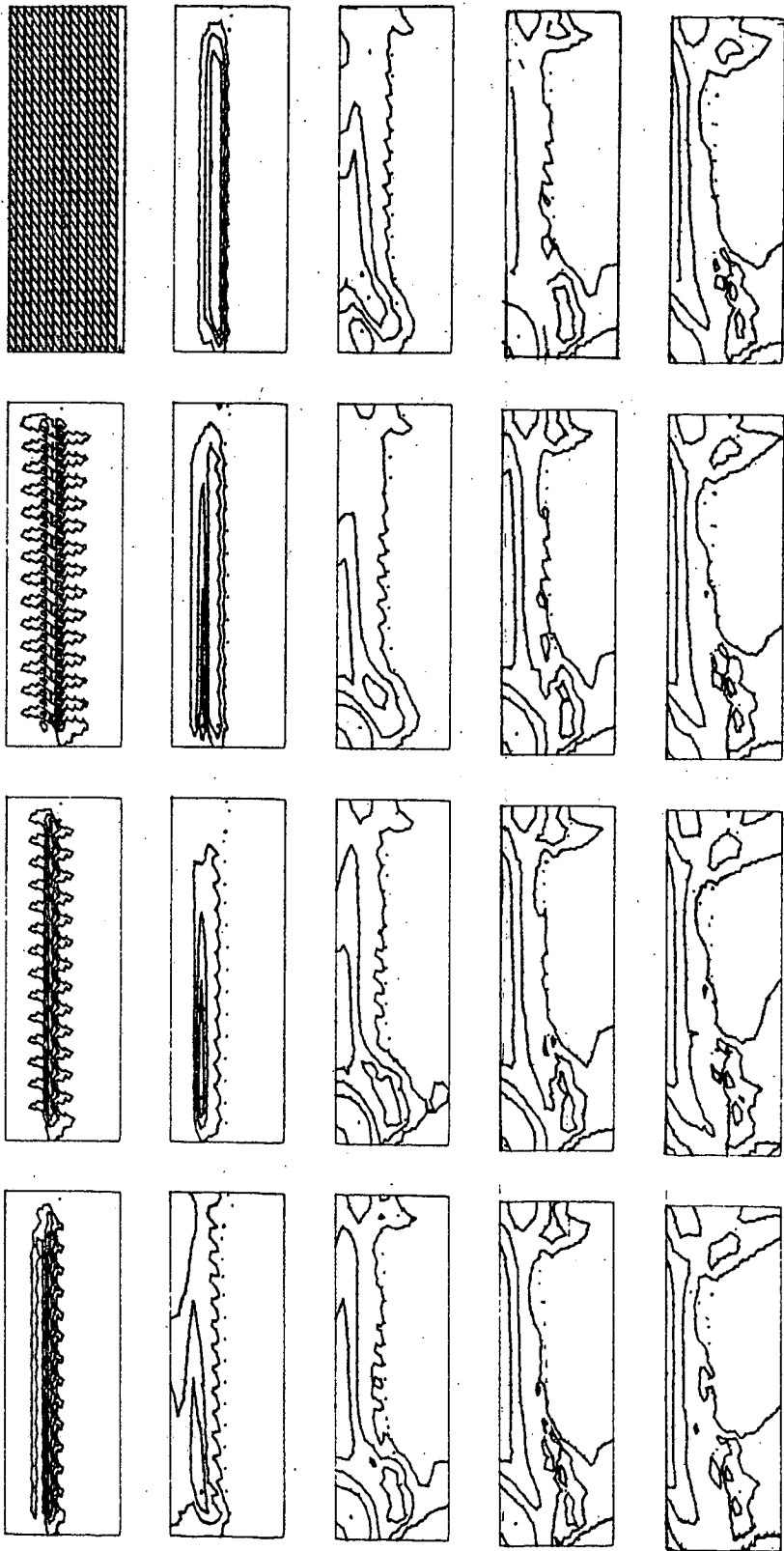


Fig. 3.11.



2.00  
0.10  
0.4000

Fig. 3.12.

### 3. Ecoulements tridimensionnels

Comme dans Deardorff [ 8 ] , Horiuti [ 9 ], Moin-Kim [10], on s'est intéressé à l'écoulement tridimensionnel entre deux plaques planes avec conditions périodiques amont-aval et latérales. Le domaine de calcul est donc une conduite à section rectangulaire.

$$(59) \quad \Omega = ]0,3.2[ \times ]0,0.8[ \times ]0,1[$$

Pour avoir une meilleure stabilité on a rajouté au modèle une viscosité turbulente

$$(60) \quad \nu_T = \mu (|\nabla u + \nabla u^t|) , \quad \mu = 0.01 (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{2/3}$$

Le problème résolu est donc

$$(61) \quad u_{,t} + u \nabla u + \nabla p - \mu \nabla \cdot [ (|\nabla u + \nabla u^t|) \nabla u ] + \nabla \cdot [ q \langle w' \otimes w' \rangle ] = 0$$

$$(62) \quad \nabla \cdot u = 0$$

$$(63) \quad q_{,t} + u \nabla q + q \operatorname{tr} \langle w' \otimes w' \rangle \nabla u = 0$$

$$(64) \quad \theta'_{,t} + u \nabla \theta' = -u , \quad \theta = \theta' + x \quad \text{dans} \quad \Omega \times ]0, T[$$

avec les conditions aux limites

$$(65) \quad u(x,0) = x_3(1-x_3) \text{ ou } u^{3000} ; \quad q(x,0) = q^0 x_3(1-x_3) ; \quad \theta'(x,0) = 0$$

$$(66) \quad u, q(x_1, x_2) \text{-périodique} ; \quad \theta'(x_1, x_2, 0, t) = 0$$

$$(67) \quad u_1 = u_2 = u_{3,22} = 0 \quad \text{en} \quad x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = 1.$$

La dernière condition correspond à une condition de raccord avec la couche limite (cf. Deardorff [ 8 ]).

Comme dans Deardorff [ 8 ] le système est discrétisé en différences finies sur une grille décallée en  $u_1, u_2, u_3$  (staggered grid). La discrétisation en temps est explicite sauf sur la pression ; en prenant la divergence de l'équation (61) on obtient une équation de Laplace sur  $p$  ; une

condition de Neumann sur les 2 plaques  $x_3 = 0, 1$  est obtenue en prenant le produit scalaire de (61) avec la normale aux plaques ; ce problème est résolu en Fourier en  $x_1, x_2$  et en résolvant chaque système linéaire monodimensionnel en  $x_3$  par SSOR.

Le pas de temps est calculé par la condition de stabilité de Courant-Freidrichs, ce qui donne  $\Delta t = 0.0025$ .

La maille différences finies est  $32 \times 16 \times 20$ .

Après 3000 itérations sans modèle de turbulence ( $\phi^0 = 0$ ) on a réinitialisé l'algorithme et on a passé deux cas de calcul :

1.  $q^0 = 0$  pas de modèle de turbulence sauf  $v_T$
2.  $q^0 = 0.02$  (niveau correspondant aux mesures de Laufer [24] )

Les figures 13 à 25 montrent les résultats obtenus.

On a utilisé le code de Horiuti [ 9 ] pour résoudre (61), (62) avec  $q = 0$  et on a rajouté les équations (63), (64).

#### Conclusion des calculs 3-d

Ces résultats spectaculaires sont malheureusement trop difficiles à interpréter pour tirer une conclusion quelconque. On voit bien que le modèle a un effet mais lequel ? Ce calcul pose donc le problème d'interprétation des résultats de calcul turbulent et l'urgence de calculer des corrélations doubles ou autres.

Écoulement 3-d entre 2 plaques planes avec condition  
périodique amont-aval et latérale

Les calculs sans le modèle de turbulence et les visualisations ont été faits par Horiuti [9]

Figure 3.13.

Visualisation de l'écoulement de l'itération de temps 3010 à 3080 avec  $q^0 = 0$  (sans le modèle de turbulence).

Une ligne de particules est marquée à l'entrée de la conduite à la section  $y = 0.40$ .

On représente une projection longitudinale (vue de derrière) et une projection latérale (vue de côté, le grand rectangle). Les dessins se lisent de bas en haut et de gauche à droite.

Figure 3.14.

Même chose que 3.13 mais avec le modèle de turbulence et  $q^0$  initialisé à 0.2 à l'itération 3000.

Figures 3.15 - 3.18.

Même chose que 3.14 mais sur les sections  $y = 0.01, 0.05; 0.1$  et  $0.5$ . Les particules sont remplacées par des lignes.

Figure 3.19

Quelques itérations de temps supplémentaires correspondants 3.15-3.18.

Figure 3.20.

Profil moyen d'énergie  $z \rightarrow q(z)$  à l'itération 3040.

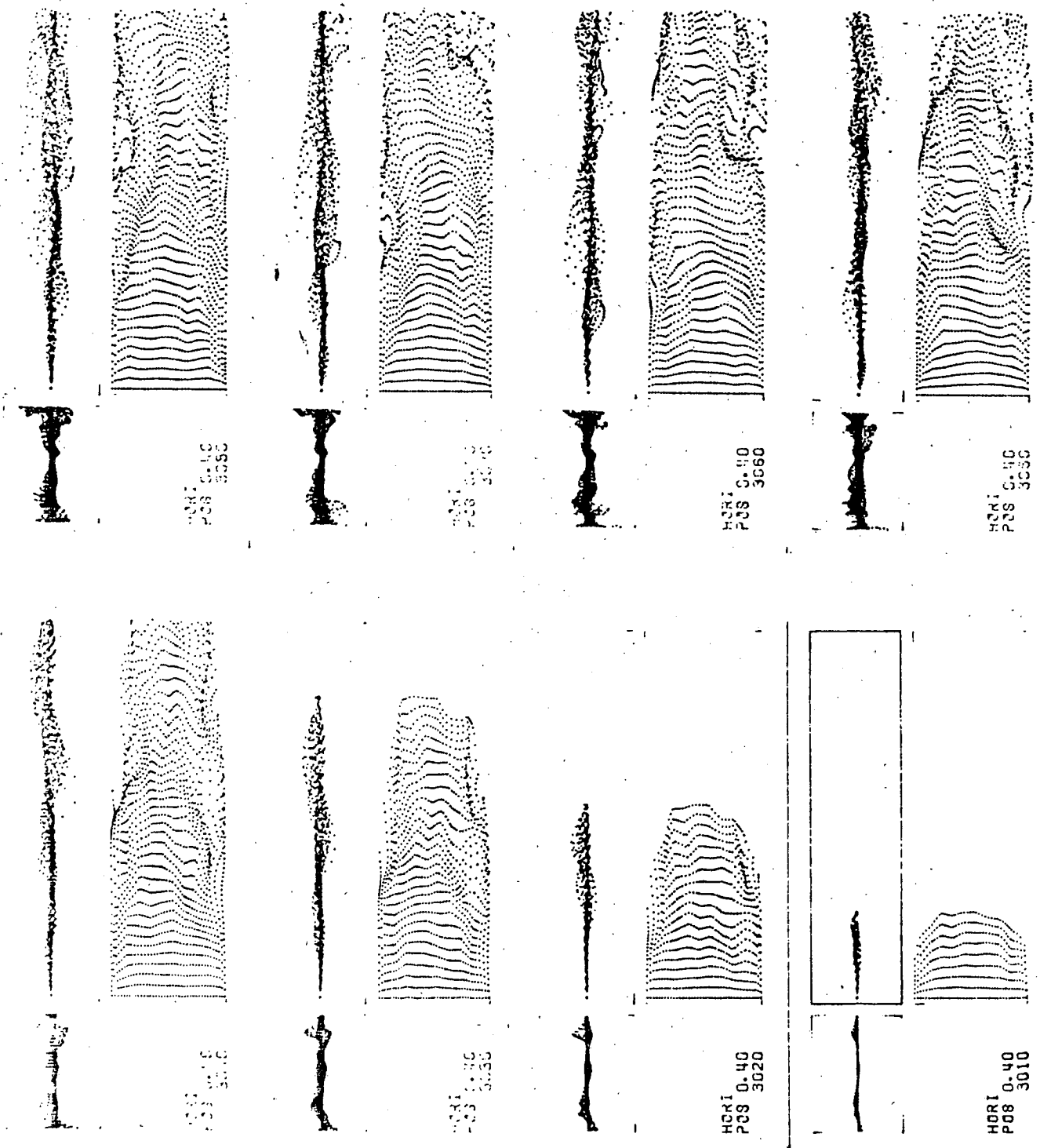


Fig. 3.13.



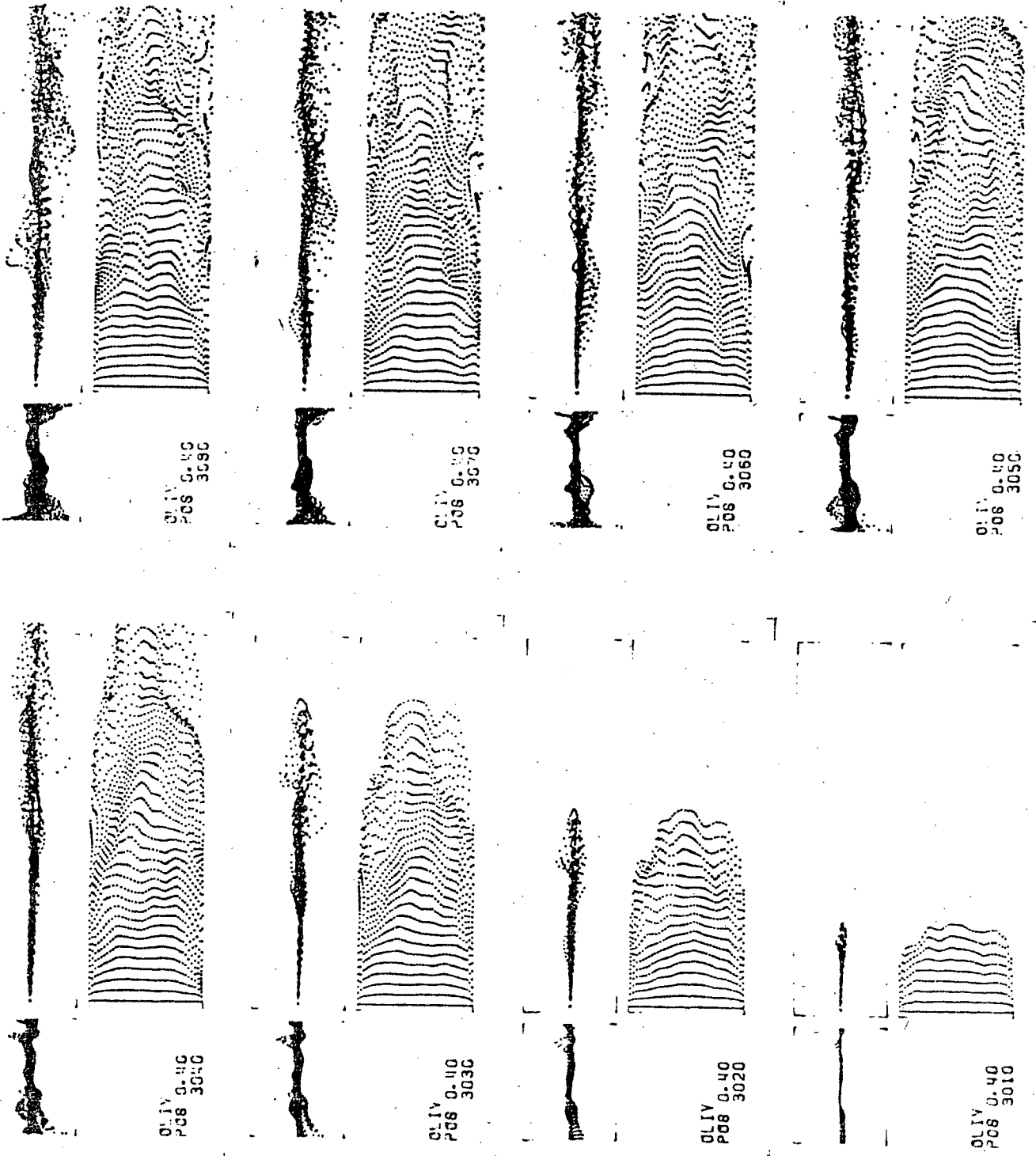


Fig. 3.14.

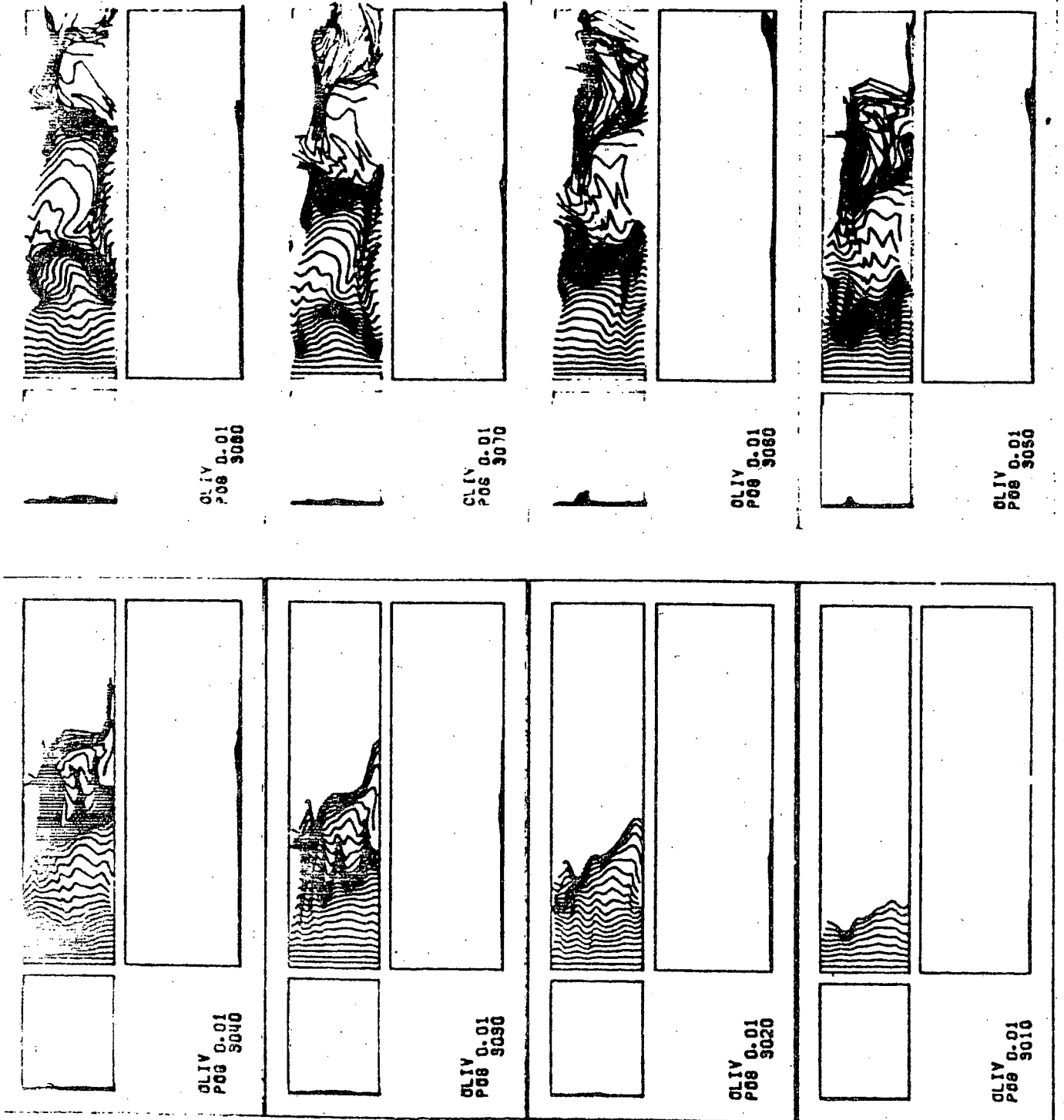


Fig. 3.15.

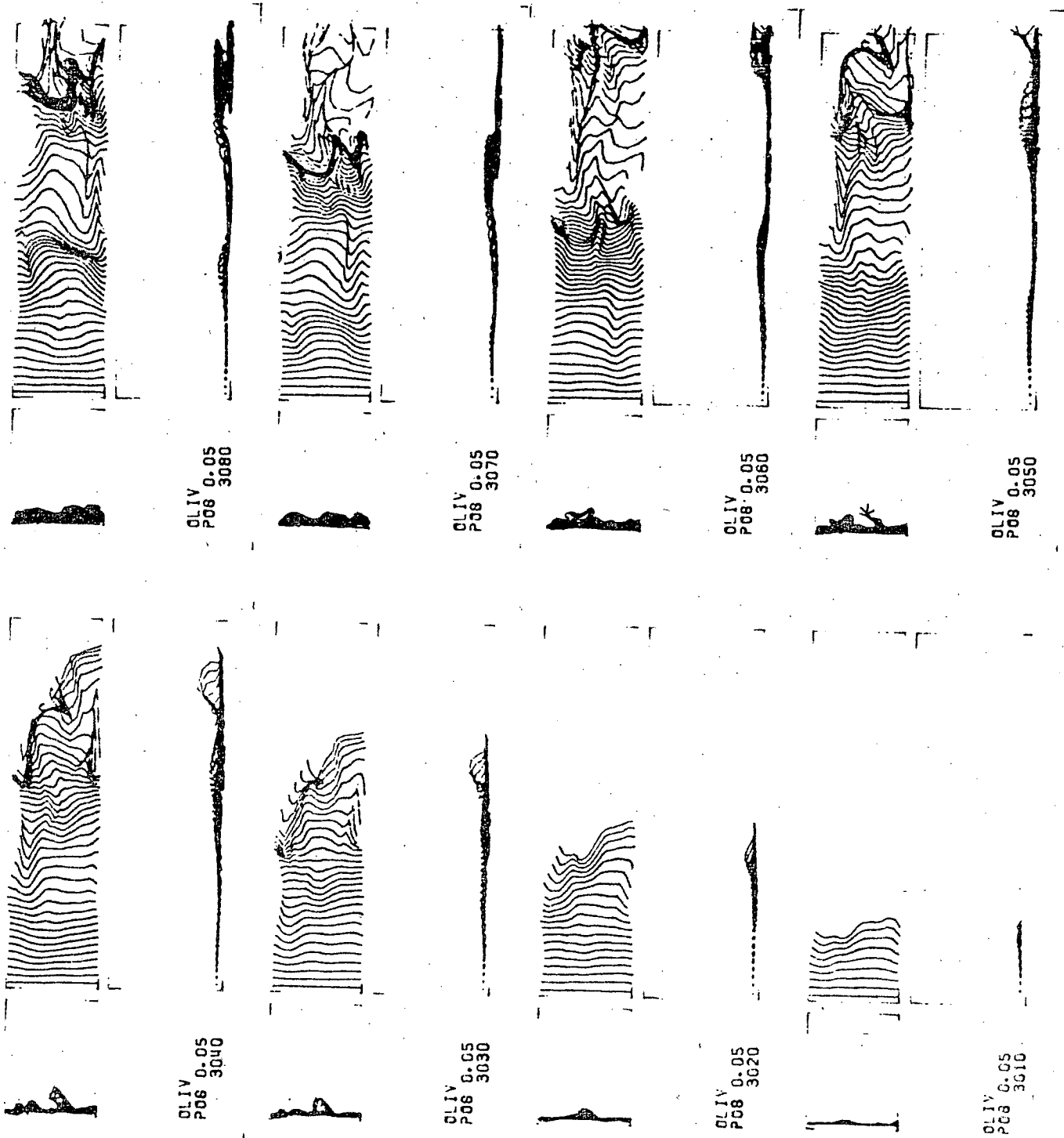


Fig. 3.16.

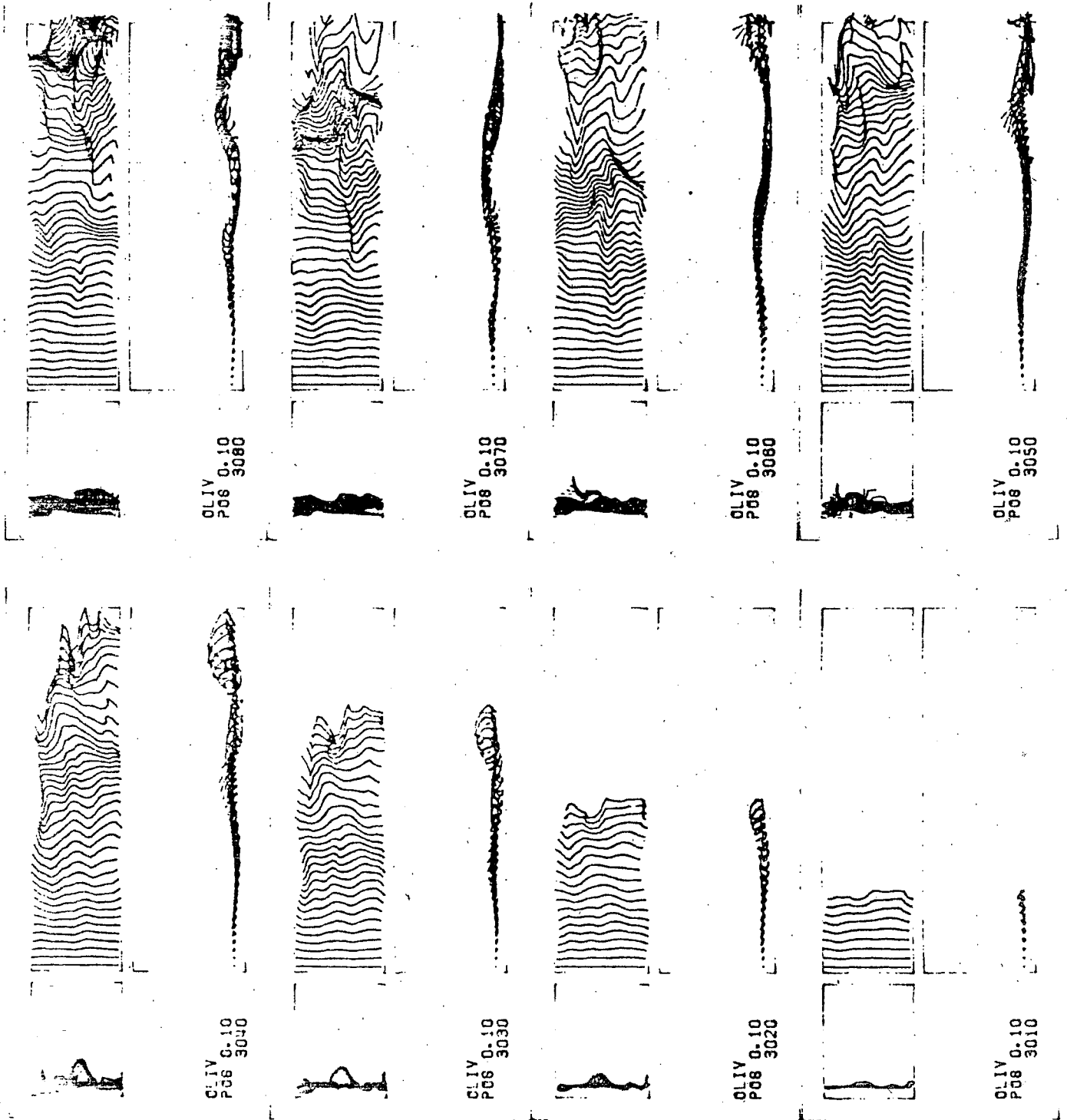


Fig. 3.17.

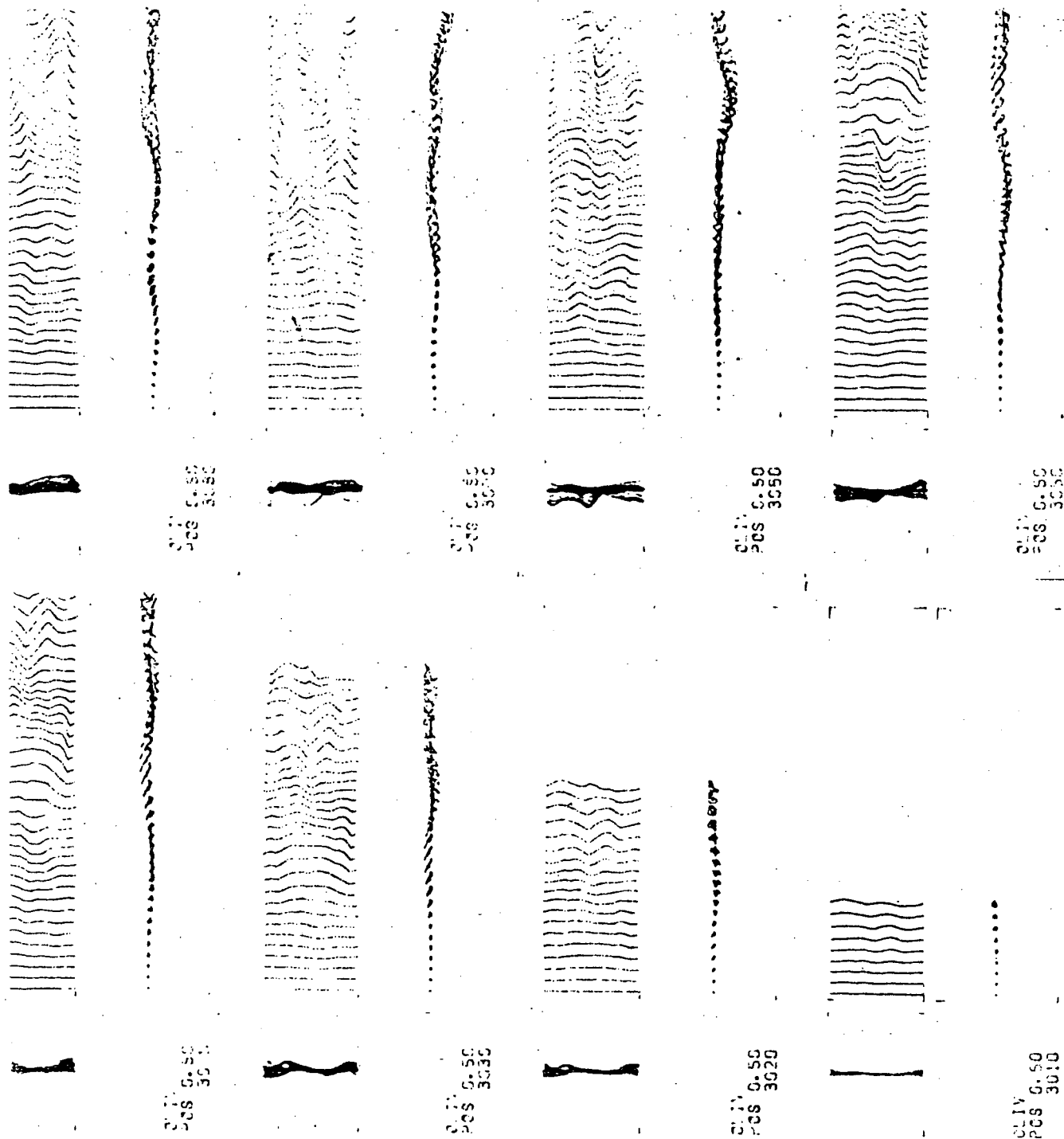


Fig. 3.18.

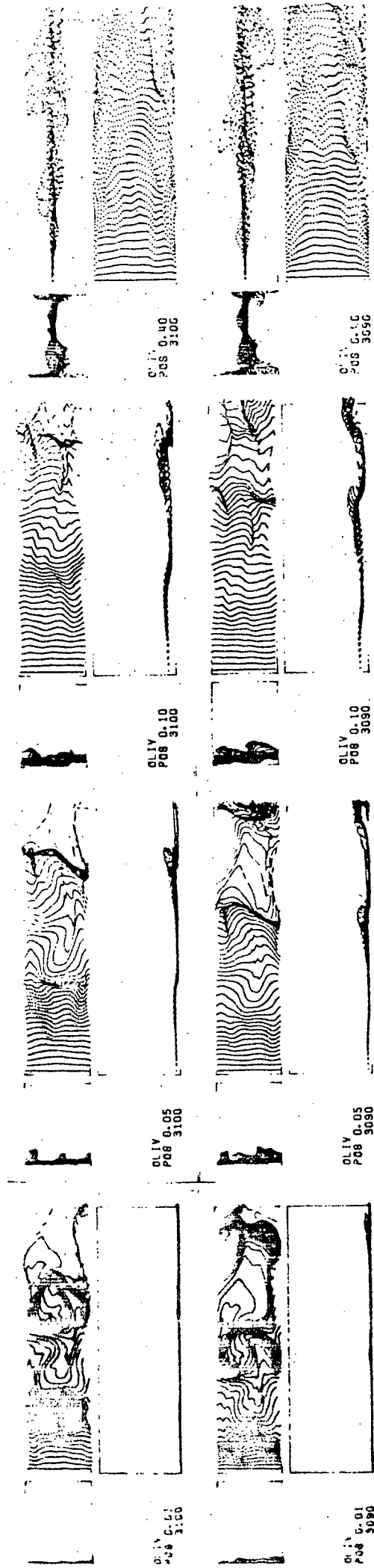


Fig. 3.19.

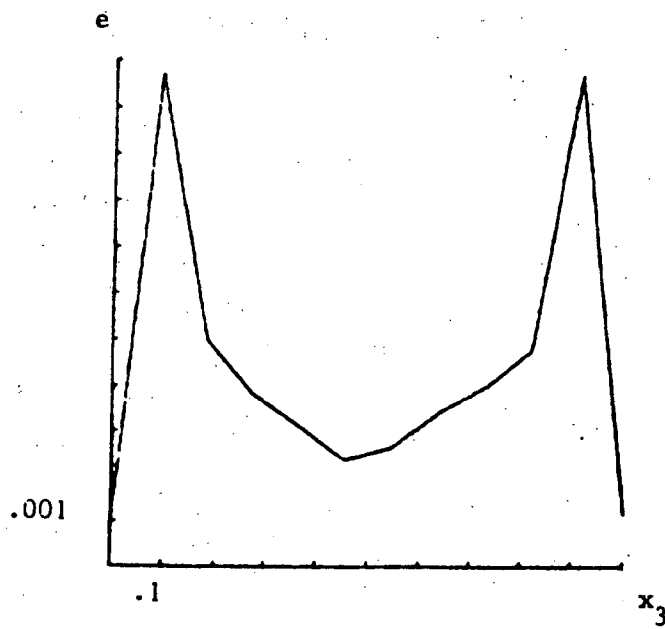


Fig. 3.20.

Chapitre 4 : Compatibilité avec les  
échelles de Kolmogorov

=====

1. Orientation

Le calcul asymptotique du chapitre 1 ne tient pas compte de l'analyse dimensionnelle de Kolmogorov.

On va montrer dans ce chapitre qu'on peut replacer le calcul asymptotique dans un cadre plus physique où  $\varepsilon$  représente l'échelle de longueur de Kolmogorov et  $q$  l'énergie de la turbulence du domaine inertiel.

On commence par rappeler l'analyse dimensionnelle ; ensuite, on redémontre les résultats du chapitre 1 dans l'hypothèse où les fluctuations en temps sont celles de l'hypothèse de Taylor ; en dernier lieu on analyse le cas général.

2. Rappels des échelles de Kolmogorov

On suit la présentation de Monin Yaglom [1] pour la turbulence localement homogène et isotrope.

Soit  $\{x_0, t_0\}$  un point de  $\Omega \times ]0, T[$  et  $\{x, t\}$  un autre point proche du précédent ; on pose

$$(1) \quad r = x - x_0 - u(x_0, t_0)(t - t_0)$$

$$(2) \quad s = t - t_0$$

$$(3) \quad u'(r, s) = u(x, t) - u(x_0, t_0)$$

On dit qu'une turbulence est localement homogène si pour tout  $u(x_0, t_0) = u_0$  fixé, les statistiques de  $u'$  sont indépendantes de  $u_0, x_0, t_0$  et isotrope si elles ne dépendent que du module de  $r$  (et non de sa direction).

On note par  $e$  le taux moyen d'énergie turbulente locale.

$$(4) \quad e = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$$



Remarque 1 :

Pour des raisons expérimentales, on a l'habitude d'écrire les lois de Kolmogorov avec  $e$  mais il semble qu'on soit aussi en droit de le faire avec le taux moyen d'énergie cinétique  $q_{,t}$ .

Hypothèse de similarité n° 1

Les statistiques de  $u'$  ne dépendent que de  $e$  et  $v$  et donc une analyse dimensionnelle implique que

$$(5) \quad w(\rho, \sigma) = v u'(\rho\eta, \sigma\tau)$$

est un processus stochastique universel (indépendant de l'écoulement). Dans (5) on a posé

$$(6) \quad \eta = (v^3/e)^{1/4}, \quad v = (ve)^{1/4}, \quad \tau = (v/e)^{1/2}$$

Hypothèse de similarité n° 2

Si

$$(7) \quad \eta \ll r \ll \text{échelle d'espace des grosses structures}$$

$$\tau \ll s \ll \text{échelle de temps des grosses structures}$$

alors les statistiques de  $u'$  ne dépendent pas non plus de  $v$  et donc

$$(8) \quad \begin{aligned} & |u'(x+r, t) - u'(x, t)|^2 = c(er)^{2/3} \\ & \bar{u}' = 0 \end{aligned}$$

où  $c$  est une constante numérique.

3. Nouvel Ansatz

Soit  $\epsilon$  l'échelle de longueur séparant les grosses structures (représentables dans l'espace de l'approximation numérique discrète du problème) des petites structures (reste du filtrage par  $G$  dans l'introduction).

D'après (5), (6) et (8) il est raisonnable de poser

$$(9) \quad u'(x, t) = (\epsilon e)^{1/3} w\left(\frac{r}{\epsilon}, \frac{t}{\tau}\right)$$

où  $e$  est donné par (4) et  $\tau$  par (6.c).

Si on élimine  $v$  entre (6.a) et (6.c) on trouve ( $\eta=e$ )

$$(10) \quad \tau = (\varepsilon^2/e)^{1/3}$$

D'autre part  $r$  donné par (1) est une approximation de la coordonnée lagrangienne  $r(x,t)$  solution de

$$(11) \quad r_{,t} + u \nabla r = 0, \quad r(x,0) = x.$$

D'après (10)  $\tau$  est aussi une fonction de  $x$  et  $t$ , ce qui conduit à poser à la place de (9)

$$(12) \quad u'(x,t) = \varepsilon^{1/3} w\left(\frac{r(x,t)}{\varepsilon}, \frac{s(x,t)}{\varepsilon^{2/3}}, x, t\right)$$

On se propose d'étudier le problème de Navier-Stokes avec des conditions initiales du type (12).

Soit  $u^\varepsilon(x,t)$  la solution de

$$(13) \quad \begin{aligned} u_{,t}^\varepsilon + u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon - \nu(\varepsilon) \Delta u^\varepsilon &= 0 \\ \nabla \cdot u^\varepsilon &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ u^\varepsilon(x,0) &= u^0(x) + \varepsilon^{1/3} w^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Pour qu'il y ait un spectre inertiel (i.e. un  $u'$  de la forme (12))(7) indique qu'il faut que

$$(14) \quad \varepsilon \gg (\nu^3/e)^{1/4}$$

Soit encore

$$(15) \quad \nu \ll \mu \varepsilon^{4/3}$$

On va chercher la solution de (13) sous la forme

$$(16) \quad u^\varepsilon(x,t) = u(x,t) + [\varepsilon^{1/3} w(y,\tau,x,t) + \varepsilon^{2/3} u^1(y,\tau,x,t) + \varepsilon u^2(y,\tau,x,t) + \dots]$$

at.  $y = \frac{r(x,t)}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{s(x,t)}{\varepsilon^{2/3}}$

$$(17) p^\epsilon(x,t) = p(x,t) + [\epsilon^{2/3} \pi(y,\tau,x,t) + \epsilon p^1(y,\tau,x,t) + \epsilon^{4/3} p^2(y,\tau,x,t) + \dots]$$

at  $y = \frac{x(x,t)}{\epsilon} \quad \tau = \frac{s(x,t)}{\epsilon^{2/3}}$

avec  $w, u^1, u^2, \dots, \pi, p^1, p^2 \dots$  périodiques en  $y$  et  $\tau$  sur  $]0,1[ \times ]0,1[ = Y \times ]0,1[$  et de moyenne nulle.

#### 4. Cascade d'équations

D'après (16) on a

$$(19) u_{i,t}^\epsilon = \epsilon^{-2/3} w_{i,K} r_{k,t} + \epsilon^{-1/3} (w_{i,\tau} s_{,t} + u_{i,K}^1 r_{k,t}) + u_{i,t} + u_{i,\tau}^1 s_{,t} + u_{i,K}^2 r_{k,t} \\ + \epsilon^{1/3} (u_{i,\tau}^2 s_{,t} + u_{i,K}^3 r_{k,t} + w_{i,t}) + \\ + \epsilon^{2/3} (u_{i,\tau}^3 s_{,t} + u_{i,K}^4 r_{k,t} + u_{i,t}^1) + \dots$$

On a posé

$$(20) F_{,\tau} = \partial F / \partial \tau$$

$$(21) u_{i,j}^\epsilon = \epsilon^{-2/3} w_{i,K} r_{k,j} + \epsilon^{-1/3} (w_{i,\tau} s_{,j} + u_{i,K}^1 r_{k,j}) + u_{i,j} + u_{i,\tau}^1 s_{,j} \\ + u_{i,K}^2 r_{k,j} + \epsilon^{1/3} (w_{i,j} + u_{i,\tau}^2 s_{,j} + u_{i,K}^3 r_{k,j}) + \epsilon^{2/3} (u_{i,j}^1 + u_{i,\tau}^3 s_{,j} + \\ + u_{i,K}^4 r_{k,j}) + \dots$$

$$(22) p_{,i}^\epsilon = \epsilon^{-1/3} \pi_{,K} r_{k,i} + p_{,i} + p_{,K}^1 r_{k,i} + \pi_{,\tau} s_{,i} + \\ + \epsilon^{1/3} [p_{,\tau}^1 s_{,i} + p_{,K}^2 r_{k,i}] + \epsilon^{2/3} [p_{,\tau}^2 s_{,i} + p_{,K}^3 r_{k,i} + \pi_{,i}] + \dots$$

Donc

$$(23) u_j^\epsilon u_{i,j}^\epsilon = (u_j + \epsilon^{1/3} w_j + \epsilon^{2/3} u_j^1 + \epsilon u_j^2 + \epsilon^{4/3} u_j^3 + \dots) [\epsilon^{-2/3} w_{i,K} r_{k,j} \\ + \epsilon^{-1/3} (w_{i,\tau} s_{,j} + u_{i,K}^1 r_{k,j}) + u_{i,j} + u_{i,\tau}^1 s_{,j} + u_{i,K}^2 r_{k,j} \\ + \epsilon^{1/3} (w_{i,j} + u_{i,\tau}^2 s_{,j} + u_{i,K}^3 r_{k,j}) + \epsilon^{2/3} (u_{i,j}^1 + u_{i,\tau}^3 s_{,j} + u_{i,K}^4 r_{k,j}) + \dots] \\ = \epsilon^{-2/3} u_j w_{i,K} r_{k,j} \\ + \epsilon^{1/3} [u_j (w_{i,\tau} s_{,j} + u_{i,K}^1 r_{k,j}) + w_j w_{i,K} r_{k,j}] \\ + \epsilon^0 [u_j (u_{i,j} + u_{i,\tau}^1 s_{,j} + u_{i,K}^2 r_{k,j}) + w_j (w_{i,\tau} s_{,j} + u_{i,K}^1 r_{k,j}) + u_j^1 w_{i,K} r_{k,j}]$$

$$\begin{aligned}
 & + \epsilon^{1/3} [u_j (w_{i,j} + u_{i,\tau}^2 s_{,j} + u_{i,K}^3 r_{k,j}) + w_j (u_{i,j} + u_{i,\tau}^1 s_{,j} + \\
 & \quad u_{i,K}^2 r_{k,j}) + u_j^1 (w_{i,\tau} s_{,j} + u_{i,K}^1 r_{k,j} + u_j^2 w_{i,K} r_{k,j})] \\
 & + \epsilon^{2/3} [u_j (u_{i,j}^2 + u_{i,\tau}^3 s_{,j} + u_{i,K}^4 r_{k,j}) + w_j (w_{i,j} + u_{i,\tau}^2 s_{,j} + u_{i,K}^3 r_{k,j}) \\
 & \quad + u_j^1 (u_{i,j} + u_{i,\tau}^1 s_{,j} + u_{i,K}^2 r_{k,j}) + u_j^2 (w_{i,\tau} s_{,j} + u_{i,K}^1 r_{k,j}) \\
 & \quad + u_j^3 w_{i,K} r_{k,j}] \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
 (24) \quad u_{i,jj}^\epsilon & = \epsilon^{-2/3} [w_{i,K} r_{k,jj} + r_{k,j} (w_{i,KL} r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + w_{i,K\tau} s_{,j} \epsilon^{-2/3} + w_{i,Kj})] \\
 & + \epsilon^{-1/3} [w_{i,\tau} s_{,jj} + s_{,j} (w_{i,\tau L} r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + w_{i,\tau\tau} s_{,j} \epsilon^{-2/3} + w_{i,\tau j}) \\
 & \quad + u_{i,K}^1 r_{k,jj} + r_{k,j} (u_{i,KL}^1 r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + u_{i,K\tau}^1 s_{,j} \epsilon^{-2/3} + u_{i,Kj}^1)] \\
 & + u_{i,jj} + u_{i,\tau}^2 s_{,jj} + s_{,j} (u_{i,\tau L}^1 r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + u_{i,\tau\tau}^1 s_{,j} \epsilon^{-2/3} + u_{i,\tau j}^1) \\
 & + u_{i,K}^2 r_{k,jj} + r_{k,j} (u_{i,KL}^2 r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + u_{i,K\tau}^2 s_{,j} \epsilon^{-2/3} + u_{i,Kj}^1) \\
 & + \epsilon^{1/3} [w_{i,jj} + u_{i,\tau}^2 s_{,jj} + s_{,j} (u_{i,\tau L}^2 r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + u_{i,\tau\tau}^2 s_{,j} \epsilon^{-2/3} + u_{i,\tau j}^2) \\
 & \quad + u_{i,K}^3 r_{k,jj} + r_{k,j} (u_{i,KL}^3 r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + u_{i,K\tau}^3 s_{,j} \epsilon^{-2/3} + u_{i,Kj}^3)] \\
 & + \epsilon^{2/3} [u_{i,jj}^1 + u_{i,\tau}^3 s_{,jj} + s_{,j} (u_{i,\tau L}^3 r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + u_{i,\tau\tau}^3 s_{,j} \epsilon^{-2/3} + u_{i,\tau j}^3) \\
 & \quad + u_{i,K}^4 r_{k,jj} + r_{k,j} (u_{i,KL}^4 r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + u_{i,K\tau}^4 s_{,j} \epsilon^{-2/3} + u_{i,Kj}^4)] \\
 & + \dots \\
 & = \epsilon^{-5/3} [w_{i,KL} r_{\ell,j} r_{k,j}] + \epsilon^{-4/3} [2w_{i,K\tau} s_{,j} r_{k,j} + u_{i,KL}^1 r_{k,j} r_{\ell,j}] \\
 & + \epsilon^{-1} [w_{i,\tau\tau} s_{,j}^2 + 2u_{i,K\tau}^1 s_{,j} r_{k,j} + u_{i,KL}^2 r_{\ell,j} r_{k,j}] \\
 & + \epsilon^{-2/3} [w_{i,K} r_{k,jj} + w_{i,Kj} r_{k,j} + u_{i,\tau\tau}^1 s_{,j}^2 + 2u_{i,K\tau}^2 s_{,j} r_{k,j} + \\
 & \quad + u_{i,KL}^3 r_{\ell,j} r_{k,j}] \\
 & + \epsilon^{-1/3} [w_{i,\tau} s_{,jj} + w_{i,\tau j} s_{,j} + u_{i,K}^1 r_{k,jj} + u_{i,Kj}^1 r_{k,j} + u_{i,\tau\tau}^2 s_{,j}^2 + \\
 & \quad + 2u_{i,K\tau}^3 s_{,j} r_{k,j} + u_{i,KL}^4 r_{\ell,j} r_{k,j}] \\
 & + \epsilon^0 [u_{i,jj} + u_{i,\tau}^1 s_{,jj} + u_{i,\tau j} s_{,j} + u_{i,K}^2 r_{k,jj} + u_{i,Kj}^2 r_{k,j} + \\
 & \quad + u_{i,\tau\tau}^3 s_{,j}^2 + 2u_{i,K\tau}^4 s_{,j} r_{k,j} + u_{i,KL}^5 r_{\ell,j} r_{k,j}] \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

5. Première analyse :  $v \ll \mu \varepsilon^{7/3}$ , s indépendant de x et t ; la méthode du déport.

Commençons par supposer pour simplifier  $v \ll \mu \varepsilon^{7/3}$  et

(25)  $s(x,t)$  indépendant de x et t ,

c'est-à-dire que l'effet de viscosité est négligeable et les fluctuations en temps ne sont dûes qu'à  $r(x,t)$  (hypothèse de Taylor).

Montrons que dans ce cas on retrouve les résultats du chapitre 1 avec w changé en  $\varepsilon^{1/3} w$ .

En reportant (21) dans (13.b) on obtient

(26)  $\varepsilon^{-2/3} \tilde{w}_{k,K} + \varepsilon^{-1/3} \tilde{u}_{k,K}^1 + u_{i,i} + \tilde{u}_{k,K}^2 + \varepsilon^{1/3} (w_{i,i} + \tilde{u}_{k,K}^3) + \varepsilon^{2/3} (\dots)$

où l'on a posé

(27)  $\tilde{w} = (\nabla r)^t w = \{r_{k,i} w_i\} ; \tilde{u}^1 = (\nabla r)^t u^1 ; \dots$

En notation vectorielle (26) se récrit :

(28)  $\varepsilon^{-2/3} \nabla_y \cdot \tilde{w} + \varepsilon^{-1/3} \nabla_y \cdot \tilde{u}^1 + \nabla \cdot u + \nabla_y \cdot \tilde{u}^2 + \varepsilon^{1/3} (\nabla \cdot w + \nabla_y \cdot \tilde{w}^3) + \varepsilon^{2/3} (\nabla \cdot u^1 + \nabla_y \cdot u^4) + \dots$

En reportant (19)-(23) dans (13.a) on obtient

(29)  $\varepsilon^{-2/3} [w_{i,K}(r_{k,t} + u_j r_{k,j})]$   
 $+ \varepsilon^{-1/3} [u_{i,K}^1(r_{k,t} + u_j r_{k,j}) + w_j w_{i,K} r_{k,j} + \pi_{,K} r_{k,i}]$   
 $+ \varepsilon^0 [u_{i,t} + u_{i,K}^2(r_{k,t} + u_j r_{k,j}) + u_j u_{i,j} + r_{k,j} (w_j u_{i,K}^1 + u_j^1 w_{i,K}) + p_{,i} + p_{,K}^1 r_{k,i}]$   
 $+ \varepsilon^{1/3} [w_{i,t} + u_{i,K}^3(r_{k,t} + u_j r_{k,j}) + u_j w_{i,j} + w_j u_{i,j} + r_{k,j} (w_j u_{i,K}^2 + u_j^2 w_{i,K}) + u_j^1 u_{i,K}^1 r_{k,j} + p_{,K}^2 r_{k,i}]$   
 $+ \varepsilon^{2/3} [u_{i,t}^1 + u_{i,K}^4(r_{k,t} + u_j r_{k,j}) + u_j u_{i,j}^1 + u_j^1 u_{i,j} + r_{k,j} (w_j u_{i,K}^3 + u_j^3 w_{i,K}) + w_j w_{i,j} + r_{k,j} (u_j^1 u_{i,K}^2 + u_j^2 u_{i,K}^1) + p_{,K}^3 r_{k,i} + \pi_{,i}]$   
 $+ \dots = 0.$

L'annulation des termes en  $\epsilon^{-2/3}$  donne l'équivalent de l'équation en  $\theta$  du chapitre 1 :

$$(30) \quad r_{,t} + u \nabla r = 0,$$

ce qui permet de récrire (29) comme suit :

$$(31) \quad \begin{aligned} & \epsilon^{-1/3} \nabla r^{-t} (\tilde{w} \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y \pi) + u_{,t} + u \nabla u + \nabla p + \nabla r^{-t} (\tilde{w} \nabla_y \tilde{u}^1 + \tilde{u}^1 \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y p^1) \\ & + \epsilon^{1/3} [u_{,t} + u \nabla w + w \nabla u + \nabla r^{-t} (\tilde{w} \nabla_y \tilde{u}^2 + \tilde{u}^2 \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y p^2) + \tilde{u}^1 \nabla_y \tilde{u}^1] \\ & + \epsilon^{2/3} [u_{,t} + u \nabla u^1 + u^1 \nabla u + \nabla r^{-t} (\tilde{u}^1 \nabla_y \tilde{u}^2 + \tilde{u}^2 \nabla_y \tilde{u}^1) + \\ & \quad + \nabla r^{-t} (\tilde{w} \nabla_y \tilde{u}^3 + \tilde{u}^3 \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y p^3) + w \nabla w + \nabla \pi ] \end{aligned}$$

L'annulation des termes en  $\epsilon^{-1/3}$  dans (31) et en  $\epsilon^{-2/3}$  dans (28) donne :

$$(32) \quad \tilde{w} \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y \pi = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0,$$

avec

$$(33) \quad C = \nabla r^t \nabla r$$

Enfin les termes en  $\epsilon^0$  dans (31) et  $\epsilon^{1/3}$  dans (28) donnent un système qui permet de définir  $\tilde{u}^1$  :

$$(34) \quad \tilde{w} \nabla_y \tilde{u}^1 + \tilde{u}^1 \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y p^1 = \nabla r^t (u_{,t} + u \nabla u + \nabla p)$$

$$(35) \quad \nabla_y \cdot \tilde{u}^1 = 0$$

En prenant la moyenne en  $y$  de (34) on trouve, compte tenu de la périodicité de  $\tilde{u}^1$  et  $\tilde{w}$ , le résultat décevant suivant :

$$(36) \quad u_{,t} + u \nabla u + \nabla p = 0.$$

Pour améliorer ce résultat il faut calculer un "correcteur" (BENSOUSSAN-LIONS-PAPANICOLAOU [25]), c'est-à-dire remplacer dans (36) 0 par  $O(\epsilon)$ . Pour cela on utilise la technique du déport.

Technique du déport

Compte tenu de (32), on peut écrire (31), (28) sous la forme :

$$(37) \quad L(\tilde{u}^1) + f^1 + \varepsilon^{1/3} [L(\tilde{u}^2) + f^2] + \varepsilon^{2/3} [L(\tilde{u}^3) + f^3] + \dots = 0$$

$$\nabla_y \cdot \tilde{u}^1 + g^1 + \varepsilon^{1/3} [\nabla_y \cdot \tilde{u}^2 + g^2] + \varepsilon^{2/3} [\nabla_y \cdot \tilde{u}^3 + g^3] + \dots = 0$$

avec

$$(38) \quad L(\tilde{u}) = \tilde{w} \nabla_y \tilde{u} + \tilde{u} \nabla_y \tilde{w} + c \nabla_y \tilde{p}$$

$$(39) \quad f^1 = \nabla r^t [u_{,t} + u \nabla u + \nabla p]$$

$$(40) \quad f^2 = \nabla r^t [w_{,t} + u \nabla w + w \nabla u + \tilde{u}^1 \nabla_y u^1]$$

$$(41) \quad f^3 = \nabla r^t [u_{,t}^1 + u \nabla u^1 + u^1 \nabla u + \tilde{u}^1 \nabla_y u^2 + \tilde{u}^2 \nabla_y u^1 + w \nabla w + \nabla \pi]$$

$$(42) \quad g^1 = 0$$

$$(43) \quad g^2 = \nabla \cdot u$$

$$(44) \quad g^3 = \nabla \cdot w$$

On a démontré au chapitre 1 que le système

$$(45) \quad L(\tilde{u}) = f, \quad \nabla_y \cdot \tilde{u} = g \quad \tilde{u} \text{ périodique}$$

ne pouvait avoir de solution que si (conditions de compatibilité)

$$(46) \quad \langle f + \tilde{w}g \rangle = 0$$

$$(47) \quad \langle g \rangle = 0$$

$$(48) \quad \langle (c^{-1} \tilde{w})f + (\pi + \frac{1}{2} \tilde{w} c^{-1} \tilde{w})g \rangle = 0$$

On va réécrire (37) sous la forme

$$(49) \quad L(\tilde{u}^1) + f^1 + \alpha^1 + \beta^1 \tilde{w} + \varepsilon^{1/3} [L(\tilde{u}^2) + f^2 + \alpha^2 + \beta^2 \tilde{w} - \varepsilon^{-1/3} (\alpha^1 + \beta^1 \tilde{w})]$$

$$+ \varepsilon^{2/3} [L(\tilde{u}^3) + f^3 + \alpha^3 + \beta^3 \tilde{w} - \varepsilon^{-1/3} (\alpha^2 + \beta^2 \tilde{w})] + \dots$$

où  $\alpha^1$  et  $\beta^1$  sont ajustés de manière à satisfaire (46), (48) quelque soit  $f^1$  ; on obtient :

$$(50) \quad \langle f^1 + \alpha^1 + \beta^1 \tilde{w} + \tilde{w} g^1 \rangle = 0$$

$$(51) \quad \langle c^{-1} \tilde{w} (f^1 + \alpha^1 + \beta^1 \tilde{w}) + (\pi + \frac{1}{2} \tilde{w} c^{-1} \tilde{w}) g^1 \rangle = 0$$

soit, compte tenu de  $\langle \tilde{w} \rangle = 0$  :

$$(52) \quad \alpha^1 = - \langle f^1 + \tilde{w} g^1 \rangle$$

$$(53) \quad \beta^1 = - \langle c^{-1} \tilde{w} f^1 + (\pi + \frac{1}{2} \tilde{w} c^{-1} \tilde{w}) g^1 \rangle / \langle \tilde{w} c^{-1} \tilde{w} \rangle$$

De même

$$(54) \quad \alpha^2 = - \langle f^2 - \epsilon^{-1/3} \alpha^1 + \tilde{w} g^2 \rangle$$

$$(55) \quad \beta^2 = - \langle c^{-1} \tilde{w} (f^2 - \epsilon^{-1/3} (\alpha^1 + \beta^1 \tilde{w})) + (\pi + \frac{1}{2} \tilde{w} c^{-1} \tilde{w}) g^2 \rangle / \langle \tilde{w} c^{-1} \tilde{w} \rangle$$

Arrêtons nous à deux dépôts (i.e.  $\alpha^3 = \beta^3 = 0$ ), et écrivons les conditions de compatibilité sur  $\tilde{u}^3$  :

$$(56) \quad \langle f^3 - \epsilon^{-1/3} \alpha^2 + g^3 \tilde{w} \rangle = 0$$

$$(57) \quad \langle c^{-1} \tilde{w} (f^3 - \epsilon^{-1/3} (\alpha^2 + \beta^2 \tilde{w})) + (\pi + \frac{1}{2} \tilde{w} c^{-1} \tilde{w}) g^3 \rangle = 0$$

Enfin, d'après (47) on a :

$$(58) \quad \langle g^1 \rangle = \langle g^2 \rangle = \langle g^3 \rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$(59) \quad \nabla \cdot u = 0$$

Interprétons (56) (on rappelle que (45) implique  $\nabla_y \cdot w = \nabla_y \cdot \tilde{u}^1 = \nabla_y \cdot \tilde{u}^2 = 0$ ) : d'après (39), (42), (52), et (53) :

$$(60) \quad \alpha^1 = - \nabla_r^t (u_{,t} + u \nabla u + \nabla p)$$

$$(61) \quad \beta^1 = 0 ;$$

d'après (40), (43), (54), (55) :

$$(62) \quad \alpha^2 = \epsilon^{-1/3} \alpha^1 = - \epsilon^{-1/3} \nabla_r^t (u_{,t} + u \nabla u + \nabla p)$$

$$(63) \quad \beta^2 = - \langle c^{-1} \tilde{w} \nabla_r^t (w_{,t} + u \nabla w + w \nabla u + \tilde{u}^1 \nabla_y u^1) \rangle / \langle \tilde{w} c^{-1} \tilde{w} \rangle ;$$



donc (56) devient

$$(64) \quad \varepsilon^{-2/3} \nabla r^t (u_{,t} + u \nabla u + \nabla p) + \langle w \nabla \tilde{w} \rangle + \langle \nabla \cdot w \tilde{w} \rangle = 0$$

c'est-à-dire l'équation attendue :

$$(65) \quad u_{,t} + u \nabla u + \nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot \langle w \otimes w \rangle = 0$$

Il reste à interpréter (57) :

$$(66) \quad \langle c^{-1} \tilde{w} \nabla r^t [u_{,t}^1 + u \nabla u^1 + u^1 \nabla u + \tilde{u}^1 \nabla_y u^2 + \tilde{u}^2 \nabla_y u^1 + w \nabla w + \nabla \pi] \\ + \varepsilon^{-1/3} \langle c^{-1} \tilde{w} \nabla r^t (w_{,t} + u \nabla w + w \nabla u + \tilde{u}^1 \nabla_y u^1) \rangle + \langle (\pi + \frac{1}{2} \tilde{w} c^{-1} \tilde{w}) \nabla \cdot w \rangle = 0$$

c'est-à-dire :

$$(67) \quad \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle_{,t} + u \nabla \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle + \text{tr}(\langle w \otimes w \rangle \nabla u) + \langle w (\tilde{u}^1 \nabla_y u^1) \rangle \\ + \varepsilon^{1/3} \langle w (u_{,t}^1 + u \nabla u^1 + u^1 \nabla u + \nabla_y \cdot (\tilde{u}^1 \otimes u^2 + \tilde{u}^2 \otimes u^1)) \rangle + \nabla \cdot [(\pi + \frac{1}{2} |w|^2) w] = 0$$

Mais compte tenu de (60)-(61) on voit que l'équation pour  $\tilde{u}^1$  donnée par (49) :

$$(68) \quad L(\tilde{u}^1) = -f^1 - \alpha^1 - \beta^1 \tilde{w} = 0 ; \quad \nabla \cdot \tilde{u}^1 = 0$$

et donc

$$(69) \quad \tilde{u}^1 = 0 ; \quad u^1 = 0 .$$

En posant

$$(70) \quad q = \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle , \quad w' = w/\sqrt{q} , \quad \pi' = \pi/q$$

(66) devient

$$(71) \quad q_{,t} + u \nabla q + \text{tr}(q \langle w' \otimes w' \rangle \nabla u) + \varepsilon^{1/3} q^{3/2} \nabla \cdot (\pi' + \frac{1}{2} |w'|^2) w' = 0$$

Remarque 2 :

On a retrouvé les résultats du chapitre 1 car dans la pratique le  $\varepsilon$  est absorbé dans le niveau de turbulence initiale  $q(x,t)$ .

Remarque 3 :

D'après (49), (60)-(63),  $\tilde{u}^2$  est défini par

$$(72) \quad \tilde{u}^2 \nabla_y \tilde{w} + \tilde{w} \nabla_y \tilde{u}^2 + c \nabla_y p^2 = -[\tilde{w}_{,t} + u \nabla \tilde{w} + w \nabla \tilde{u}] + \frac{1}{2} [\langle \frac{1}{2} |w|^2 \rangle_{,t} + u \nabla \langle \frac{1}{2} |w|^2 \rangle + \text{tr}(\langle w \otimes w \nabla u \rangle)] \tilde{w}$$

$$(73) \quad \nabla_y \cdot \tilde{u}^2 = 0$$

$$(74) \quad \langle \tilde{u}^2 \rangle = 0, \quad \tilde{u}^2 \text{ y-périodique.}$$

D'autre part, si on cherchait le correcteur d'ordre supérieur dans (65) en continuant la technique du déport on trouverait :

$$(75) \quad u_{,t} + u \nabla u + \nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot \langle w \otimes w \rangle + \varepsilon^{4/3} \nabla \cdot \langle w \otimes u^2 + u^2 \otimes w \rangle = 0$$

6. Deuxième analyse  $v \ll \mu \varepsilon^{7/3}$ ,  $s$  dépendant de  $(x,t)$ .

Dans ce paragraphe on ne suppose plus  $s(x,t)$  constant.

Posons

$$(76) \quad a(x,t) = s_{,t} + u \nabla s$$

$$(77) \quad b_i(x,t) = r_{i,t} + u \nabla r_i$$

$$(78) \quad K(x,t) = \nabla_x r$$

$$(79) \quad A(u) = a u_{,t} + \tilde{u} \nabla_y w + \tilde{w} \nabla_y u + K \nabla_y p$$

L'équation (13.b) devient

$$(80) \quad 0 = \nabla \cdot u^\varepsilon = \varepsilon^{-2/3} \nabla_y \cdot \tilde{w} + \varepsilon^{-1/3} (\nabla_y \cdot \tilde{u}^1 + w_{,t} \nabla s) + \varepsilon^0 (\nabla \cdot u + \nabla_y \cdot \tilde{u}^2 + u_{,t}^1 \nabla s) + \varepsilon^{1/3} (\nabla \cdot w + \nabla_y \cdot \tilde{u}^3 + u_{,t}^2 \nabla s) + \dots$$

L'équation (13.a) devient

$$(81) \quad 0 = u_{,t}^\varepsilon + u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = \varepsilon^{-2/3} b \nabla_y w + \varepsilon^{-1/3} (A(w) + b \nabla_y u^1) + \varepsilon^0 [A(u^1) + b \nabla_y u^2 + u_{,t} + u \nabla u + \nabla p + w \cdot \nabla s w_{,t} + \pi_{,t} \nabla s] + \varepsilon^{1/3} [A(u^2) + b \nabla_y u^3 + w_{,t} + u \nabla w + w \nabla u + \nabla_y \cdot \tilde{u}^1 \otimes u^1 + w \cdot \nabla s u_{,t}^1 + u^1 \cdot \nabla s w_{,t} + \nabla s p_{,t}^1] + \varepsilon^{2/3} [A(u^3) + b \nabla_y u^4 + u_{,t}^1 + u \nabla u^1 + u^1 \nabla u + \nabla_y \cdot (\tilde{u}^1 \otimes u^2 + \tilde{u}^2 \otimes u^1) + \nabla \cdot w \otimes w + \nabla \pi + w \cdot \nabla s u_{,t}^2 + u^2 \cdot \nabla s w_{,t} + u^1 \cdot \nabla s u_{,t}^1 + p_{,t}^2 \nabla s] + \dots$$

On va donc trouver des équations du type

$$(82) \quad a \tilde{u}_{,\tau} + \tilde{u} \nabla_y \tilde{w} + \tilde{w} \nabla_y \tilde{u} + C \nabla_y p = f, \quad \nabla_y \cdot \tilde{u} = g$$

$$(83) \quad \overline{\langle \tilde{u} \rangle} = 0, \quad \tilde{u}(y, \tau) \text{-périodique.}$$

Ici  $\langle \rangle$  désigne la moyenne en  $y$  et  $\overline{\quad}$  désigne la moyenne en  $\tau$ .

### Conditions de compatibilité

D'après (80),  $\tilde{w}$  est à divergence nulle, donc (82) implique

$$(84) \quad a \langle \tilde{u} \rangle_{,\tau} = \langle f + g \tilde{w} \rangle$$

$$(85) \quad \langle g \rangle = 0$$

Mais les équations de divergence venant de (80) donnent

$$(86) \quad \langle w_{,\tau} \rangle \nabla s = 0; \quad \langle u^1_{,\tau} \rangle \nabla s = 0; \quad \langle u^2_{,\tau} \rangle \nabla s = -\nabla \cdot \langle w \rangle; \quad \langle u^3_{,\tau} \rangle \nabla s = -\nabla \cdot \langle u^1 \rangle \dots$$

ce qui implique

$$(87) \quad \langle \tilde{w} \rangle = 0; \quad \langle \tilde{u}^i \rangle \cdot \nabla s = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

Donc (84) devient

$$(88) \quad \overline{\langle f + g \tilde{w} \rangle} = 0; \quad \overline{\langle f + g \tilde{w} \rangle} \cdot \nabla s = 0$$

Par ailleurs, en multipliant (82) par  $c^{-1} \tilde{w}$  on retrouve sans difficultés comme aux paragraphes précédents :

$$(89) \quad \overline{\langle f c^{-1} \tilde{w} \rangle} + \overline{\langle (\pi + \frac{1}{2} \tilde{w} c^{-1} \tilde{w}) g \rangle} = 0$$

### Cascade d'équations

L'annulation des termes en  $\epsilon^{-2/3}$  donne

$$(90) \quad b = r_{,\tau} + u \nabla r = 0.$$

De même avec les termes suivants :

$$(91) \quad a \tilde{w}_{,\tau} + \tilde{w} \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y \pi = 0 \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0$$

$$\langle \tilde{w} \rangle = 0 \quad \tilde{w}(y, \tau) \text{-périodique}$$

Remarque 4

De (91) on tire

$$(92) \quad \langle \tilde{w} C^{-1} \tilde{w} \rangle_{,\tau} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle = q(x,t)$$

c'est-à-dire que l'hypothèse de Taylor est vérifiée par  $|w|^2$  même si  $s$  est non constant.

Remarque 5

En posant

$$(93) \quad w' = w/\sqrt{q} \quad a' = a/\sqrt{q}$$

on obtient

$$(94) \quad \begin{aligned} a' \tilde{w}'_{,\tau} + \tilde{w}' \nabla_y \tilde{w}' + C \nabla_y \pi &= 0 & \nabla_y \cdot \tilde{w}' &= 0 \\ \langle \tilde{w}' \rangle &= 0 & \frac{1}{2} \langle \tilde{w}' C^{-1} \tilde{w}' \rangle &= 1 & \tilde{w}'(y,\tau) &\text{-périodique} \end{aligned}$$

Equations sur  $u^1$

L'annulation des termes d'ordre 0 dans (81) et en  $\varepsilon^{-1/3}$  dans (80) donne :

$$(95) \quad \begin{aligned} a u^1_{,\tau} + w \nabla_y u^1 + u^1 \nabla_y w + C \nabla_p^2 &= -(\nabla r)^t [u_{,\tau} + u \nabla u + \nabla p + w \nabla s_{,\tau} + \pi_{,\tau} \nabla s] \\ \nabla_y \cdot \tilde{u}^1 &= -w_{,\tau} \nabla s \end{aligned}$$

La condition (88) donne

$$(96) \quad u_{,\tau} + u \nabla u + \nabla p + \langle (w \nabla s w + \pi \nabla s)_{,\tau} \rangle = 0$$

ce qui implique

$$(97) \quad \langle w \nabla s w + \pi \nabla s \rangle \cdot \nabla s \quad \text{indépendant de } \tau$$

Si on écrit que (98) est vraie pour tout  $s$  alors on obtient

$$(98) \quad s_{,i} s_{,j} (\langle \tilde{w}_i \tilde{w}_j \rangle + \delta_{ij} \langle \pi \rangle) \quad \text{indépendant de } \tau$$

Le problème est maintenant de savoir s'il existe d'autres solutions de (91) satisfaisant à (98) que celles qui ne dépendent pas de  $\tau$  ?

Dans l'hypothèse d'une réponse négative à la conjecture ci-dessus, ce paragraphe montre qu'il n'est pas loisible d'introduire une petite échelle de temps (autre que celle de Taylor) dans ce type de développement asymptotique. Dans l'hypothèse d'une réponse positive alors (98) déterminerait  $a$  et donc  $s$ .

#### Conclusion générale et extentions

Les chapitres 1 et 4 ont montré qu'on pouvait obtenir des équations intéressantes pour la modélisation de la turbulence, en faisant des développements asymptotiques des équations d'Euler par rapport à l'échelle de Kolmogorov du spectre inertiel. Les hypothèses du calcul sont

- existence d'une échelle de coupure
- petites structures en équilibre au delà de la coupure

Les équations obtenues sont semblables aux modèles  $k-\epsilon$  ou  $k-l$  ( $l$  = longueur de mélange) toutefois on ne retrouve pas les termes de dissipation.

Dans un rapport ultérieur, on étudiera les termes d'ordre supérieur du développement pour voir s'ils sont dissipatifs.

Du côté numérique, on a testé le modèle obtenu sur les écoulements dans une conduite. Les tests ont montré quelques propriétés intéressantes du modèle (y compris des instabilités) comme par exemple une cascade d'énergie directe (des grosses vers les petites structures) impossible avec un modèle bidimensionnel et possible avec un modèle 3-D.

Toutefois la validation ainsi que la comparaison avec un  $k-\epsilon$  classique, ce qu'on se propose de faire dans un rapport ultérieur ...

References

- [1] A.S. MONIN, A.M. YAGLOM, Statistical Fluid Mechanics of Turbulence, Vol. 2, p. 348 (1975) MIT Press.
- [2] A. CRAYA, Turbulence. Colloque Cl, Journal de Physique, supplément 1, T. 37, Janvier 1976.
- [3] A. LEONARD, Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows. Adv. Geophys. 18A (1974), 237-248.
- [4] W.C. REYNOLDS, Computation of turbulent flows. Am. Rev. Fluid. Mech. 8 (1975), 183-208.
- [5] J.S. SMAGORINSKY, Mon. Weather Rev. 91, 99-164.
- [6] D.C. LESLIE, Theoretical investigation of Schumann's model for subgrid Reynolds stress. QM TU Report 20/78 (1978).
- [7] D.C. LESLIE, G.L. QUARINI, The application of turbulence theory to the formulation of subgrid modelling procedure. J. Fluid. Mech., 91, 65 (1979).
- [8] J.W. DEARDORF, A numerical study of 3-d turbulent channel flow at large Reynolds numbers. J. Fluid. Mech. (1970), 41, 2, 453-480.
- [9] K. HORIUTI, Study of incompressible turbulent channel flow by large Eddy simulation. Ph.D. Thesis, Tokyo University (1981).
- [10] P. MOIN, J. KIM, Numerical investigation of turbulent channel flow. NASA Report 81 309 (1981).
- [11] U. SCHUMANN, Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channel and annuli. J. Comp. Phys. 18, 376-404 (1975).
- [12] B.E. LAUNDER, D.B. SPALDING, Mathematical models of turbulence. Academic Press (1972).

- [13] S.V. PATANKAR, V.S. PRATAB, D.B. SPALDING, Prediction of turbulent flow in curved pipes. J. Fluid. Mech., 67, (3) 583-595 (1975).
- [14] J.P. BENQUE, Modélisation d'écoulements turbulents isothermes, EDF Report, LNH HE 041/7812 (1978).
- [15] Y. COEFFE, Les modèles de turbulence  $k-\epsilon$  appliqués à l'écoulement de plan. EDF Report LNH HE 041/80.04 (1980).
- [16] P.L. VIOLET, On the modelling of turbulence heat and mass transfert for the computation of buoyancy affected flows. Proc. Int. Conf. Num. Meth. Laminar and turbulent flow, Venise (1981).
- [17] P. PERRIER, O. PIRONNEAU, Subgrid turbulence modelling by homogenization, Math. Modelling Vol. 2, 295-317 (1981).
- [18] O. PIRONNEAU, Homogenization transport processes and turbulence modelling. Proc. IRIA-Novosibirsk, Dec. 1978 (to appear).
- [19] G. PAPANICOLAOU, O. PIRONNEAU, On the asymptotic behavior of motion in random flow in "Stochastic non linear systems" Arnold-Lefever eds. Springer (1981).
- [20] D. McLAUGHIN, G. PAPANICOLAOU, O. PIRONNEAU, Non linear evolution equations with rapidly oscillating initial data. Lecture Note in Physics 154 Springer (1981).
- [21] D. McLAUGHIN, G. PAPANICOLAOU, O. PIRONNEAU, Convection of micro-structures. Proc. INRIA Conf. Dec. 1981, North Holland (Glowinski ed.) (to appear).
- [22] V. ARNOLD, Méthodes mathématiques de la mécanique classique. MIR (1974).
- [23] J.H. SAIAC, Résolution des équations d'Euler par des méthodes d'éléments finis (à paraître).
- [24] J. LAUFER, Investigation of turbulent flow in a 2-d channel. NACA Report TN1053 (1950).

- [25] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU : Asymptotic analysis for periodic structures. North Holland (1978).



### Corrections

Entre l'impression du rapport et sa diffusion, les auteurs se sont rendus compte que les modifications suivantes étaient nécessaires :

1. Dans le développement (8), (9), seules les pressions sont de moyenne en y nulles, ainsi que  $w$ , pour le distinguer de  $u$ . Mais les essais numériques montrent que l'équation (23) ne donne pas  $\langle \tilde{w} \rangle = 0$ . On doit donc mettre  $\langle \tilde{w} \rangle$  au second membre de (20) et poser à la place de (21)

$$(21') \quad w = \nabla \theta^{-t} (\tilde{w} - \langle \tilde{w} \rangle)$$

Le résultat final au paragraphe 5 n'est pas changé sauf que (48.a) a au second membre :  $\langle \tilde{w} \rangle$ .

Dans les tabulations numériques  $\langle \tilde{w} \rangle$  est négligeable ; dans la solution analytique (12), il est nul.

La même modification doit être faite au chapitre 4.

2. L'équation sur  $G$  page (20) est fautive. On doit avoir :

$$G(a,b) = -G(-a,-b)$$

et page 24 sur la figure 2.2 à droite, les valeurs numériques doivent être changées de signe.

Avec cette tabulation les écoulements sont donc stables.

Les calculs correspondants aux figures 3.1-3.10 sont donnés ci-après. :

3. Page 16 bas de la page:  $\langle \bar{\mu}_k \rangle$  ,  $\langle \bar{\mu}_{k_i} \bar{\mu}_{k_j} \rangle$

Page 27:  $\alpha g(-\alpha)$

Fig. 3.1

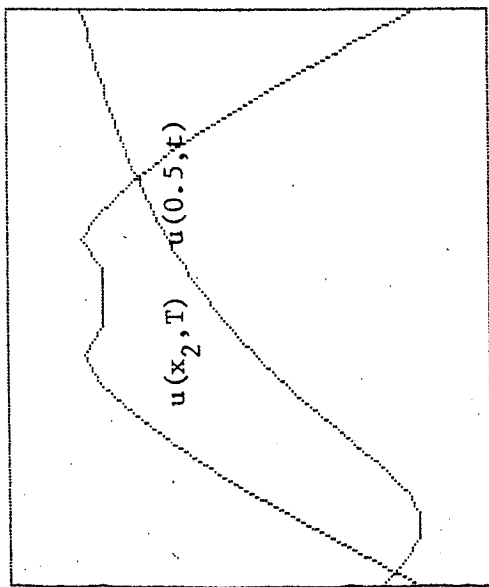
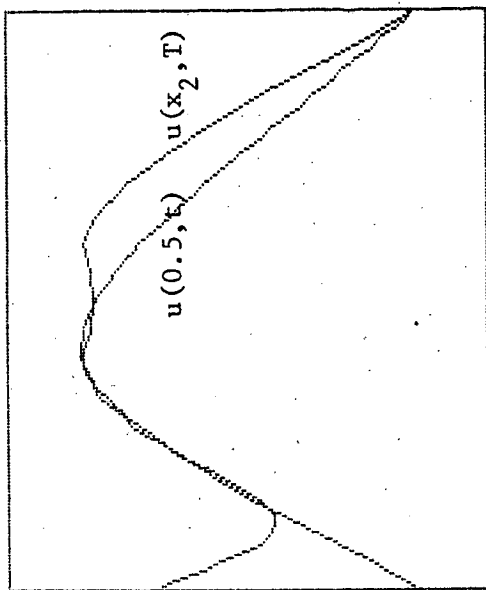


Fig. 3.2



$T=2$   $dx_2=0.05$   
 $q^{\circ}=0.01$

Fig. 3.3

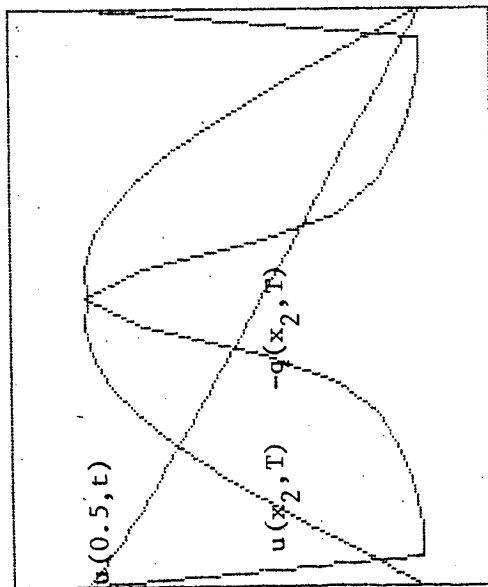


Fig. 3.4

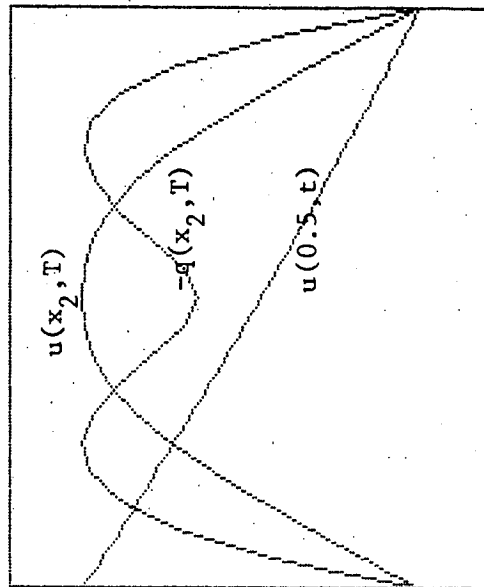


Fig. 3.7

$T=2.00$   
 $\Delta t=0.10$   
 $q^0=0.1000$

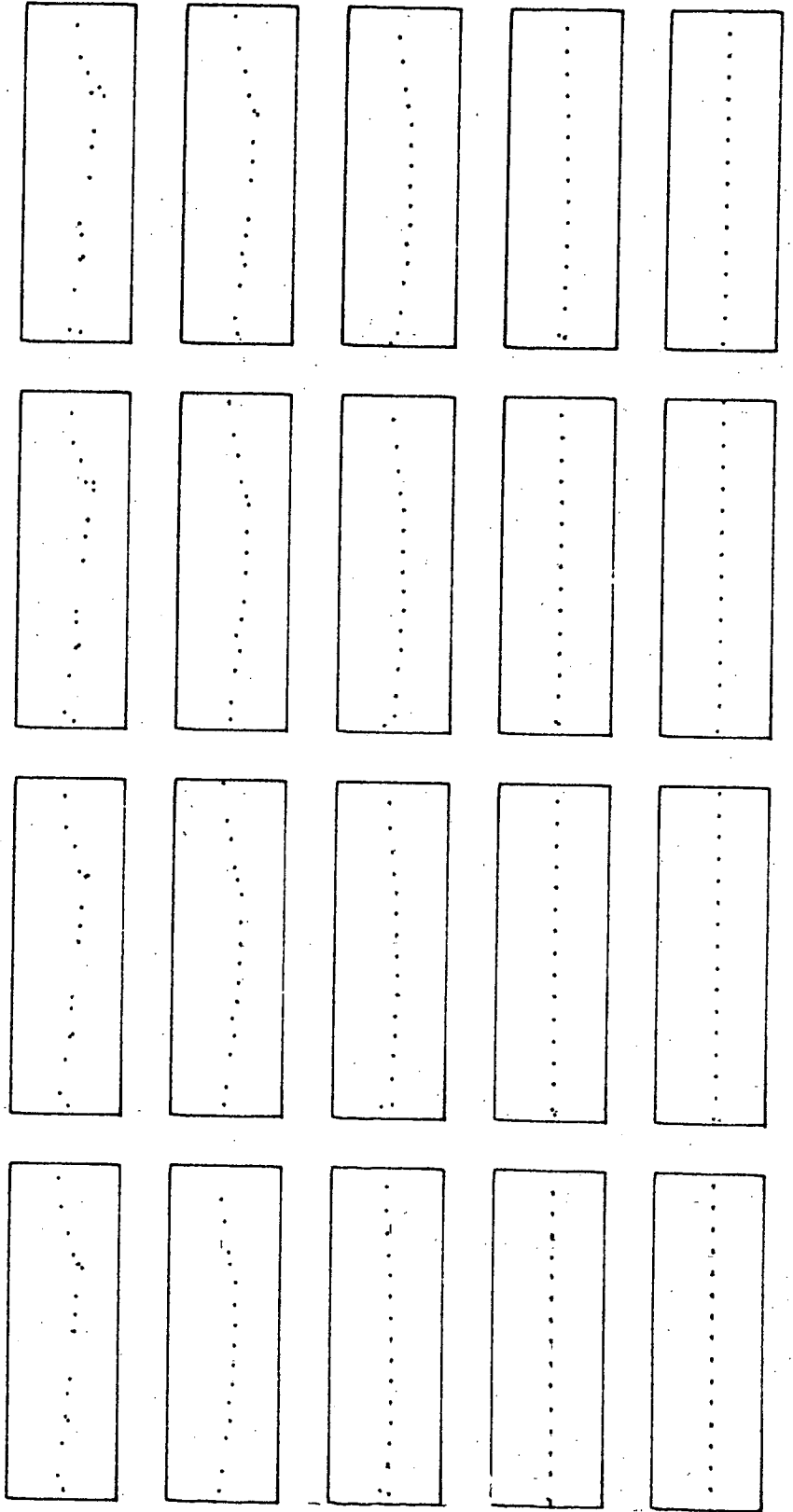


Fig. 3.8

$T = 2.00$

$dx = 0.10$

$q^{\circ} = 1.0000$

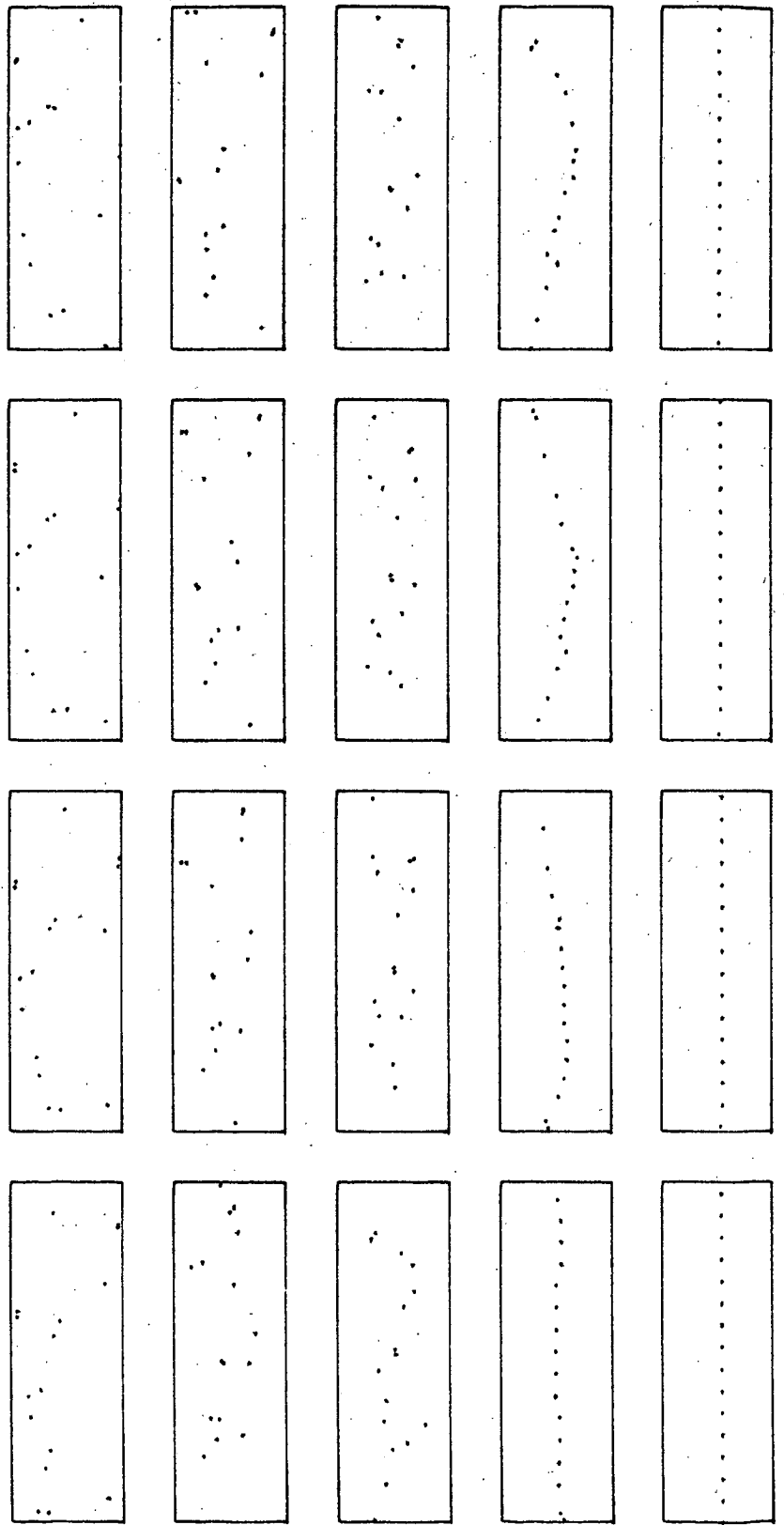


Fig. 3.10 : Tracé de la vorticité

$T = 2.00$   
 $dx = 0.10$   
 $q^0 = 0.0500$

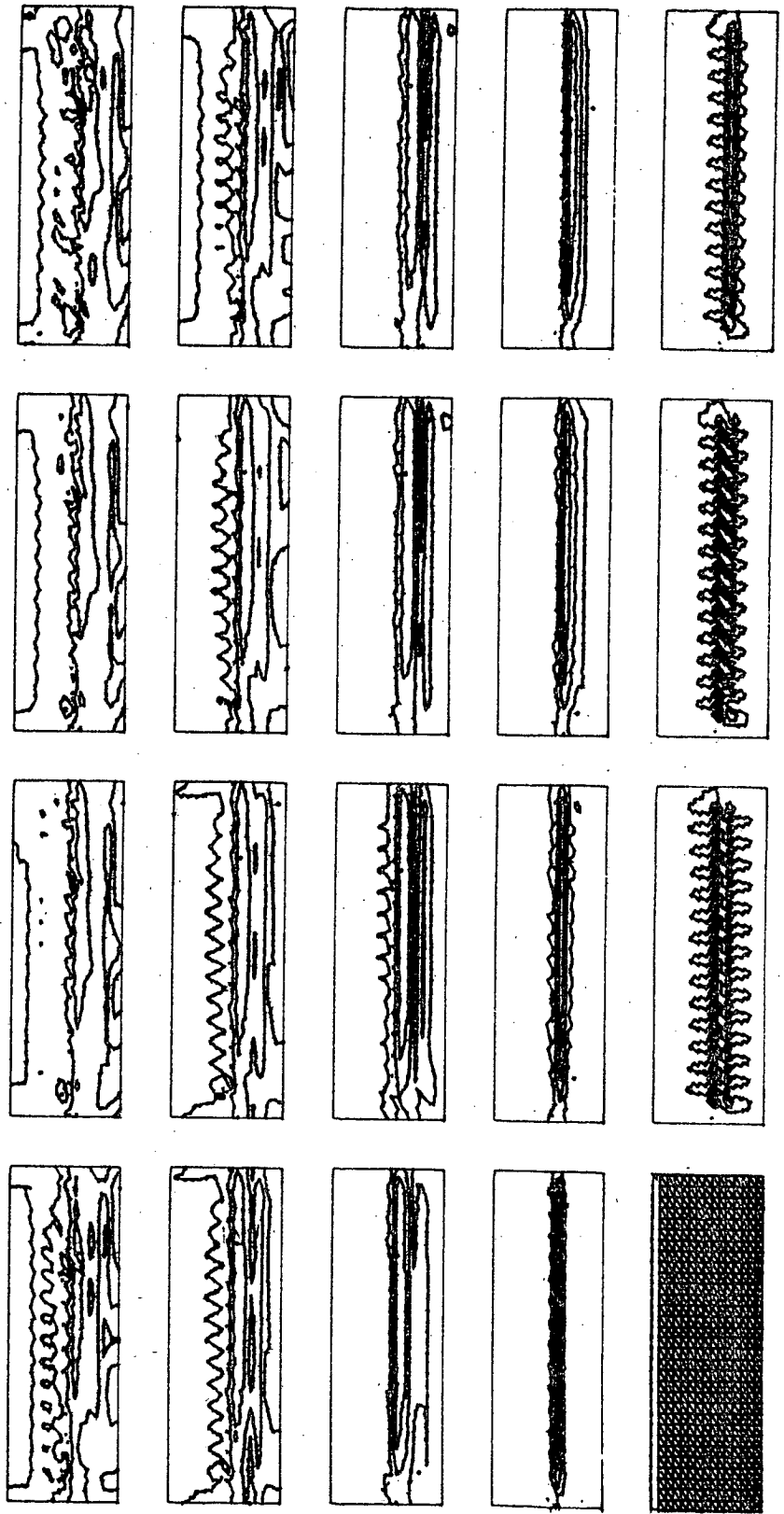
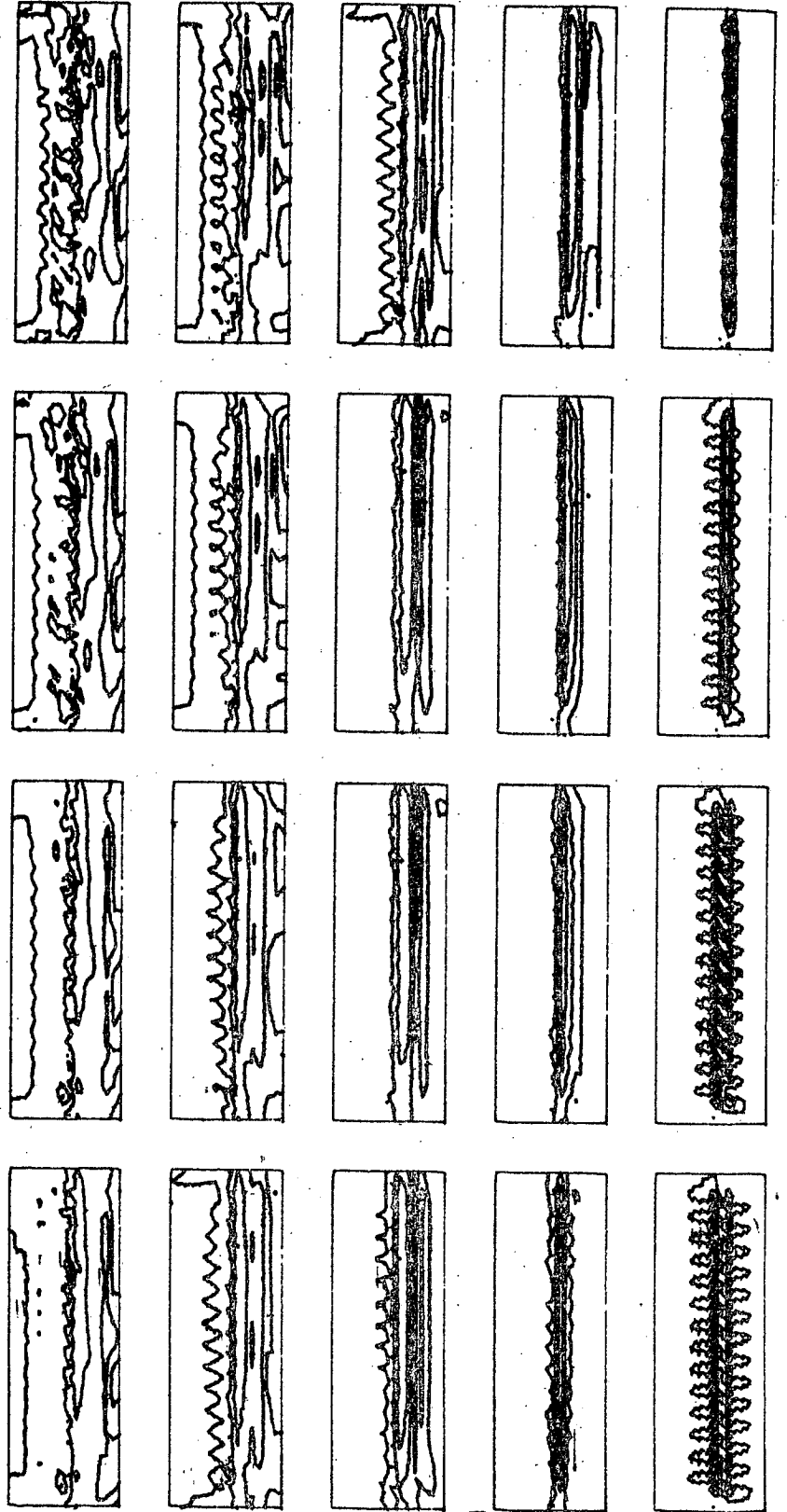


Fig. 3.9 : Tracé de  $q$ .

$T = 2.00$

$dx = 0.10$

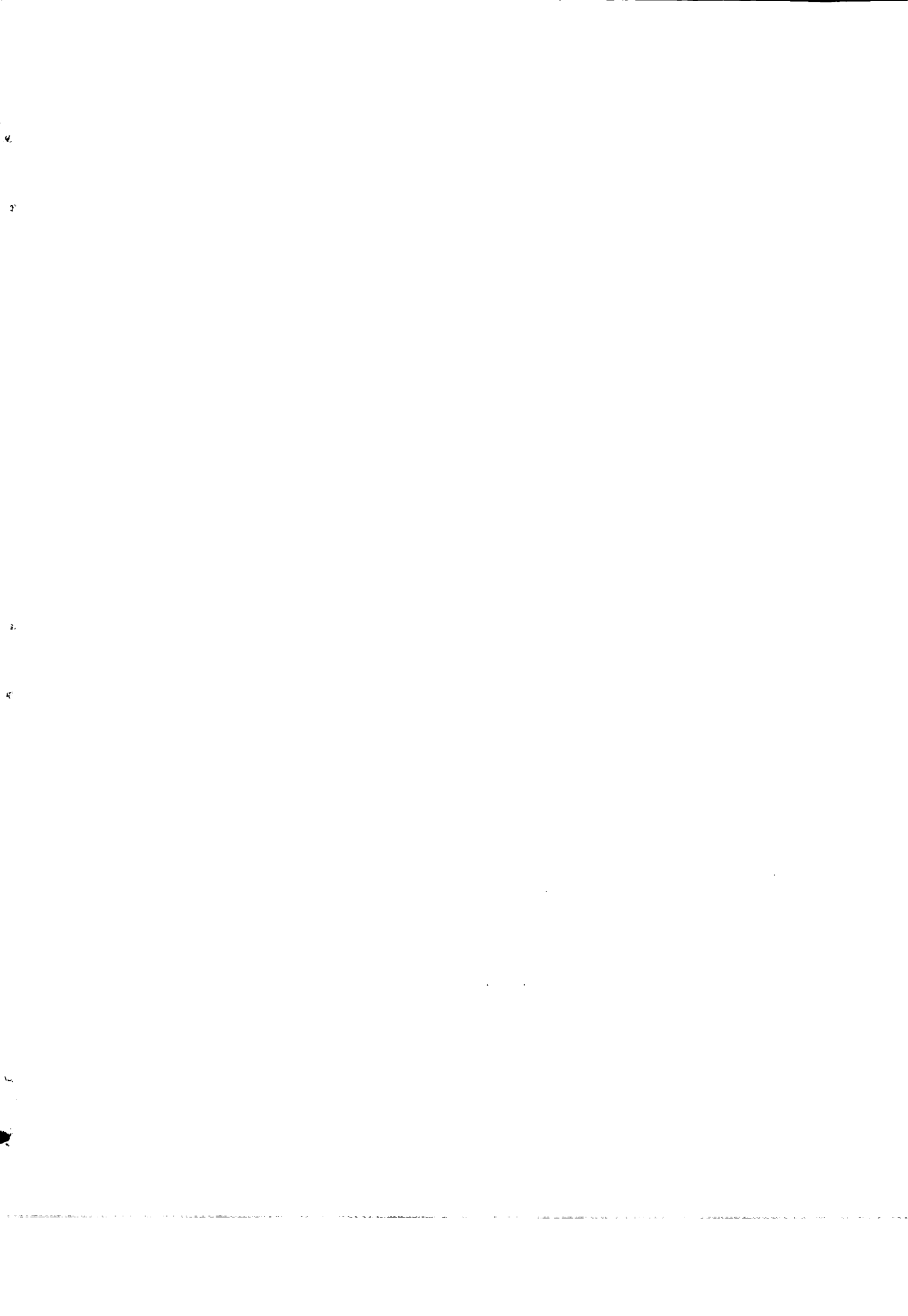
$q^0 = 0.0500$



Imprimé en France  
par  
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique







RR 188

12725



CENTRE DE ROCQUENCOURT

# Rapports de Recherche

N° 188

## SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA TURBULENCE PAR HOMOGENISATION DES STRUCTURES DE SOUS-MAILLES

*Première Partie*

( David ) Mc LAUGHIN  
( Georges ) PAPANICOLAOU  
( Olivier ) PIRONNEAU



Février 1983

2/83

83p.

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. 954 90 20

Simulation Numérique de la Turbulence  
par Homogénéisation des structures de sous-mailles

=====

Première Partie

David Mc Laughlin (University of Arizona)  
Georges Papanicolaou (Courant Institute)  
Olivier Pironneau<sup>+</sup> (Université Paris 13 and INRIA)

=====

<sup>+</sup> Recherches subventionnées par la DRET (contrat 81/683).

Abstract :

This report shows that it is possible to establish turbulence models of the type  $k-\epsilon$  by using the techniques of homogenization theory in the Navier-Stokes equations.

The model is discussed for shear flows and tested numerically on pipe flows.

Connections with the Kolmogorov subgrid turbulence is established. The validity of the model is limited to flows where the subgrid turbulence is clearly separated (in waves numbers) from the large structures.

Resumé :

Ce rapport montre qu'il est possible d'établir des modèles de turbulence du type  $k-\epsilon$  en utilisant les techniques de l'homogénéisation dans les équations de Navier-Stokes.

Le modèle est étudié sur les écoulements de Poiseuille et testé numériquement sur les écoulements dans les conduites.

Les rapports avec les échelles de Kolmogorov sont établis. La validité du modèle est limitée aux écoulements ayant des petites structures homogènes bien séparées (dans l'espace de Fourier) des grosses structures.

=====

## Notations

- $u$  : vecteur vitesse
- $p$  : pression
- $u_{,t}$  :  $\partial u / \partial t$
- $u_{i,j}$  :  $\partial u_i / \partial x_j$
- $\dot{u}_{i,J}$  :  $\partial u_i / \partial y_j$
- $u \otimes v$  : tenseur d'ordre 2 de composante  $u_i v_j$
- $\text{tr}(B)$  : trace du tenseur d'ordre 2,  $B = \sum_{ij} B_{ij}$
- $\nabla \cdot B$  : vecteur dont la  $i$ ème composante est  $\sum_j B_{ji,j}$
- $\hat{u}$  : transformée de Fourier de  $u$
- $\bar{u}$  : moyenne statistique (ou en temps) de  $u$
- $\langle u \rangle$  : moyenne en espace de  $u$
- $u'$  : variation de  $u$  par rapport à l'écoulement moyen
- $u^0$  : condition initiale sur  $u$
- $u_\Gamma$  : condition au bord sur  $u$
- $\Omega$  : domaine des EDP
- $\Gamma$  : frontière de  $\Omega$
- $\Sigma$  :  $\{\{x,t\} : x \in \Gamma, u(x,t)n(x) < 0\}$   $n$  normale externe à  $\Gamma$
- $g$  : conditions aux limites pour l'équation d'Euler sur  $u$
- $\epsilon$  : petite échelle de longueur reliée à la taille de la grille de discrétisation
- $w$  : partie "turbulente" (périodique) de  $u$
- $\theta(x,t)$  : coordonnée Lagrangienne
- $q$  : énergie cinétique turbulente (de  $w$ )
- $C = \nabla \theta^T \nabla \theta$
- $\tilde{w} = \nabla \theta^T w$
- $w' = w / \sqrt{q}$

INTRODUCTION

---

1. Position du problème

Les équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} (1) \quad & u_{,t} + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p - \nu \Delta u = 0 \\ (2) \quad & \nabla \cdot u = 0 \\ (3) \quad & u(t=0) = u^0 \text{ dans } \Omega \\ (4) \quad & u = u_\Gamma \text{ dans } \Gamma \times ]0, T[ \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{aligned}} \right] \text{ dans } \Omega \times ]0, T[$$

régissent les vitesses  $u$  et les pressions  $p$  des fluides visqueux Newtoniens incompressibles ;  $\Omega$  désigne le domaine occupé par le fluide,  $\Gamma$  sa frontière,  $]0, T[$  l'intervalle de temps d'étude du phénomène,  $u^0$  les conditions initiales de l'écoulement et  $u_\Gamma$  les vitesses des parois. On suppose que par changement d'échelle on s'est ramené au cas où le diamètre de  $\Omega$  est de l'ordre de l'unité ainsi que  $u^0$  et/ou  $u_\Gamma$  ; donc  $\nu$  représente l'inverse du nombre de Reynolds.

On sait que lorsque  $\nu$  tend vers zéro, la solution de (1)-(4) devient de plus en plus oscillante en  $x$  et en  $t$ . En effet, la transformée de Fourier  $\hat{u}$ , de  $u$  par rapport à  $x$  :

$$(5) \quad \hat{u}(k, t) = \int_{\Omega} e^{-2i\pi k \cdot x} u(x, t) dx$$

a une fonction d'énergie

$$(6) \quad K \rightarrow E(K) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{|k|=K} |\hat{u}(k, t)|^2 k^2 dk$$

qui indique (cf. figure 1) que les plus petites oscillations en espace de  $u$  se font sur des distances de l'ordre de  $\nu^{3/4}$  (cf. Monin-Yaglom [1], Craya [2] par exemple).

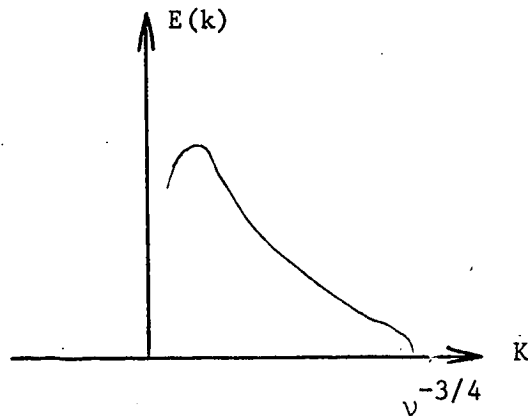


Figure 1

Forme générale des résultats de mesure sur  $E$  pour des écoulements turbulents.

Toute tentative de simulation numérique de (1)-(4) devrait donc théoriquement avoir une discrétisation de  $\Omega$  d'une finesse  $h \approx \nu^{3/4}$  pour permettre au plus petit tourbillon d'être représentable sur la grille de discrétisation. Compte tenu de notre convention sur le diamètre de  $\Omega$  on ne pourra donc dépasser, avec  $N^3$  points de discrétisation, les nombres de Reynolds de l'ordre de  $N^{4/3}$  c'est-à-dire avec les ordinateurs actuels, le millier.

Les calculs complets d'écoulements turbulents ne sont donc pas possibles pour des grands nombres de Reynolds. Cependant, si on s'intéresse aux moyennes statistiques telle que

- .  $\bar{u}(x,t)$  vitesse moyenne en  $x$  et  $t$
- .  $\frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$  tenseur moyen d'énergie cinétique

alors le problème n'est plus numérique mais théorique : la dérivation d'équations pour ces quantités à partir de (1)-(4).

## 2. Equations moyennées

L'observation expérimentale montre que le champ de vitesse à un instant donné peut être décomposé en un champ moyen  $\bar{u}$  et une perturbation  $u'$  tellement perturbée qu'elle ressemble à la réalisation d'un champ aléatoire en  $x$  de moyenne nulle. Cette observation amène à étudier le problème (1)-(4)

avec une condition initiale aléatoire  $u^0 + u'^0$ . Aux instants ultérieurs, si la solution est décomposée en  $\bar{u} + u'$ , en prenant la moyenne statistique de (1), on obtient

$$(7) \quad \bar{u}_{,t} + \bar{u} \nabla \bar{u} - \nu \Delta \bar{u} + \nabla \bar{p} = - \nabla \cdot (\overline{u' \otimes u'})$$

car  $u' \nabla \bar{u} + \bar{u} \nabla u'$  a une espérance nulle.

Les équations (2) - (4), (7) sont les équations de Reynolds ; le problème dit de fermeture est alors de relier le "tenseur de Reynolds"  $u' \otimes u'$  à l'écoulement moyen. Avant d'étudier ce problème, mentionnons une autre approche.

En suivant Léonard [3] , par exemple, on peut définir  $\bar{u}$  comme

$$(8) \quad \bar{u}(x,t) = (G * u)(x,t) = \int_{\Omega \times ]0, T[} G(x-x', t-t') u(x', t') dx' dt'$$

G est alors un filtre et si on pose

$$(9) \quad u' = u - \bar{u}$$

et si on convole l'équation (1) avec le filtre G on obtient

$$(10) \quad \bar{u}_{,t} + \nabla \cdot \overline{\bar{u} \otimes \bar{u}} + \nabla \bar{p} - \nu \Delta \bar{u} = -\bar{u}'_{,t} - \nabla \cdot (\overline{u' \otimes \bar{u}} + \overline{\bar{u} \otimes u'}) - \nabla \cdot (\overline{u' \otimes u'} + \nu \Delta \bar{u}')$$

Dans le cas où on aurait

$$(11) \quad \bar{u}' = \bar{u} \quad , \quad \bar{u}' = 0$$

(9) se simplifierait pour donner

$$(12) \quad \bar{u}_{,t} + \nabla \cdot (\bar{u} \otimes \bar{u}) + \nabla \bar{p} - \nu \Delta \bar{u} = -\nabla \cdot [\overline{u' \otimes u'} + \overline{u' \otimes \bar{u}} + \overline{\bar{u} \otimes u'} + \overline{\bar{u} \otimes \bar{u}} - \overline{\bar{u} \otimes \bar{u}}]$$

Cette équation est aussi une équation de Reynolds mais le tenseur de Reynolds n'a pas la même définition. (Il y a au moins un cas où (11) est vérifié : lorsque G est un filtre passe bas en fréquence ; c'est-à-dire que  $\bar{u}$  est le transformé de Fourier inverse de la transformée de Fourier en espace tronquée aux



modes inférieurs à K :

$$(13) \quad \bar{u} = F^{-1}[(Fu)(k)\chi(|k_1| < K)] \quad (\chi = \text{fonction caractéristique})$$

Remarque

L'équation (12) montre qu'il faut se garder d'interpréter u' dans (7) comme les oscillations en espace ou en temps de u. Il y a un cas où cette interprétation est cependant correcte c'est lorsqu'on peut écrire :

$$(14) \quad u(x,t) = u(x,t, \frac{t}{\tau})$$

et où G opère de la façon suivante

$$(15) \quad \bar{u}(x,t) = G * u = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma) u(x,t,\sigma) d\sigma$$

avec

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma) d\sigma = 1$$

Alors (11) est vérifiée et (12) est identique à (7). L'hypothèse (14) signifie que les oscillations de u se font sur une échelle de temps très différente de celle de  $\bar{u}$ .

### 3. Fermetures des équations de Reynolds.

La fermeture des équations de Reynolds sous la forme (7) ou (12) est un problème très difficile évidemment et peut être même impossible ! Il y a de nombreuses approches : le lecteur est renvoyé à Reynolds [4] pour une revue des principales méthodes. On en rappelle deux qui sont utilisées pour la simulation numérique d'écoulement turbulent inhomogène :

La méthode la plus simple consiste à supposer avec S\_magorinski [5]

$$(17) \quad \nabla \cdot \overline{u' \otimes u'} = - \mu \nabla \cdot [ (|\nabla u|^t + \nabla u) \nabla u ]$$

c'est-à-dire que le tenseur de Reynolds agit comme une viscosité proportionnelle au gradient de la vitesse.

On peut donner quelques arguments vers une démonstration de (17)

(Leslie [6], [7]) dans le cadre de (10), avec un filtre G correspondant à un

moyennage spatial :

$$(18) \quad \bar{u} = \int_{\pi]x_i - \frac{\Delta x_i}{2}, x_i + \frac{\Delta x_i}{2} [} u(\xi, t) d\xi$$

c'est l'approche dite de "modélisation de sous maille" (Subgrid scale modelling) poursuivie par Deardorff, [8], Horiuti [9], Moin-Kun [10], Schumann [11].

La méthode k-ε développée par Launder [12], Patankar [13] et étudiée en France entre autres, par Benque [14], Coeffé [15], Viollet [16],

pose

$$(19) \quad \nabla \cdot \overline{u' \otimes u'} = -a \nabla \cdot \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla u \right)$$

où k et ε sont solutions de

$$(20) \quad k_{,t} + \bar{u} \nabla k - b \nabla \cdot \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla k \right) - a \frac{k^2}{\varepsilon} \text{trace}(\nabla \bar{u} (\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^t)) - c k^{3/2} = 0$$

$$(21) \quad \varepsilon_{,t} + \bar{u} \nabla \varepsilon - d \nabla \cdot \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) - e k \text{trace}[\nabla \bar{u} (\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^t)] - \varepsilon^2/k = 0$$

et où a,b,c,d,e,f, sont des constantes numériques.

Les équations (20) - (21) sont déduites semi empiriquement de (1) - (4).

#### 4. Objectifs, résultats et plan du rapport

Les modèles de sous-maillages et en k-ε permettent de reproduire correctement les écoulements moyens dans un nombre non négligeable de situations en particulier pour les écoulements dans les conduites et les écoulements de couches limites.

Ils sont moins bons (ou même mauvais) pour les écoulements moyens instationnaires comme les jets et les sillages.

En 1978 [17] il est apparu que les techniques de développement asymptotique de l'homogénéisation pouvaient peut être apporter un début de solution au problème de la fermeture des équations de Reynolds.

Dans [18], [19] on a étudié le problème

$$(22) \quad u_{,t} + (u + w) \nabla u + \nabla p - \nu \Delta u = 0, \quad \nabla \cdot u = 0$$

où  $w$  est une fonction très oscillante (périodique dans [18], aléatoire dans [19]). On a montré par un développement asymptotique, que l'écoulement moyen satisfait à une équation du type

$$(23) \quad \bar{u}_{,t} + \bar{u} \nabla \bar{u} + \bar{p} - \nabla \cdot (\underline{M} \nabla u) = 0 \quad \nabla \cdot \bar{u} = 0$$

où  $\underline{M}$  est un tenseur (de viscosité) dépendant de  $w$ .

Ainsi ces résultats ont montré qu'un des termes de l'équation de Reynolds, au moins, a un effet de viscosité turbulente.

Dans [20] [21] on s'est intéressé au problème

$$(24) \quad u_{,t}^{\varepsilon} + u^{\varepsilon} \nabla u^{\varepsilon} + \nabla p^{\varepsilon} = 0 \quad \nabla \cdot u^{\varepsilon} = 0$$

$$(25) \quad u^{\varepsilon}(x,0) = u^0(x) + w^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

et on a montré (formellement) qu'à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $u^{\varepsilon}$  vérifiait

$$(26) \quad \bar{u}_{,t} + \bar{u} \nabla \bar{u} + \nabla \bar{p} + \nabla \cdot \overline{kw \otimes w} = 0 \quad \nabla \cdot \bar{u} = 0$$

où  $\overline{w \otimes w}$  est une fonction de  $\nabla \theta$ ,  $\theta$  la coordonnée Lagrangienne du problème et  $k$  l'énergie cinétique turbulente étant solutions de

$$(27) \quad \theta_{,t} + u \nabla \theta = 0$$

$$(28) \quad k_{,t} + u \nabla k + k \operatorname{trace} (\overline{w \otimes w} \nabla u) + \nabla \cdot (k^{3/2} g) = 0.$$

La justification de ces résultats est basée sur un développement asymptotique de  $u^{\varepsilon}$  de la forme

$$((29) \quad u^{\varepsilon}(x,t) = \bar{u}(x,t) + kw\left(\frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}, x,t\right) + \varepsilon u^1\left(\frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}, x,t\right) + \varepsilon^2 u^2 + \dots$$

on notera la similitude de (25) et de (21) ; cette approche serait-elle un début de justification des modèles type  $k-\varepsilon$  ?

Les objectifs de ce rapport sont donc les suivants :

1. Présenter en détails les résultats (24) - (27) dans le chapitre 1.
2. Etudier analytiquement et numériquement le tenseur  $\overline{w \otimes w}$  (fonction de  $\nabla \theta$ ) dans le chapitre 2.
3. Simuler numériquement les équations (25) - (27) pour des écoulements dans une conduite, en dimension 1, 2 et 3 dans le chapitre 3.
4. Enfin, dans le chapitre 4, généraliser les résultats aux cas visqueux et interpréter l'analyse dans le cadre des échelles de Kolmogorov.

Chapitre 1 : Construction d'un modèle  
de turbulence par perturbation des  
conditions initiales.

1. Position du problème

On considère les équations d'Euler des fluides Newtoniens incompressibles non visqueux :

$$(1) \quad u_{,t} + u \nabla u + \nabla p = 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[$$
$$(2) \quad \nabla \cdot u = 0$$

avec les notations suivantes :

$u(x, t)$  : vitesse des fluides au point  $x$  à l'instant  $t$

$p(x, t)$  : pression

$\Omega$  : domaine de  $\mathbb{R}^3$  occupé par le fluide

On va s'intéresser aux conditions initiales suivantes

$$(3) \quad u(x, 0) = u^0(x) + w^0\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)$$

où  $u^0$  et  $w$  sont des fonctions données mais  $w$  a deux échelles d'espace caractéristiques, la deuxième étant très petite par rapport à la première ; ceci signifie que lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro  $w$  oscille de plus en plus mais sa moyenne  $\langle u \rangle$  reste régulière.

Naturellement la solution de (1)-(3) dépend de  $\varepsilon$  et le problème est de trouver sa limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pour que le problème soit bien posé on rajoute une condition au bord  $\Gamma$  de  $\Omega$  sur  $u$  :

$$(4) \quad u(x, t) \cdot n(x) = g \quad \forall \{x, t\} \in \Sigma = \{x, t : u(x, t) \cdot n(x) < 0\}$$

$(n(x) = \text{normale extérieure en } x \in \Gamma).$

Le bon formalisme pour étudier le problème (1)-(4) serait de supposer  $w$  aléatoire et de chercher les limites des statistiques de  $u$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ce problème a reçu un début de solution dans [21] pour l'équation de

Burger ; il semble hors de portée pour les équations d'Euler ; pour cette raison on se restreint au cas

$$(5) \quad w(y,x) \text{ y-périodique sur } Y = ]0,1[$$

$$(6) \quad \langle w \rangle(x) = \int_Y w(y,x) dy = 0$$

Enfin, pour éviter les interactions au bord on suppose dans ce chapitre que le support de  $w$  est inclus dans l'intérieur de  $\Omega$  :

$$(7) \quad \text{supp } w \cap \Gamma = \emptyset$$

## 2. Développement asymptotique

Soit  $\{u^\varepsilon, p^\varepsilon\}$  la solution de (1)-(4). On va chercher  $u^\varepsilon$  et  $p^\varepsilon$  sous la forme :

$$(8) \quad u^\varepsilon(x,t) = u(x,t) + (w(y,x,t) + \varepsilon u^1(y,x,t) + \varepsilon^2 u^2 + \dots) \Big|_{y = \frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}}$$

$$(9) \quad p^\varepsilon(x,t) = p(x,t) + (\pi(y,x,t) + \varepsilon p^1(y,x,t) + \varepsilon^2 p^2 + \dots) \Big|_{y = \frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}}$$

avec  $w, u^1, u^2, \dots, \pi, p^1, p^2, \dots$  Y-périodique en  $y$  et de moyenne nulle en  $y$ . Les fonctions  $u^i, p^i$  et  $\theta$  vont être déterminées en reportant (8), (9) dans (1)-(4).

On a les formules de dérivations suivantes :

$$(10) \quad \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) (w_i + \varepsilon u_i^1 + \varepsilon^2 u_i^2 + \dots) \right] \Big|_{y = \frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}}$$

$$(11) \quad \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) (w_i + \varepsilon u_i^1 + \varepsilon^2 u_i^2 + \dots) \right] \Big|_{y = \frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}}$$

On fait les conventions de notations suivantes

$$(12) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v_{,t}$$

$$(13) \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} = v_{,i}$$

$$(14) \quad \frac{\partial v}{\partial y_i} = v_{,I}$$

Donc (10), (11) se réécrivent

$$(15) \quad u_{i,t}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} w_{i,K} \theta_{k,t} + u_{i,t} + w_{i,t} + u_{i,K}^1 \theta_{k,t} + \varepsilon (u_{i,t}^1 + u_{i,K}^2 \theta_{k,t}) + \dots$$

$$(16) \quad u_{i,j}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} w_{i,K} \theta_{k,j} + u_{i,j} + w_{i,j} + u_{i,K}^1 \theta_{k,j} + \varepsilon (u_{i,j}^1 + u_{i,K}^2 \theta_{k,j}) + \dots$$

En reportant ces expressions dans (1) on obtient

$$(17) \quad \begin{aligned} & \varepsilon^{-1} w_{i,K} \theta_{k,t} + u_{i,t} + w_{i,t} + u_{i,K}^1 \theta_{k,t} + \varepsilon(\dots) \\ & + (u_j + w_j + \varepsilon u_j^1 + \varepsilon^2 (u_j^2 + \dots)) (\varepsilon^{-1} w_{i,K} \theta_{k,j} + u_{i,j} + \\ & + u_{i,K}^1 \theta_{k,j} + \varepsilon(\dots)) \\ & + \varepsilon^{-1} \pi_{,K} \theta_{k,i} + p_{,i} + \pi_{,i} + p_{,K}^1 \theta_{k,i} + \varepsilon(\dots) = 0. \end{aligned}$$

L'équation (2) devient

$$(18) \quad u_{i,i} + \varepsilon^{-1} w_{i,K} \theta_{k,i} + w_{i,i} + u_{i,K}^1 \theta_{k,i} + (\dots) = 0$$

On a utilisé la convention suivante : les indices répétés sont sommés de 1 à 3 même si l'un est minuscule et l'autre majuscule.

### 3. Cascade d'équations

On identifie les puissances de  $\varepsilon$  dans chacune des équations

(17) et (18), ce qui donne :

termes en  $\varepsilon^{-1}$  :

$$(19) \quad \begin{aligned} & w_{i,K} (\theta_{k,t} + u_j \theta_{k,j}) + w_j \theta_{k,j} w_{i,K} + \pi_{,K} \theta_{k,i} = 0 \\ & w_{i,K} \theta_{k,i} = 0 \end{aligned}$$

On se propose de choisir  $\theta$  tel que

$$(20) \quad \begin{aligned} & \theta_{,t} + u \nabla \theta = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[ \\ & \theta(x, 0) = x \\ & \theta|_{\Sigma} = x \end{aligned}$$

En posant

$$(21) \quad \tilde{w}_k = w_j \theta_{k,j} \quad \text{i.e.} \quad \tilde{w} = (\nabla\theta)^t w$$

et en multipliant (19.a) par  $\theta_{\ell,i}$  on obtient :

$$(22) \quad \tilde{w}_k w_{i,K} \theta_{\ell,i} + \pi_{,K} \theta_{k,i} \theta_{\ell,i} = 0$$

c'est-à-dire avec (10.b)

$$(23) \quad \tilde{w} \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y \pi = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0 \quad \forall y \in Y$$

où C est une matrice  $3 \times 3$  fonction de x et t :

$$(24) \quad C = (\nabla_x \theta)^t \nabla_x \theta$$

Les conditions aux limites (3) et (4) imposent

$$(25) \quad w(y,x,0) = w^0(y,x) \quad \forall x,y \quad ; \quad \text{supp}_x w \cap \Gamma = \emptyset$$

termes en  $\varepsilon^0$

De (17) on tire

$$(26) \quad u_{i,K}^1 (\theta_{k,t} + u_j \theta_{k,j}) + u_j^1 w_{i,K} \theta_{k,j} + w_j u_{i,K}^1 \theta_{k,j} + p_{i,K}^1 \theta_{k,i} \\ + (u_j + w_j)(u_{i,j} + w_{i,j}) + u_{i,t} + w_{i,t} + p_{,i} + \pi_{li} = 0$$

soit, compte tenu de (20) et avec des notations identiques à (21) :

$$(27) \quad \tilde{u}_k^1 w_{i,K} + \tilde{w}_k u_{i,K}^1 + p_{,K}^1 \theta_{k,i} + ((u+w)\nabla(u+w) + u_{,t} + w_{,t} + \nabla p + \nabla\pi)_i = 0$$

Comme précédemment on multiplie par  $\theta_{\ell,i}$  et on somme en i :

$$(28) \quad \tilde{u}^1 \nabla_y \tilde{w} + \tilde{w} \nabla_y \tilde{u}^1 + C \nabla_y p^1 = -(\nabla\theta)^t ((u+w)\nabla(u+w) + u_{,t} + w_{,t} + \nabla(p+\pi))$$

Enfin de (18) on tire

$$(29) \quad \nabla_y \cdot \tilde{u}^1 + \nabla_x \cdot (u+w) = 0$$

Les conditions aux limites donnent

$$(30) \quad \tilde{u}^1(y, x, 0) = 0 \quad ; \quad \text{supp}_x u^1 \cap \Gamma = 0$$

Remarque :

Lorsque la variable n'est pas mentionnée dans les opérateurs  $\nabla$  et  $\nabla \cdot$ , il s'agira toujours de  $x$ .

#### 4. Conditions de compatibilités

Par rapport à  $y$  les équations (28) et (29) sont du type

$$(31) \quad \tilde{u}^1 \nabla_y \tilde{w} + \tilde{w} \nabla_y \tilde{u}^1 + C \nabla_y p^1 = f^1, \quad \nabla_y \cdot u^1 = g^1$$

$$\tilde{u}^1 \text{ Y-périodique en } y, \quad \langle \tilde{u}^1 \rangle = 0.$$

Les variables  $x$  et  $t$  ne sont que des paramètres passifs intervenant dans  $f^1$ ,  $g^1$ ,  $\tilde{w}$ ,  $C$ .

#### Première condition

Comme on peut réécrire (31.a) en

$$(32) \quad (\tilde{u}_j^1 \tilde{w}_i + \tilde{w}_j \tilde{u}_i^1 + C_{ij} p^1)_{,j} = \tilde{w}_i \tilde{u}_{j,j}^1 + f_i^1 = \tilde{w}_i g^1 + f_i^1$$

et comme  $\tilde{u}^1$ ,  $\tilde{w}^1$ ,  $p^1$  sont périodiques en moyennant (32) on obtient :

$$(33) \quad \langle \tilde{w} g^1 + f^1 \rangle = \int_Y (\tilde{w} g^1 + f^1) dy = 0.$$

Soit en revenant à (28)-(29) :

$$(34) \quad -(\nabla \theta)^t \langle u + w \nabla(u+w) \rangle + u_{,t} + \langle w_{,t} \rangle + \nabla p + \langle \nabla \pi \rangle - \langle w \nabla_x(u+w) \rangle = 0 ;$$

c'est-à-dire, compte tenu de  $\langle w \rangle = 0$ ,  $\langle \pi \rangle = 0$  et de (21)

$$(35) \quad u_{,t} + u \nabla u + \langle w \nabla w \rangle + \nabla p + \langle w \nabla_x \cdot w \rangle = 0$$





soit

$$(42) \quad \left\langle \frac{1}{2} |w|^2 \right\rangle_{,t} + u \nabla \left\langle \frac{1}{2} |w|^2 \right\rangle + \langle w_i w_j \rangle u_{i,j} + \nabla_x \cdot \left\langle \left( \pi + \frac{1}{2} |w|^2 \right) w \right\rangle = 0$$

### 5. Le système complet d'équations

Cette dernière équation peut se réécrire

$$(43) \quad q_{,t} + u \nabla q + q \operatorname{tr}[\langle w' \otimes w' \rangle \nabla u] + \nabla \cdot [q^{3/2} \langle (\pi' + \frac{1}{2} |w'|^2) w' \rangle] = 0$$

$$q(x, 0) = q^0(x) \quad ; \quad q|_{\Sigma} = 0$$

$$(44) \quad w' = w / \sqrt{q}$$

$$(45) \quad q = \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle$$

On remarque alors que l'équation (23) est homogène et ne définit  $\tilde{w}$  qu'à un facteur multiplicatif constant en  $y$  près ; l'équation pour  $w'$  devient :

$$(46) \quad \tilde{w}' \nabla_y \tilde{w}' + C \nabla_y \pi' = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w}' = 0 \quad \text{dans } Y, \forall x, t$$

$$\tilde{w}' \text{ } Y\text{-périodique en } y \quad \langle \tilde{w}' \rangle = 0 \quad ; \quad \frac{1}{2} \langle |w'|^2 \rangle = 1$$

$$(47) \quad w' = \nabla \theta^{-t} \tilde{w}'$$

On rappelle que  $C$  et  $\theta$  sont définis par

$$(48) \quad \begin{aligned} \theta_{,t} + u \nabla \theta &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \theta(x, 0) &= x \\ \theta|_{\Sigma} &= x \end{aligned}$$

$$C = (\nabla \theta)^t \nabla \theta, \quad ,$$

Enfin  $u$  et  $p$  sont donnés par (36) c'est-à-dire

$$(49) \quad \begin{aligned} u_{,t} + u \nabla u + \nabla p + \nabla \cdot [q \langle w' \otimes w' \rangle] &= 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ u(x, 0) &= u^0(x) \quad \text{dans } \Omega \\ u \cdot n|_{\Sigma} &= g \end{aligned}$$

## 6. Discussion

On peut comparer ce système d'équation aux modèles de turbulence en  $k-\varepsilon$ . Avec nos notations  $k$  est ici  $q$  et l'équation (43) ressemble étrangement à l'équation pour  $k$  utilisée par exemple dans [15] car  $\langle w \otimes w \rangle$  est une fonction de  $\nabla \theta \nabla \theta^t$  c'est-à-dire de  $\nabla u \nabla u$  intégré sur les lignes de courant.

En revanche l'équation pour  $\varepsilon$  est remplacée par une équation vectorielle pour les échelles de longueur  $\theta$  données par (48).

Par ailleurs,  $\theta$  représente les coordonnées Lagrangiennes du problème ; le développement (8)-(9) est donc justifié par la physique de la turbulence puisqu'on sait que les lois de Kolmogorov pour la turbulence localement homogène sont valables dans un repère convecté par l'écoulement moyen.

Sur le plan mathématique nous souhaiterions évidemment pouvoir justifier le calcul formel précédent. Malheureusement il s'agit là d'un problème très difficile lié aux points suivants :

1. Le système (46) admet-il une solution qui dépend continûment de  $C$  ?
2. Le système (31) admet-il d'autres conditions de compatibilité et si oui quels sont les paramètres modulables correspondant dans (46) ?

Comme on le verra dans la suite on peut supposer d'autres développements asymptotiques que (8)-(9) mais le calcul formel donne des résultats assez semblables. Signalons que dans certains cas particuliers on a obtenu une démonstration du résultat [18] [19].

Finallement la seule justification pragmatique du calcul précédent reste les essais numériques et la comparaison des résultats avec l'expérience.

Pour intégrer numériquement le système (43)-(49) on va procéder de la manière suivante :

1. On tabule  $\langle w_i^! w_j^! \rangle$  solution de (46) en fonction des 5 paramètres de  $C$ . Soit  $F_{ij}(C)$  cette fonction.
2. On intègre (43), (48), (49) par un schéma usuel éléments finis ou différences finies avec  $\langle w_i^! w_j^! \rangle$  remplacé par  $F_{ij}(\nabla \theta^t \nabla \theta)$ .

Chapitre 2 : Etude de l'équation en w

1. Position du problème

Le modèle établi au chapitre 1 implique la connaissance de la fonction

$$C \rightarrow \langle \tilde{w}'_i \tilde{w}'_j \rangle = \int_Y \tilde{w}'_i \tilde{w}'_j dx$$

où  $\tilde{w}'$  est solution de

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{w}' \nabla \tilde{w}' + C \nabla \pi' &= 0, \quad \nabla \cdot \tilde{w}' = 0 \quad \text{dans } Y = ]0,1[^n \\ \langle \tilde{w}' \rangle &= 0, \quad \frac{1}{2} \langle \tilde{w}' C^{-1} \tilde{w}' \rangle = 1, \\ \tilde{w}' &\text{ Y-périodique en } y \end{aligned}$$

et où C est une matrice indépendante de y et de la forme

$$(2) \quad C = K^{-1} K^{-T} \quad (K^{-T} = \nabla \theta)$$

Remarque 1

Si  $\tilde{w}'$  est solution de (1) sauf pour la condition sur  $\langle \tilde{w}' C^{-1} \tilde{w}' \rangle$ , en changeant  $\hat{w}'$  en  $\lambda \tilde{w}'$  on peut satisfaire à la condition manquante.

2. Solutions explicites de (1)

Comme solution de (1) on a toutes les fonctions de la forme

$$(3) \quad \tilde{w}' = \text{Re } \hat{w} e^{2i\pi k \cdot y}$$

avec  $k \cdot \hat{w} = 0$ ,  $\hat{w}$  indépendant de y, k a composantes entières.

En effet :

$$(4) \quad (2\pi)^{-1} \tilde{w}' \nabla \tilde{w}' = \text{Re}(i(\tilde{w}' \cdot k) \hat{w} e^{2i\pi k y}) = 0$$

Mais comme ces solutions ne dépendent pas de C essayons d'autres méthodes. On rappelle que l'identité vectorielle

$$(5) \quad w \nabla w = \frac{1}{2} \nabla |w|^2 - w \times \nabla \times w$$

peut être généralisée avec une matrice constante quelconque K :

$$(6) \quad w \nabla w = \frac{1}{2} K^{-1} K^{-t} \nabla |Kw|^2 - K^{-1} [(Kw) \times ((K^{-t} \nabla) \times Kw)]$$

$$(B\nabla)_i = b_{ij} \partial / \partial y_j$$

Donc en prenant

$$(7) \quad \pi' = - \frac{1}{2} |Kw'|^2 = - \frac{1}{2} \langle \tilde{w}' | K^t K \tilde{w}' \rangle = - 1$$

L'équation (1.a) devient

$$(8) \quad K\tilde{w}' \times [(K^{-t} \nabla) \times K\tilde{w}'] = 0 \quad \nabla \cdot \tilde{w}' = 0$$

c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$(9) \quad (K^{-t} \nabla) \times K\tilde{w}' = \lambda K\tilde{w}' \quad \nabla \cdot \tilde{w}' = 0$$

On prend la transformée de Fourier des équations :

$$(10) \quad i \mathbb{R} \times \hat{w} = \hat{w} \quad \mathbb{R} \cdot \hat{w} = 0$$

où

$$(11) \quad \hat{w} = K \hat{\tilde{w}}' \quad \mathbb{R} = K^{-t} k / |K^{-t} k|$$

Ce système se résout et donne pour chaque  $\lambda$  un  $w'$  :

$$(12) \quad \tilde{w}' = \beta \operatorname{Re} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^3 \\ |K^{-t} k| = \lambda / 2\pi}} K^{-1} [i \mathbb{R} \times \mu_k - \mathbb{R} \mathbb{R} \cdot \mu_k + \mu_k] e^{2i\pi k \cdot y}$$

où  $\beta$  est ajusté pour que  $\langle \tilde{w}' | C^{-1} \tilde{w}' \rangle / 2 = 1$  et où les  $\mu_k$  sont des constantes quelconques. Malheureusement la sommation n'aura que 2 termes au plus si  $K$  n'a pas de symétrie puisqu'on doit chercher les intersections à valeurs entières avec les axes de coordonnées d'un ellipsoïde de module  $\lambda / 2\pi$ .

En revanche cette solution présente l'avantage de dépendre de  $C$  et de généraliser les solutions de Henon [22] (qu'on sait à peu près stable [23]); on donne le tenseur  $w w$  moyenné sur une répartition uniforme des  $\mu_k$  (indépendants) :  $\langle \mu_k \rangle = 0, \langle (\mu_k)_i (\mu_k)_j \rangle = \delta_{ij}$

$$(13) \quad \langle w' \otimes w' \rangle = N^{-1} \sum_{\substack{|K^{-t}k| = \lambda/2\pi \\ k \in Z^3}} \begin{bmatrix} \hat{k}_2^2 + \hat{k}_3^2 & -\hat{k}_1 \hat{k}_2 & -\hat{k}_1 \hat{k}_3 \\ -\hat{k}_1 \hat{k}_2 & \hat{k}_1^2 + \hat{k}_3^2 & -\hat{k}_2 \hat{k}_3 \\ -\hat{k}_1 \hat{k}_3 & -\hat{k}_2 \hat{k}_3 & \hat{k}_1^2 + \hat{k}_2^2 \end{bmatrix}, \quad \hat{k} = \frac{\nabla \theta^t k}{|\nabla \theta^t k|}.$$

$$(w' = K\tilde{w}')$$

N étant le nombre de termes dans la sommation. Ce tenseur dépend assez peu de  $\lambda$  dans la mesure où il n'existe que 3 groupes de valeurs donnant des résultats différents.

Le même calcul donne

$$(14) \quad \langle (\pi + \frac{1}{2} |w|^2) w \rangle = 0$$

### 3. Tabulation du tenseur $w \otimes w$ en dimension 2

En prenant la divergence de (1.a) on déduit

$$(15) \quad C \Delta \pi' = - \nabla \cdot (\tilde{w}' \nabla \tilde{w}')$$

Donc

$$(16) \quad C^{-1} \tilde{w}' \nabla \tilde{w}' + \nabla \pi' = [I - \nabla \Delta^{-1} (\nabla \cdot)] C^{-1} \tilde{w}' \nabla \tilde{w}'$$

Supposons que  $\hat{w}'$  soit tronqué à  $2N+1$  mode en chaque variable :

$$(17) \quad \tilde{w}' = \sum_{-N \leq k_i \leq N} a(k) e^{2i\pi k \cdot y};$$

alors

$$(18) \quad C^{-1} \tilde{w}' \nabla \tilde{w}' = \sum_{n,k} C_m^{-1} a_m(k) [k \cdot a(\ell-k)]$$

donc pour résoudre (1) on peut chercher la solution du problème discret

$$(19) \quad \min_{a \in A} \sum_{\substack{|\ell_i| \leq N, |k_i| \leq N, \\ |\ell_i - k_i| \leq N, n, m}} \left| \sum (\delta_{pn} - \frac{\ell p \ell n}{|\ell|^2}) C_{nm}^{-1} a_m(k) [k \cdot a(\ell-k)] \right|^2$$

avec

$$(20) \quad A = \{a : \exists b \text{ avec } a(k) = (k_2, -k_1) b(k), b(-k) = -\bar{b}(k) \forall |k| \leq N\}$$

(ici le  $\bar{\quad}$  indique le complexe conjugué).

Les degrés de liberté dans l'optimisation (19) sont donc les modes de  $b$  réels et imaginaires correspondants à

$$(21) \quad k_1 > 0 \text{ ou bien } k_1 = 0 \text{ et } k_2 > 0$$

Soit  $E(b)$  la fonctionnelle à minimiser dans (19). Les méthodes de gradients conjugués pour résoudre (19) impliquent la connaissance des dérivées de  $E$ ; ( $b = b^r + i b^i$ ) :

$$(22) \quad \frac{\partial E}{\partial b_k} = \sum_{|k_i| \leq N} 2 \operatorname{Re} \left[ \left( \delta_{pn} - \frac{\rho p \rho n}{|\rho|^2} \right) C_{nm}^{-1} a_m(k') k \cdot a(\ell - k') \right] \lambda_k$$

avec

$$(23) \quad \lambda_k = i \left( I - \frac{\rho \times \rho}{|\rho|^2} \right) C^{-1} \left[ (\ell - k) \times b(\ell - k) \cdot k \times 1 + (k \times 1) \cdot (\ell - k) (\ell - k) b(\ell - k) \right. \\ \left. + i((\ell - k) \times b(\ell - k) \cdot k \times 1 + (k \times 1) \cdot ((\ell - k) (\ell - k) \times b(\ell - k)) \right. \\ \left. - (\ell + k) \times b(\ell + k) \cdot k \times 1 + (k \times 1) \cdot (\ell + k) (\ell + k) \times b(\ell + k) \right. \\ \left. + i((\ell + k) \times b(\ell + k) \cdot k \times 1 - (k \times 1) \cdot (\ell + k) (\ell + k) \times b(\ell + k)) \right]$$

On voit que le calcul de toutes les dérivées demande  $N^4$  opérations ce qui va rendre le temps de calcul très élevé dès que  $N$  est grand ; ici on ne peut pas utiliser directement les techniques de FFT usuelles en calcul d'Euler spectral parce qu'on a besoin du gradient discret exact de  $E$ .

On présentera ultérieurement une autre technique (par discrétisation en éléments finis) qui évite cet écueil.

#### Résultats numériques : stabilité

L'expérience a montré que les solutions calculées  $w^n$  en dimension 2 sont très loin d'être uniques ; elles dépendent de la condition initiale  $w^0$  dans l'algorithme du gradient conjugué ( $w^n$  est calculé à partir de  $w^{n+1}$  et donc  $w^0$  doit être donné).

La figure 1 montre 3 solutions calculées avec  $N=7$  et 20 itérations de gradient conjugué (ce qui amène en général  $E(w^{20}) \approx 10^{-3} E(w^0)$ ) pour 3  $w^0$  initiaux différents.

Soit  $w^{20}(w^0)$  la solution calculée à partir de  $w^0$  et 20 itérations. Pour étudier la stabilité de la méthode numérique pour la tabulation de

$w \otimes w$ , on a comparé dans le tableau 1  $\langle w_i^{20}(w^0) w_j^{20}(w^0) \rangle$  avec les statistiques des deux quantités suivantes :

$$(24) \quad \langle w_i^{20} w_j^{20} \rangle = \int_Y w_i^{20}(w^0 + \beta_p; y) w_j^{20}(w^0 + \beta_p; y) dy$$

$$(25) \quad \langle w_i^{20} w_j^{20} \rangle_B = \frac{1}{80} \sum_{p=1..20} \sum_{q=1..4} w_i^{20}(w^0 + \beta_p; y_{pq}) w_j^{20}(w^0 + \beta_p; y_{pq})$$

où  $y_{pq}$  est un point aléatoire dans  $Y$  et où,  $\alpha_p(k)$  désignant une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance 1 pour chaque  $k$  et chaque  $p$ , on a

$$(26) \quad \alpha_p(y) = \sum_{|k| \leq N} \alpha_p e^{2i\pi k \cdot y}$$

Dans cette expérience le  $w^0$  choisi a un spectre en  $|k|^{-2}$  sauf éventuellement le dernier mode  $\{-N, -N\}$  qui est fixé dans les deux premiers cas.

#### Résultats numériques : tabulations

La matrice  $C$  est symétrique, on peut l'écrire

$$(27) \quad C^{-1} = \mu \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$$

Comme (1) est homogène, la solution  $\tilde{w}'$  ne dépend pas de  $\mu$ . Pour se ramener à un interval borné, on pose

$$(28) \quad \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right) \quad \beta = \operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}\right)$$

ce qui permet de réécrire

$$(29) \quad C^{-1} = \mu' \begin{bmatrix} \sin a(1+\cos b) & (1+\cos a)(1+\cos b) \\ (1+\cos a)(1+\cos b) & \sin b(1+\cos a) \end{bmatrix}$$

et d'avoir des valeurs de  $C_{ij}$  comprises entre -4 et +4 avec une tabulation à faire pour des valeurs de  $a$  et  $b$  dans l'intervall borné  $]-\pi, +\pi[$



De plus, on peut réduire l'intervalle de tabulation en exploitant les symétries.  
Posons

$$F(a,b) = \langle \tilde{w}'_1{}^2 \rangle / \langle |\tilde{w}'|^2 \rangle$$

$$G(a,b) = \langle \tilde{w}'_1 \tilde{w}'_2 \rangle / \langle |\tilde{w}'|^2 \rangle$$

il est facile de voir que si (1) avait une solution unique on devrait avoir

$$F(a,b) = 1-F(b,a) \quad ; \quad G(a,b) = G(b,a)$$

$$F(a,b) = F(-a,-b) \quad ; \quad G(a,b) = G(-a,-b)$$

Cette remarque permet de réduire l'intervalle de tabulation à

$$0 \leq |b| \leq a \leq \pi$$

La figure 2 donne les lignes de niveau de F et G obtenus numériquement avec N=8, 20 itérations de gradient conjugué à partir d'un  $w^0$  avec un spectre en  $k^{-2}$  sauf pour le dernier mode artificiellement multiplié par 10.

	$\frac{\langle w_1^{20} w_2^{20} \rangle}{\langle  w^{20} ^2 \rangle}$ lorsque $\alpha_p(k)=0 \forall k$	$\frac{1}{20} \sum_{p=1}^{20} \frac{\langle w_{1p}^{20} w_{2p}^{20} \rangle}{\langle  w_p^{20} ^2 \rangle}$	$\frac{\langle w_i^{20} w_j^{20} \rangle}{\langle  w ^{20} \rangle} B$
$\hat{w}^0(-N, -N) = 0.5$ $\alpha_p(-N, -N) = 0 \forall p$	- 0.48	- 0.47	- 0.43
$\hat{w}^0(-N, -N) = 0.1$ $\alpha_p(-N, -N) = 0 \forall p$	- 0.080	- 0.121	- 0.076
$\hat{w}^0(-N, -N) = 1/N^2$ $\alpha_p(-N, -N)$ Gaussien	- 0.078	- 0.071	0.006

Table 2.1.

Trois méthodes pour calculer la valeur moyenne de  $w_1 w_2$  sont comparées pour trois solutions correspondant à des choix de  $w^0$  initiaux différents dans l'algorithme du gradient conjugué. L'intérêt de forcer le dernier mode de  $w^0$  (deux premiers cas) réside dans le fait qu' en 2-d le transfert d'énergie se fait des grands modes vers les petits modes.

$\frac{a}{2\pi}$	0.25	.49	.49	.49	.40	.40	.30	.25
$\frac{b}{2\pi}$	.0	.0	.10	.20	.35	.40	.30	.25
$100 \langle (\pi + \frac{1}{2} w ^2)w_1 \rangle$	-.06	-.2	-.2	-.1	-.3	-.3	-.9	-.4
$100 \langle (\pi + \frac{1}{2} w ^2)w_2 \rangle$	.0	-.1	.1	-.1	-.3	-.2	-.8	-.6

Table 2.2.

Tabulation de  $\langle (\pi + \frac{1}{2}|w|^2)w_i \rangle$  pour quelques valeurs des paramètres a et b.  
 On constate que cette fonction reste petite par rapport à  $\langle w \otimes w \rangle$ .

Figure 2.1. : Lignes de courant de trois  $w$  calculées par moindres carrés en spectral et gradient conjugué à partir de trois  $w^0$  initiaux différents.

Figure 2.2. : Ligne de niveau des fonctions

$$F = \langle (\tilde{w}_1)^2 \rangle / \langle |\tilde{w}'|^2 \rangle \text{ et } G = \langle \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \rangle / \langle |\tilde{w}'|^2 \rangle$$

en fonction des paramètres  $a$  et  $b$  de la matrice  $C = \sqrt{\theta} T \sqrt{\theta}$ .

La ligne discontinue représente le chemin qu'il faut parcourir pour tracer  $\langle w_1 w_2 \rangle$  en fonction du seul paramètre  $\alpha$  intervenant dans  $C$  pour les écoulements monodimensionnels (cf. (3.3)) lorsque  $\alpha$  varie de  $0$  à  $-\infty$ .

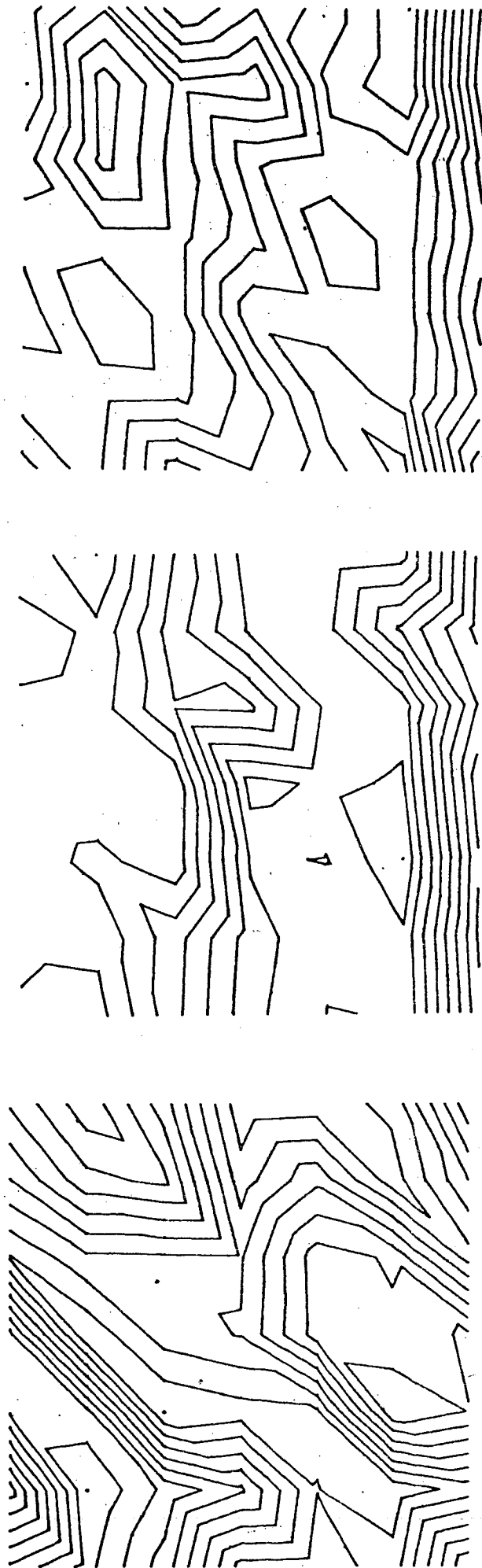


Fig. 2.1.

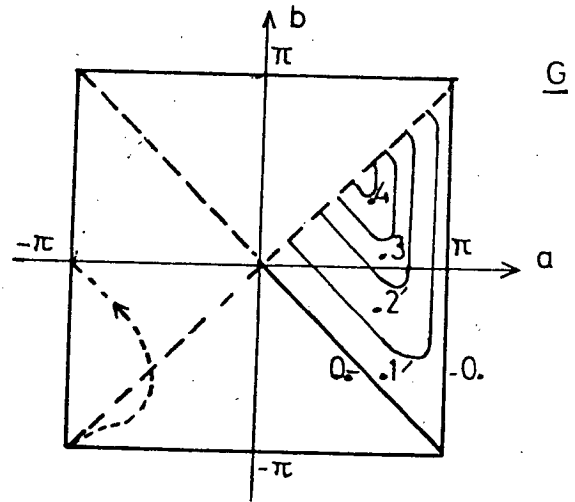
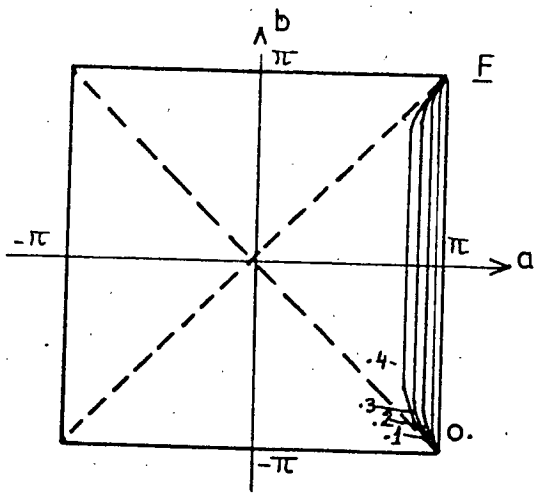


Fig. 2.2.

Chapitre 3 : Ecoulements dans une conduite

1. Ecoulement monodimensionnel

a) étude analytique

On suppose dans ce paragraphe que  $u$  est de la forme

$$(1) \quad u(x,t) = (u_1(x_2,t), 0, 0)^t$$

L'équation (48) en  $\theta$  s'intègre à vue

$$(2) \quad \theta(x,t) = (x_1 - \int_0^t u_1(x_2,s) ds, x_2, x_3)^t$$

ce qui donne

$$(3) \quad \nabla\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c = \nabla\theta^t \nabla\theta = \begin{bmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où

$$(4) \quad \alpha = - \int_0^t u_{1,2}(x_2,s) ds$$

On déduit de (3) et de (46) que  $w$  ne dépend aussi que de  $x_2$  et  $t$  ce qui donne pour (49)

$$(5) \quad u_{1,t} + \langle w_1, w_2 \rangle_{,2} + p_{,1} = 0$$

$$(6) \quad \langle w_2, w_2 \rangle_{,2} + p_{,2} = 0$$

$$(7) \quad \langle w_3, w_2 \rangle_{,2} + p_{,3} = 0$$

On intègre (6) en  $x_2$  :

$$(8) \quad p = - \langle w_2, w_2 \rangle + p^0(x_3, x_1, t)$$

et on reporte (8) dans (5) et (7) pour obtenir

$$(9) \quad p = - \langle w_2 w_2 \rangle + \langle w_3 w_2 \rangle_{,2} x_3 + p^1(t)$$

et la condition de compatibilité

$$(10) \quad \langle w_3 w_2 \rangle_{,22} = 0$$

Donc finalement (5) est réduit à

$$(11) \quad u_{1,t} + [q \langle w'_1 w'_2 \rangle]_{,2} = 0$$

L'équation sur l'énergie (43) se réduit aussi à

$$(12) \quad q_{,t} + u_{1,2} q \langle w'_1 w'_2 \rangle + [q^{3/2} \langle (\pi' + \frac{1}{2} |w'|^2) w' \rangle]_{,2} = 0$$

D'après (46) on peut poser

$$(13) \quad \langle w'_1 w'_2 \rangle = m(\alpha)$$

et d'après le chapitre 2 on peut supposer qu'en première approximation

$$(14) \quad \langle \pi' + \frac{1}{2} |w'|^2 w' \rangle \approx 0$$

Alors comme d'après (4)  $u_{1,2} = -\alpha_{,t}$ , l'équation (12) s'intègre à vue

$$(15) \quad q(x_2, t) = q^0(x_2) \exp[M(\alpha)]$$

avec

$$(16) \quad M(\alpha) = \int_0^\alpha m(\beta) d\beta$$

On reporte (15) dans (11) en posant

$$(17) \quad V = \int_0^t u_1(x_2, \sigma) d\sigma, \quad g(-\alpha) = m(\alpha) \exp M(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \exp M(\alpha)$$

ce qui donne (cf. (41))

$$(18) \quad \left[ \begin{array}{l} V_{,tt} + [q^0(x_2) g(V_{,2})]_{,2} = 0 \\ V_{,t}(x_2, 0) = u_1^0, \quad V(x_2, 0) = 0 \\ q^0 V \text{ donné en } x_2 = 0 \text{ et } x_2 = L \end{array} \right.$$

Pour que ce système soit bien posé il faut que

$$(19) \quad 0 \leq g(-\alpha) = \alpha m(\alpha) \exp M(\alpha).$$

Donc d'après (13)  $\langle w'_1 w'_2 \rangle$  doit être positif. D'après cette théorie les écoulements purement monodimensionnels avec "turbulence" bidimensionnelle sont instables en général puisque les tabulations de G dans la figure 2.2 donnent un signe négatif à  $\langle w'_1 w'_2 \rangle$ . La formule (2.13) montre qu'on ne peut pas choisir tous les  $\langle w_i w_j \rangle$  positifs ; mais si dans (2.13) on prend  $k_3 = 0$ , (1.a) est satisfait et

$$(20) \quad \langle w'_1 w'_2 \rangle = -\frac{1}{2} k_2 (k_1 + \alpha k_2) / (k_2^2 + (k_1 + \alpha k_2)^2) = -\frac{k_1 k_2}{2|k|^2} - \alpha \frac{(k_2^2 - k_1^2) k_2^2}{2|k|^4} + o(\alpha)$$

En choisissant  $|k_2| < |k_1|$  c'est-à-dire une condition initiale qui oscille plus en  $x_1$  qu'en  $x_2$ , on obtient un écoulement monodimensionnel avec "turbulence" tridimensionnelle stable à l'origine ayant des oscillations :

$$(21) \quad u_1(x_2, t) = \sin \frac{\pi}{L} (x_2 + t \sqrt{q^0 \frac{(k_1^2 - k_2^2) k_2^2}{2|k|^4}}) + \sin \frac{\pi}{L} (x_2 - t \sqrt{q^0 \frac{(k_1^2 - k_2^2) k_2^2}{2|k|^4}})$$

(lorsque  $q^0$  est constant,  $u^0$  est approprié, et  $u|_{\Gamma} = 0$ )

#### b) étude numérique

Pour étudier l'effet de stabilisation d'une viscosité turbulente éventuelle on a résolu numériquement le système

$$(22) \quad \begin{aligned} V_{,tt} + qm(-V_{,x}) - \nu V_{,txx} &= 0 \\ q_{,t} + V_{,xt} qm(-V_{,x}) - \mu q_{,xx} &= 0 \quad \text{dans } ]0, 1[ \times ]0, T[ \end{aligned}$$

Ce système correspond aux équations (11), (12), (14) dans lesquelles on a rajouté une dissipation visqueuse  $\nu u_{,xx}$  et  $\mu q_{,xx}$  dans chacune des équations.

On prend comme conditions aux limites :

$$(23) \quad \begin{aligned} V(x, 0) &= 0, \quad V_{,t}(x, 0) = \sin(\pi x), \quad q(x, 0) = q^0 \\ q(0, t) &= q(1, t) = q^0, \quad v(0, t) = v(1, t) = 0 \end{aligned}$$

Pour  $\langle w'_1 w'_2 \rangle$  on prend une fonction ayant la même forme que celle donnée par la figure 2.2 :



$$m(-v_{,x}) = 2 v_{,x} / (1 + v_{,x}^2)$$

On utilise un schéma aux différences finies explicite en temps, centré :

$$(24) \quad v_i^{n+1} = 2v_i^n - v_i^{n-1} + \frac{(\Delta t)^2}{\Delta x} \left[ m \left( \frac{v_i^n - v_{i+1}^n}{\Delta x} \right) \left( \frac{q_{i+1}^n + q_i^n}{2} \right) - m \left( \frac{v_{i-1}^n - v_i^n}{\Delta x} \right) \left( \frac{q_i^n + q_{i-1}^n}{2} \right) \right] \\ + v \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \left[ (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) - (v_{i+1}^{n-1} - 2v_i^{n-1} + v_{i-1}^{n-1}) \right]$$

$$(25) \quad q_i^{n+1} = q_i^n + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n) - \frac{q_i^n}{2\Delta x} (v_{i+1}^n - v_{i-1}^n - (v_{i+1}^{n-1} - v_{i-1}^{n-1})) + m \frac{(v_{i-1}^n - v_{i+1}^n)}{2\Delta x}$$

toutefois on utilise la solution explicite de (22.b) lorsque  $\mu = 0$  :

$$(26) \quad q = q^0 / (1 + v_{,x}^2)$$

Les résultats numériques des figures 1-4 montrent que

1. Lorsque  $\mu = 0$  ou  $v = 0$  il y a pour chaque  $q^0$  un  $v(q^0)$  ou un  $\mu(q^0)$  en dessus duquel le système est stable (il semble qu'on puisse quand même développer des singularités).
2. Lorsque  $\mu$  et  $v$  sont non nuls le système semble être stable au dessous d'une valeur critique  $q^0(\mu, v)$ .
3. Lorsque  $v = \mu = 0$  le système est instable probablement mais la diffusion numérique rend cette instabilité assez diffuse; tout dépend probablement du comportement de  $m(\alpha)$  lorsque  $\alpha \rightarrow \infty$ .

### Conclusions.

Quoique le système soit théoriquement instable, la viscosité numérique permet d'obtenir des solutions stables pour des niveaux de turbulence faible.

Ce modèle ne donne pas les profils aplatis des écoulements dans les conduites car il semble que ceci sera dû à l'effet de viscosité turbulente non linéaire étudié au chapitre 4.

Compte tenu du fait que les couches limites ne sont pas traitées explicitement, le modèle donne un comportement d'énergie turbulente  $x \rightarrow q(x, T)$  creusé au centre, conforme à l'expérience.

Profils de vitesse et d'énergie pour des écoulements monodimensionnels dans une conduite.

Instant final  $T = 2$

Vitesse horizontale  $u$

Energie cinétique turbulente  $\ell$

Figure 3.1. (en haut à gauche)

$x \rightarrow u(x,2)$  et  $t \rightarrow u(\frac{1}{2},t)$  dans le cas sans viscosité et pour  $q^0 = 0.01$ , sans viscosité ( $\nu = \mu = 0$ ). On remarque que la solution est numériquement stable lorsque  $t \rightarrow \infty$  mais qu'une singularité apparaît au milieu.

Figure 3.2. (en haut à droite)

$x \rightarrow u(x,2)$  et  $t \rightarrow u(\frac{1}{2},t)$  dans le cas sans viscosité avec  $q^0 = 1.0$ . En plus de la singularité la solution tend vers l'infini en  $t$ .

Figure 3.3. (en bas à gauche)

$x \rightarrow u(x,2)$   $t \rightarrow u(\frac{1}{2},t)$  et  $x \rightarrow \ell(x,2)$  avec  $q^0 = 0.01$  et une viscosité  $\mu = 0.1$  dans l'équation d'énergie (pas de viscosité en  $u$  :  $\nu = 0$ ).

On constate la disparition de la singularité sur  $\ell$  mais la singularité sur  $u$  reste.

Figure 3.4. (en bas à droite).

$x \rightarrow u(x,2)$ ,  $t \rightarrow u(\frac{1}{2},t)$  et  $x \rightarrow \ell(x,2)$  dans le cas  $q^0 = 0.01$  avec une viscosité  $\mu = 0.1$  dans l'équation d'énergie et une viscosité  $\nu = 0.1$  dans l'équation de la vitesse  $u$ . On constate la disparition de la singularité.

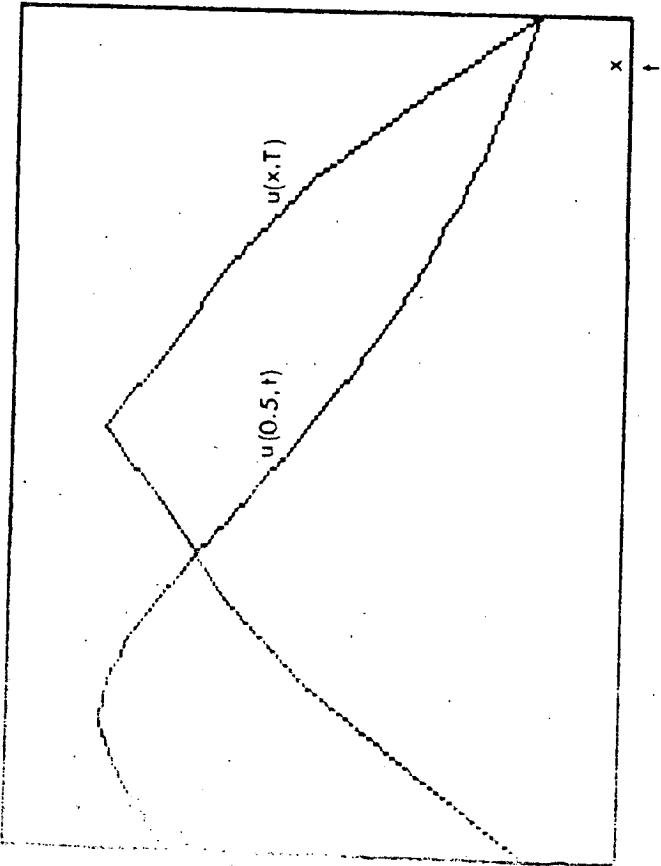


Fig. 3.1.

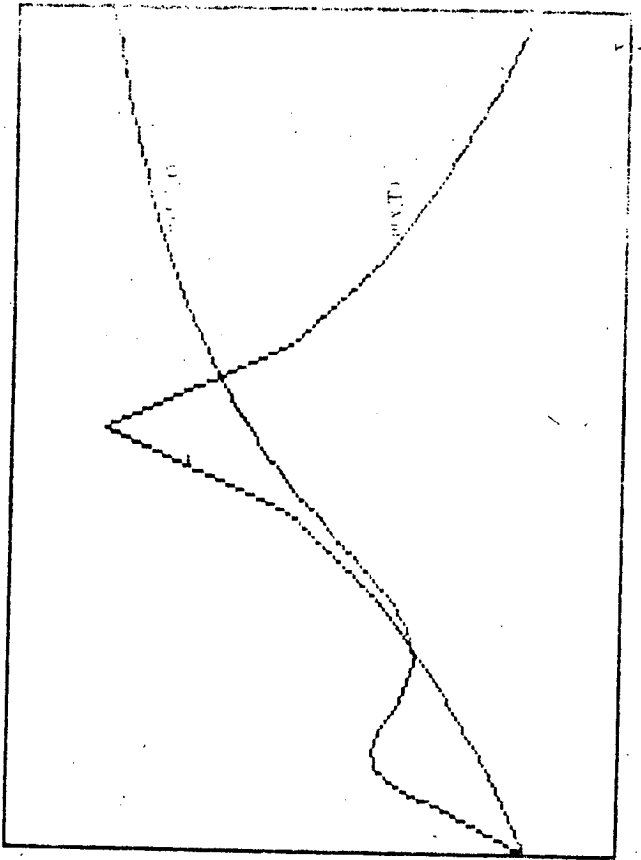


Fig. 3.2.

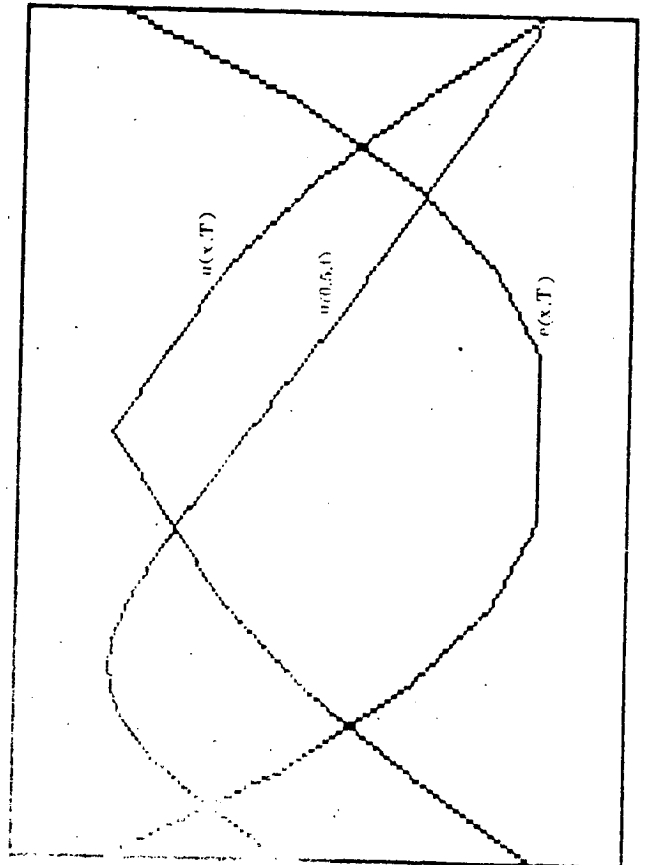


Fig. 3.3.

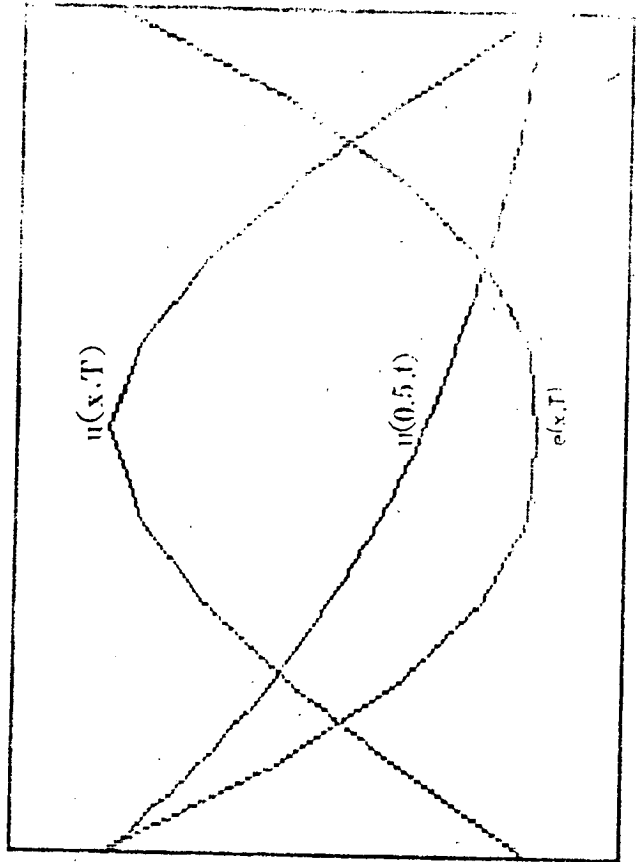


Fig. 3.4.

2. Écoulements bidimensionnels avec turbulence bidimensionnelle

Sur un domaine de la forme

$$(27) \quad \Omega = ]0, L[ \times ]0, 1[ \times \mathbb{R}$$

On va chercher des solutions de la forme

$$(28) \quad u(x, t) = (u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), 0)^t$$

L'équation sur la 3e composante de (1.49 a) s'écrit

$$(29) \quad p_{,3} + (q \langle w'_1 w'_3 \rangle)_{,1} + (q \langle w'_2 w'_3 \rangle)_{,2} = 0.$$

Pour que l'écoulement reste bidimensionnel il faut que  $(q \langle w'_1 w'_3 \rangle)_{,1} + (q \langle w'_2 w'_3 \rangle)_{,2}$  soit indépendant de  $x_1, x_2$  c'est-à-dire pratiquement

$$(30) \quad \langle w'_1 w'_3 \rangle = \langle w'_2 w'_3 \rangle = 0$$

Dans ces conditions on peut écrire (49) en fonction de courant  $\psi$  et en vorticité  $\omega$  :

$$(31) \quad u = \nabla \times \psi = (\psi_{,2}, -\psi_{,1}, 0)^t$$

$$(32) \quad -\Delta \psi = \omega \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[$$

$$(33) \quad \omega_{,t} + u \nabla \omega + \nabla \times \nabla \cdot (q \langle w' \otimes w' \rangle) = 0$$

Afin d'étudier le phénomène sur une longue échelle de temps on a pris les conditions aux limites suivantes :

$$(34) \quad \omega(x, 0) = \omega^0(x), \quad \psi(0, x_2, 0) = \psi^0(x_2), \quad \psi(x_1, 0, t) = 0, \quad \psi(x_1, 1, t) = 1$$

$$(35) \quad \psi, \omega \quad x_1\text{-périodique sur } ]0, L[.$$

Les équations pour  $\theta$  sont

$$(36) \quad \theta = \theta' + x \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[$$

$$(37) \quad \theta'_{,t} + u \nabla \theta' = -u$$

$$(38) \quad \theta'(x, 0) = 0, \quad \theta'(0, x_2, t) = 0$$

(Il n'est pas possible de demander  $\theta'$   $x_1$ -périodique car cela conduit à une ligne de choc, correspondant à l'entrée du tube, se déplaçant à la vitesse  $u$ )

Les fonctions  $F$  et  $G$  étant données par la figure 2.2 on a

$$(39) \quad \langle w_1'^2 \rangle = [(\theta_{2,2}^2 - \theta_{1,2}^2)F + \theta_{1,2}^2 - 2\theta_{1,2} \theta_{2,1}G] \lambda$$

$$(40) \quad \langle w_2'^2 \rangle = [(\theta_{2,1}^2 - \theta_{1,1}^2)F + \theta_{1,1}^2 - 2\theta_{1,1} \theta_{2,1}G] \lambda$$

$$(41) \quad \langle w_1' w_2' \rangle = [(\theta_{1,1} \theta_{1,2} - \theta_{2,1} \theta_{2,2})F - \theta_{1,1} \theta_{1,2} + (\theta_{1,1} \theta_{2,2} + \theta_{1,2} \theta_{2,1})G] \lambda$$

$$(42) \quad \lambda = 2 / [(\theta_{2,2}^2 + \theta_{2,1}^2)F + (\theta_{1,2}^2 + \theta_{1,1}^2)(1-F) - 2G(\theta_{2,2}\theta_{1,2} + \theta_{1,1}\theta_{2,1})]$$

Enfin les équations pour  $q$  avec l'approximation (2.14) :

$$(43) \quad \ell_{,t} + u \nabla \ell + \langle w_i' w_j' \rangle u_{i,j} = 0$$

$$(44) \quad \ell(x,0) = \ell^0, \quad \ell \text{ } x_1\text{-périodique sur } ]0, L[$$

$$(45) \quad q = \exp(\ell)$$

### Discrétisation

Dans les équations (33), (37), (43) on a utilisé l'approximation suivante :

$$(46) \quad \phi_{,t} + u \nabla \phi = (\phi^{n+1}(x) - \phi^n(x - u^n(x) \Delta t)) / \Delta t$$

qui correspond à une discrétisation différence finie de la dérivée totale de  $\phi$ . Ensuite si  $\Pi$  désigne l'opérateur d'interpolation  $Q^1$  (bilinéaire) avec les 4 sommets les plus proches, on obtient un schéma type "Lax-Wendroff" inconditionnellement stable

$$(47) \quad (\phi_{,t} + u \nabla \phi)_{ij} \approx (\phi_{ij}^{n+1} - \Pi \phi^n(x_{ij} - u_{ij}^n \Delta t)) / \Delta t$$

où  $ij$  désigne l'évaluation en  $x_{ij} = (i\Delta x_1, j\Delta x_2)^t$ .

On note donc par

$$(48) \quad \Pi_{ij}^n \phi^n = \Pi \phi(x_{ij} - u_{ij}^n \Delta t)$$

et on obtient le schéma explicite suivant (dans le cas  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$ ) :

$$(49) \quad 4 \psi_{ij}^{n+1} - \psi_{i+1j}^{n+1} - \psi_{ij+1}^{n+1} - \psi_{i-1j}^{n+1} - \psi_{ij-1}^{n+1} = \omega_{ij}^{n+1} (\Delta x)^2$$

$$(50) \quad u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2} (\psi_{ij+1}^{n+1} - \psi_{ij-1}^{n+1}, \psi_{i-1j}^{n+1} - \psi_{i+1j}^{n+1}) / \Delta x$$

$$(51) \quad \omega_{ij}^{n+1} = \Pi_{ij}^n \omega^n - \Delta t (\nabla \times \nabla)_{ij} \cdot q^n \langle w' \otimes w' \cdot ((\nabla_{ij} \theta^t \nabla_{ij} \theta)^n) \rangle$$

$(\nabla \times \nabla)_{ij}$  = approximation centrée différence finie de  $\nabla \times \nabla$  en  $x_{ij}$ .

$$(52) \quad \theta_{ij}^{n+1} = \Pi_{ij}^n \theta^n + u_{ij}^{n+1} \Delta t$$

$$(53) \quad \ell_{ij}^{n+1} = \Pi_{ij}^n \ell^n - \Delta t \langle w'_k w'_m \rangle \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \right)_{ij} u_k^{n+1}$$

$$(54) \quad q_{ij}^{n+1} = \exp \ell_{ij}^{n+1}$$

Le système linéaire (49) est résolu par la méthode de surrelaxation.

#### Remarque

1. La formulation (37) pour  $\theta$  est plus stable numériquement sur ce problème.
2. La formulation (45) pour  $q$  a l'avantage de conserver après discrétisation la propriété importante pour la stabilité :  $q > 0$ .

#### Expérience 1 (figure 5)

Pour une discrétisation  $32 \times 16$  un pas de temps de 0.1,  $L = 3.0$ , et les conditions initiales

$$(55) \quad q^0 = 0.1,$$

$\omega^0, \psi^0$  tels que le champ de vitesse soit parabolique  $u = (x_2(1-x_2), 0, 0)$ , i.e.

$$(56) \quad \psi^0 = x_2^2 (0.5 - x_2/3), \quad \omega^0 = 1 - 2x_2,$$

On a calculé la solution du problème jusqu'à explosion du calcul. Ce problème est identique à l'écoulement monodimensionnel du paragraphe précédent qui est instable. On voit que l'écoulement moyen se ralentit et devient instable

lorsqu'il passe par zéro où il devient brutalement bidimensionnel mais le schéma numérique ne résiste pas à ce changement et explose.

Expérience 2 (Figure 6-9).

Afin d'étudier les effets de  $w$  sur les larges structures on a choisi d'ajouter à  $w^0$  une ligne de vortex ponctuels

$$(57) \quad w^0 = 1 - 2x_2 + \sum_i^{32} \delta(x_p^i) w_p$$

Pour intégrer (33) on a décomposé  $w$  en deux parties : une partie continue  $w_c(x,t)$  et une partie vortex ponctuels  $w_p(x,t)$ . La partie  $w_c$  est intégrée avec le schéma (51) et les conditions initiales (56). La partie  $w_p$  est intégrée par la méthode des vortex :

$$(58) \quad w_p^{n+1} = \sum_i^{32} \delta(x_p^i + \Delta t u(x_p^i)) w_p$$

On a choisi  $w_p = 10.0$  dans (57), les autres paramètres ont la même valeur sauf  $q^0$ .

La figure 6 montre d'abord l'évolution du phénomène sans turbulence ( $q^0 = 0$ ) ; l'enroulement de la ligne de vortex sur elle-même s'effectue lentement.

La figure 7 montre le même phénomène avec le même pas de temps mais  $q^0 = 0.005$ . L'enroulement est beaucoup plus rapide et une onde de grande amplitude (vague) apparaît.

La figure 8 montre aussi le même phénomène mais avec  $q^0 = 0.05$  ; le phénomène est numériquement instable.

Enfin on trouvera dans les figures 9 et 10 l'évolution de la vorticité continue  $w_0$  et de l'énergie cinétique  $q$  correspondant au cas de calcul de la figure 7 mais avec 16 points de vortex au lieu de 32. On constate que l'énergie  $q$  décroît avec le temps sans jamais croître.

Expérience 3 (figure 11-12).

On étudie le même phénomène lorsque  $\langle w' \otimes w' \rangle$  est tabulé à partir de (2.13).

Conclusion

1. On retrouve les résultats des calculs monodimensionnels : stabilité numérique pour des petits  $q^0$  instabilité au dessus d'un seuil critique  $q_{\max}(\Delta x)$  ; lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$   $q_{\max} \rightarrow 0$ . La stabilité est donc due à la viscosité numérique.

2. Les figures 3.9 et 3.12 semblent indiquer que :

- l'énergie des petites structures 2-d dans un écoulement 2-d diminue
- l'énergie des petites structures 3-d dans un écoulement 2-d diminue en moyenne mais beaucoup plus lentement (diffusion numérique ?) et augmente de temps en temps.

Ce phénomène est conforme à l'expérience

3. Enfin le modèle de turbulence a un effet déstabilisateur très net ; il provoque plus tôt des phénomènes qualitativement corrects.

-1.04	-1.21	-0.14	-0.78
-0.56	-1.36	-1.57	-1.08
-0.56	-1.29	-0.52	-0.73
-1.25	-1.11	-0.37	-0.64
-1.35	-0.86	-0.48	-0.67
-1.14	-1.00	-0.90	-0.84
-0.93	-1.13	-1.37	-0.66
-1.17	-1.15	-0.32	-0.62

-0.21	-0.25	-0.61	-0.07
-1.08	-0.55	-0.78	-0.15
-1.57	-0.18	-0.05	-0.07
-1.63	-0.22	-0.01	-0.07
-1.66	-0.27	-0.02	-0.07
-1.64	-0.69	-0.04	-0.17
-1.51	-0.37	-1.49	-0.57
-0.15	-0.69	-0.49	-0.54

Table 3.1.

Valeurs de  $\log\left(\frac{q(x,T)}{q^0}\right)$  a  $T = 2$  dans la conduite

- à gauche avec le w bidimensionnel tabulé : en tout point q a diminué.
- à droite avec le w tridimensionnel analytique : il y a des points où  $q > q^0$ .



Écoulements d'Euler bidimensionnels  
dans une conduite avec condition périodique  
amont aval

1. Instabilité de l'écoulement monodimensionnel
  2. Etude de l'enroulement d'une nappe de vortex
- $\Delta t = 0.1$

Les figures se lisent de gauche à droite et de bas en haut.

Figure 3.5. (grille  $32 \times 16$ )

L'écoulement parabolique est instable dans le modèle turbulent. On constate bien un début d'oscillation; l'écoulement tend vers zéro puis au bout de 9 pas de temps ( $T = 0.9$ ) le code explose car l'écoulement devient brusquement bidimensionnel. Ici  $q^0 = 1.0$ .

Figure 3.6. (grille  $64 \times 32$ )

Evolution d'une nappe de 32 vortex dans un écoulement parabolique sans modèle de turbulence ( $q^0 = 0$ ).

Figure 3.7. (grille  $64 \times 32$ )

Même calcul qu'en 3.6 avec le modèle de turbulence et  $q^0 = 0.005$ . On note l'apparition d'oscillations à grande longueur d'onde en plus de l'enroulement des vortex et surtout de déclenchement du phénomène beaucoup plus tôt qu'en 3.6.

Figure 3.8. (grille  $64 \times 32$ )

Même calcul qu'en 3.7 avec  $q^0 = 0.05$ . Le calcul explose au bout de 10 pas de temps.

Figure 3.9. (grille  $32 \times 16$ )

Lignes de niveaux de l'énergie turbulente  $q$  aux temps 0, 0.1, 0.2, ... pour une ligne de 16 vortex. La disymétrie est due au sens des vortex. On note que l'énergie décroît pour devenir nulle.

Figure 3.10. (grille  $32 \times 16$ )

Lignes de niveaux de la vorticit e pour le m eme calcul qu'en 3.9.

Figure 3.11. (grille  $32 \times 16$ )

Evolution d'une ligne de 10 vortex avec le modèle de turbulence et  $\langle w' \otimes w' \rangle$  donné par (2.13) (calcul analytique sur une turbulence petite échelle 3-d) avec  $q^0 = 0.4$ . A comparer avec les points de vortex de la figure 3.9.

Figure 3.12. (grille  $3 \times 16$ )

Lignes de niveaux de  $q$  lorsque  $\langle w' \otimes w' \rangle$  est donné par (2.13),  $q^0 = 0.4$ . A comparer avec 3.9. On constate que  $q$  tend beaucoup moins vite vers zéro et qu'il croit en certains endroits parfois.

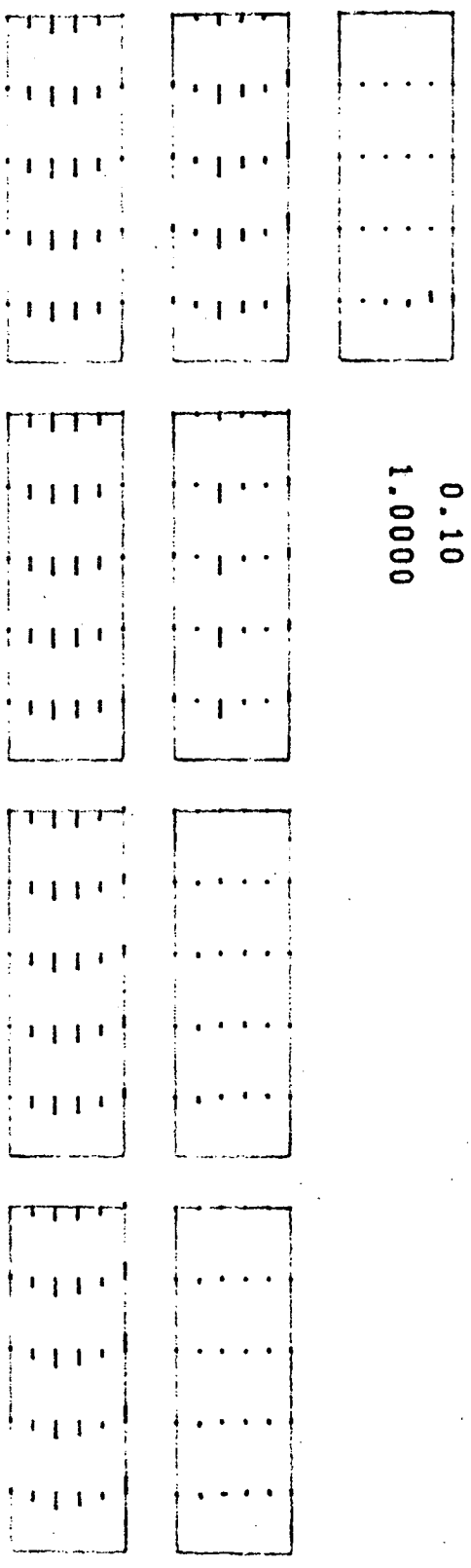


Fig. 3.5.

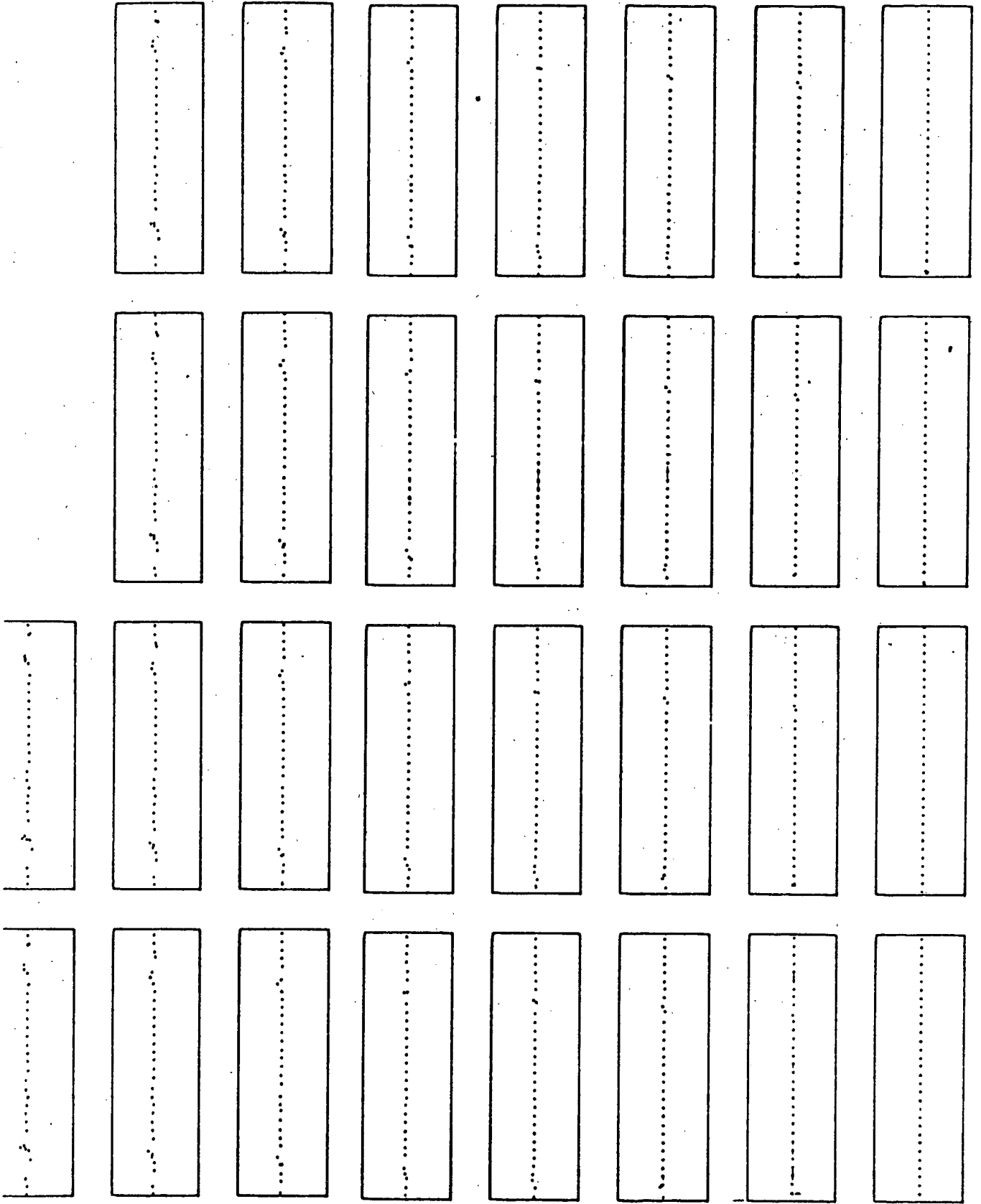


Fig. 3.6.

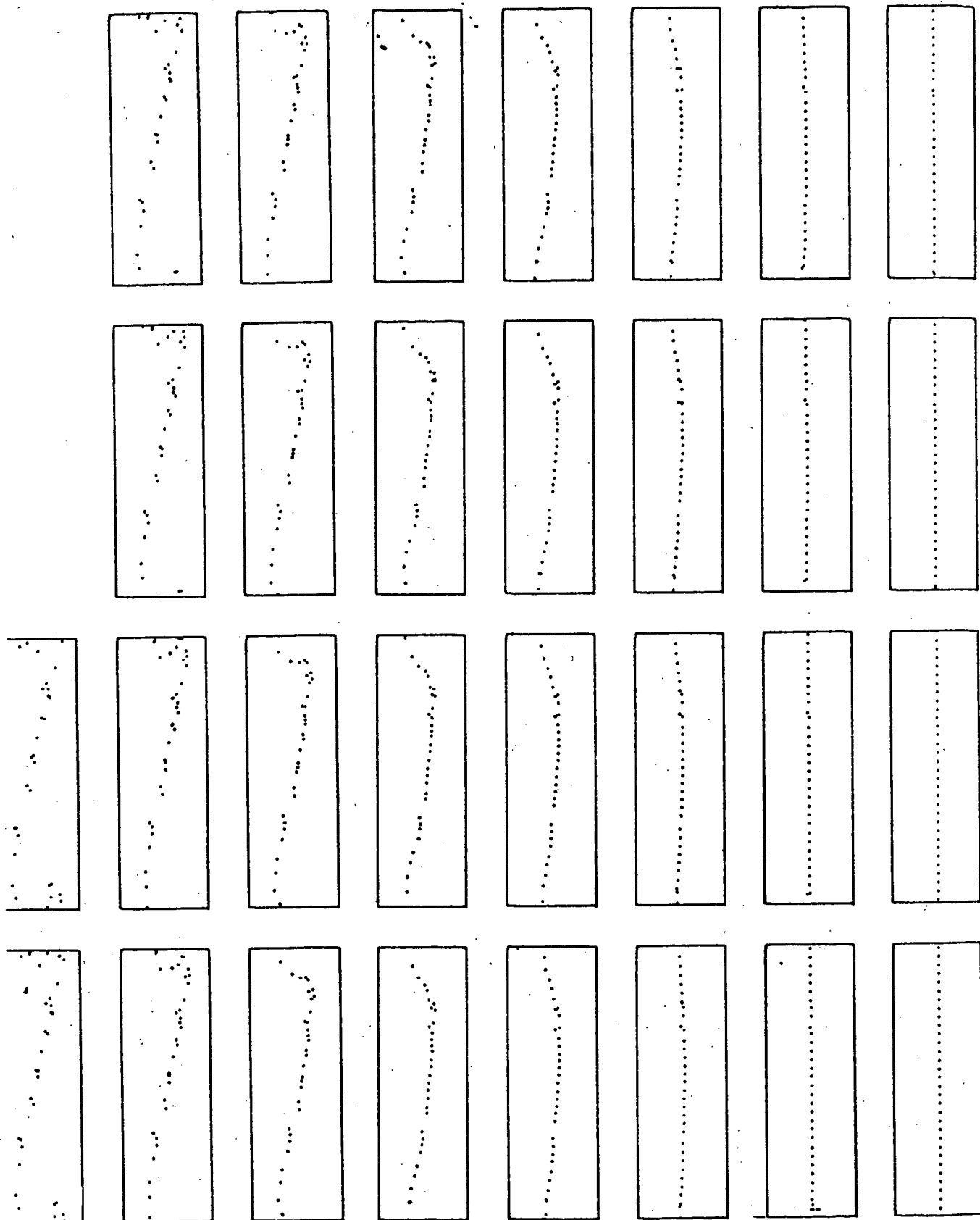


Fig. 3.7.

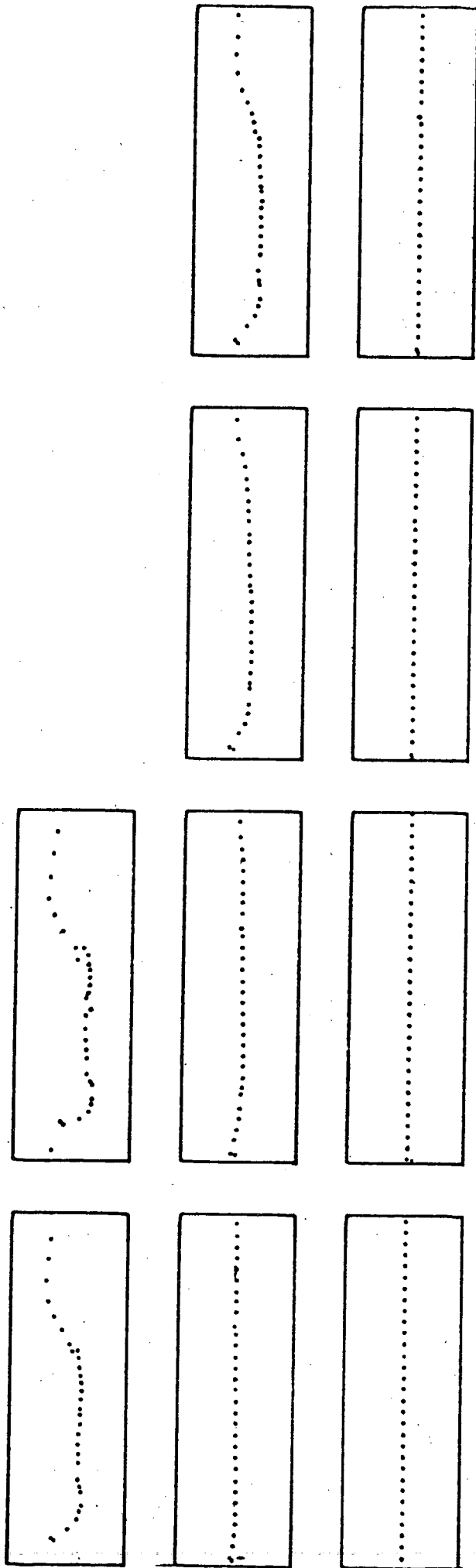


Fig. 3.8.

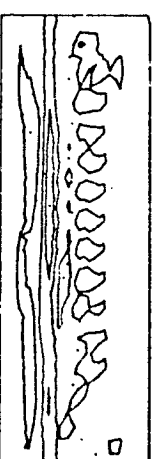
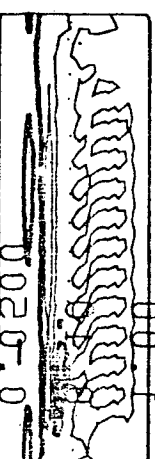
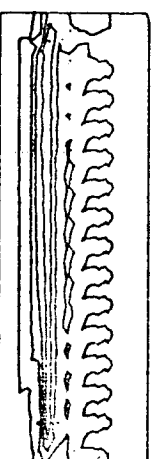
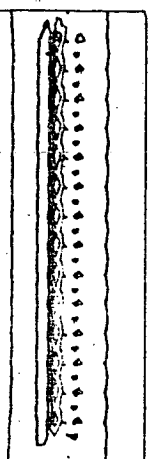
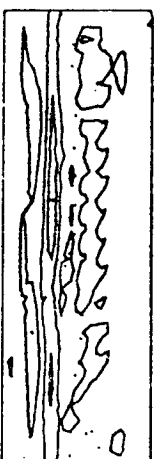
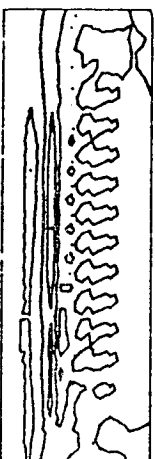
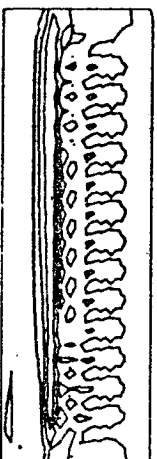
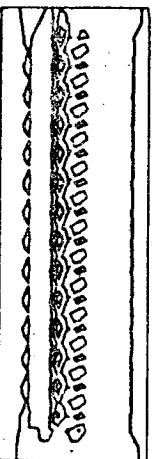
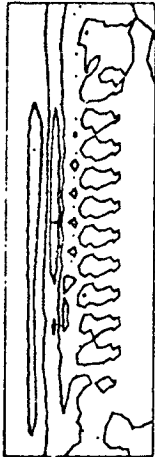
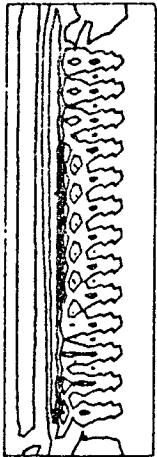
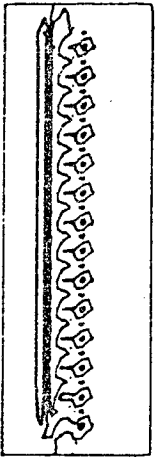
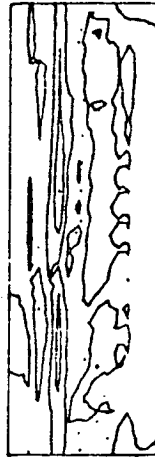
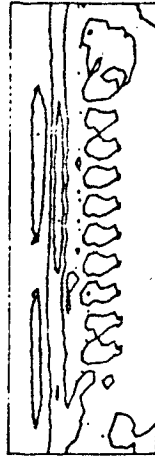
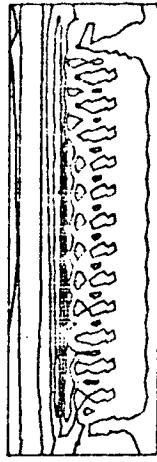
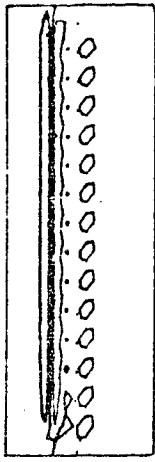
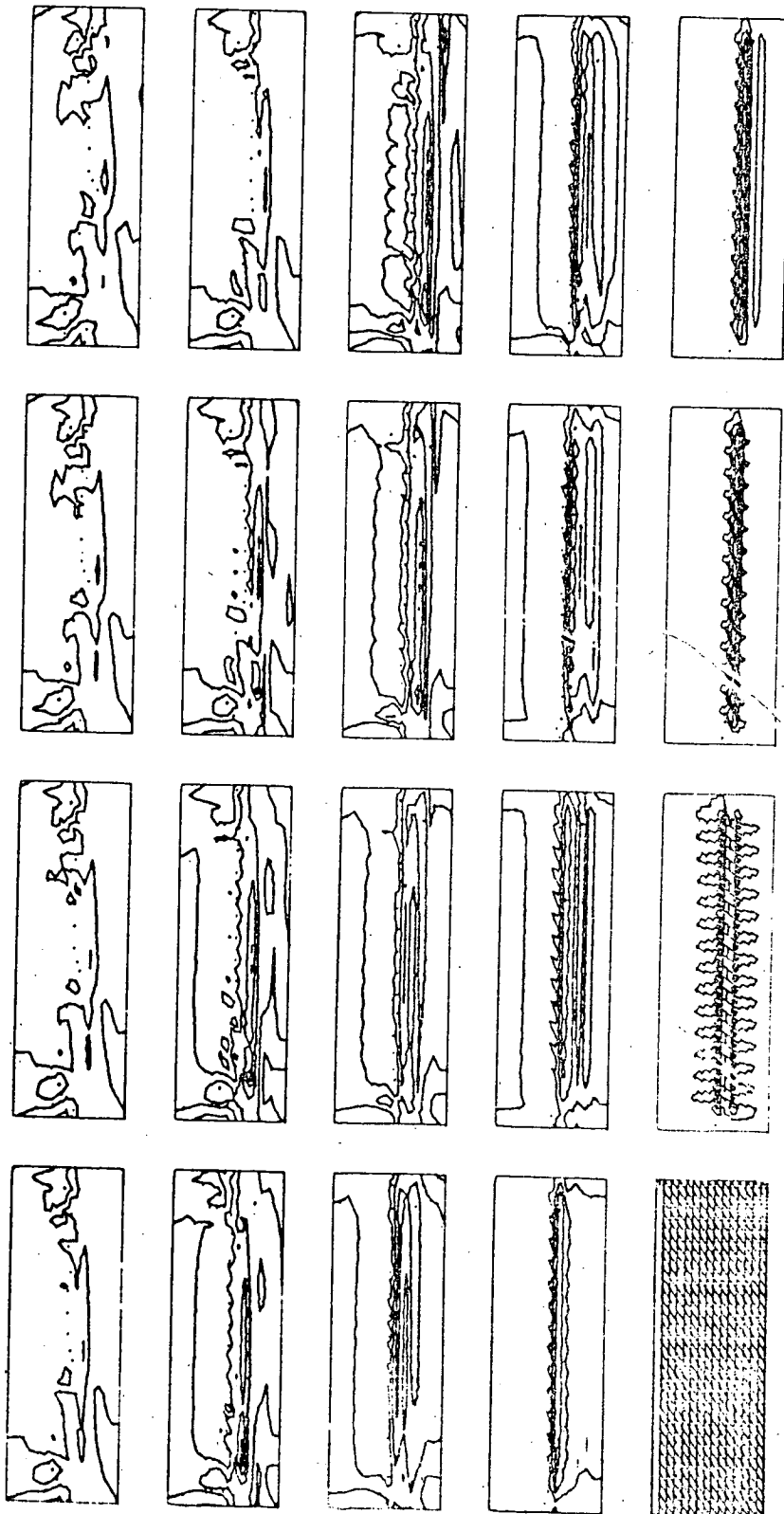


Fig. 3.9.

2.00

0.10

0.0500





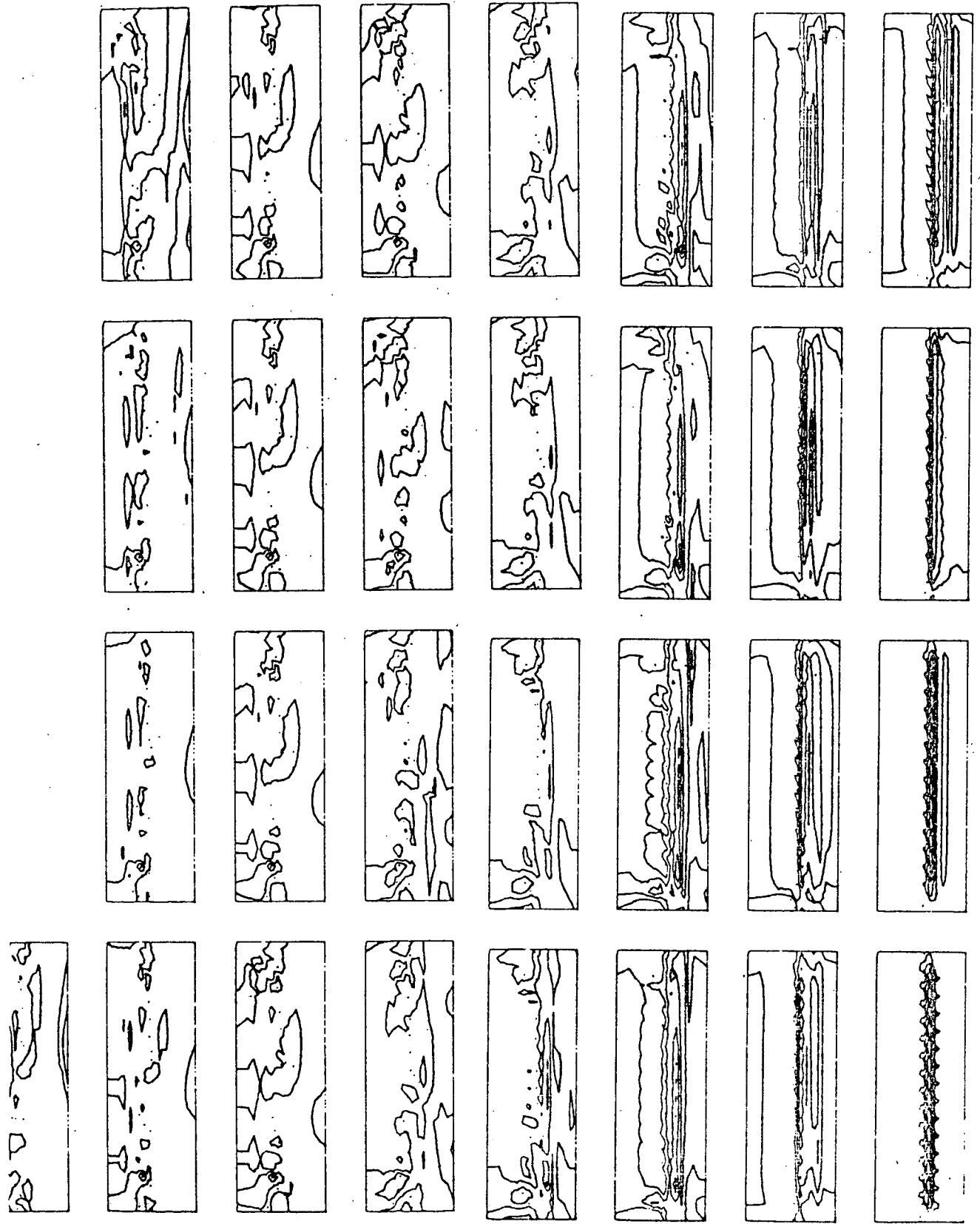


Fig. 3.10.

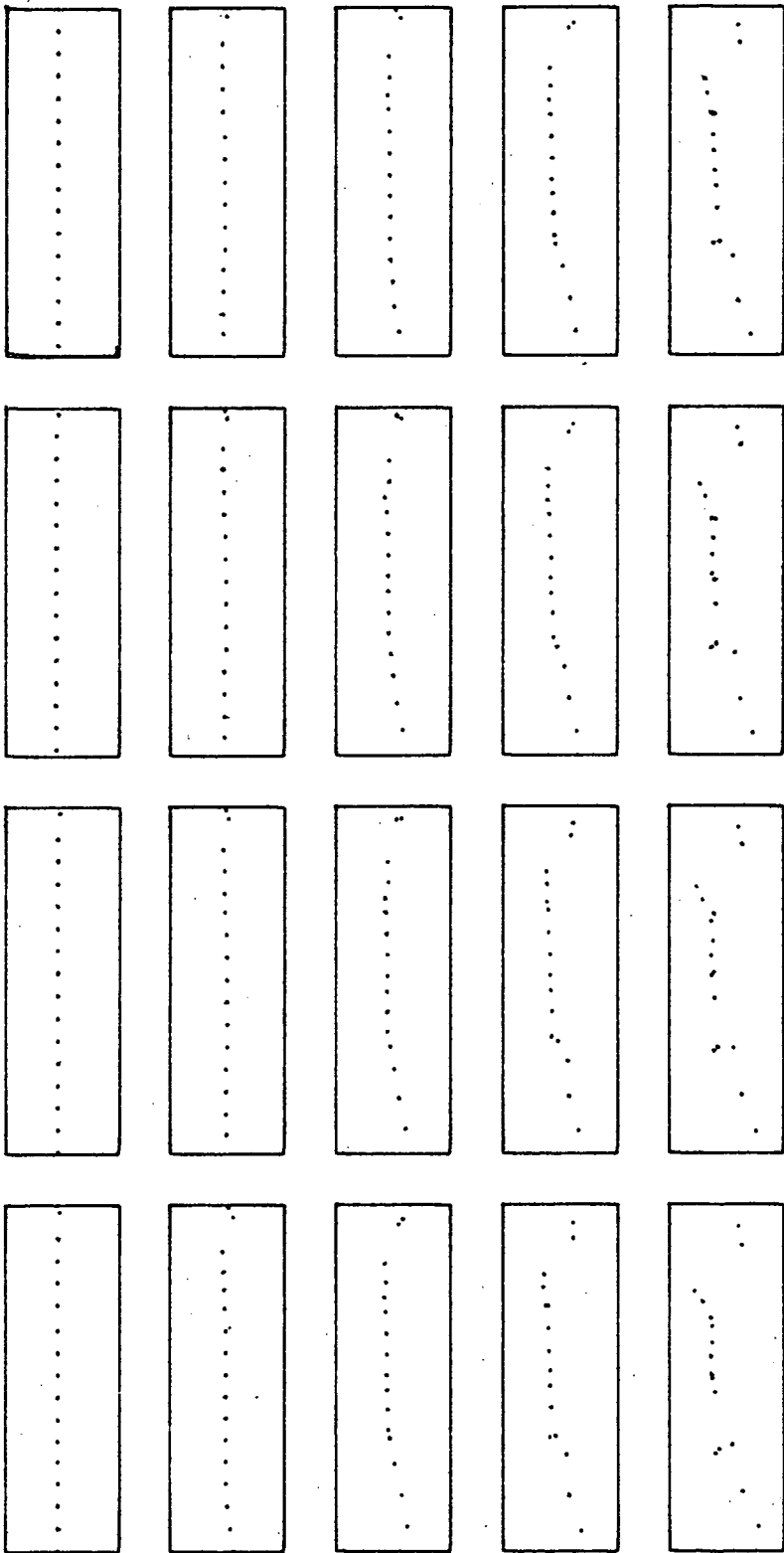
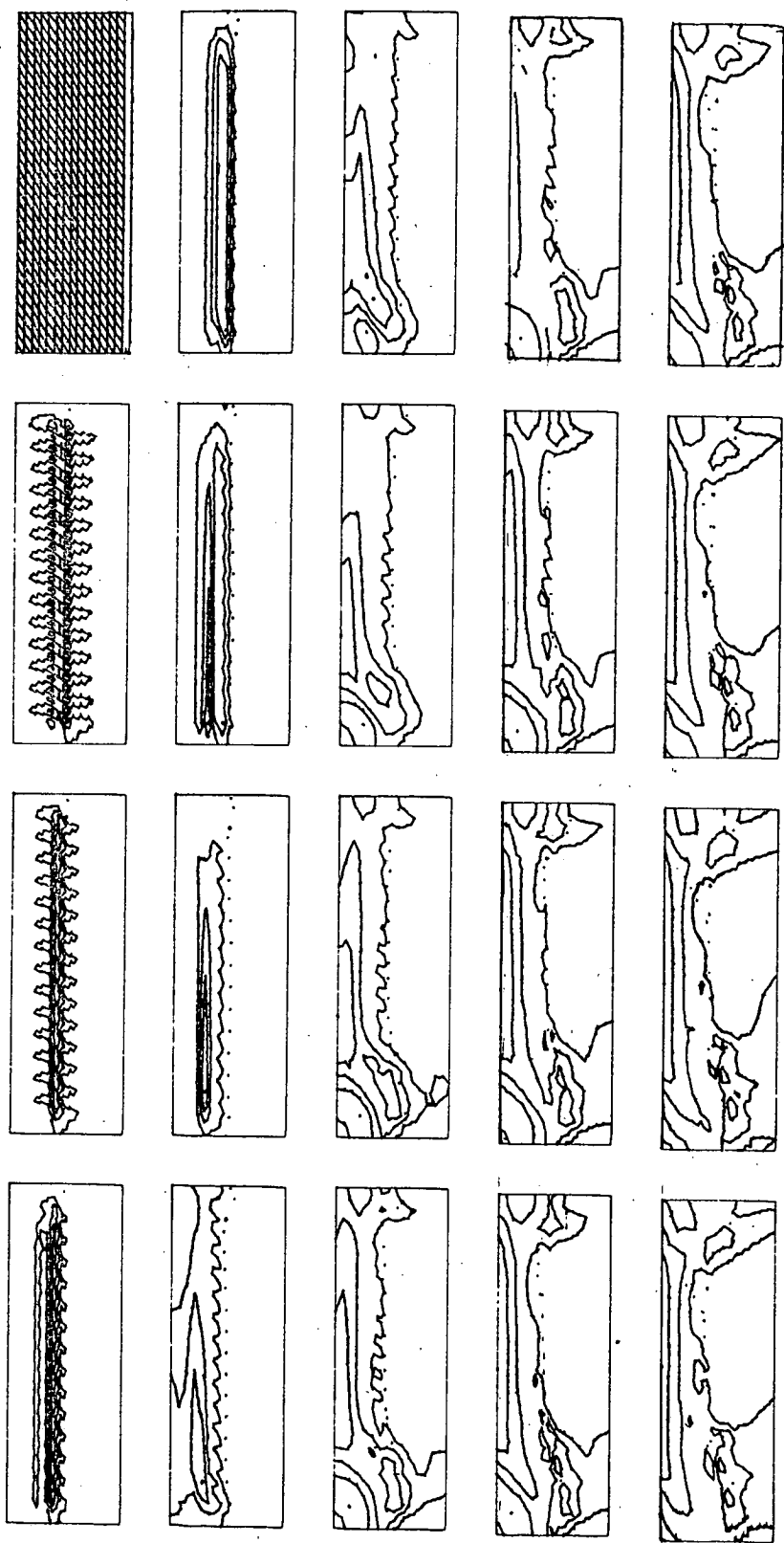


Fig. 3.11.



2.00  
0.10  
0.4000

Fig. 3.12.

### 3. Écoulements tridimensionnels

Comme dans Deardorff [ 8 ], Horiuti [ 9 ], Moin-Kim [10], on s'est intéressé à l'écoulement tridimensionnel entre deux plaques planes avec conditions périodiques amont-aval et latérales. Le domaine de calcul est donc une conduite à section rectangulaire.

$$(59) \quad \Omega = ]0,3.2[ \times ]0,0.8[ \times ]0,1[$$

Pour avoir une meilleure stabilité on a rajouté au modèle une viscosité turbulente

$$(60) \quad \nu_T = \mu (|\nabla u + \nabla u^t|), \quad \mu = 0.01 (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{2/3}$$

Le problème résolu est donc

$$(61) \quad u_{,t} + u \nabla u + \nabla p - \mu \nabla \cdot [ (|\nabla u + \nabla u^t|) \nabla u ] + \nabla \cdot [ q \langle w' \otimes w' \rangle ] = 0$$

$$(62) \quad \nabla \cdot u = 0$$

$$(63) \quad q_{,t} + u \nabla q + q \operatorname{tr}(\langle w' \otimes w' \rangle \nabla u) = 0$$

$$(64) \quad \theta'_{,t} + u \nabla \theta' = -u, \quad \theta = \theta' + x \quad \text{dans} \quad \Omega \times ]0, T[$$

avec les conditions aux limites

$$(65) \quad u(x,0) = x_3(1-x_3) \text{ ou } u^{3000}; \quad q(x,0) = q^0 x_3(1-x_3); \quad \theta'(x,0) = 0$$

$$(66) \quad u, q(x_1, x_2) \text{-périodique}; \quad \theta'(x_1, x_2, 0, t) = 0$$

$$(67) \quad u_1 = u_2 = u_{3,22} = 0 \quad \text{en} \quad x_3 = 0 \text{ et } x_3 = 1.$$

La dernière condition correspond à une condition de raccord avec la couche limite (cf. Deardorff [ 8 ]).

Comme dans Deardorff [ 8 ] le système est discrétisé en différences finies sur une grille décallée en  $u_1, u_2, u_3$  (staggered grid). La discrétisation en temps est explicite sauf sur la pression ; en prenant la divergence de l'équation (61) on obtient une équation de Laplace sur  $p$  ; une

condition de Neumann sur les 2 plaques  $x_3 = 0, 1$  est obtenue en prenant le produit scalaire de (61) avec la normale aux plaques ; ce problème est résolu en Fourier en  $x_1, x_2$  et en résolvant chaque système linéaire monodimensionnel en  $x_3$  par SSOR.

Le pas de temps est calculé par la condition de stabilité de Courant-Freidrichs, ce qui donne  $\Delta t = 0.0025$ .

La maille différences finies est  $32 \times 16 \times 20$ .

Après 3000 itérations sans modèle de turbulence ( $\phi^0 = 0$ ) on a réinitialisé l'algorithme et on a passé deux cas de calcul :

1.  $q^0 = 0$  pas de modèle de turbulence sauf  $v_T$
2.  $q^0 = 0.02$  (niveau correspondant aux mesures de Laufer [24] )

Les figures 13 à 25 montrent les résultats obtenus. On a utilisé le code de Horiuti [ 9] pour résoudre (61), (62) avec  $q = 0$  et on a rajouté les équations (63), (64).

#### Conclusion des calculs 3-d

Ces résultats spectaculaires sont malheureusement trop difficiles à interpréter pour tirer une conclusion quelconque. On voit bien que le modèle a un effet mais lequel ? Ce calcul pose donc le problème d'interprétation des résultats de calcul turbulent et l'urgence de calculer des corrélations doubles ou autres.

Écoulement 3-d entre 2 plaques planes avec condition  
périodique amont-aval et latérale

Les calculs sans le modèle de turbulence et les visualisations ont été faits par Horiuti [9]

Figure 3.13.

Visualisation de l'écoulement de l'itération de temps 3010 à 3080 avec  $q^0 = 0$  (sans le modèle de turbulence).

Une ligne de particules est marquée à l'entrée de la conduite à la section  $y = 0.40$ .

On représente une projection longitudinale (vue de derrière) et une projection latérale (vue de côté, le grand rectangle). Les dessins se lisent de bas en haut et de gauche à droite.

Figure 3.14.

Même chose que 3.13 mais avec le modèle de turbulence et  $q^0$  initialisé à 0.2 à l'itération 3000.

Figures 3.15 - 3.18.

Même chose que 3.14 mais sur les sections  $y = 0.01, 0.05; 0.1$  et  $0.5$ . Les particules sont remplacées par des lignes.

Figure 3.19

Quelques itérations de temps supplémentaires correspondants 3.15-3.18.

Figure 3.20.

Profil moyen d'énergie  $z \rightarrow q(z)$  à l'itération 3040.

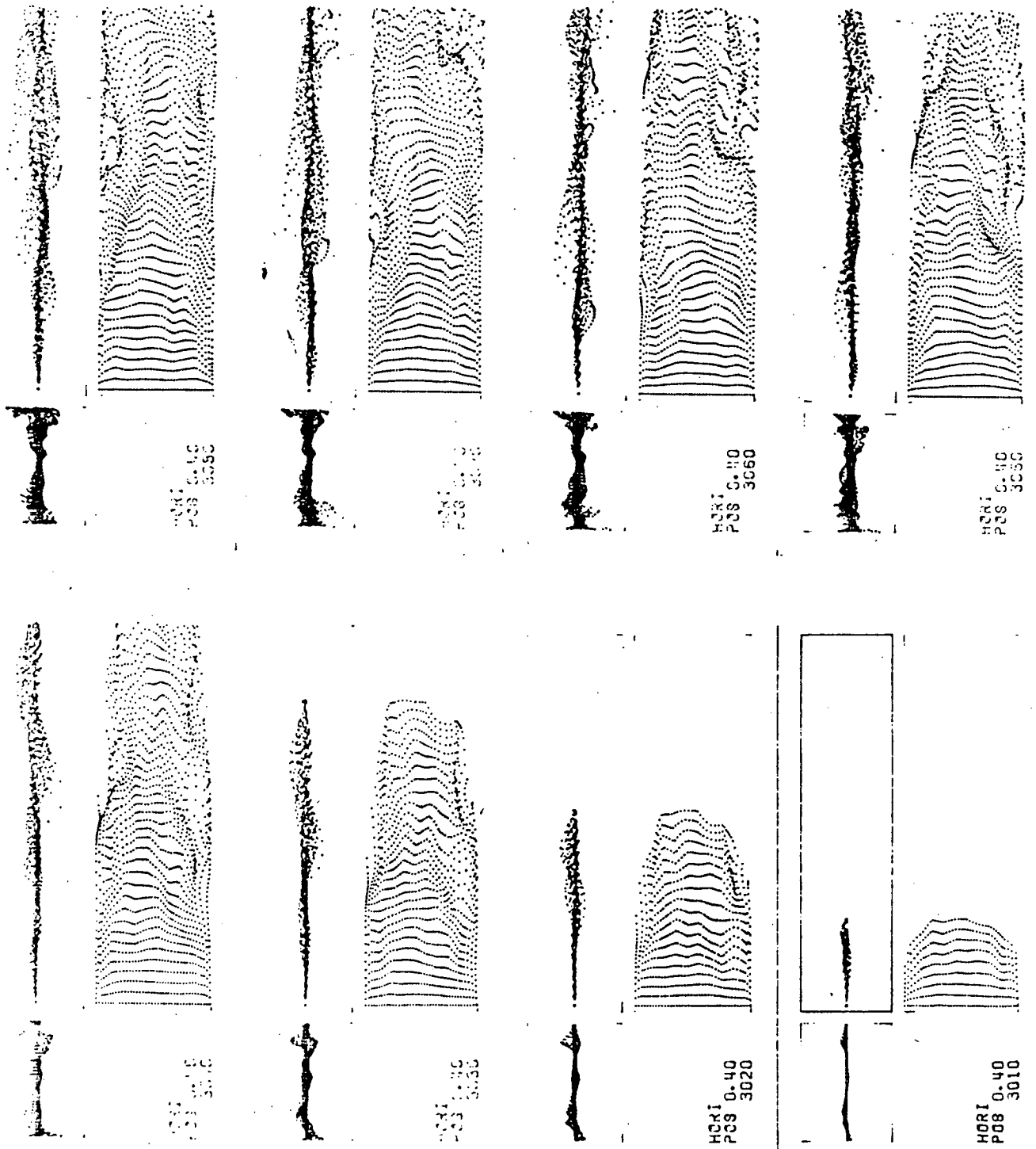


Fig. 3.13.

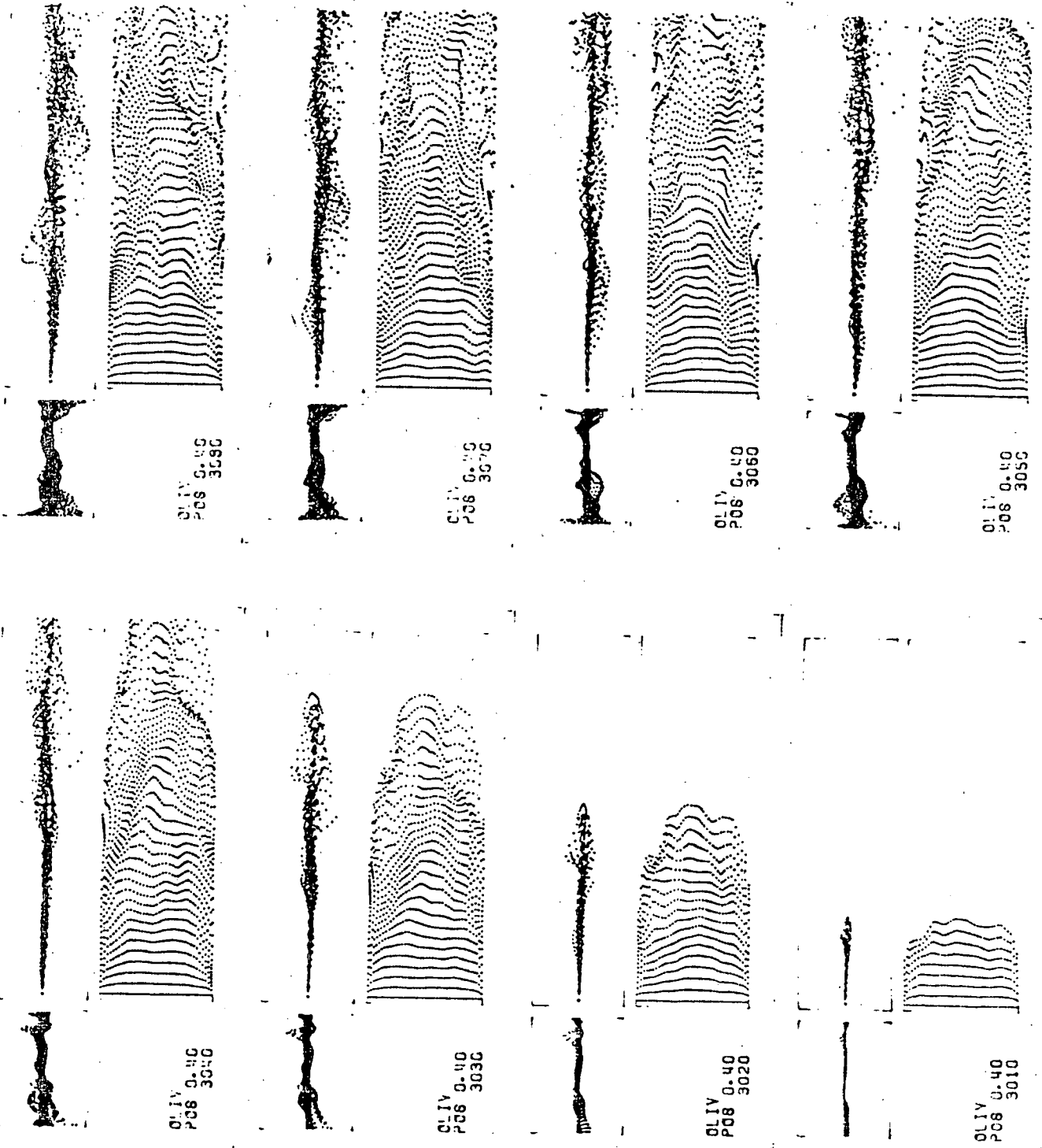


Fig. 3.14.



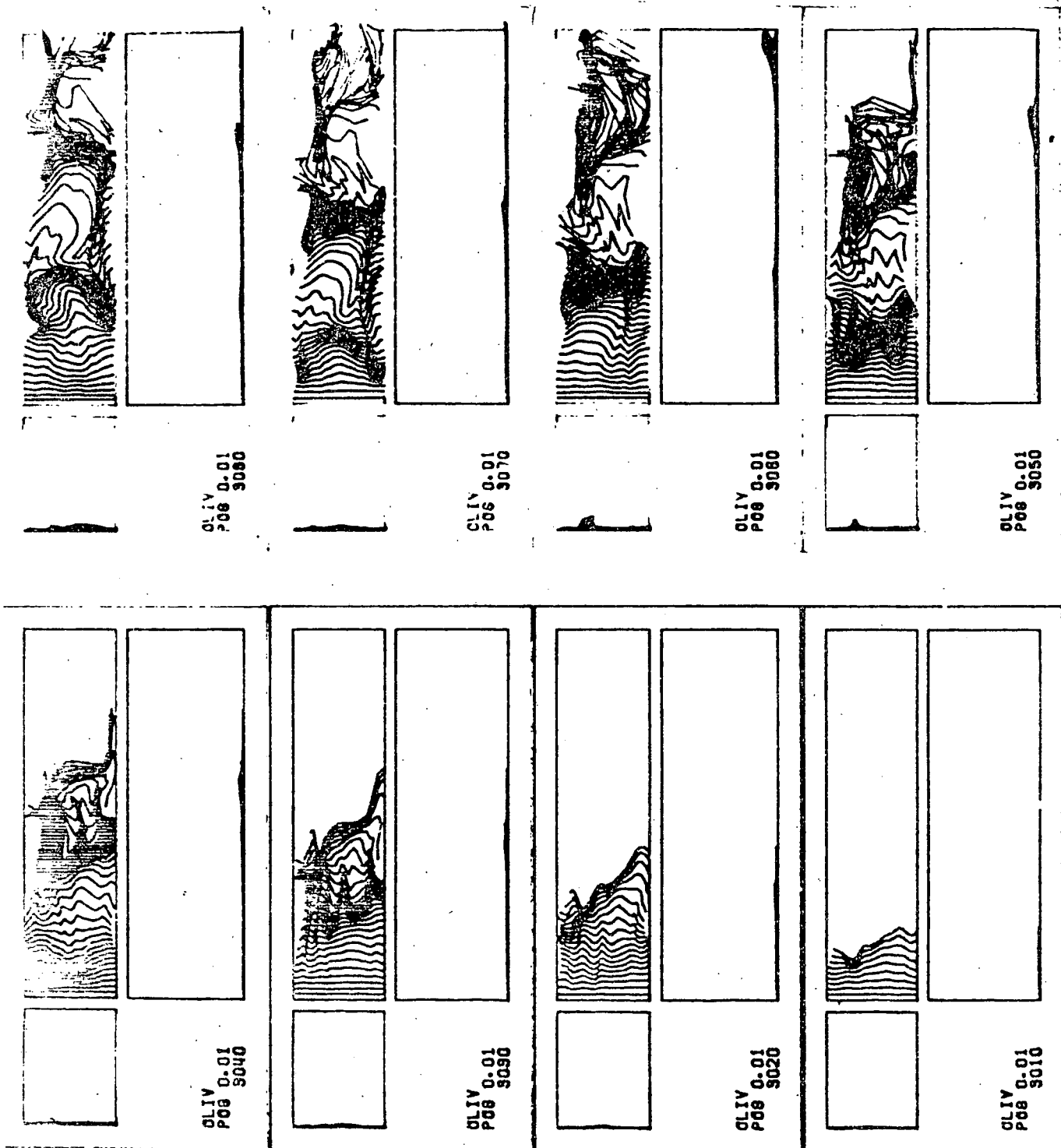


Fig. 3.15.

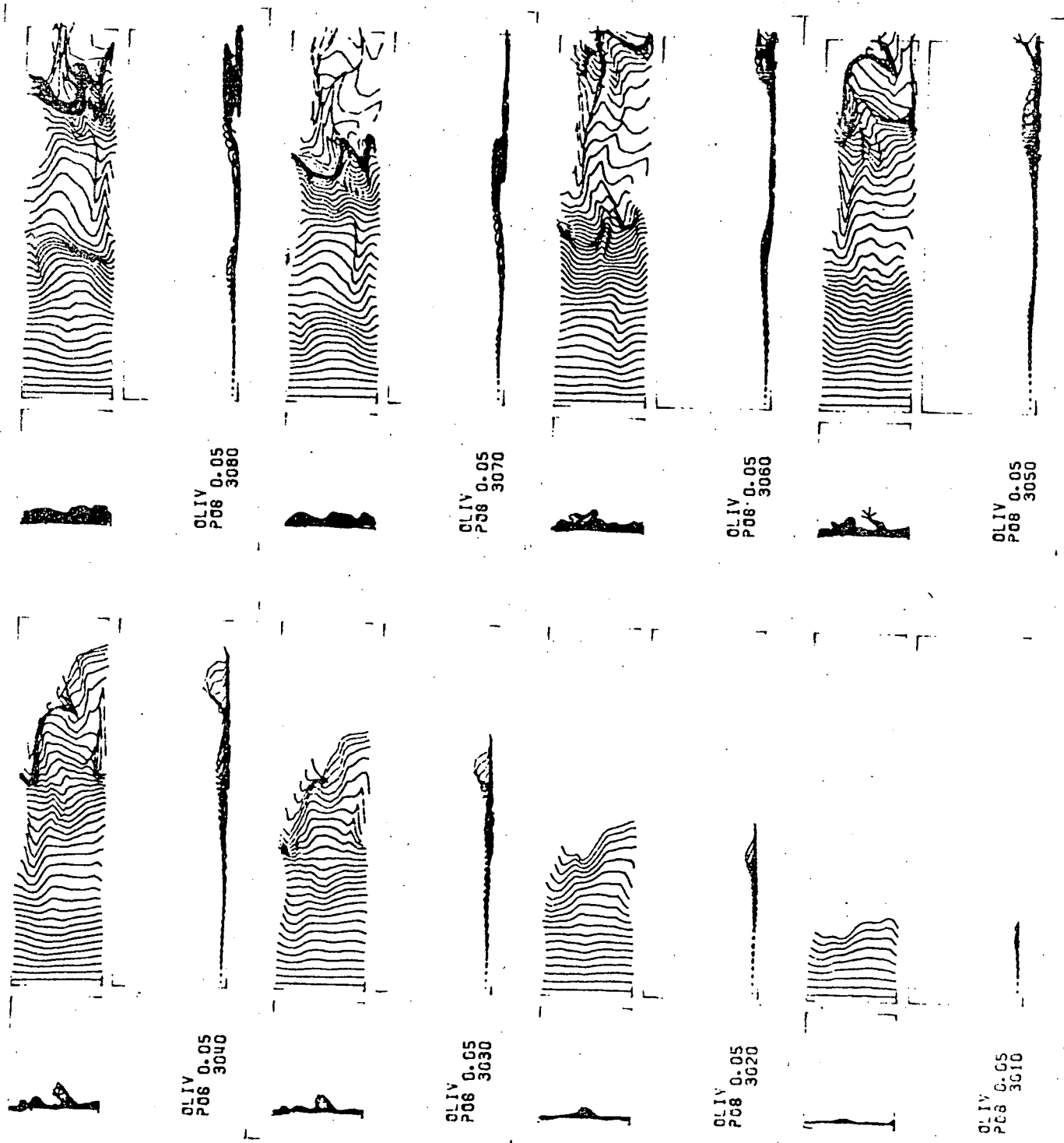


Fig. 3.16.

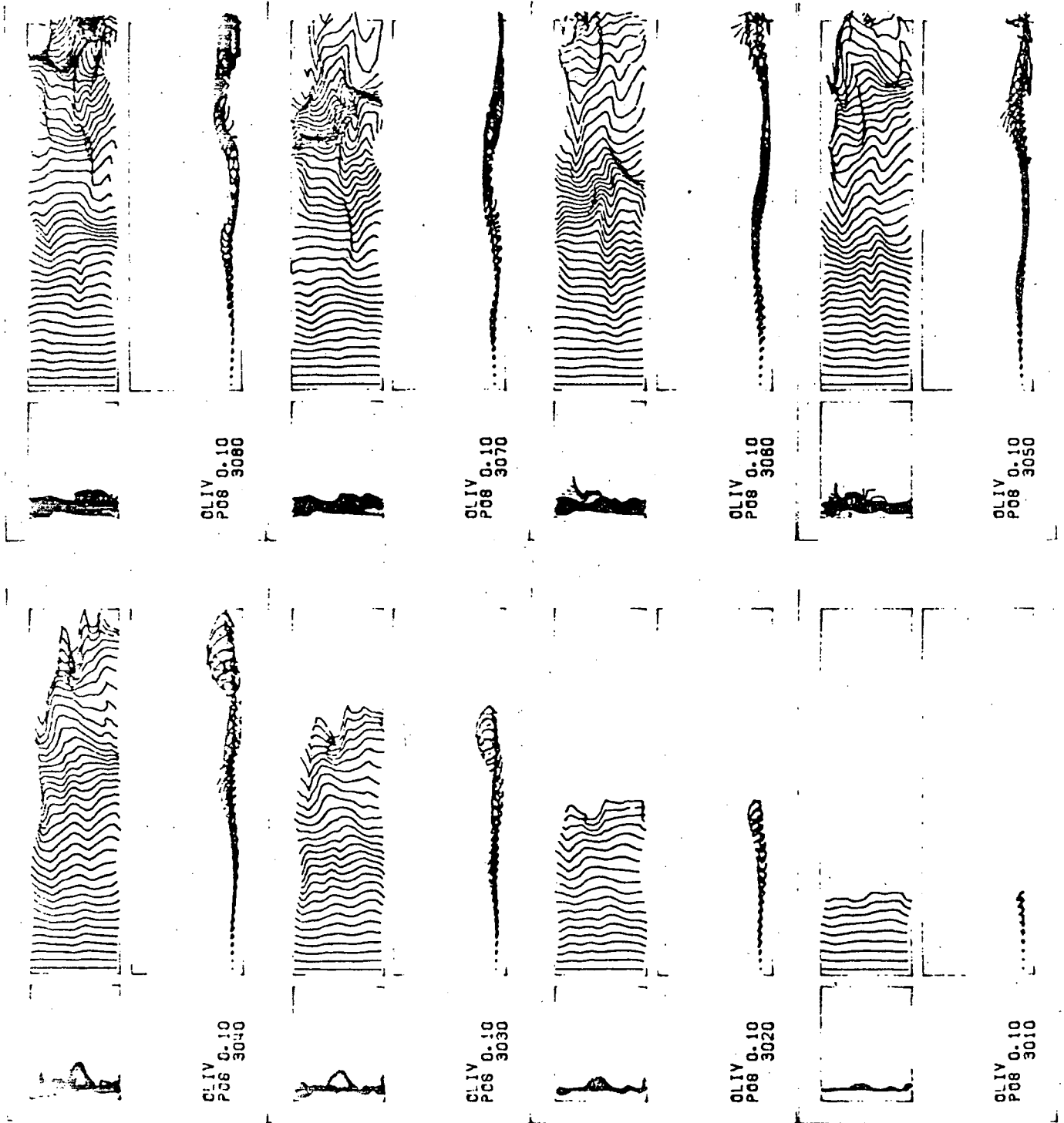


Fig. 3.17.

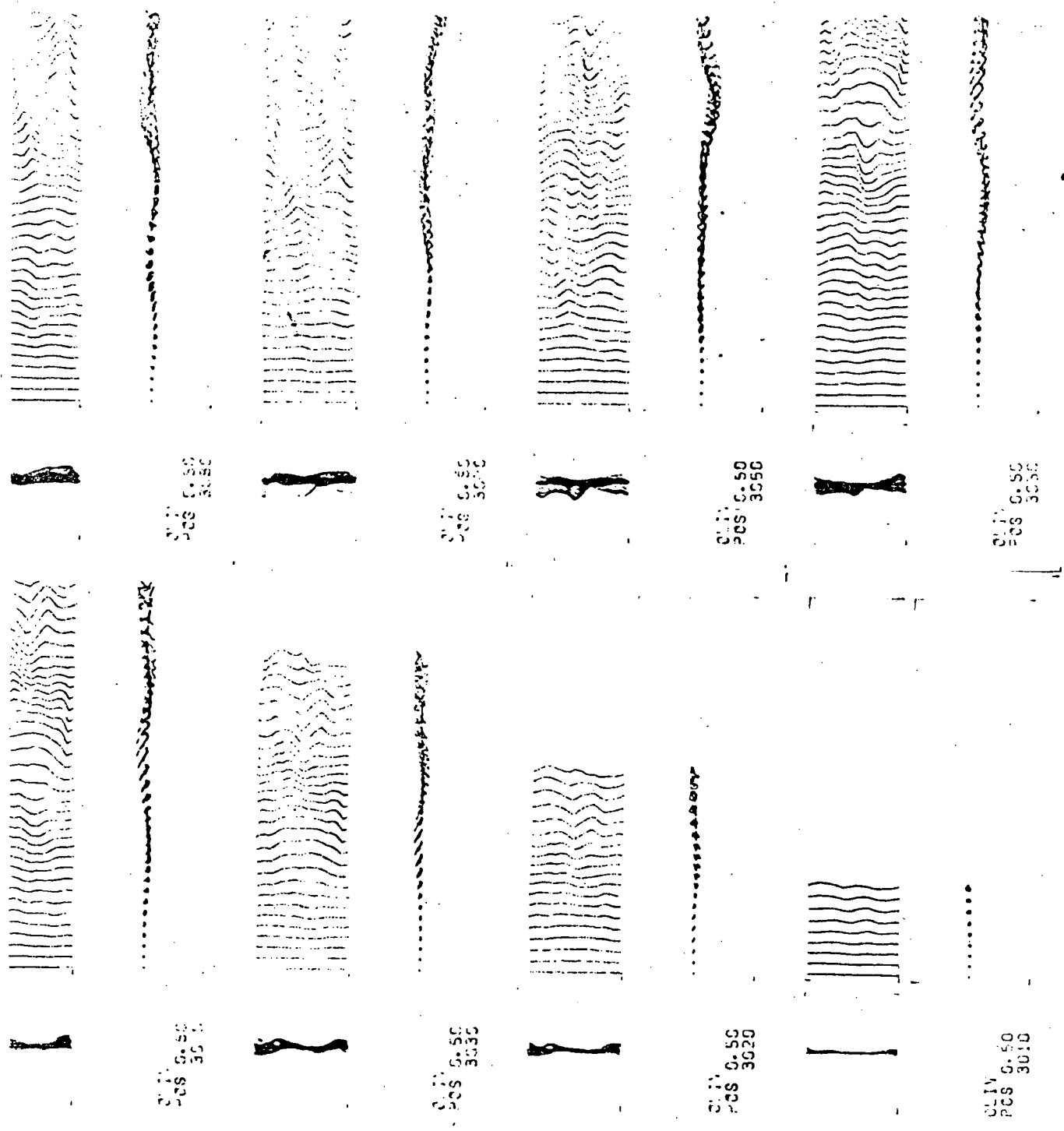


Fig. 3.18.

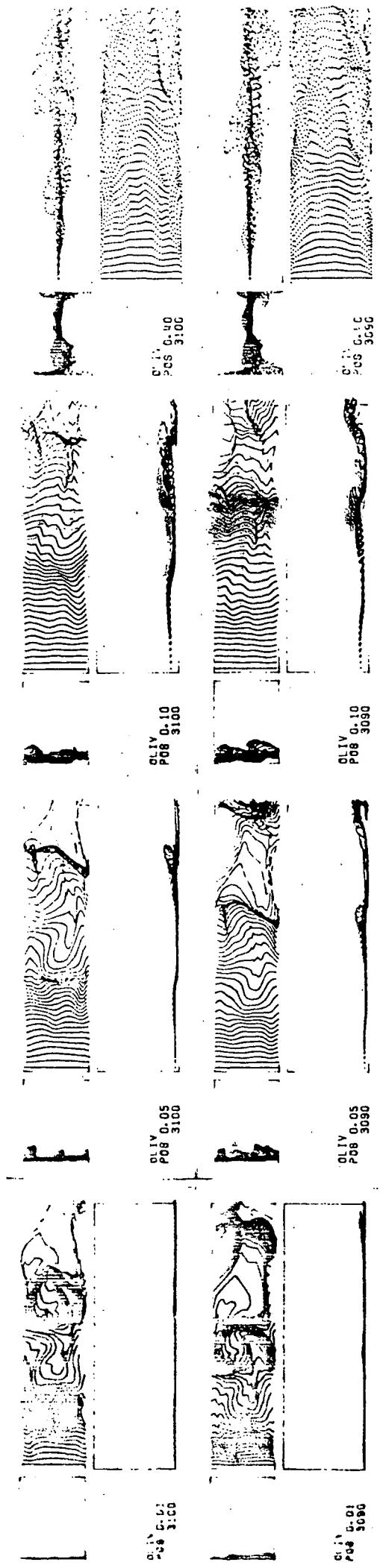


Fig. 3.19.

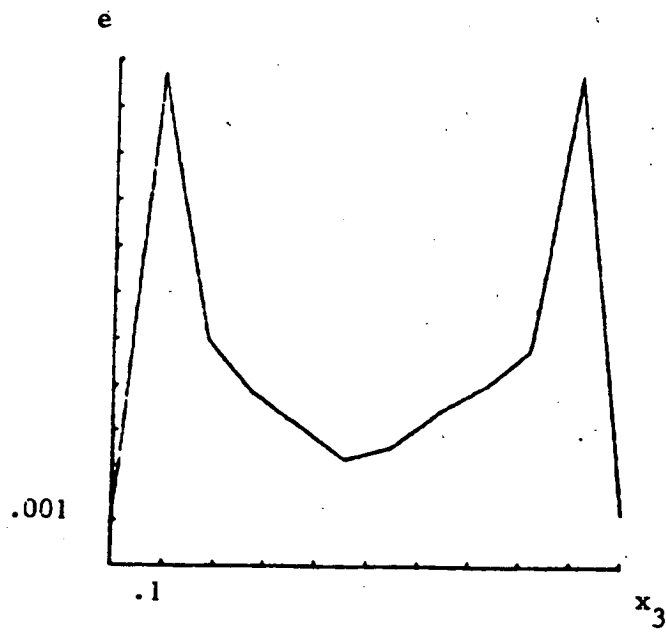


Fig. 3.20.

Chapitre 4 : Compatibilité avec les  
échelles de Kolmogorov

=====

1. Orientation

Le calcul asymptotique du chapitre 1 ne tient pas compte de l'analyse dimensionnelle de Kolmogorov.

On va montrer dans ce chapitre qu'on peut replacer le calcul asymptotique dans un cadre plus physique où  $\varepsilon$  représente l'échelle de longueur de Kolmogorov et  $q$  l'énergie de la turbulence du domaine inertiel.

On commence par rappeler l'analyse dimensionnelle ; ensuite, on redémontre les résultats du chapitre 1 dans l'hypothèse où les fluctuations en temps sont celles de l'hypothèse de Taylor ; en dernier lieu on analyse le cas général.

2. Rappels des échelles de Kolmogorov

On suit la présentation de Monin Yaglom [1] pour la turbulence localement homogène et isotrope.

Soit  $\{x_0, t_0\}$  un point de  $\Omega \times ]0, T[$  et  $\{x, t\}$  un autre point proche du précédent ; on pose

$$(1) \quad r = x - x_0 - u(x_0, t_0)(t - t_0)$$

$$(2) \quad s = t - t_0$$

$$(3) \quad u'(r, s) = u(x, t) - u(x_0, t_0)$$

On dit qu'une turbulence est localement homogène si pour tout  $u(x_0, t_0) = u_0$  fixé, les statistiques de  $u'$  sont indépendantes de  $u_0, x_0, t_0$  et isotrope si elles ne dépendent que du module de  $r$  (et non de sa direction).

On note par  $e$  le taux moyen d'énergie turbulente locale.

$$(4) \quad e = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$$

Remarque 1 :

Pour des raisons expérimentales, on a l'habitude d'écrire les lois de Kolmogorov avec  $e$  mais il semble qu'on soit aussi en droit de le faire avec le taux moyen d'énergie cinétique  $q_{,t}$ .

Hypothèse de similarité n° 1

Les statistiques de  $u'$  ne dépendent que de  $e$  et  $\nu$  et donc une analyse dimensionnelle implique que

$$(5) \quad w(\rho, \sigma) = \nu u'(\rho\eta, \sigma\tau)$$

est un processus stochastique universel (indépendant de l'écoulement). Dans (5) on a posé

$$(6) \quad \eta = (\nu^3/e)^{1/4}, \quad \nu = (\nu e)^{1/4}, \quad \tau = (\nu/e)^{1/2}$$

Hypothèse de similarité n° 2

Si

$$(7) \quad \eta \ll r \ll \text{échelle d'espace des grosses structures}$$

$$\tau \ll s \ll \text{échelle de temps des grosses structures}$$

alors les statistiques de  $u'$  ne dépendent pas non plus de  $\nu$  et donc

$$(8) \quad \overline{|u'(x+r, t) - u'(x, t)|^2} = c(er)^{2/3}$$
$$\overline{u'} = 0$$

où  $c$  est une constante numérique.

3. Nouvel Ansatz

Soit  $\epsilon$  l'échelle de longueur séparant les grosses structures (représentables dans l'espace de l'approximation numérique discrète du problème) des petites structures (reste du filtrage par  $G$  dans l'introduction).

D'après (5), (6) et (8) il est raisonnable de poser

$$(9) \quad u'(x, t) = (\epsilon e)^{1/3} w\left(\frac{r}{\epsilon}, \frac{t}{\tau}\right)$$



où  $e$  est donné par (4) et  $\tau$  par (6.c).

Si on élimine  $v$  entre (6.a) et (6.c) on trouve ( $\eta=e$ )

$$(10) \quad \tau = (\epsilon^2/e)^{1/3}$$

D'autre part  $r$  donné par (1) est une approximation de la coordonnée lagrangienne  $r(x,t)$  solution de

$$(11) \quad r_{,t} + u \nabla r = 0 \quad , \quad r(x,0) = x .$$

D'après (10)  $\tau$  est aussi une fonction de  $x$  et  $t$ , ce qui conduit à poser à la place de (9)

$$(12) \quad u'(x,t) = \epsilon^{1/3} w \left( \frac{r(x,t)}{\epsilon} , \frac{s(x,t)}{\epsilon^{2/3}} , x,t \right)$$

On se propose d'étudier le problème de Navier-Stokes avec des conditions initiales du type (12).

Soit  $u^\epsilon(x,t)$  la solution de

$$(13) \quad \begin{aligned} u_{,t}^\epsilon + u^\epsilon \nabla u^\epsilon + \nabla p^\epsilon - \nu(\epsilon) \Delta u^\epsilon &= 0 \\ \nabla \cdot u^\epsilon &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ u^\epsilon(x,0) &= u^0(x) + \epsilon^{1/3} w^0\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \end{aligned}$$

Pour qu'il y ait un spectre inertiel (i.e. un  $u'$  de la forme (12)) (7) indique qu'il faut que

$$(14) \quad \epsilon \gg (\nu^3/e)^{1/4}$$

Soit encore

$$(15) \quad \nu \ll \mu \epsilon^{4/3}$$

On va chercher la solution de (13) sous la forme

$$(16) \quad u^\epsilon(x,t) = u(x,t) + [\epsilon^{1/3} w(y,\tau,x,t) + \epsilon^{2/3} u^1(y,\tau,x,t) + \epsilon u^2(y,\tau,x,t) + \dots]$$

at  $y = \frac{r(x,t)}{\epsilon}, \tau = \frac{s(x,t)}{\epsilon^{2/3}}$

$$(17) p^\epsilon(x,t) = p(x,t) + [\epsilon^{2/3} \pi(y,\tau,x,t) + \epsilon p^1(y,\tau,x,t) + \epsilon^{4/3} p^2(y,\tau,x,t) + \dots]$$

$$\text{at } y = \frac{x(x,t)}{\epsilon} \quad \tau = \frac{s(x,t)}{\epsilon^{2/3}}$$

avec  $w, u^1, u^2, \dots, \pi, p^1, p^2 \dots$  périodiques en  $y$  et  $\tau$  sur  $]0,1[ \times ]0,1[ = Y \times ]0,1[$  et de moyenne nulle.

#### 4. Cascade d'équations

D'après (16) on a

$$(19) u_{i,t}^\epsilon = \epsilon^{-2/3} w_{i,K} r_{k,t} + \epsilon^{-1/3} (w_{i,\tau} s_{i,t} + u_{i,K}^1 r_{k,t}) + u_{i,t} + u_{i,\tau}^1 s_{i,t} + u_{i,K}^2 r_{k,t} \\ + \epsilon^{1/3} (u_{i,\tau}^2 s_{i,t} + u_{i,K}^3 r_{k,t} + w_{i,t}) + \\ + \epsilon^{2/3} (u_{i,\tau}^3 s_{i,t} + u_{i,K}^4 r_{k,t} + u_{i,t}^1) + \dots$$

On a posé

$$(20) F_{,\tau} = \partial F / \partial \tau$$

$$(21) u_{i,j}^\epsilon = \epsilon^{-2/3} w_{i,K} r_{k,j} + \epsilon^{-1/3} (w_{i,\tau} s_{i,j} + u_{i,K}^1 r_{k,j}) + u_{i,j} + u_{i,\tau}^1 s_{i,j} \\ + u_{i,K}^2 r_{k,j} + \epsilon^{1/3} (w_{i,j} + u_{i,\tau}^2 s_{i,j} + u_{i,K}^3 r_{k,j}) + \epsilon^{2/3} (u_{i,j}^1 + u_{i,\tau}^3 s_{i,j} + \\ + u_{i,K}^4 r_{k,j}) + \dots$$

$$(22) p_{,i}^\epsilon = \epsilon^{-1/3} \pi_{,K} r_{k,i} + p_{,i} + p_{,K}^1 r_{k,i} + \pi_{,\tau} s_{i,i} + \\ + \epsilon^{1/3} [p_{,\tau}^1 s_{i,i} + p_{,K}^2 r_{k,i}] + \epsilon^{2/3} [p_{,\tau}^2 s_{i,i} + p_{,K}^3 r_{k,i} + \pi_{,i}] + \dots$$

Donc

$$(23) u_j^\epsilon u_{i,j}^\epsilon = (u_j + \epsilon^{1/3} w_j + \epsilon^{2/3} u_j^1 + \epsilon u_j^2 + \epsilon^{4/3} u_j^3 + \dots) [\epsilon^{-2/3} w_{i,K} r_{k,j} \\ + \epsilon^{-1/3} (w_{i,\tau} s_{i,j} + u_{i,K}^1 r_{k,j}) + u_{i,j} + u_{i,\tau}^1 s_{i,j} + u_{i,K}^2 r_{k,j} \\ + \epsilon^{1/3} (w_{i,j} + u_{i,\tau}^2 s_{i,j} + u_{i,K}^3 r_{k,j}) + \epsilon^{2/3} (u_{i,j}^1 + u_{i,\tau}^3 s_{i,j} + u_{i,K}^4 r_{k,j}) + \dots] \\ = \epsilon^{-2/3} u_j w_{i,K} r_{k,j} \\ + \epsilon^{1/3} [u_j (w_{i,\tau} s_{i,j} + u_{i,K}^1 r_{k,j}) + w_j w_{i,K} r_{k,j}] \\ + \epsilon^0 [u_j (u_{i,j} + u_{i,\tau}^1 s_{i,j} + u_{i,K}^2 r_{k,j}) + w_j (w_{i,\tau} s_{i,j} + u_{i,K}^1 r_{k,j}) + u_j^1 w_{i,K} r_{k,j}]$$

$$\begin{aligned}
 & + \epsilon^{1/3} [u_j (w_{i,j} + u_{i,\tau}^2 s_{,j} + u_{i,K}^3 r_{j,k}) + w_j (u_{i,j} + u_{i,\tau}^1 s_{,j} + \\
 & \quad u_{i,K}^2 r_{k,j}) + u_j^1 (w_{i,\tau} s_{,j} + u_{i,K}^1 r_{k,j} + u_j^2 w_{i,K} r_{k,j})] \\
 & + \epsilon^{2/3} [u_j (u_{i,j}^2 + u_{i,\tau}^3 s_{,j} + u_{i,K}^4 r_{k,j}) + w_j (w_{i,j} + u_{i,\tau}^2 s_{,j} + u_{i,K}^3 r_{k,j}) \\
 & \quad + u_j^1 (u_{i,j} + u_{i,\tau}^1 s_{,j} + u_{i,K}^2 r_{k,j}) + u_j^2 (w_{i,\tau} s_{,j} + u_{i,K}^1 r_{k,j}) \\
 & \quad + u_j^3 w_{i,K} r_{k,j}] \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
 (24) \quad u_{i,jj}^\epsilon & = \epsilon^{-2/3} [w_{i,K} r_{k,jj} + r_{k,j} (w_{i,KL} r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + w_{i,K\tau} s_{,j} \epsilon^{-2/3} + w_{i,Kj})] \\
 & + \epsilon^{-1/3} [w_{i,\tau} s_{,jj} + s_{,j} (w_{i,\tau L} r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + w_{i,\tau\tau} s_{,j} \epsilon^{-2/3} + w_{i,\tau j}) \\
 & \quad + u_{i,K}^1 r_{k,jj} + r_{k,j} (u_{i,KL}^1 r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + u_{i,K\tau}^1 s_{,j} \epsilon^{-2/3} + u_{i,Kj}^1)] \\
 & + u_{i,jj} + u_{i,\tau}^2 s_{,jj} + s_{,j} (u_{i,\tau L}^1 r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + u_{i,\tau\tau}^1 s_{,j} \epsilon^{-2/3} + u_{i,\tau j}^1) \\
 & + u_{i,K}^2 r_{k,jj} + r_{k,j} (u_{i,KL}^2 r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + u_{i,K\tau}^2 s_{,j} \epsilon^{-2/3} + u_{i,Kj}^1) \\
 & + \epsilon^{1/3} [w_{i,jj} + u_{i,\tau}^2 s_{,jj} + s_{,j} (u_{i,\tau L}^2 r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + u_{i,\tau\tau}^2 s_{,j} \epsilon^{-2/3} + u_{i,\tau j}^2) \\
 & \quad + u_{i,K}^3 r_{k,jj} + r_{k,j} (u_{i,KL}^3 r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + u_{i,K\tau}^3 s_{,j} \epsilon^{-2/3} + u_{i,Kj}^3)] \\
 & + \epsilon^{2/3} [u_{i,jj}^1 + u_{i,\tau}^3 s_{,jj} + s_{,j} (u_{i,\tau L}^3 r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + u_{i,\tau\tau}^3 s_{,j} \epsilon^{-2/3} + u_{i,\tau j}^3) \\
 & \quad + u_{i,K}^4 r_{k,jj} + r_{k,j} (u_{i,KL}^4 r_{\ell,j} \epsilon^{-1} + u_{i,K\tau}^4 s_{,j} \epsilon^{-2/3} + u_{i,Kj}^4)] \\
 & + \dots \\
 & = \epsilon^{-5/3} [w_{i,KL} r_{\ell,j} r_{k,j}] + \epsilon^{-4/3} [2w_{i,K\tau} s_{,j} r_{k,j} + u_{i,KL}^1 r_{k,j} r_{\ell,j}] \\
 & + \epsilon^{-1} [w_{i,\tau\tau} s_{,j}^2 + 2u_{i,K\tau}^1 s_{,j} r_{k,j} + u_{i,KL}^2 r_{\ell,j} r_{k,j}] \\
 & + \epsilon^{-2/3} [w_{i,K} r_{k,jj} + w_{i,Kj} r_{k,j} + u_{i,\tau\tau}^1 s_{,j}^2 + 2u_{i,K\tau}^2 s_{,j} r_{k,j} + \\
 & \quad + u_{i,KL}^3 r_{\ell,j} r_{k,j}] \\
 & + \epsilon^{-1/3} [w_{i,\tau} s_{,jj} + w_{i,\tau j} s_{,j} + u_{i,K}^1 r_{k,jj} + u_{i,Kj}^1 r_{k,j} + u_{i,\tau\tau}^2 s_{,j}^2 + \\
 & \quad + 2u_{i,K\tau}^3 s_{,j} r_{k,j} + u_{i,KL}^4 r_{\ell,j} r_{\ell,j}] \\
 & + \epsilon^0 [u_{i,jj} + u_{i,\tau}^1 s_{,jj} + u_{i,\tau j}^1 s_{,j} + u_{i,K}^2 r_{k,jj} + u_{i,Kj}^2 r_{k,j} + \\
 & \quad + u_{i,\tau\tau}^3 s_{,j}^2 + 2u_{i,K\tau}^4 s_{,j} r_{k,j} + u_{i,KL}^5 r_{\ell,j} r_{\ell,j}]
 \end{aligned}$$

5. Première analyse :  $v \ll \mu \epsilon^{7/3}$ ,  $s$  indépendant de  $x$  et  $t$  ; la méthode du déport.

Commençons par supposer pour simplifier  $v \ll \mu \epsilon^{7/3}$  et

$$(25) \quad s(x,t) \text{ indépendant de } x \text{ et } t ,$$

c'est-à-dire que l'effet de viscosité est négligeable et les fluctuations en temps ne sont dues qu'à  $r(x,t)$  (hypothèse de Taylor).

Montrons que dans ce cas on retrouve les résultats du chapitre 1 avec  $w$  changé en  $\epsilon^{1/3} w$ .

En reportant (21) dans (13.b) on obtient

$$(26) \quad \epsilon^{-2/3} \tilde{w}_{k,K} + \epsilon^{-1/3} \tilde{u}_{k,K}^1 + u_{i,i} + \tilde{u}_{k,K}^2 + \epsilon^{1/3} (w_{i,i} + \tilde{u}_{k,K}^3) + \epsilon^{2/3} (\dots)$$

où l'on a posé

$$(27) \quad \tilde{w} = (\nabla r)^t w = \{r_{k,i} w_i\} ; \quad \tilde{u}^1 = (\nabla r)^t u^1 ; \quad \dots$$

En notation vectorielle (26) se récrit :

$$(28) \quad \epsilon^{-2/3} \nabla_y \cdot \tilde{w} + \epsilon^{-1/3} \nabla_y \cdot \tilde{u}^1 + \nabla \cdot u + \nabla_y \cdot \tilde{u}^2 + \epsilon^{1/3} (\nabla \cdot w + \nabla_y \cdot \tilde{w}^3) + \epsilon^{2/3} (\nabla \cdot u^1 + \nabla_y \cdot u^4) + \dots$$

En reportant (19)-(23) dans (13.a) on obtient

$$(29) \quad \begin{aligned} & \epsilon^{-2/3} [w_{i,K} (r_{k,t} + u_j r_{k,j})] \\ & + \epsilon^{-1/3} [u_{i,K}^1 (r_{k,t} + u_j r_{k,j}) + w_j w_{i,K} r_{k,j} + \pi_{,K} r_{k,i}] \\ & + \epsilon^0 [u_{i,t} + u_{i,K}^2 (r_{k,t} + u_j r_{k,j}) + u_j u_{i,j} + r_{k,j} (w_j u_{i,K}^1 + u_j^1 w_{i,K}) + p_{,i} \\ & \quad \quad \quad + p_{,K}^1 r_{k,i}] \\ & + \epsilon^{1/3} [w_{i,t} + u_{i,K}^3 (r_{k,t} + u_j r_{k,j}) + u_j w_{i,j} + w_j u_{i,j} + r_{k,j} (w_j u_{i,K}^2 + u_j^2 w_{i,K}) \\ & \quad \quad \quad + u_j^1 u_{i,K}^1 r_{k,j} + p_{,K}^2 r_{k,i}] \\ & + \epsilon^{2/3} [u_{i,t}^1 + u_{i,K}^4 (r_{k,t} + u_j r_{k,j}) + u_j u_{i,j}^1 + u_j^1 u_{i,j} + r_{k,j} (w_j u_{i,K}^3 + u_j^3 w_{i,K}) \\ & \quad \quad \quad + w_j w_{i,j} + r_{k,j} (u_j^1 u_{i,K}^2 + u_j^2 u_{i,K}^1) + p_{,K}^3 r_{k,i} + \pi_{,i}] \\ & + \dots = 0. \end{aligned}$$

L'annulation des termes en  $\varepsilon^{-2/3}$  donne l'équivalent de l'équation en  $\theta$  du chapitre 1 :

$$(30) \quad r_{,t} + u \nabla r = 0 ,$$

ce qui permet de récrire (29) comme suit :

$$(31) \quad \varepsilon^{-1/3} \nabla r^{-t} (\tilde{w} \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y \pi) + u_{,t} + u \nabla u + \nabla p + \nabla r^{-t} (\tilde{w} \nabla_y \tilde{u}^1 + \tilde{u}^1 \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y p^1) \\ + \varepsilon^{1/3} [w_{,t} + u \nabla w + w \nabla u + \nabla r^{-t} (\tilde{w} \nabla_y \tilde{u}^2 + \tilde{u}^2 \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y p^2) + \tilde{u}^1 \nabla_y \tilde{u}^1] \\ + \varepsilon^{2/3} [u_{,t}^1 + u \nabla u^1 + u^1 \nabla u + \nabla r^{-t} (\tilde{u}^1 \nabla_y \tilde{u}^2 + \tilde{u}^2 \nabla_y \tilde{u}^1) + \\ + \nabla r^{-t} (\tilde{w} \nabla_y \tilde{u}^3 + \tilde{u}^3 \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y p^3) + \tilde{w} \nabla w + \nabla \pi ]$$

L'annulation des termes en  $\varepsilon^{-1/3}$  dans (31) et en  $\varepsilon^{-2/3}$  dans (28) donne :

$$(32) \quad \tilde{w} \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y \pi = 0 \quad , \quad \nabla_y \tilde{w} = 0 ,$$

avec

$$(33) \quad C = \nabla r^t \nabla r$$

Enfin les termes en  $\varepsilon^0$  dans (31) et  $\varepsilon^{1/3}$  dans (28) donnent un système qui permet de définir  $\tilde{u}^1$  :

$$(34) \quad \tilde{w} \nabla_y \tilde{u}^1 + \tilde{u}^1 \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y p^1 = \nabla r^t (u_{,t} + u \nabla u + \nabla p)$$

$$(35) \quad \nabla_y \tilde{u}^1 = 0$$

En prenant la moyenne en  $y$  de (34) on trouve, compte tenu de la périodicité de  $\tilde{u}^1$  et  $\tilde{w}$ , le résultat décevant suivant :

$$(36) \quad u_{,t} + u \nabla u + \nabla p = 0.$$

Pour améliorer ce résultat il faut calculer un "correcteur" (BENSOUSSAN-LIONS-PAPANICOLAOU [25]), c'est-à-dire remplacer dans (36) 0 par  $0(\varepsilon)$ . Pour cela on utilise la technique du déport.

Technique du déport

Compte tenu de (32), on peut écrire (31), (28) sous la forme :

$$(37) \quad L(\tilde{u}^1) + f^1 + \varepsilon^{1/3} [L(\tilde{u}^2) + f^2] + \varepsilon^{2/3} [L(\tilde{u}^3) + f^3] + \dots = 0$$

$$\nabla_y \cdot \tilde{u}^1 + g^1 + \varepsilon^{1/3} [\nabla_y \cdot \tilde{u}^2 + g^2] + \varepsilon^{2/3} [\nabla_y \cdot \tilde{u}^3 + g^3] + \dots = 0$$

avec

$$(38) \quad L(\tilde{u}) = \tilde{w} \nabla_y \tilde{u} + \tilde{u} \nabla_y \tilde{w} + c \nabla_y \tilde{p}$$

$$(39) \quad f^1 = \nabla_r^t [u_{,t} + u \nabla u + \nabla p]$$

$$(40) \quad f^2 = \nabla_r^t [w_{,t} + u \nabla w + w \nabla u + \tilde{u}^1 \nabla_y u^1]$$

$$(41) \quad f^3 = \nabla_r^t [u_{,t}^1 + u \nabla u^1 + u^1 \nabla u + \tilde{u}^1 \nabla_y u^2 + \tilde{u}^2 \nabla_y u^1 + w \nabla w + \nabla \pi]$$

$$(42) \quad g^1 = 0$$

$$(43) \quad g^2 = \nabla \cdot u$$

$$(44) \quad g^3 = \nabla \cdot w$$

On a démontré au chapitre 1 que le système

$$(45) \quad L(\tilde{u}) = f, \quad \nabla_y \cdot \tilde{u} = g \quad \tilde{u} \text{ périodique}$$

ne pouvait avoir de solution que si (conditions de compatibilité)

$$(46) \quad \langle f + \tilde{w}g \rangle = 0$$

$$(47) \quad \langle g \rangle = 0$$

$$(48) \quad \langle (c^{-1} \tilde{w})f + (\pi + \frac{1}{2} \tilde{w} c^{-1} \tilde{w})g \rangle = 0$$

On va réécrire (37) sous la forme

$$(49) \quad L(\tilde{u}^1) + f^1 + \alpha^1 + \beta^1 \tilde{w} + \varepsilon^{1/3} [L(\tilde{u}^2) + f^2 + \alpha^2 + \beta^2 \tilde{w} - \varepsilon^{-1/3} (\alpha^1 + \beta^1 \tilde{w})]$$

$$+ \varepsilon^{2/3} [L(\tilde{u}^3) + f^3 + \alpha^3 + \beta^3 \tilde{w} - \varepsilon^{-1/3} (\alpha^2 + \beta^2 \tilde{w})] + \dots$$

où  $\alpha^1$  et  $\beta^1$  sont ajustés de manière à satisfaire (46), (48) quelque soit  $f^1$  ; on obtient :

$$(50) \quad \langle f^1 + \alpha^1 + \beta^1 \tilde{w} + \tilde{w} g^1 \rangle = 0$$

$$(51) \quad \langle c^{-1} \tilde{w} (f^1 + \alpha^1 + \beta^1 \tilde{w}) + (\pi + \frac{1}{2} \tilde{w} c^{-1} \tilde{w}) g^1 \rangle = 0$$

soit, compte tenu de  $\langle \tilde{w} \rangle = 0$  :

$$(52) \quad \alpha^1 = - \langle f^1 + \tilde{w} g^1 \rangle$$

$$(53) \quad \beta^1 = - \langle c^{-1} \tilde{w} f^1 + (\pi + \frac{1}{2} \tilde{w} c^{-1} \tilde{w}) g^1 \rangle / \langle \tilde{w} c^{-1} \tilde{w} \rangle$$

De même

$$(54) \quad \alpha^2 = - \langle f^2 - \epsilon^{-1/3} \alpha^1 + \tilde{w} g^2 \rangle$$

$$(55) \quad \beta^2 = - \langle c^{-1} \tilde{w} (f^2 - \epsilon^{-1/3} (\alpha^1 + \beta^1 \tilde{w})) + (\pi + \frac{1}{2} \tilde{w} c^{-1} \tilde{w}) g^2 \rangle / \langle \tilde{w} c^{-1} \tilde{w} \rangle$$

Arrêtons nous à deux dépôts (i.e.  $\alpha^3 = \beta^3 = 0$ ), et écrivons les conditions de compatibilité sur  $\tilde{u}^3$  :

$$(56) \quad \langle f^3 - \epsilon^{-1/3} \alpha^2 + g^3 \tilde{w} \rangle = 0$$

$$(57) \quad \langle c^{-1} \tilde{w} (f^3 - \epsilon^{-1/3} (\alpha^2 + \beta^2 \tilde{w})) + (\pi + \frac{1}{2} \tilde{w} c^{-1} \tilde{w}) g^3 \rangle = 0$$

Enfin, d'après (47) on a :

$$(58) \quad \langle g^1 \rangle = \langle g^2 \rangle = \langle g^3 \rangle = 0.$$

c'est-à-dire

$$(59) \quad \nabla \cdot u = 0$$

Interprétons (56) (on rappelle que (45) implique  $\nabla_y \cdot w = \nabla_y \cdot \tilde{u}^1 = \nabla_y \cdot \tilde{u}^2 = 0$ ) : d'après (39), (42), (52), et (53) :

$$(60) \quad \alpha^1 = - \nabla r^t (u_{,t} + u \nabla u + \nabla p)$$

$$(61) \quad \beta^1 = 0 ;$$

d'après (40), (43), (54), (55) :

$$(62) \quad \alpha^2 = \epsilon^{-1/3} \alpha^1 = - \epsilon^{-1/3} \nabla r^t (u_{,t} + u \nabla u + \nabla p)$$

$$(63) \quad \beta^2 = - \langle c^{-1} \tilde{w} \nabla r^t (w_{,t} + u \nabla w + w \nabla u + \tilde{u}^1 \nabla_y u^1) \rangle / \langle \tilde{w} c^{-1} \tilde{w} \rangle ;$$

donc (56) devient

$$(64) \quad \varepsilon^{-2/3} \nabla_r^t (u_{,t} + u \nabla u + \nabla p) + \langle w \nabla \tilde{w} \rangle + \langle \nabla \cdot w \tilde{w} \rangle = 0$$

c'est-à-dire l'équation attendue :

$$(65) \quad u_{,t} + u \nabla u + \nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot \langle w \otimes w \rangle = 0$$

Il reste à interpréter (57) :

$$(66) \quad \langle c^{-1} \tilde{w} \nabla_r^t [u_{,t}^1 + u \nabla u^1 + u^1 \nabla u + \tilde{u}^1 \nabla_y u^2 + \tilde{u}^2 \nabla_y u^1 + w \nabla w + \nabla \pi] \\ + \varepsilon^{-1/3} \langle c^{-1} \tilde{w} \nabla_r^t (w_{,t} + u \nabla w + w \nabla u + \tilde{u}^1 \nabla_y u^1) \rangle + \langle (\pi + \frac{1}{2} \tilde{w} c^{-1} \tilde{w}) \nabla \cdot w \rangle = 0$$

c'est-à-dire :

$$(67) \quad \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle_{,t} + u \nabla \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle + \text{tr}(\langle w \otimes w \rangle \nabla u) + \langle w (\tilde{u}^1 \nabla_y u^1) \rangle \\ + \varepsilon^{1/3} \langle w (u_{,t}^1 + u \nabla u^1 + u^1 \nabla u + \nabla_y \cdot (\tilde{u}^1 \otimes u^2 + \tilde{u}^2 \otimes u^1)) \rangle + \nabla \cdot [(\pi + \frac{1}{2} |w|^2) w] = 0$$

Mais compte tenu de (60)-(61) on voit que l'équation pour  $\tilde{u}^1$  donnée par (49) :

$$(68) \quad L(\tilde{u}^1) = -f^1 - \alpha^1 - \beta^1 \tilde{w} = 0 ; \quad \nabla \cdot \tilde{u}^1 = 0$$

et donc

$$(69) \quad \tilde{u}^1 = 0 ; \quad u^1 = 0 .$$

En posant

$$(70) \quad q = \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle , \quad w' = w/\sqrt{q} , \quad \pi' = \pi/q$$

(66) devient

$$(71) \quad q_{,t} + u \nabla q + \text{tr}(q \langle w' \otimes w' \rangle \nabla u) + \varepsilon^{1/3} q^{3/2} \nabla \cdot \langle (\pi' + \frac{1}{2} |w'|^2) w' \rangle = 0$$

Remarque 2 :

On a retrouvé les résultats du chapitre I car dans la pratique le  $\varepsilon$  est absorbé dans le niveau de turbulence initiale  $q(x,t)$ .

Remarque 3 :

D'après (49), (60)-(63),  $\tilde{u}^2$  est défini par



$$(72) \quad \tilde{u}^2 \nabla_y \tilde{w} + \tilde{w} \nabla_y \tilde{u}^2 + C \nabla_y p^2 = -[\tilde{w}_{,t} + u \nabla \tilde{w} + w \nabla \tilde{u}] + \frac{1}{2} [ \langle \frac{1}{2} |w|^2 \rangle_{,t} + u \nabla \langle \frac{1}{2} |w|^2 \rangle + \text{tr}(\langle w \otimes w \rangle \nabla u) ] \tilde{w}$$

$$(73) \quad \nabla_y \cdot \tilde{u}^2 = 0$$

$$(74) \quad \langle \tilde{u}^2 \rangle = 0, \quad \tilde{u}^2 \text{ y-périodique.}$$

D'autre part, si on cherchait le correcteur d'ordre supérieur dans (65) en continuant la technique du déport on trouverait :

$$(75) \quad u_{,t} + u \nabla u + \nabla p + \varepsilon^{2/3} \nabla \cdot \langle w \otimes w \rangle + \varepsilon^{4/3} \nabla \cdot \langle w \otimes u^2 + u^2 \otimes w \rangle = 0$$

### 6. Deuxième analyse $\nu \ll \mu \varepsilon^{7/3}$ , $s$ dépendant de $(x,t)$ .

Dans ce paragraphe on ne suppose plus  $s(x,t)$  constant.

Posons

$$(76) \quad a(x,t) = s_{,t} + u \nabla s$$

$$(77) \quad b_i(x,t) = r_{i,t} + u \nabla r_i$$

$$(78) \quad K(x,t) = \nabla_x r$$

$$(79) \quad A(u) = a u_{,t} + \tilde{u} \nabla_y w + \tilde{w} \nabla_y u + K \nabla_y p$$

L'équation (13.b) devient

$$(80) \quad 0 = \nabla \cdot u^\varepsilon = \varepsilon^{-2/3} \nabla_y \cdot \tilde{w} + \varepsilon^{-1/3} (\nabla_y \cdot \tilde{u}^1 + w_{,t} \nabla s) + \varepsilon^0 (\nabla \cdot u + \nabla_y \cdot \tilde{u}^2 + u_{,t}^1 \nabla s) + \varepsilon^{1/3} (\nabla \cdot w + \nabla_y \cdot \tilde{u}^3 + u_{,t}^2 \nabla s) + \dots$$

L'équation (13.a) devient

$$(81) \quad 0 = u_{,t}^\varepsilon + u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = \varepsilon^{-2/3} b \nabla_y w + \varepsilon^{-1/3} (A(w) + b \nabla_y u^1) + \varepsilon^0 [A(u^1) + b \nabla_y u^2 + u_{,t}^1 + u \nabla u + \nabla p + w \cdot \nabla s w_{,t} + \pi_{,t} \nabla s] + \varepsilon^{1/3} [A(u^2) + b \nabla_y u^3 + w_{,t}^2 + u \nabla w + w \nabla u + \nabla_y \cdot \tilde{u}^1 \otimes u^1 + w \cdot \nabla s u_{,t}^1 + u^1 \cdot \nabla s w_{,t} + \nabla s p_{,t}^1] + \varepsilon^{2/3} [A(u^3) + b \nabla_y u^4 + u_{,t}^1 + u \nabla u^1 + u^1 \nabla u + \nabla_y \cdot (\tilde{u}^1 \otimes u^2 + \tilde{u}^2 \otimes u^1) + \nabla \cdot w \otimes w + \nabla \pi + w \cdot \nabla s u_{,t}^2 + u^2 \cdot \nabla s w_{,t} + u^1 \cdot \nabla s u_{,t}^1 + p_{,t}^2 \nabla s] + \dots$$

On va donc trouver des équations du type

$$(82) \quad a \tilde{u}_{,\tau} + \tilde{u} \nabla_y \tilde{w} + \tilde{w} \nabla_y \tilde{u} + C \nabla_y p = f, \quad \nabla_y \cdot \tilde{u} = g$$

$$(83) \quad \langle \tilde{u} \rangle = 0, \quad \tilde{u}(y, \tau) \text{-périodique.}$$

Ici  $\langle \rangle$  désigne la moyenne en  $y$  et  $\bar{\phantom{x}}$  désigne la moyenne en  $\tau$ .

### Conditions de compatibilité

D'après (80),  $\tilde{w}$  est à divergence nulle, donc (82) implique

$$(84) \quad a \langle \tilde{u} \rangle_{,\tau} = \langle f + g\tilde{w} \rangle$$

$$(85) \quad \langle g \rangle = 0$$

Mais les équations de divergence venant de (80) donnent

$$(86) \quad \langle w_{,\tau} \rangle \nabla s = 0; \quad \langle u^1_{,\tau} \rangle \nabla s = 0; \quad \langle u^2_{,\tau} \rangle \nabla s = -\nabla \cdot \langle w \rangle; \quad \langle u^3_{,\tau} \rangle \nabla s = -\nabla \cdot \langle u^1 \rangle \dots$$

ce qui implique

$$(87) \quad \langle \tilde{w} \rangle = 0; \quad \langle \tilde{u}^i \rangle \cdot \nabla s = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

Donc (84) devient

$$(88) \quad \langle f + g\tilde{w} \rangle = 0; \quad \langle f + g\tilde{w} \rangle \cdot \nabla s = 0$$

Par ailleurs, en multipliant (82) par  $c^{-1} \tilde{w}$  on retrouve sans difficultés comme aux paragraphes précédents :

$$(89) \quad \langle f c^{-1} \tilde{w} \rangle + \langle (\pi + \frac{1}{2} \tilde{w} c^{-1} \tilde{w}) g \rangle = 0$$

### Cascade d'équations

L'annulation des termes en  $\epsilon^{-2/3}$  donne

$$(90) \quad b = r_{,\tau} + u \nabla r = 0.$$

De même avec les termes suivants :

$$(91) \quad a \tilde{w}_{,\tau} + \tilde{w} \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y \pi = 0 \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0$$

$$\langle \tilde{w} \rangle = 0 \quad \tilde{w}(y, \tau) \text{-périodique}$$

Remarque 4

De (91) on tire

$$(92) \quad \langle \tilde{w} C^{-1} \tilde{w} \rangle_{,\tau} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle = q(x,t)$$

c'est-à-dire que l'hypothèse de Taylor est vérifiée par  $|w|^2$  même si  $s$  est non constant.

Remarque 5

En posant

$$(93) \quad w' = w/\sqrt{q} \quad a' = a/\sqrt{q}$$

on obtient

$$(94) \quad \begin{aligned} a' \tilde{w}'_{,\tau} + \tilde{w}' \nabla_y \tilde{w}' + C \nabla_y \pi = 0 \quad \nabla_y \cdot \tilde{w}' = 0 \\ \langle \tilde{w}' \rangle = 0 \quad \frac{1}{2} \langle \tilde{w}' C^{-1} \tilde{w}' \rangle = 1 \quad \tilde{w}'(y,\tau)\text{-périodique} \end{aligned}$$

Equations sur  $u^1$

L'annulation des termes d'ordre 0 dans (81) et en  $\varepsilon^{-1/3}$  dans (80) donne :

$$(95) \quad \begin{aligned} a u^1_{,\tau} + w \nabla_y u^1 + u^1 \nabla_y w + C \nabla_p^2 = -(\nabla r)^t [u_{,\tau} + u \nabla u + \nabla p + w \nabla s w_{,\tau} + \pi_{,\tau} \nabla s] \\ \nabla_y \cdot \tilde{u}^1 = -w_{,\tau} \nabla s \end{aligned}$$

La condition (88) donne

$$(96) \quad u_{,\tau} + u \nabla u + \nabla p + \langle (w \cdot \nabla s w + \pi \nabla s)_{,\tau} \rangle = 0$$

ce qui implique

$$(97) \quad \langle w \cdot \nabla s w + \pi \nabla s \rangle \cdot \nabla s \quad \text{indépendant de } \tau$$

Si on écrit que (98) est vraie pour tout  $s$  alors on obtient

$$(98) \quad s_{,i} s_{,j} (\langle \tilde{w}_i \tilde{w}_j \rangle + \delta_{ij} \langle \pi \rangle) \quad \text{indépendant de } \tau$$

Le problème est maintenant de savoir s'il existe d'autres solutions de (91) satisfaisant à (98) que celles qui ne dépendent pas de  $\tau$  ?

Dans l'hypothèse d'une réponse négative à la conjecture ci-dessus, ce paragraphe montre qu'il n'est pas loisible d'introduire une petite échelle de temps (autre que celle de Taylor) dans ce type de développement asymptotique. Dans l'hypothèse d'une réponse positive alors (98) déterminerait  $a$  et donc  $s$ .

#### Conclusion générale et extentions

Les chapitres 1 et 4 ont montré qu'on pouvait obtenir des équations intéressantes pour la modélisation de la turbulence, en faisant des développements asymptotiques des équations d'Euler par rapport à l'échelle de Kolmogorov du spectre inertiel. Les hypothèses du calcul sont

- existence d'une échelle de coupure
- petites structures en équilibre au delà de la coupure

Les équations obtenues sont semblables aux modèles  $k-\epsilon$  ou  $k-l$  ( $l$  = longueur de mélange) toutefois on ne retrouve pas les termes de dissipation.

Dans un rapport ultérieur, on étudiera les termes d'ordre supérieur du développement pour voir s'ils sont dissipatifs.

Du côté numérique, on a testé le modèle obtenu sur les écoulements dans une conduite. Les tests ont montré quelques propriétés intéressantes du modèle (y compris des instabilités) comme par exemple une cascade d'énergie directe (des grosses vers les petites structures) impossible avec un modèle bidimensionnel et possible avec un modèle 3-D.

Toutefois la validation ainsi que la comparaison avec un  $k-\epsilon$  classique, ce qu'on se propose de faire dans un rapport ultérieur ...

References

- [1] A.S. MONIN, A.M. YAGLOM, Statistical Fluid Mechanics of Turbulence, Vol. 2, p. 348 (1975) MIT Press.
- [2] A. CRAYA, Turbulence. Colloque C1, Journal de Physique, supplément 1, T. 37, Janvier 1976.
- [3] A. LEONARD, Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows. Adv. Geophys. 18A (1974), 237-248.
- [4] W.C. REYNOLDS, Computation of turbulent flows. Am. Rev. Fluid. Mech. 8 (1975), 183-208.
- [5] J.S. SMAGORINSKY, Mon. Weather Rev. 91, 99-164.
- [6] D.C. LESLIE, Theoretical investigation of Schumann's model for subgrid Reynolds stress. QM TU Report 20/78 (1978).
- [7] D.C. LESLIE, G.L. QUARINI, The application of turbulence theory to the formulation of subgrid modelling procedure. J. Fluid. Mech., 91, 65 (1979).
- [8] J.W. DEARDORF, A numerical study of 3-d turbulent channel flow at large Reynolds numbers. J. Fluid. Mech. (1970), 41, 2, 453-480.
- [9] K. HORIUTI, Study of incompressible turbulent channel flow by large Eddy simulation. Ph.D. Thesis, Tokyo University (1981).
- [10] P. MOIN, J. KIM, Numerical investigation of turbulent channel flow. NASA Report 81 309 (1981).
- [11] U. SCHUMANN, Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channel and annuli. J. Comp. Phys. 18, 376-404 (1975).
- [12] B.E. LAUNDER, D.B. SPALDING, Mathematical models of turbulence. Academic Press (1972).

- [13] S.V. PATANKAR, V.S. PRATAB, D.B. SPALDING, Prediction of turbulent flow in curved pipes. J. Fluid. Mech., 67, (3) 583-595 (1975).
- [14] J.P. BENQUE, Modélisation d'écoulements turbulents isothermes, EDF Report, LNH HE 041/7812 (1978).
- [15] Y. COEFFE, Les modèles de turbulence k- $\epsilon$  appliqués à l'écoulement de plan. EDF Report LNH HE 041/80.04 (1980).
- [16] P.L. VIOLET, On the modelling of turbulence heat and mass transfert for the computation of buoyancy affected flows. Proc. Int. Conf. Num. Meth. Laminar and turbulent flow, Venise (1981).
- [17] P. PERRIER, O. PIRONNEAU, Subgrid turbulence modelling by homogenization, Math. Modelling Vol. 2, 295-317 (1981).
- [18] O. PIRONNEAU, Homogenization transport processes and turbulence modelling. Proc. IRIA-Novosibirsk, Dec. 1978 (to appear).
- [19] G. PAPANICOLAOU, O. PIRONNEAU, On the asymptotic behavior of motion in random flow in "Stochastic non linear systems" Arnold-Lefever eds. Springer (1981).
- [20] D. McLAUGHIN, G. PAPANICOLAOU, O. PIRONNEAU, Non linear evolution equations with rapidly oscillating initial data. Lecture Note in Physics 154 Springer (1981).
- [21] D. McLAUGHIN, G. PAPANICOLAOU, O. PIRONNEAU, Convection of micro-structures. Proc. INRIA Conf. Dec. 1981, North Holland (Glowinski ed.) (to appear).
- [22] V. ARNOLD, Méthodes mathématiques de la mécanique classique. MIR (1974).
- [23] J.H. SAIAC, Résolution des équations d'Euler par des méthodes d'éléments finis (à paraître).
- [24] J. LAUFER, Investigation of turbulent flow in a 2-d channel. NACA Report TN1053 (1950).

- [25] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU : Asymptotic analysis for periodic structures. North Holland (1978).

### Corrections

Entre l'impression du rapport et sa diffusion, les auteurs se sont rendus compte que les modifications suivantes étaient nécessaires :

1. Dans le développement (8), (9), seules les pressions sont de moyenne en y nulles, ainsi que  $w$ , pour le distinguer de  $u$ . Mais les essais numériques montrent que l'équation (23) ne donne pas  $\langle \tilde{w} \rangle = 0$ . On doit donc mettre  $\langle \tilde{w} \rangle$  au second membre de (20) et poser à la place de (21)

$$(21') \quad w = \nabla \theta^{-1} (\tilde{w} - \langle \tilde{w} \rangle)$$

Le résultat final au paragraphe 5 n'est pas changé sauf que (48.a) a au second membre :  $\langle \tilde{w} \rangle$ .

Dans les tabulations numériques  $\langle \tilde{w} \rangle$  est négligeable ; dans la solution analytique (12), il est nul.

La même modification doit être faite au chapitre 4.

2. L'équation sur  $G$  page (20) est fautive. On doit avoir :

$$G(a,b) = -G(-a,-b)$$

et page 24 sur la figure 2.2 à droite, les valeurs numériques doivent être changées de signe.

Avec cette tabulation les écoulements sont donc stables.

Les calculs correspondants aux figures 3.1-3.10 sont donnés ci-après.:

3. Page 16 bas de la page:  $\langle \bar{\mu}_k \rangle$  ,  $\langle \bar{\rho}_{k_i} \bar{\rho}_{k_j} \rangle$

Page 27:  $\alpha g(-\alpha)$



Fig. 3.2

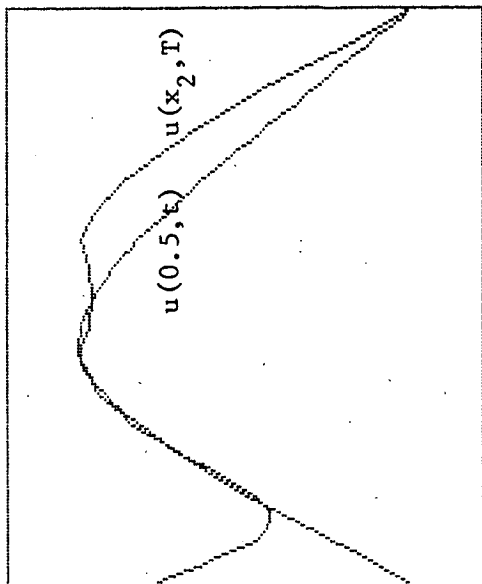
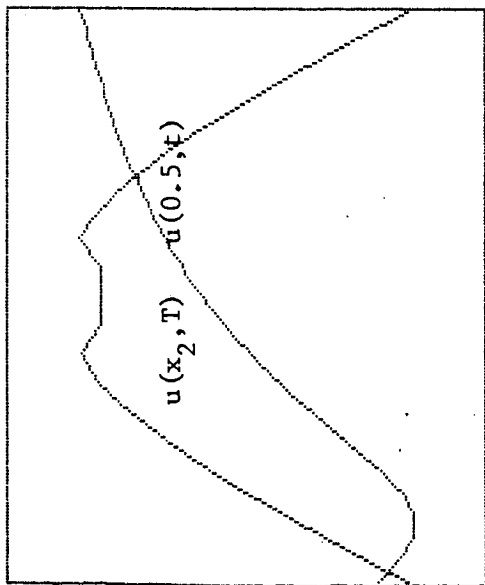


Fig. 3.1



$T=2 \quad dx_2 = 0.05$   
 $q^0 = 0.01$

Fig. 3.4

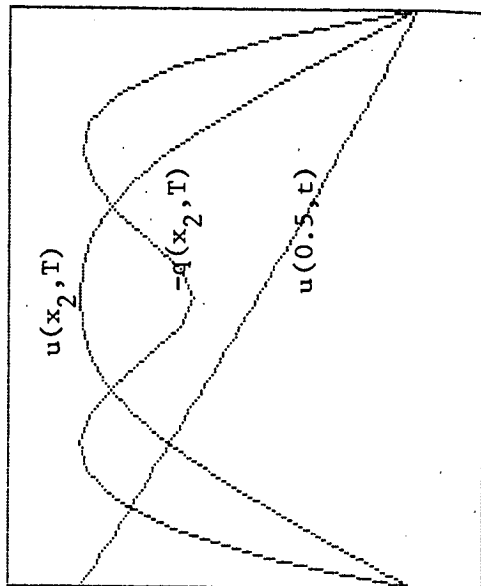


Fig. 3.3

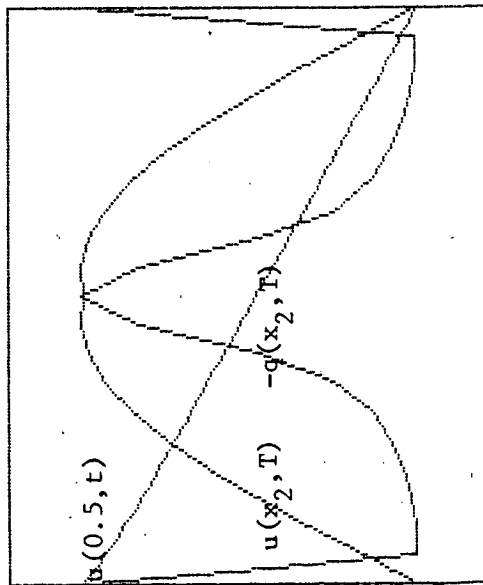


Fig. 3.7

$T=2.00$

$\Delta t=0.10$

$q^0=0.1000$

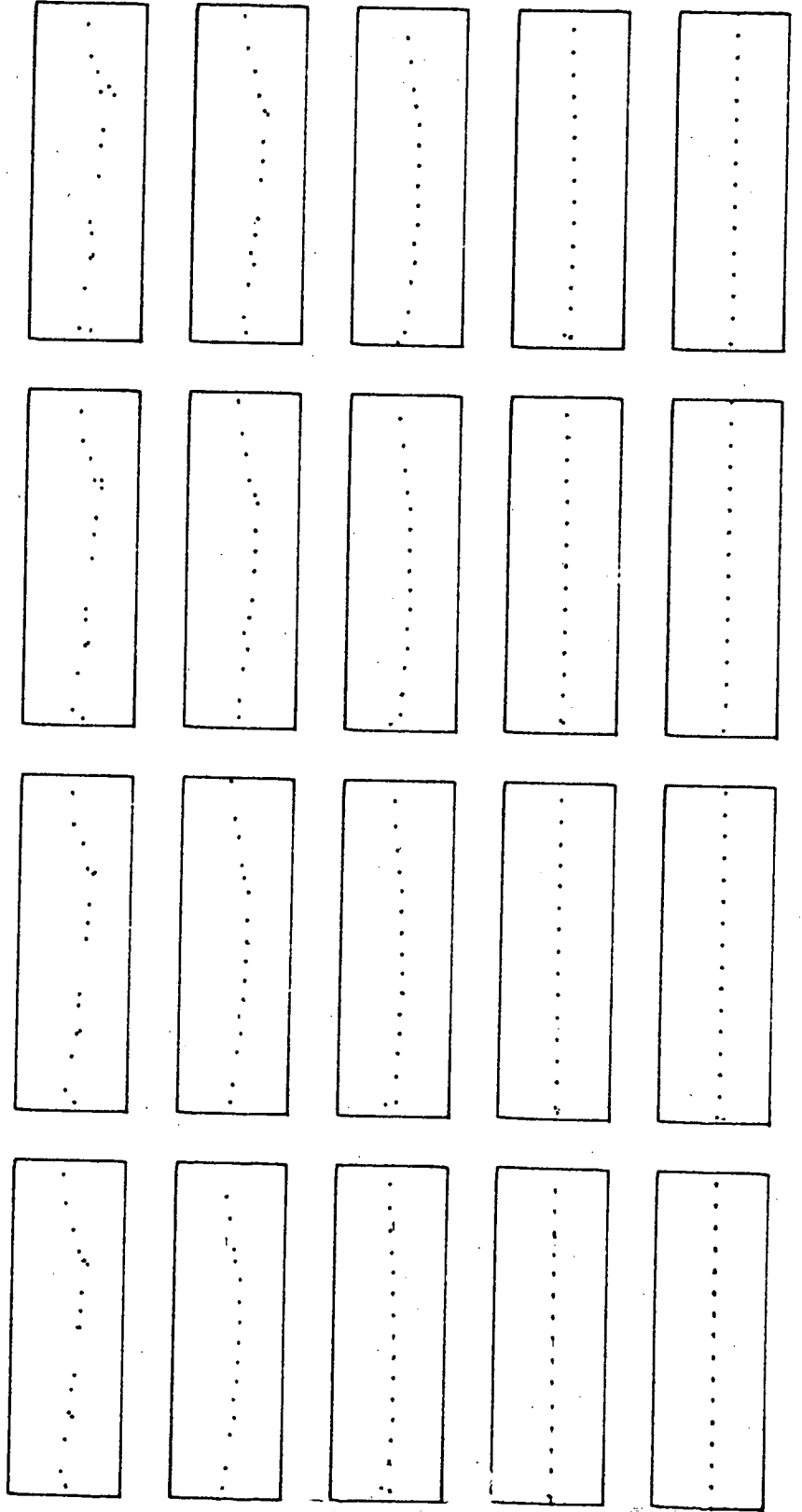


Fig. 3.8

$T = 2.00$   
 $dx = 0.10$   
 $q^{\circ} = 1.0000$

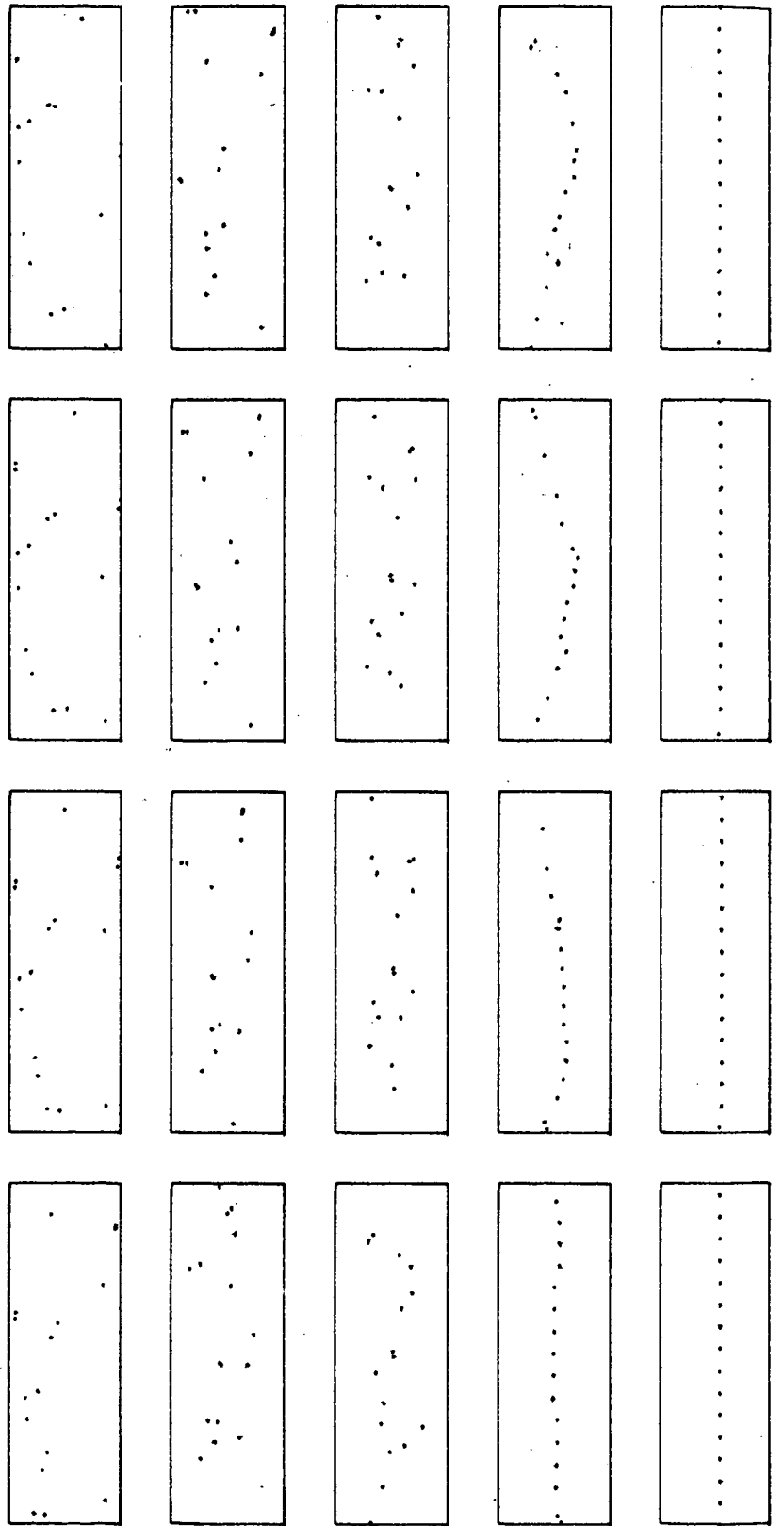


Fig. 3.10 : Tracé de la vorticité

T = 2.00  
dx = 0.10  
q° = 0.0500

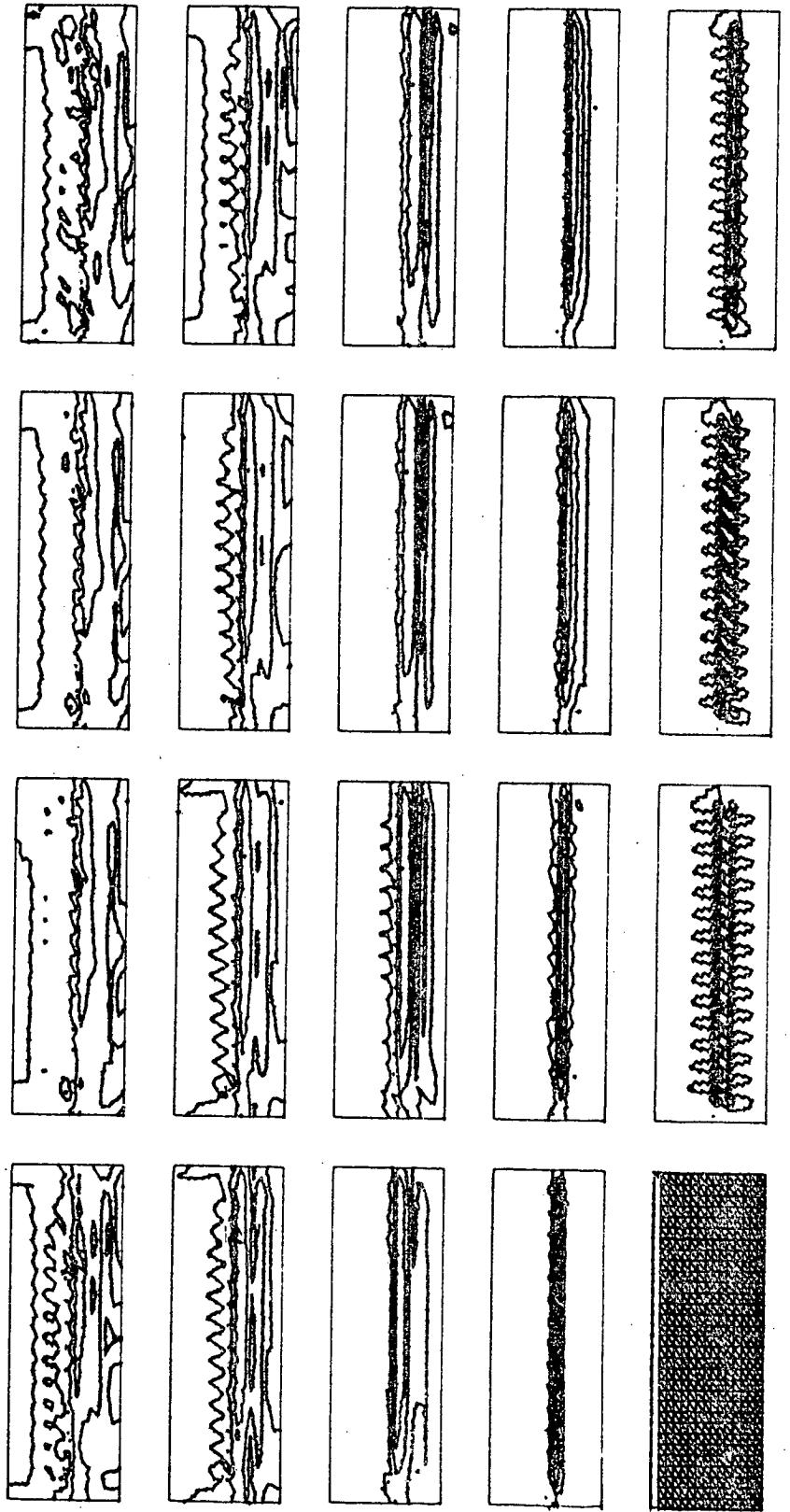
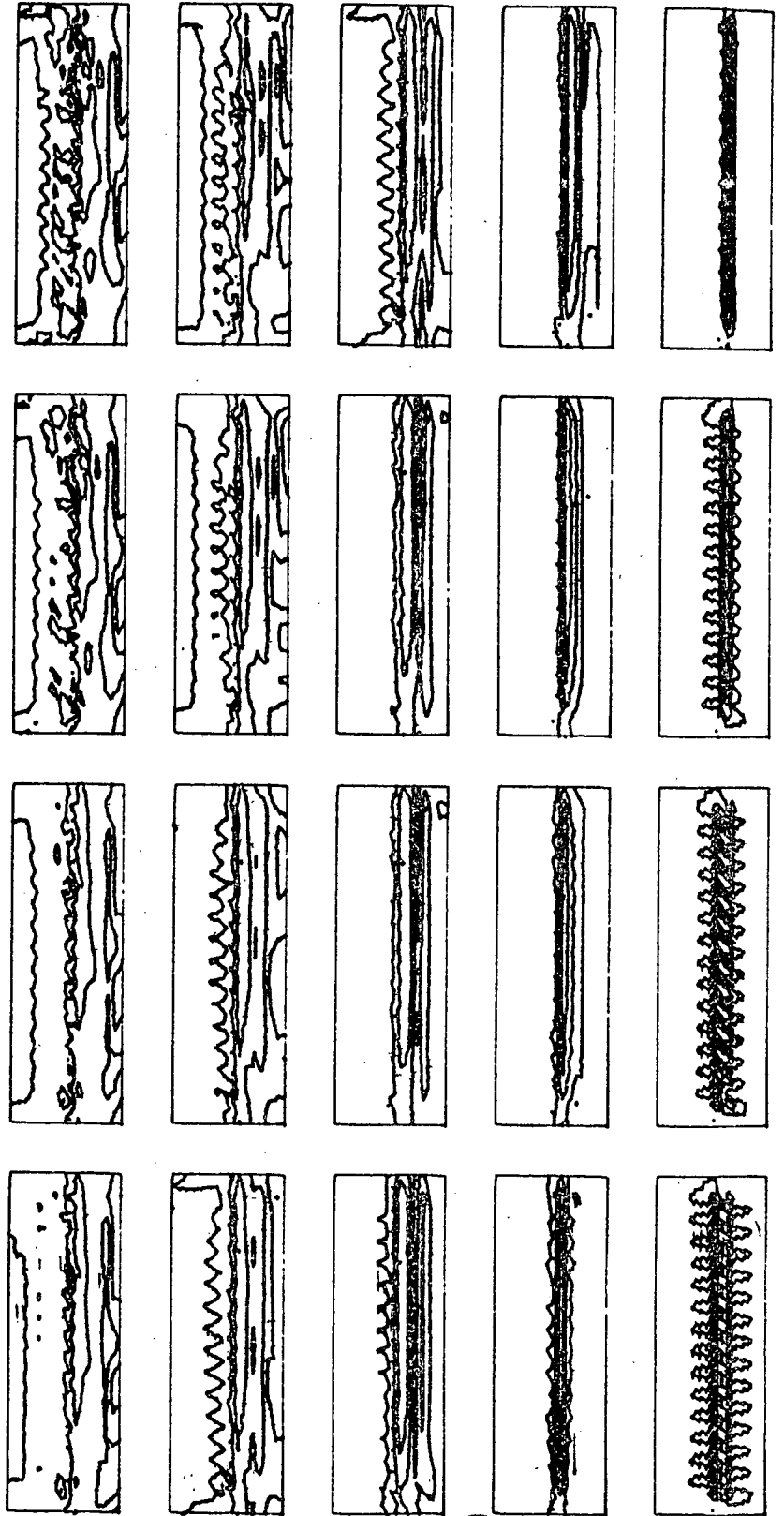


Fig. 3.9 : Tracé de  $q$ .

$T = 2.00$

$dx = 0.10$

$q^0 = 0.0500$





Imprimé en France  
par  
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

