HAL
open science

Analyse du comportement periodique de systemes de production par la theorie des dioides

Gary Cohen, Didier Dubois, Jean-Pierre Quadrat, M. Viot

To cite this version:

Gary Cohen, Didier Dubois, Jean-Pierre Quadrat, M. Viot. Analyse du comportement periodique de systemes de production par la theorie des dioides. [Rapport de recherche] RR-0191, INRIA. 1983. inria-00076367

HAL Id: inria-00076367

https://inria.hal.science/inria-00076367

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 191

ANALYSE DU COMPORTEMENT PÉRIODIQUE DE SYSTÈMES DE PRODUCTION PAR LA THÉORIE DES DIOÏDES

Guy COHEN
Didier DUBOIS
Jean-Pierre QUADRAT
Michel VIOT

Février 1983

ANALYSE DU COMPORTEMENT PERIODIQUE

DE SYSTEMES DE PRODUCTION PAR LA THEORIE DES DIOÏDES

Guy COHEN, Didier DUBOIS, Jean-Pierre QUADRAT, Michel VIOT.

RESUME

On utilise l'algèbre des chemins (Dioïde,(R, max, +)) pour modéliser les systèmes à évènements discrets et on applique cette théorie à l'évaluation des performances d'ateliers flexibles.

La théorie spectrale dans le dioïde (R, max +) est explicitée complètement (valeur propre, vecteur propre, moduloïde propre, projecteur spectrale, cyclicité)

ABSTRACT

We use the path algebra (Dioïd (R, max, +)) for discrete event system modelling and we apply this theory to the performance evaluation of flexible machining systems.

The spectral theory of the Dioïd (R, max, +) is fully investigated (eigenvalue, eigenvectors, spectral projector, eigen moduloïd, cyclicity).

PAPIER RECUPERE ET RECYCLE

Les temps d'usinage des pièces sur chaque machine, les temps de transport, de changements d'outil peuvent varier légèrement autour de leur moyenne. Ceci peut être causé par exemple par des "pannes courtes" des machines, c'est-à-dire des incidents qu'une intervention immédiate permet de pallier. Par contre, il peut intervenir des "pannes longues" se caractérisant par une indisponibilité prolongée de la machine et une mise en réparation. Le propre d'un atelier flexible est de pouvoir poursuivre son activité en dépit de ces indisponibilités, grâce à une reconfiguration de la production qui soit privilégie momentanément un type de production, soit utilise d'autres cheminements dans l'atelier pour assurer les mêmes séquences d'opérations.

Le problème global peut donc être vu comme un problème de commande optimale stochastique ou de régulation. Cette notion de régulation empruntée à l'Automatique des Systèmes Continus correspond à une vision macroscopique de l'atelier comme outil de production. A un niveau plus élémentaire, les phénomènes sont clairement de nature discrète : essentiellement débuts ou fins de tâches, conditionnant le début ou la fin d'autres tâches "aval" etc...

La difficulté du problème est donc d'appréhender au sein du même modèle ces aspects "continus" et discrets. Intuitivement, ceci est obtenu par une hiérarchisation du problème où ces aspects sont gérés à des niveaux différents. L'une des contributions de l'étude est l'analyse des phénomènes qui permet de parvenir naturellement à cette hiérarchisation.

1.2 *Hypothèses et caractéristiques générales du modèle. Résultats principaux.*

En premier lieu, il nous a paru important de distinguer les phénomènes de "pannes courtes" et de "pannes longues" des machines. Ces dernières sont supposées intervenir à des échelles de temps "longues", c'est-à-dire qu'entre deux pannes longues un nombre assez grand d'opérations discrètes se déroule en moyenne.

Par ailleurs, ces pannes longues ont des conséquences importantes puisqu'elles nécessitent en général une reconfiguration du système.

Les "pannes courtes" ou les autres causes de variations des temps d'usinage, de transport, etc... peuvent être considérées comme des perturbations d'effets négligeables, à condition que le système muni d'une certaine

ANALYSE DU COMPORTEMENT PERIODIQUE DE SYSTEMES DE PRODUCTION PAR LA THEORIE DES DIOÏDES

I. INTRODUCTION.

1.1 *Motivation.*

La motivation principale de l'étude qui suit est le problème de conduite en temps réel d'un atelier flexible et le développement d'algorithmes correspondants. Un atelier flexible est un réseau de machines (pouvant éventuellement accomplir diverses opérations) reliées par un système de transport constitué de palettes portées par des chariots en général filo-guidés, et un ensemble d'aires de stockage. Les machines peuvent éventuellement faire appel à des outils amovibles, ces outils constituant un parc partageable entre plusieurs machines.

L'atelier flexible est destiné à assurer la production simultanée de plusieurs types de pièces. L'objectif de production peut être défini comme une certaine quantité à produire pour chaque type de pièce pendant un certain laps de temps qu'on peut chercher à minimiser, ou comme un certain taux de production (nombre de pièces par unité de temps) de chaque type à assurer. Il faut alors imaginer un stock de sortie de l'atelier (par type de pièce) qui se vide au taux désiré et qui se remplit au taux réellement produit. Ce stock (positif ou négatif à chaque instant) doit alors être régulé autour de zéro.

Le système est soumis à divers types de perturbations. On supposera qu'il n'existe aucune perturbation au niveau de l'alimentation de l'atelier, c'est-à-dire que le stock amont d'ébauches des pièces est toujours positif.

stratégie de commande, soit stable c'est-à-dire ait tendance à amortir leurs conséquences. C'est ce que nous verrons par la suite.

On adopte les hypothèses simplificatrices suivantes :

(i) pour un état de disponibilité donné des machines (c'est-à-dire entre deux instants de début de panne longue ou de retour de réparation), le fonctionnement est déterministe, c'est-à-dire que les temps d'exécution d'une opération donnée (usinage, transport, changement d'outil) sont connus et constants.

(ii) les phénomènes de blocage dûs à une saturation des aires de stockage ou des conflits au niveau du réseau de transport sont ignorés ; la raison de ce choix est la suivante : pour les aires de stockage, il peut exister un stock en amont ou en aval de chaque machine, et/ou une aire de stockage commune ; dans le second cas, le dimensionnement est tel que la saturation est improbable en fonctionnement normal. Elle peut même être contrôlée en contrôlant le nombre total de palettes présentes simultanément dans l'atelier. C'est ce que nous ferons. Dans le cas d'aires de stockage "privées", il faut que le dimensionnement soit adapté au volume total de palettes, mais aussi à leur répartition "moyenne" dans l'atelier. Des indications seront également obtenues de ce point de vue.

Les conflits du système de transport eux-mêmes ne sont probables qu'avec un accroissement important du nombre de chariots en circulation que nous chercherons à abaisser au minimum. Ce nombre de chariots ([1]) présents simultanément dans l'atelier sera en fait maintenu constant par la stratégie suivante : dès qu'un chariot est libéré (une pièce d'un certain type dépalettisé), le chariot est immédiatement rechargé (éventuellement avec le même type de pièce) et est placé en attente de la machine qui constitue sa première destination.

Définissons ce type de pièces comme une succession de couples "opération-machines" (ce qui peut amener à distinguer les mêmes types physiques de pièces suivant des cheminements différents dans l'atelier). Le fonctionnement du système est alors entièrement déterminé par les variables de décision

([1]) ou bien le nombre de palettes portant un type de pièce donné.

suivantes : on considère un "motif élémentaire" définissant la succession (ou ordonnancement) des passages de chaque type de pièce devant chaque machine. Ces motifs seront reproduits périodiquement au cours du fonctionnement du système. Leur dosage (nombre de pièces par type sur nombre total) permet de refléter les "ratios de production" désirés (proportion de chaque type) ainsi que la politique de routage (pourcentage de pièces d'un même type physique suivant des chemins différents). Ces ordonnancements étant connus, le système rebouclé sur lui-même comme on l'a défini précédemment fonctionne comme un automate déterministe asynchrone. Ce fonctionnement définit exactement, à partir de conditions initiales données, les dates de début de chaque événement et les taux de production atteints (respectant nécessairement les ratios définis par les ordonnancements).

Une contribution de l'étude dynamique de l'automate ainsi défini est de montrer l'existence d'un régime périodique qui est atteint après un comportement transitoire dépendant des conditions initiales. Ce régime asymptotique est stable, c'est-à-dire qu'après une perturbation, le système tend naturellement à retrouver ce comportement périodique. Il peut de plus être caractérisé par une notion de valeur propre et de vecteurs propres de la "matrice de dynamique' dans une certaine algèbre. Ce résultat présente une grande analogie de forme avec la théorique classique des systèmes linéaires à état continu et laisse pressentir qu'il doit être possible de développer une théorie analogue pour ces "systèmes à événements discrets".

Un autre résultat essentiel pour la construction de la hiérarchie que nous avons évoquée au §1.1 est le suivant. Construisons un modèle statique de fonctionnement de l'atelier en termes de flots par type de pièce et par chemin. Compte tenu des temps opératoires pour chaque type de pièce sur chaque machine, on peut évaluer la charge de chaque machine et exprimer que celle-ci est inférieure à 100 % pour chacune d'elles. Si l'on bâtit un problème d'optimisation sous ces contraintes, on obtiendra en général un point extrêmal de ce polyèdre correspondant à la saturation d'une ou plusieurs de ces contraintes, associées à certaines machines appelées alors "machines menantes". Du fait que l'on raisonne en termes de flots, les notions d'ordonnancements deviennent immatérielles. Comme on l'a déjà vu, ces ordonnancements sont traduits dans des motifs élémentaires qui traduisent non seulement les ratios de production sur chaque chemin (ce qu'expriment aussi les flots) mais aussi l'ordre précis de passage des pièces. Ainsi, pour deux

types de pièce (notés 1 et 2) sur une machine donnée et pour un ratio de 2/3, les deux motifs suivants ne sont pas identiques même à une permutation circulaire près :

11222 et 21212

La question est donc de savoir si les flots "théoriques" calculés par le modèle statique sont réalisables effectivement avec un quelconque ordonnancement, une fois le régime asymptotique établi.

En fait, il s'avère que ces flots correspondent effectivement au régime asymptotique du système lorsque l'un quelconque des ordonnancements respectant les ratios de production (par type de pièce et par chemin) est adopté. Il suffit pour cela que le nombre de palettes (constant) présentes dans le système soit assez élevé. On a donc un résultat important de découplage : on peut effectivement à un niveau hiérarchique "haut" raisonner en termes de flot en ne s'inquiétant que des limitations de charge des machines à 100 % ; on sait alors que ces flots seront réalisables à un niveau "bas", lorsque l'on gère le système "pièce par pièce", pourvu que les "motifs" reflètent les ratios et les routages et que le nombre de palettes soit assez grand. Par contre, un bon ordonnancement permettra d'abaisser le nombre requis pour saturer la (les) machine(s) menante(s).

1.3 *Hiérarchisation du problème. Comparaison avec d'autres approches.*

En fonction des commentaires précédents, on voit donc se dégager deux niveaux principaux d'une hiérarchie. Nous allons mieux préciser maintenant la nature des variables de décision, des modèles et des aléas qui seront pris en compte à chaque niveau et l'articulation entre ces niveaux.

Au niveau haut, on peut formuler le problème comme celui de réaliser une production donnée en temps minimum (cf. Hildebrandt [7]) ou comme celui de réguler un stock fictif de sortie de l'atelier duquel un certain flot de demande est prélevé (Kimenia et Gershwin [22]). Le problème est un problème de commande stochastique car on prendra en compte à ce niveau les pannes futures des machines (à travers un modèle statistique) que l'on cherchera à anticiper. Les variables d'état seront donc de deux natures : variables "continues" représentant l'état de la production cumulée par type de pièce ; variables discrètes décrivant l'état de disponibilité du parc des machines.

Les variables de décision sont les flots de production par type de pièce et par chemin, sous les contraintes d'utilisation maximale des machines (0 ou 100 % suivant leur disponibilité).

La résolution du problème à ce niveau peut éventuellement être scindée elle-même en plusieurs niveaux étant donné sa taille. Nous n'aborderons pas plus avant la formulation et la résolution du problème à ce niveau dans le cadre de ce papier.

On obtient après cette résolution des consignes pour le niveau "bas". Ces consignes, en termes de flots, sont comme on l'a dit réalisables, après un transitoire, par un régime périodique, pourvu que l'ordonnancement adopté reflète les ratios de production par type de pièce et sur chaque chemin et que le nombre de palettes mises en oeuvre dans le système bouclé soit assez élevé.

Il est évidemment important que la durée d'établissement du régime transitoire soit négligeable devant la durée moyenne qui sépare deux changements de configuration de l'atelier (panne ou retour de réparation d'une machine). On examinera ce point, mais on peut forcer le régime périodique en forçant les conditions initiales pour lesquelles le transitoire n'existe pas. Ces conditions initiales sont calculables comme on le verra.

Le problème qui reste ouvert à ce niveau bas est le choix de l'ordonnancement qui permet d'abaisser au minimum le nombre de palettes utiles pour saturer les machines menantes. On a en effet tout intérêt à réduire ce nombre pour des questions de coût des palettes, de réduction des "en cours", et d'abaissement des risques de conflit du système de transport ou de saturation des aires de stockage. Ce problème de nature combinatoire est complexe mais on peut espérer tirer de notre analyse des indications permettant au moins la construction de bons heuristiques. On notera que le nombre minimum de palettes nécessaire dépend aussi, pour des ratios de production donnés à la sortie de l'atelier, des routages (ou ratios sur chaque chemin).
Il serait donc utile de pouvoir évaluer ce nombre afin d'incorporer, dans le critère de choix au niveau haut, un coût associé.

Comme nous l'avons indiqué, l'approche hiérachisée évoquée ci-dessus se retrouve dans l'esprit, dans les travaux de Hildebrandt [7] et Kimemia et Gershwin [22] . Il nous semble que l'étude ci-dessous constitue une justification a posteriori de ces travaux. Au niveau bas, l'analyse déterministe du régime asymptotique que nous présentons sera comporée, du point de vue des évaluations qu'elle permet, aux analyses probabilistes basées sur la théorie des réseaux de files d'attente et sur les approches dérivées (Operational Analysis, Mean Value Analysis). Le fait qu'un système bouclé avec un nombre suffisamment grand de palettes atteigne naturellement le régime périodique où les machines menantes sont saturées justifie aussi les travaux de Hitz [8] et Lévêque [21] où un régime périodique est forcé par l'ordonnancement (et les dates d'entrée des pièces) pour le système "ouvert", la commande en boucle ouverte étant précisément constituée par les instants où les pièces sont entrées dans le système. On verra que ces dates d'entrée "au plus tôt" (mais aussi "au plus tard") en régime périodique sont automatiquement déterminées dans notre approche par le fonctionnement du système bouclé (et par l'introduction d'un système d'équations d'évolution dual).

On pourra aussi comparer notre approche, basée sur une représentation "linéaire" du système, mais pas dans le sens de l'algèbre classique, avec les tentatives de "linéarisation", au sens classique, des équations d'évolution d'un système de production par G.C. Ho [13] qui qualifie ces systèmes de "systèmes dynamiques événements discrets" (DEDS - Discrete Event Dynamic Systems).

Notre approche présente aussi des points communs avec l'approche de Ramamoorthy et G.S. Ho [13] qui est basée sur les réseaux de Petri, mais il nous semble que l'introduction d'outils algébriques permet plus facilement de développer des outils de calcul.

Enfin, il faut signaler que l'idée d'utiliser la théorie des dioïdes (base de l'outil algébrique présenté ici) pour modéliser les systèmes de production, bien que redécouverte indépendamment par les auteurs, est contenue en germe dans un article de Cunninghame- Green [2] datant de 1962 !

II. LE CAS DE LA LIGNE DE PRODUCTION BOUCLÉE.

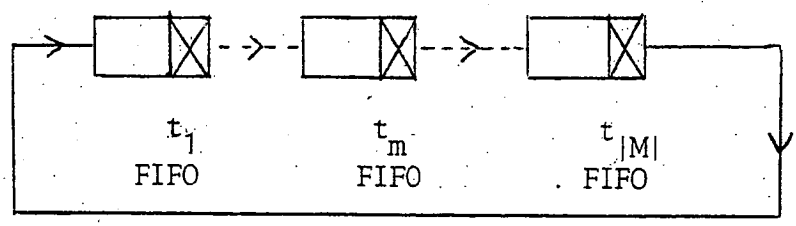
2.1 *Modèle déterministe.*

On considère un système de production constitué d'un ensemble ordonné de machines noté M, et d'un ensemble de palettes P.

On produit un seul type de pièces. Chaque pièce doit passer sur chaque machine dans l'ordre de l'ensemble M. Le temps passé sur la machine $m \in M$ est noté t_m et est supposé déterministe et connu.

Chaque pièce, transportée par la palette $p \in P$, terminée est remplacée immédiatement par une pièce à faire. Le nombre de pièces dans le système reste donc égal à $|P|$, où $|P|$ désigne le nombre de palettes.

On peut représenter symboliquement ce système par une ligne de files d'attente bouclée sur elle-même ayant donc un nombre fini de clients $|P|$.



Le taux de production μ, nombre de clients sortant par unité de temps de la machine M, est une fonction du nombre de clients $|P|$ dans le système.

Si chaque file d'attente est vue comme un réservoir dont le débit de sortie est $\frac{1}{t_m}$, il est facile de se convaincre que les files d'attente autres que celle associée à la machine la(les) plus lente(s) vont se vider et qu'au bout d'un certain temps, quelle que soit la condition initiale un régime périodique va s'établir correspondant à l'une des situations suivantes :

1) - la file d'attente devant la(les) machine(s) la(les) plus lente(s) n'est jamais vide et le taux de production est $\min_{m \in M} \frac{1}{t_m}$,

2) - il n'y a pas d'attente dans le système et le temps total passé par une pièce dans le système est $\sum_{m \in M} t_m$.

Au §4, ce résultat sera , entre autres, démontré rigoureusement. Ce résultat bien que très intuitif n'est pas si facile à démontrer : il suffit d'essayer pour s'en convaincre.

Le taux de production s'établit à sa valeur asymptotique, dès que $|P|$ pièces sont sorties du système. Par contre, le régime établi des stocks peut être atteint beaucoup plus tard en fonction de la répartition initiale des pièces.

Pour ce régime établi, les inégalités suivantes sont vérifiées :

(2.1) $$0 \leq \mu \leq \mu_m = \frac{1}{t_m} \quad , \forall m \in M \; ;$$

(2.2) $$T \geq \sum_{m \in M} t_m \; ;$$

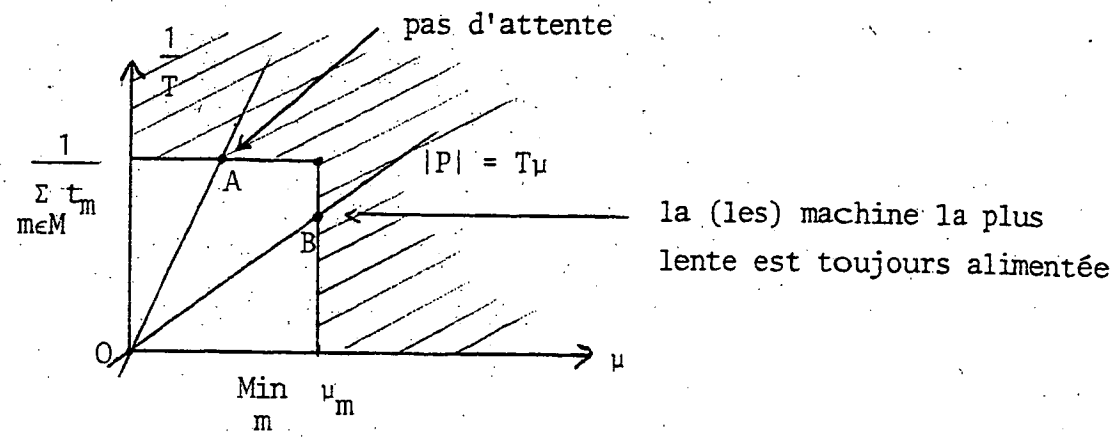
(2.3) $$|P| = T\mu$$

T désigne ici le temps passé par une pièce dans le système :

- (2.1) exprime que le flot de sortie ne peut pas excéder le flot de chaque machine.
- (2.2) exprime que le temps passé dans le système par chaque pièce est supérieur à la somme des temps passés sur chaque machine.
- (2.3) est la formule de Little qui exprime que si le temps moyen d'arrivée entre deux pièces est $\frac{1}{\mu}$ et que le temps moyen passé dans le système est T, le nombre moyen de pièces dans le système est $T\mu$.

Pour une démonstration dans le cadre des problèmes d'ordonnancement on pourra consulter Conway, Maxwell, Miller [1 , Chap. 2]

Ici T et μ sont des inconnues. On peut représenter graphiquement (2.1) (2.2), (2.3) :



Le point A est le point correspondant au régime périodique stable du système lorsqu'il n'y a pas d'attente.

Le point B est le point d'équilibre correspondant au régime périodique stable du système lorsque la machine la plus lente est toujours alimentée.

Pour le modèle précédent, on dispose donc d'une relation qui associe au nombre de palettes le taux de production μ :

$$(2.4) \qquad \mu(|P|) = \begin{cases} \underset{m\in M}{\mathrm{Min}}\ \mu_m & \text{si} \quad |P| \geq (\underset{m\in M}{\mathrm{Min}}\ \mu_m)(\sum_{m\in M} t_m) = P^* \\ \dfrac{|P|}{\sum_{m\in M} t_m} & \text{si} \quad |P| \leq P^* \end{cases}$$

Inversement, le nombre de chariots mimimum assurant le taux de production maximum possible $\underset{m\in M}{\mathrm{Min}}\ \mu_m$ est $[(\mathrm{Min}\ \mu_m)(\sum_{m\in M} t_m)]$ où [ ] désigne la partie entière en faisant l'arrondi par valeur supérieure.

Le taux d'occupation des machines est obtenu en appliquant la formule de Little à chaque machine en dehors de la(les) machine(s) la(les) plus lente(s)

$$(2.5) \qquad \mu t_m = N_m$$

N_m désigne le nombre moyen de pièces à la machine m et qui est également le taux d'occupation de la machine m si m n'est pas la machine la plus lente puisque dans ce cas, il y a au plus une pièce dans la file et lorsqu'il y a une pièce, la machine est en activité. Pour la machine la plus lente, il faut considérer les deux cas : $|P| \geq P^*$, alors le taux d'occupation est 1 et la longueur de la file d'attente est la partie entière par défaut de N_m; $|P| \leq P^*$, alors N_m donné par (2.5) donne le taux d'occupation.

Dans la littérature sur les problèmes d'ordonnancement le point de vue exposé ici (flowshop bouclé sur lui-même) ne semble pas avoir été étudié bien qu'il conduise à des résultats explicites simples dans le cas d'une ligne, et qu'il s'étende au cas du Jobshop comme on le verra aux chapitres suivants.

Le point de vue le plus proche est celui adopté dans l'étude des flowshop et Jobshop statique par exemple Conway-Maxwell-Miller [1 , Chap. 5, 6]. Signalons également le travail de Hitz [8] qui force la périodicité du système en faisant entrer les pièces de façon périodique et qui étudie les propriétés du régime établi correspondant ainsi obtenu. Le travail (cf. Ramamoorthy, G.S. Ho [13]) sur les réseaux de Petri est très proche du point de vue développé ici.

2.2 *Modèle probabiliste.*

On considère la ligne de files d'attente du paragraphe précédent. On suppose que les lois de service sont exponentielles de paramètres $(\mu_m, m \in M)$. Cette hypothèse est nécessaire dans le cadre de la théorie des files d'attente, pour des disciplines de service du type FIFO, si l'on veut disposer de formules explicites des variables décrivant les performances du système (taux de production, longueur des files d'attente).

On est alors en mesure de calculer la loi de probabilité instantanée à l'équilibre de la longueur des files d'attente

$$(2.6) \qquad p(n_1,\ldots,n_m,\ldots,n_{|M|}) = \frac{1}{K} \prod_{m=1}^{|M|} t_m^{n_m}$$

n_m désigne le nombre de pièces dans la file d'attente m ;

K est une constante de normalisation définie de telle façon que p soit une loi de probabilité c.a.d.

$$(2.7) \qquad K(|P|,|M|) = \sum_{n \in \mathcal{N}(|P|,|M|)} \prod_{m=1}^{M} t_m^{n_m}$$

avec $n \in \mathcal{N}(|P|,|M|) \Longleftrightarrow n = (n_1, \ldots, n_{|M|})$ tel que $\sum_{m=1}^{|M|} n_m = |P|$

K satisfait la relation de récurrence :

$$(2.8) \qquad \begin{aligned} K(x,y) &= t_y K(x-1,y) + K(x,y-1) \\ K(x,0) &= 0 \\ K(0,y) &= 1 \end{aligned}$$

Le taux de production a pour valeur

$$(2.9) \qquad \frac{1}{t_{|M|}} \mathbb{P}(n_{|M|} \neq 0)$$

$\mathbb{P}$ désigne ici la probabilité définie par (2.6). Or

$$(2.10) \qquad \mathbb{P}(n_{|M|} = 0) = \frac{1}{K(|P|,|M|)} \sum_{n \in \mathcal{N}(|P|,|M|-1)} \prod_{m=1}^{|M|-1} t_m^{n_m}$$

$$= \frac{K(|P|,|M|-1)}{K(|P|,|M|)}$$

Le taux de production vaut donc :

$$(2.11) \qquad \mu(|P|,|M|) = \frac{1}{t_{|M|}} \left(1 - \frac{K(|P|,|M|-1)}{K(|P|,|M|)}\right)$$

On obtient une autre formule pour le taux de production :

$$(2.12) \qquad \mu(|P|,|M|) = \frac{K(|P|-1,|M|)}{K(|P|,|M|)}$$

En effet, on a :

$$(2.13) \qquad \mu = \sum_{\substack{n \in \mathcal{N}(|P|,|M|) \\ n_{|M|} \neq 0}} p(n) \frac{1}{t_{|M|}} = \frac{1}{K(|P|,|M|)} \sum_{n \in \mathcal{N}(|P|-1,|M|)} \prod_{m=1}^{|M|} t_m^{n_m}$$

(2.8) - (2.11) donnent donc un moyen de calculer la relation qui au nombre de chariots associe le taux de production. Cette formule est exacte si les lois de service sont exponentielles et est à comparer à la formule (2.4) qui est exacte si les temps de production sont déterministes.

Lorsque $|P| \nearrow \infty$, on pourrait montrer que

$$\frac{K(|P|,|M|)}{K(|P|-1,|M|)} \nearrow \sup_{m \in M} t_m \tag{2.14}$$

ce qui correspond au flot obtenu lorsque la machine la plus lente est saturée.

Pour plus de détails et l'étude de situations plus générales (réseau général, multiserveur) on pourra se reporter à Secco-Suardo [15] .

Ce résultat asymptotique obtenu par les files d'attente coïncide donc avec le résultat déterministe correspondant. Malheureusement, en dehors d'une asymptote commune les relations $|P| \to \mu$ obtenues par les deux approches peuvent être très différentes.

Par exemple, considérons le cas $t_m=1$, $\forall m \in M$, qui est la situation idéale dans laquelle on aimerait se trouver lorsqu'on gère un système de production (utilisation complète de toutes les machines). Il est alors facile de calculer $K(|P|,|M|)$.

$K(|P|,|M|)$

$\|M\|$ \ $\|P\|$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	10	55								
9	1	9	45								
8	1	8	36								
7	1	7	28								
6	1	6	21	56	126						
5	1	5	15	35	70	126					
4	1	4	10	20	35	56	79				
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

En fait, on a :

$$(2.15) \qquad K(|P|,|M|) = C_{|P|}^{|P|+|M|-1}$$

c.a.d. le nombre de possibilités de mettre $|P|$ pièces identiques sur $|M|$ machines différentes.

Sur la diagonale $|P| = |M|$ la formule (2.4) donne $\mu = 1$ quel que soit $|M|$ la formule (2.11), ou (2.13) donne :

$\|M\| = \|P\|$	1	2	3	4	5		∞
$\mu(\|P\|)$ stochastique	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{35}{63}$	...	$\frac{1}{2}$
$\mu(\|P\|)$ déterministe	1	1	1	1	1		1

Malgré les différences notables que l'on obtient sur cet exemple, on peut lire assez souvent que l'approche file d'attente donne de bons résultats surtout en ce qui concerne l'évaluation des taux de production. En fait, on peut conjecturer que pour un réseau quelconque dès que l'on est dans une situation où il y a plusieurs machines presque menantes, les résultats deviennent mauvais lorsque $|P|$ est de l'ordre de $|M|$.

D'autres approches sont utilisées pour étudier le cas probabiliste -"Operational Analysis" , P.J. Denning-J.P. Buzen [3] appliqué dans les systèmes de production par Suri [17] . Cette approche peut être considérée comme une version empirique des résultats expliqués dans ce paragraphe, c.a.d. sur une simulation à partir d'estimateurs des variables apparaissant dans les formules précédentes, on en déduit d'autres variables en utilisant la formule de Little et des formules valides lorsqu'une formule du type (2.6) est vraie. En fait, on vérifie expérimentalement par cette approche si les formules obtenues par la méthode précédente sont correctes ou non, ceci sans faire d'hypothèses du type loi de service exponentielle. Il est bien évident qu'avec un tel point de vue on n'obtient pas de formules nouvelles.

- "Mean Value Analysis", M. Reiser-S.S. Lavenberg [12] appliqué au système de production par R.R. Hildebrandt [7] , consiste essentiellement à donner un autre moyen de calculer les formules précédentes, basé sur le théorème suivant, th.3.12, Kelly [11] valide lorsqu'une formule produit du type (2.6) est vraie :

"Quand une pièce arrive dans une file, la disposition des autres pièces dans le système est distribuée selon la loi d'équilibre que l'on aurait obtenue en faisant comme si elles étaient seules dans le système".

Sur notre exemple on en déduit la relation fondamentale :

(2.16) $$\tau_m(|P|) = t_m\,[1 + \bar{n}_m\,(|P| - 1)]$$

où - $\tau_m(|P|)$ désigne le temps moyen d'attente et de séjour à la machine m

- $\bar{n}_m\,(|P|)$ le nombre moyen de pièces en attente devant la machine m lorsqu'il y a $|P|$ pièces dans le système.

De plus la formule de Little appliquée resp. au système complet et à la machine m nous donne

(2.17) $$\mu(|P|) = |P| / \sum_m \tau_m(|P|)$$

(2.18) $$\bar{n}_m(|P|) = \mu(|P|)\;\tau_m(|P|)$$

(2.16) à (2.18) permettent alors de calculer par recurrence le taux de production $\mu(|P|)$.

Faisons le calcul pour 2 palettes, 2 machines, $t_m=1 \ \forall m \in M$.

				résultat déduit de (2.4) (situation déterministe)
$\lvert P \rvert$	0	1	2	2
$\bar{n}_1$	0	$\frac{1}{2}$	1	1
$\bar{n}_2$	0	$\frac{1}{2}$	1	1
τ_1	0	1	$\frac{3}{2}$	1
τ_2	0	1	$\frac{3}{2}$	1
μ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1

Les résultats sont bien évidemment les mêmes que ceux déduits de (2.6) et conduisent donc à la même erreur 33 % par rapport à la situation déterministe.

En conclusion, dans la mesure où le système réel est plus proche du modèle déterministe il semble utile de généraliser les résultats du type (2.4) à des situations où il a plusieurs types de pièces qui cheminent de façon générale dans le système, c'est le but des chapitres suivants.

III. MODELISATION DU n/m/ JOBSHOP BOUCLE ET INTRODUCTION A L'ALGEBRE DU DIOÏDE ($\mathbb{R}$, MAX, +)

3.1 *Le dioïde ($\mathbb{R}$, max, +).*

L'étude de l'existence de régime périodique justifiant les résultats du paragraphe précédent ainsi que leurs extensions se ramène à la recherche de circuit de poids moyen maximum dans un graphe. L'algèbre des chemins développé par Gondran-Minoux [5] se révèle être l'outil le plus agréable pour cette étude: c'est l'algèbre du dioïde ($\mathbb{R}$, max, +). C'est à dire que l'on considère $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni de deux lois de compositions internes: max que l'on notera $\oplus$ et + que l'on notera $*$. Cette structure algébrique est un dioïde $\oplus$ est commutative, associative, possède un élément neutre $-\infty$, noté ε. $*$ est un groupe et est distributif par rapport à $\oplus$, son élément neutre 0 sera noté e pour éviter les ambiguités de la notation multiplicative de l'addition.
Dans cette algèbre, $\oplus$ n'est pas inversible et donc n'est pas simplifiable c.à.d que l'égalité

$$a \oplus b = a \oplus c$$

n'entraîne pas

$$b = c$$

par contre on a $a \oplus b = a$ si $a \geq b$ ou plus généralement $a \oplus b = a$ ou b.

L'équation générale du premier degré s'écrit :

$$a * x \oplus b = a' * x \oplus b'.$$

Elle a une solution unique si :

$a > a'$ et $b' > b$ alors $x = \frac{b'}{a}$ (où $\dot{-}$ désigne la soustraction ordinaire) ;

ou si :

$a' > a$ et $b > b'$ alors $x = \frac{b}{a'}$;

dans le cas $a = a'$ elle a une infinité de solutions $x \geq \frac{b \oplus b'}{a}$; dans le cas $b = b'$, $x \leq \frac{b}{a + a'}$; dans les autres cas elle n'en a pas.

Une façon simple de faire les calculs est d'introduire la notation $\ominus$ (alors $a \ominus b = \varepsilon$ signifie $a = b$) et d'utiliser $a \ominus b = a$ si $a > b$. Par exemple soit à résoudre

$$3 * x \oplus 2 = 2 * x \oplus 4$$

$$(3 \ominus 2)\, x = 4 \ominus 2$$

En utilisant $3 \ominus 2 = 3$, $4 \ominus 2 = 2$ on a $3x = 4$, $x = \frac{4}{3} = 1$ par définition de la division, inverse de $*$, donc la soustraction qui est bien l'unique solution de $\mathrm{Max}(3 + x, 2) = \mathrm{Max}(2 + x, 4)$.

On définit des matrices auxquelles on applique le calcul matriciel habituel si A et B sont deux matrices dont les éléments appartiennent $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, la matrice $C = A*B$ est définie par :

(3.1) $$c_{ij} = \bigoplus_k a_{ik} * b_{kj} = \mathrm{Max}_k\, (a_{ik} + b_{kj})$$

A la matrice (n, n) A on associe le graphe $G = (E, V)$ de sommets $E = \{1, 2, \ldots, n\}$, d'arcs V d'origine i et d'extrémités j si $a_{ij} \neq \varepsilon$, de poids a_{ij}.

Alors si l'on désigne par $A^k = A*A* \ldots *A$ k fois, l'élément A^k_{ij} a pour valeur le chemin de longueur maximum joignant i à j constitué de K arcs adjacents du graphe G.

Gondran et Minoux [6] ont montré l'existence de valeur propre, vecteurs propres, déterminant, dépendance linéaire, polynome caractéristique. Le lien entre ces diverses notions n'est pas toujours le même qu'en algèbre ordinaire. Les calculs se font comme dans l'algèbre ordinaire moyennant les règles de simplification de l'addition expliquées plus haut ou bien comme indiqué dans Gondran-Minoux [6]. Par exemple, calculons le polynôme caractéristique de

(3.2) $$A = \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix}$$

(3.3) $$\det (A \ominus \lambda I) = \varepsilon$$

(3.4) $$(a \ominus \lambda)\,(b \ominus \lambda) \ominus cd = \varepsilon$$

(3.5) $$\lambda^2 \oplus ab = \lambda(a \oplus b) \oplus cd$$

dont les solutions sont :

(3.6) $\lambda = \sqrt{cd} \oplus a \oplus b$

et

(3.7) $\lambda = \dfrac{ab}{a \oplus b} = \text{Min}\ (a,b)$ si $ab > cd$

(3.8) $\lambda \leq \dfrac{ab}{a \oplus b}$ si $ab = cd$

$\sqrt{ab}$ signifie dans l'algèbre ordinaire $\frac{a+b}{2}$. On vérifiera directement ces formules. Elles sont obtenues facilement en exprimant de chaque côté de l'égalité $a \oplus b = a$ ou b.

On remarque que :

$\lambda = \sqrt{cd} \oplus a \oplus b$ est valeur propre,

en effet il existe une solution à

$$\begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\sqrt{cd} \oplus a \oplus b) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

La solution donne le vecteur propre (x, y)

$x = e$

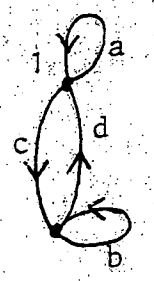
(3.9) $$y = \begin{cases} \frac{d}{a} & \text{si } \sqrt{cd} \oplus a \oplus b = a \\ \frac{b}{c} & \text{si } \sqrt{cd} \oplus a \oplus b = b \\ \sqrt{\frac{d}{c}} & \text{si } \sqrt{cd} \oplus a \oplus b = \sqrt{cd} \\ \frac{d}{a} \text{ ou } \frac{b}{c} & \text{si } \sqrt{cd} \oplus a \oplus b = a = b > \sqrt{cd} \text{ (2 vecteurs propres)} \end{cases}$$

(3.10) $\lambda = \dfrac{ab}{a \oplus b}$ n'est pas valeur propre, en général il n'existe pas de vecteur propre associé.

La valeur propre

(3.11) $\lambda = \sqrt{cd} \oplus a \oplus b$

s'interprète comme le poids moyen maximum des circuits du graphe. Ici le graphe G associé à la matrice $\begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix}$ peut être représenté par



Dans l'algèbre ordinaire $\lambda = \text{Max}\ (a, b, \frac{c+d}{2})$ est bien le résultat souhaité.

3.2 *Le flowshop bouclé dans le cas où le nombre de palettes est égal au nombre d'éléments du schéma périodique de la séquence d'entrée des pièces.*

On étudie un atelier flexible composé d'un ensemble de machines M devant produire des pièces dont le type appartient à l'ensemble J. On astreint l'atelier à produire les différentes pièces proportionnellement à un vecteur donné à l'avance que l'on appellera ratios de production. Cette contrainte sera respectée en introduisant un ordre d'entrée des pièces, périodique de façon qu'à la fin de chaque schéma périodique appelé I le ratio de production désiré soit respecté exactement. Par exemple supposons que l'on ait 3 types de pièces à produire proportionnellement à (1, 2, 3). La séquence d'entrée des pièces aura une période de 6, $|I| = 6$, et on pourra prendre l'ordonnancement

(3.12) $\underbrace{1\ 22\ 333}_{I}\quad \underbrace{1\ 22\ 333}_{I}$

les numéros dans (3.12) désignant les types de pièces. Un autre ordonnancement aurait pu être :

$\underbrace{1\ 23\ 233}_{I}\quad \underbrace{1\ 23\ 233}_{I}$

Dans ce paragraphe on se place dans la situation la plus simple : on suppose

- que l'on dispose d'un nombre de palettes $|P| = |I|$,
- que chaque chariot est affecté à une pièce de la séquence d'entrée (dans l'exemple précédent les pièces d'une même période seront distinguées 1, 2, 3, 4, 5, 6 les chariots seront numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6 le chariot 1 portera toujours une pièce 1, ..., le chariot 6 portera toujours la pièce 6),

- les pièces passent sur toutes les machines dans l'ordre 1, 2, ... $|M|$, les temps d'usinage correspondants sont alors notés t_{mi}, $m \in M$, $i \in I$.

On définit alors un triplet de matrices (A, B, C) que l'on associera à un graphe du type potentiel tâche B.Roy [14] multi-entrées multi-sorties.

- A est la matrice carrée d'ordre $|M|\,|P|$

(3.13)
$$A_{(m,i),\,(m',i')} = \begin{cases} t_{m,i} & \text{si } (m',i') = (m+1,\, i) \\ & \quad m \in M,\, m \neq |M|,\, i \in I \\ t_{m,i} & \text{si } (m',i') = (m,\, i+1) \\ & \quad m \in M,\, i \neq |I|,\, i \in I \\ \varepsilon & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- B est une matrice rectangulaire $(|M|+|I|,\ |M|\ |I|)$ obtenu par concatenation des lignes des deux matrices B^M et B^I ou B^M est rectangulaire $(|M|,\ |M|\ |I|)$ et B^I rectangulaire $(|I|,\ |M|\ |I|)$

(3.14)
$$B^M_{m\ ;\ (m',\ i')} = \begin{cases} e & \text{si } m' = m,\ \ m \in M\ ;\ i' = 1\ ; \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

(3.15)
$$B^I_{i\ ;\ (m',\ i')} = \begin{cases} e & \text{si } i = i',\ \ i \in I\ ;\ m = 1\ ; \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

- C une matrice rectangulaire $(|M|\ |I|,\ |M|+|I|)$ obtenu par concatenation de la matrice C^M rectangulaire $(|M|\ |I|,\ |M|)$ et la matrice C^I rectangulaire $(|M|\ |I|,\ |I|)$ définies par

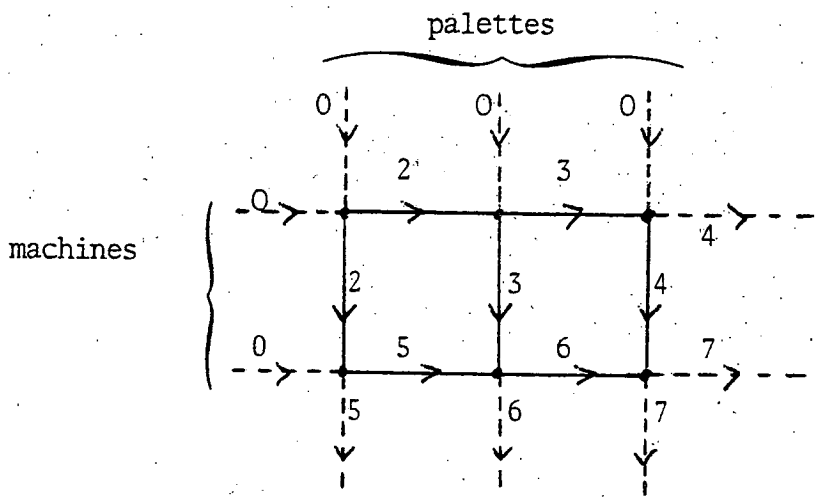
(3.16)
$$C^M_{(m,\ i)\ ;\ m'} = \begin{cases} t_m & \text{si } m' = m,\ m \in M\ ;\ i = |I|\ ; \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

(3.17)
$$C^I_{(m,\ i)\ ;\ i'} = \begin{cases} t_{mi} & \text{si } i' = i,\ i \in I\ ;\ m = |M|\ ; \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple Considérons un système à trois pièces deux machines avec des ratios 1/3 , 1/3, 1/3 à respecter et des temps d'usinage

$$t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

A ce système de production on associe le graphe dont les noeuds représentent les tâches et les arêtes les contraintes d'ordre à respecter entre les tâches avec des poids égaux aux temps de la tâche de l'origine de l'arc. Les entrées sont indiquées par des flèches pointillées rentrantes dans le graphe, les sorties par des flèches pointillées sortantes. On a alors sur l'exemple le graphe potentiel-tâche suivant :



$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \varepsilon & 2 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right] \qquad C = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|cc} & & & \varepsilon & \varepsilon \\ & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon \\ & & & 4 & \varepsilon \\ \hline 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} i = 1 \\ i = 2 \\ i = 3 \\ i = 1 \\ i = 2 \\ i = 3 \end{array} \begin{array}{l} \left.\right\} m = \\ \left.\right\} m = \end{array} \\ \begin{array}{cc} C^I & C^M \end{array} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} e & \varepsilon & \varepsilon & & & \\ \varepsilon & e & \varepsilon & & \varepsilon & \\ \varepsilon & \varepsilon & e & & & \\ \hline e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right] \begin{array}{l} B^I \\ \\ \\ B^M \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} i=1 & 2 & 3 & i=1 & 2 & 3 \\ & m=1 & & & m=2 & \end{array} \end{array}$$

On note alors :

- x le vecteur $|M|\ |I|$ des débuts des tâches au plus tôt
- u le vecteur $|M|+|I|$ indiquant les temps à partir desquels les machines peuvent commencer à travailler [resp. les palettes sont disponibles]
- y le vecteur $|M|+|I|$ indiquant les instants où les machines [resp. les palettes] sont libérées au plus tôt.

On a alors les relations liant les vecteurs (u, x, y), au sens de l'algèbre du dioïde ($\mathbb{R}$, max, +) :

$$(3.18) \qquad \begin{cases} x = x\,A \oplus u\,B \\ y = x\,C \end{cases}$$

Les relations (3.18) expriment que le plus petit instant x(m, i) où la tâche (m, i) peut commencer est le maximum du temps de libération, des tâches précédentes, de la machine et de la palette correspondante.

Théorème

u étant donné $\exists$ x, y unique solution de (3.18).

Démonstration

Existence

A étant strictement sur-diagonal ou le graphe correspondant G étant sans circuit, $A^{|M|+|I|} = \mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ désigne la matrice carré d'ordre $|I|\ |M|$ dont tous les éléments sont ε. Alors

$$(3.19) \qquad A^* = \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \sum_{n=0}^{|I|+|M|} A^n$$

on vérifie alors suivant Gondran-Minoux [5] que

$$(3.20) \qquad x = u\,B\,A^*$$

est solution.

Unicité

S'il existe x solution de (3.18) alors

$$x = xA \oplus uB = (xA \oplus uB)\,A \oplus uB = xA^2 \oplus u(BA \oplus B)$$
$$= (xA \oplus uB)\,A^2 \oplus u(BA \oplus B) = xA^3 \oplus u(BA^2 \oplus BA \oplus B) = \ldots$$

En utilisant alors le fait que $A^{|I|+|M|} = \mathcal{E}$ et la définition de A^*, on en déduit que :

(3.21) $\quad x = uBA^*$

d'où l'unicité.

On peut définir un problème dual, notons

- q le vecteur $|M|\ |I|$ des débuts des tâches au plus tard changés de signe ;
- v le vecteur $|M|+|I|$ indiquant les temps à partir desquels les machines [resp. les palettes] devront être libérés une fois le travail achevé, changés de signe ;
- z le vecteur $|M|+|I|$ indiquant les instants au plus tard changés de signe auxquels il faut démarrer les machines [resp. disposer des palettes] pour que le travail soit terminé à temps.

On a alors les relations liant les vecteurs (v, q, z) au sens de l'algèbre de dioïde ($\mathbb{R}$, max, +)

(3.22) $$\begin{cases} q = Aq \oplus Cv \\ z = Bq \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de (3.22) se démontre de la même façon que précédemment. Et on obtient de même la relation entrée sortie :

(3.23) $\quad z = BA^*Cv\,.$

On peut maintenant reboucler le système, c.à.d enchaîner les tâches associées à une période de la séquence d'entrée avec les tâches de la période suivante. L'indice n sera affecté au numéro de la période de la séquence d'entrée. Pour cela on considère la matrice carré K d'ordre $|I|+|M|$, liant la sortie y^n et l'entrée u^{n+1} par

(3.24) $\quad u^{n+1} = y^n K\,.$

Elle est prise diagonale (= E) dans cet exemple.

E désigne la matrice identité $E_{ij} = \begin{cases} \varepsilon & i \neq j \\ e & i = j \end{cases}$.

Mais elle pourrait représenter un retard imposé dans l'enchainement de la réutilisation d'une palette ou d'une machine qui par exemple ne détériore pas les performances du système.

On obtient donc le système récurrent donnant les dates de sortie au plus tôt du système de production bouclé

(3.2 5) $\quad y^{n+1} = y^n KBA^*C \qquad y^\circ$ donné.

L'étude asymptotique de (25) revient à étudier la valeur et le vecteur propre de KBA^*C, au sens de l'algèbre du dioïde ($\mathbb{R}$, max, +). Elle sera faite au chapitre suivant. Avant cela nous allons montrer comment cette approche se généralise.

3.3 *Généralisation du triplet A, B, C.*

On peut généraliser l'approche précédente à un graphe potentiel tâche B. Roy [14] général.

Pour cela notons :

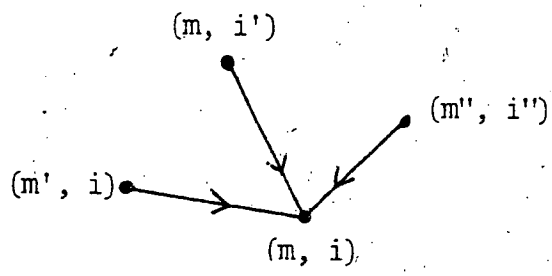
- M la liste de tous les types de machines. q_m désigne le nombre de machines de type m dont on dispose, $m \in M$.
- J la liste des types de pièces.
- I un mot constitué de lettres appartenant à J décrivant la séquence d'entrée des pièces. k_i désignera le nombre de pièces de type i dans I, p_i le nombre de palettes de type i dont on dispose.
- α_i un mot constitué de lettres appartenant à M représentera la gamme associée à la pièce i. La phrase $f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{|I|}\}$ représente alors l'ensemble des gammes. On lui associe un mot M représentant la suite minimum d'opérations à considérer pour avoir une représentation linéaire des gammes. M sera le mot constitué des lettres m de M, chacune répétée k_m fois où $k_m = \underset{i}{\mathrm{Max}}\{$nombre de fois où m apparaît dans $\alpha_i\}$ l'ordre étant sans importance. M sera appelée séquence de base sur les opérations.

Une opération physique est alors complètement caractérisée par le couple $(m, i) \in M \times I$. Une décision d'ordonnancement consiste à se donner une phrase $g = \{\beta_1, \ldots, \beta_{|M|}\}$, où les β_m sont des mots constitués de lettres de J dont l'ordre dans le mot indique l'ordre de passage des pièces sur la machine m. Pour que l'opération puisse être effectuée il faut qu'un certain nombre de conditions liées entre elles par des "et logique" soient satisfaites. Par exemple pour que l'opération (m, i) puisse être effectuée il faut que les opérations

- (m', i) disponibilité de la pièce i, où m' est la lettre qui précède m dans α_i
- (m, i') disponibilité d'une machine de type m, où i' est la lettre qui précède i dans β_m
- (m'', i'') disponibilité de la pièce i'',

soient terminées, dans le cas de l'assemblage de la pièce i avec la pièce i'' sur la machine m.

A chacune de ces conditions on affecte un arc dans un graphe de sommets inclus dans M × I. Par exemple dans l'exemple précédent on aura



A chaque arc on affecte un poids somme de deux temps : le temps de l'opération associée à l'origine de l'arc et un autre temps pouvant avoir l'interprétation d'un temps de transport ou d'un temps de changement d'outils ou de chargement etc....

La matrice A sera alors associée au graphe G(A) = (X(A), V(A)) décrit ci-dessus où X désigne les sommets, V les arcs de G.

On définit alors la matrice d'entrée B comme matrice d'un graphe biparti d'origine dans MUI et d'extrémité dans X(A). L'élément V_{ia} de V(B) $i \in I, a \in X(A)$, représente l'arc joignant i à a = (m,i) où m est la première lettre de x_i.

De même V_{ma} de V(B), $m \in M$, $a \in X(A)$, représente l'arc joignant m à $a = (m,i)$ où i est la première lettre de β_m. Les poids des arcs de V(B) sont nuls.

On définit de façon duale la matrice C comme matrice d'un graphe bi-parti d'origine dans X(A) et d'extrémité MUI. V_{ai}, $a \in X(A)$, $i \in I$ représente l'arc joignant $a=(m,i)$ à i où m est la dernière lettre de α_i (et symétriquement pour V_{am}. Ces arcs auront des poids ayant même interprétation que ceux des arcs de A.

3.4 *Généralisation du rebouclage K*

Pour chaque type de palettes et de machines on fait les divisions

$$p_i = n_i\, k_i + r_i,\ 0 \le r_i < k_i,\ i \in \mathcal{I} \tag{3.26}$$

$$q_m = n_m\, k_m + r_m,\ 0 \le r_m < k_m,\ m \in \mathcal{M} \tag{3.27}$$

qui définissent de façon unique les doublets (n_i, r_i) et (n_m, r_m).

Soit $i \in \mathcal{J}$ et soit m_i la dernière lettre de α_i. Notons $(i_1, \ldots, i_{k_i})$ l'ensemble des pièces de type i, dans l'ordre induit par le mot β_{m_i}. On définit les matrices K^i et $\bar{K}^i$ carrées d'ordre $|M| + |I|$ par

$$\forall j,j' \in M \cup I \quad \begin{cases} K^i_{jj'} = \begin{cases} e \text{ si } j=i_\ell,\ j'=i_{\ell+r_i} \text{ et } \ell + r_i < k_i \\ \varepsilon \text{ sinon} \end{cases} \\ \\ \bar{K}_{jj'} = \begin{cases} e \text{ si } j=i_\ell,\ j'=i_q \text{ et } q=\ell + r_i \bmod. k_i \text{ avec } \ell + r_i \ge k_i \\ \varepsilon \text{ sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Mutatis mutandis, on définit les matrice K^m et $\bar{K}^m$, $m \in \mathcal{M}$ en échangeant les rôles des indices i et m et des mots α_i et β_{m_i}.

On effectue alors le rebouclage indiquant l'instant où les palettes et machines des divers types sont disponibles.

$$u^n = \sum_{m \in \mathcal{M}} (y^{n-n_m} K^m \oplus y^{n-n_m-1} \bar{K}^m) \oplus \sum_{i \in \mathcal{J}} (y^{n-n_i} K^i \oplus y^{n-n_i-1} \bar{K}^i) \tag{3.28}$$

Ce qui conduit à l'étude du système récurrent :

$$y^n = \sum_{m \in \mathcal{M}} (y^{n-n_m} E^m \oplus y^{n-n_m-1} \bar{E}^m) \oplus \sum_{i \in \mathcal{J}} (y^{n-n_i} E^i \oplus y^{n-n_i-1} \bar{E}^i), \tag{3.29}$$

avec :

$$(3.30)\quad \begin{cases} E^m = K^m\, BA^*C \quad , \quad \bar{E}^m = \bar{K}^m\, BA^*C, \\ E^i = K^i\, BA^*C \quad , \quad \bar{E}^i = \bar{K}^i\, BA^*C. \end{cases}$$

On a ainsi un formalisme très général permettant de traiter le cas du Jobshop, des ordonancements généraux, des opérations d'assemblage et de découpage des temps de transport et de changements d'outils,qui tient compte du fait que plusieurs pièces du même type peuvent apparaître dans la séquence de base d'entrée des pièces et que plusieurs machines de même type sont utilisées.

Remarque

On remarque que l'on aurait pu formuler ce problème en terme de réseau de Petri temporel et que les jetons correspondraient alors aux palettes et aux machines. Inversement les résultats démontrés au chapitre suivant sont valables pour un réseau de Petri dès que le graphe obtenu, à partir du réseau de Petri, en coupant les arcs où il y a un jeton, est sans circuit.

3.5 *Enoncés informels de résultats utiles pour les systèmes de production démontrés dans le paragraphe suivant.*

Les temps de sortie au plus tôt des pièces de l'atelier sont donnés dans le cas le plus général par une formule du type (3.29) que nous écrivons :

$$(3.31)\qquad Y^{n+1} = Y^n H,$$

avec

$$(3.32)\qquad Y^n = (y^n, y^{n-1}, \ldots, y^{n-N+1})$$

N:retard maximum apparaissant dans (3.29)

$$(3.33)\qquad H = \begin{bmatrix} A_1 & e & & \varepsilon \\ A_2 & & e & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_N & \varepsilon & & \end{bmatrix}$$

(3.34) $A_j = K_j BA^*C$ où K_j est la somme des K^m, $\bar{K}^m$, K^i, $\bar{K}^i$ conduisant au retard j dans (3.29).

La solution du système récurrent (3.31) détermine tous les évènements du système.

La première question à se poser est évidemment l'existence d'un régime stationnaire à (3.31) c.à.d. l'existence d'une solution Y de

(3.35) $Y = YH$.

La réponse est négative du fait de la présence de boucle de poids positif dans H. Par contre il existe λ et Y tels que :

(3.36) $\lambda Y = YH$.

Y est un vecteur propre de H associé à la valeur propre λ au sens de l'algèbre du dioïde. Dans le cas considéré ici, où le graphe associé à la matrice H noté G(H) à une seule composante connexe, λ est défini de façon unique et s'interprète comme le poids du circuit de poids moyen maximum. Appelons γ un circuit de G(H), $W(\gamma)$ son poids (somme des poids des arcs du circuit) et $n(\gamma)$ le nombre d'arcs du circuit alors on a :

(3.37) $\lambda = \sum_{\gamma \in G(H)} W(\gamma)^{1/n(\gamma)}$ (notation du dioïde)

(3.38) $\lambda = \operatorname{Max}_{\gamma \in G(H)} \frac{W(\gamma)}{n(\gamma)}$ (notation habituelle).

Si l'on désigne par γ^* le circuit de poids moyen maximum supposé unique dans ce paragraphe, $d = n(\gamma^*)$ son nombre d'arcs (le cas général, non unicité de γ^*, sera complètement résolu), $n(\gamma^*)\lambda$ est la période du système et le taux de production d'une pièce quelconque de la séquence d'entrée est $\frac{1}{\lambda}$. Y est défini à une constante additive près. Si l'on fixe cette constante de façon à ce que Y_i soit nul pour i un évènement q.c.q. du circuit critique, $Y_j, j \neq i$, s'interprète comme l'instant au plus tôt auquel pourra avoir lieu l'évènement j en régime périodique pour l'origine des temps considéré.

De même le système propre adjoint admet une solution

(3.39) $\mu Z = HZ$

μ a la même interprétation que λ solution de (3.36) et $\lambda = \mu$.

Le circuit critique, sous l'hypothèse d'unicité, est le même et z est défini à une constante additive près, et en choisissant un évènement du circuit critique pour origine, par exemple i défini précédemment, z_j changé de signe s'interprète comme la date au plus tard à laquelle peut avoir lieu l'évènement j, en régime périodique, si l'on ne veut pas perturber ce dernier.

Une fois caractérisé le régime périodique, la question naturelle qui se pose est la stabilité de ce régime. Le résultat suivant précise cette stabilité,

$$(3.40) \qquad \forall\, Y^\circ,\ \exists\, T : \forall\, m \geq T \quad Y^\circ H^m = Y^\circ H^{m+d} \ \lambda d$$

Des contre-exemples simples montrent que en général T peut être grand et n'est pas lié au nombre de sommets du graphe entrée-sortie mais semble plutôt lié à la deuxième solution du polynôme caractéristique de la matrice H lorsqu'elle existe, ce qui correspond à l'intuition des systèmes linéaires classiques. Ce résultat général peut être précisé par la remarque suivante : en un évènement du cycle critique, (3.40) est vérifié avec T plus petit que l'ordre de la matrice H.

Dans le cas général où il n'y a pas unicité du circuit critique les résultats sont également donnés. La définition de d devient alors plus compliquée.

Lorsqu'on augmente le nombre de palettes dans le système, la matrice H grandit et H prend la forme

$$\begin{bmatrix} A_1 & e & & & \\ A_2 & & & & \\ \vdots & & & \varepsilon & \\ A_k & & & & \\ \varepsilon & & & & \\ \vdots & & & & \\ \varepsilon & & & & \\ A_{k'} & \varepsilon & & & e \\ \vdots & & & & \\ A_N & & & & \end{bmatrix}$$

la sous matrice $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ \vdots & e & & \varepsilon \\ & & \ddots & \\ A_k & \varepsilon & & e \end{bmatrix}$ conserve des circuits à cause des rebouclages des machines. Dans la première colonne, la suite des $A_i = \varepsilon$ s'allonge avec le nombre de palettes, et donc les seuls circuits de G(H) sont les circuits de $\tilde{A}$ et des circuits contenant une suite de longueur ℓ, de e de H, croissante avec le nombre de palettes rebouclés par des arcs de A_ℓ. Il devient alors clair que le circuit de poids moyen maximum sera un circuit de $\tilde{A}$ donc un circuit associé au rebouclage d'une machine donc au circuit associé à la saturation des machines du type le plus lent. Ce qui montre que quels que soient les ordonnancements des tâches sur les machines, il existe un nombre fini de palettes assurant la saturation des machines du type le plus lent, l'optimisasation des ordonnancements des tâches ne servant qu'à diminuer ce nombre de palettes à partir duquel les machines du type le plus lent sont saturées.

Enfin la détermination de la période et d'un circuit critique se fait par un algorithme de Karp en O (mn) m désigne le nombre d'arcs du graphe de H et n son nombre de sommets. Cet algorithme ramène le problème à la recherche du chemin le plus long d'un sommet quelconque à tous les autres en n arcs.

Dans le paragraphe suivant les résultats énoncés sont précisés et démontrés dans un système de notations spécifiques.

IV. ANALYSE SPECTRALE DES MATRICES IRREDUCTIBLES

4.0 Introduction et Rappels de notations :

Les résultats du n° 4.1 sont empruntés à Gondran et Minoux [5,6].

Au n° 4.2, nous précisons la structure du moduloïde des vecteurs propres grâce à l'introduction du sous-graphe critique.

L'étude de la cyclicité (n° 4.3) semble originale et se trouve à la base du comportement "périodique" des systèmes récurrents linéaires (n° 4.5).

Dans ce paragraphe nous n'utiliserons jamais la multiplication ordinaire à l'exception de calculs sur des indices ou exposants qui obéiront à l'arithmétique ordinaire. On peut donc définir sans trop d'ambiguité sur $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ les opérations ,

$$x + y \triangleq \max(x,y)$$

$$\sum_i x_i = \max_i x_i$$

$$\varepsilon = -\infty$$

$$x\,y = x + y$$

$$x^n = nx$$

$$x^{-n} = -nx$$

$$x^{1/n} = \frac{1}{n}x$$

$$e = 0 .$$

Sur l'ensemble des matrices (de dimensions appropriées) ,

$$(A + B)_{ij} = \max(A_{ij}, B_{ij})$$

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} = \max_k (A_{ik} + B_{kj})$$

$$I = \begin{pmatrix} e & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & e \end{pmatrix}$$

Pour A matrice carrée d'ordre N, on notera G (A) = [X,U] le graphe orienté associé à A, où

$$X = \{ 1,2, \ldots\ldots, N \}$$

$$U = \{ (i,j) : A_{ij} \neq \varepsilon \}.$$

Pour tout chemin $\ell = \{(i_1,i_2) \ldots\ldots\ldots (i_{k-1}, i_k) \}$

on définit le poids,

$$w(\ell) = A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \ldots\ldots\ldots A_{i_{k-1} i_k} ,$$

et la longueur $n(\ell)$ = nombre d'arcs de ce chemin = k-1.

Un vecteur $y \neq \varepsilon$ est un vecteur propre (à gauche) de la matrice A, s'il existe un <u>réel</u> λ appelé valeur propre tel que

$$y A = \lambda y.$$

Si λ est valeur propre de A, on notera $\vartheta(\lambda,A)$ le moduloïde des vecteurs propres associés à λ.

La matrice A est dite irréductible si le graphe G(A) ne possède qu'une composante fortement connexe. Dans toute la suite nous supposerons <u>A irréductible et le p.g.c.d. de la longueur des circuits de G(A) égal à 1</u> de telle sorte que toutes les puissances A^k seront elles mêmes irréductibles.

4.1 Valeur propre.

<u>Lemme 4.1</u> - <u>Soit y une vecteur propre de A pour la valeur propre λ ; alors</u> :

$$\lambda > \varepsilon , \text{ et } \forall i \quad y_i > \varepsilon .$$

<u>Démonstration.</u>

Si $\lambda = \varepsilon$ on a $\sum_i y_i A_{ij} = \varepsilon$ pour tout j, et donc $y_i A_{ij} = \varepsilon$ pour tout i et tout j.

Soit i tel que $y_i \neq \varepsilon$ (i existe étant donné que $y \neq \varepsilon$). Il faut donc que $A_{ij} = \varepsilon$ pour tout j ; ce qui est contraire à l'irréductibilité de A.

Soit $X_1 = \{ i : y_i = \varepsilon\}$ et $X_2 = X - X_1$. Pour $X_1 \neq \emptyset$ on définit la partition :

$$A = \begin{array}{c} X_1\{ \\ X_2\{ \end{array} \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ \hline A_4 & A_2 \end{array} \right] , \quad y = (y_1 \mid y_2) = (\varepsilon \mid y_2)$$

La relation $yA = \lambda y$ entraîne, $y_2 A_4 = \varepsilon$. Mais $y_2 \neq \varepsilon$ entraîne comme précédemment $A_4 = \varepsilon$; ce qui contredit l'irréductibilité de A.

Introduisons maintenant la quantité λ égale au <u>poids moyen maximum des circuits de G(A)</u> ; λ peut s'écrire :

$$(4.1) \qquad \lambda = \sum_{\gamma} w(\gamma)^{1/n(\gamma)}$$

où $n(\gamma)$ est la longueur du circuit γ de G(A).

Rappelons que, étant donné une matrice carrée A on définit, lorsqu'elles existent, les matrices A^+ et A^* par,

$$A^+ = A + A^2 + \ldots\ldots + A^n + \ldots.$$

$$A^* = I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots.$$

D'après [5] , ch. 3, § 2.3, theor. 1, une condition nécessaire et suffisante pour que A^+ et A^* existent, est que A ait tous ses circuits de poids inférieur ou égal à e. Dans ces conditions,

$$A^+ = A + A^2 + \ldots\ldots A^{N-1} \quad , \text{ N dimension de A.}$$

A^+_{ij} s'interprète comme le poids maximum des chemins joignant i à j.

Par ailleurs, il est clair que

$$(4.2) \qquad \begin{cases} A^+_{ij} = A^*_{ij} & \text{si } i \neq j \\ A^+_{ii} = A^*_{ii} & \text{si et seulement si } A^+_{ii} = e. \end{cases}$$

<u>Lemme 4.2</u> - <u>Soit λ donné par (4.1) et notons $\bar{A}_\lambda$ la matrice λ^{-1} A.</u>

<u>Alors A^+_λ (respectivement A^*_λ) existe.</u>

<u>Démonstration.</u>

Soit λ un circuit de A_λ ; il est de poids $\lambda^{-n(\gamma)} w(\gamma)$ où $w(\gamma)$ est le poids de ce même circuit dans G(A) et $n(\gamma)$ sa longueur. Mais par définition de λ :

$$w(\gamma)^{1/n(\gamma)} \leq \lambda$$

D'où $\quad w(\gamma) \leq \lambda^{n(\gamma)}$ et $\lambda^{-n(\gamma)} w(\gamma) \leq e$

Théorème 4.3 - λ donné par (4.1) est l'unique valeur propre de A.

Démonstration. Vérifions tout d'abord que λ est bien valeur propre de A.

Pour cela, soit γ_o un circuit de G(A) de poids moyen maximum. Donc,

$$\lambda = w(\gamma_o)^{1/n(\gamma_o)} \Longleftrightarrow \lambda^{-n(\gamma_o)} w(\gamma_o) = e.$$

Par ailleurs d'après le lemme 4.2, $(A^+_\lambda)_{ii} \leq e$, $\forall i$.
Par contre si on choisit $i \in \gamma_o$, on aura

$$(A^+_\lambda)_{ii} = (A^*_\lambda)_{ii} = e$$

ce qui entraîne l'egalité des vecteurs $(A^+_\lambda)_i$ et $(A^*_\lambda)_i$ d'après (4.2).

Nous allons en déduire que le vecteur $y = (A^+_\lambda)_i$, $i \in \gamma_o$, est un vecteur propre associé à λ. En effet, d'après la relation $A^*_\lambda A_\lambda = A^+_\lambda$

$$yA = \lambda(A^+_\lambda A_\lambda)_i = \lambda(A^*_\lambda A_\lambda)_i = \lambda(A^+_\lambda)_i = \lambda y.$$

On a donc démontré de plus,

Corollaire 4.4 - Soit i appartenant à un circuit de poids moyen maximum, alors $(A^+_\lambda)_i$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

Il s'agit maintenant de montrer l'unicité de λ. Pour cela vérifions tout d'abord que pour toute valeur propre λ de A on a,

$$\lambda \geq \sum_\gamma w(\gamma)^{1/n(\gamma)}. \tag{4.3}$$

De la relation,

$$\lambda y_i = \sum_i y_i A_{ij} \quad , \forall j$$

on en déduit que le long de tout circuit

$$\gamma = \{(i,i_1)\ (i_1,i_2)\ \dots\ (i_k,i)\},$$

$$\lambda y_{i_1} \geq y_i A_{ii_1}$$
$$\lambda y_{i_2} \geq y_{i_1} A_{i_1 i_2}$$
$$\vdots$$
$$\lambda y_i \geq y_{i_k} A_{i_k i}.$$

D'où,

$$y_i \geq y_i \; \lambda^{-n(\gamma)} \; w(\gamma).$$

Et comme $y_i \neq \varepsilon$ d'après le lemme 4.1

$$e \geq \lambda^{-n(\gamma)} \; w(\gamma)$$

où (4.3).

Pour terminer il suffit de montrer l'existence d'un γ tel que $\lambda = w(\gamma)^{1/n(\gamma)}$.

Soit y un vecteur propre associé à λ :

$$\forall\, j, \exists i(j) \text{ tel que } \quad \lambda y_j = y_{i(j)} \; A_{i(j)j}$$

Soit alors $H = [X,Y]$ où $Y \subset U$, le graphe orienté obtenu en prenant pour Y l'ensemble des arcs de la forme $(i(j), j)$ (s'il y a plusieurs $i(j)$ possibles, on en choisit arbitrairement un).

Le graphe H possède n sommets, n arcs. Son nombre cyclomatique est égal à son nombre de connexité. Et comme tout sommet a un demi degré intérieur égal à 1, il ne peut y avoir plus d'un circuit par composante connexe de H.

Donc H est composé en général de $K \geq 1$ composantes connexes $H_1 \ldots H_K$, contenant chacune un circuit et un seul.

Soit alors γ un tel circuit. Le long de ce circuit les inégalités (4.4) deviennent des égalités. D'où l'on déduit comme précédemment,

$$y_i = y_i \; \lambda^{-n(\gamma)} \; w(\gamma), \quad , \; i \in \gamma$$

et $\quad \lambda = w(\gamma)^{1/n(\gamma)}$.

4.2 Dimension du moduloïde des vecteurs propres.

Si A est de valeur propre λ , par translation $A_\lambda = \lambda^{-1}A$ on peut toujours se ramener au cas de la valeur propre e.

<u>Définition 4.5</u> - Soit A une matrice de valeur propre e. Un circuit γ de G(A) est dit critique si,

$$w(\gamma) = e.$$

Un circuit critique est donc un circuit de poids (moyen) maximum pour A.

Définition 4.6 - Soit A une matrice de valeur propre e. On appelle graphe critique de (A), le graphe orienté

$$G_o(A) = [X_o, U_o] \quad \text{où,}$$

$$X_o = \{ i : \exists \gamma , i \in \gamma \text{ circuit critique de } A \}$$

$$U_o = \{ (i,j) : \exists \gamma, (i,j) \subset \gamma \text{ circuit critique de } A\}$$

En général $G_o(A)$ n'est pas irréductible.

Lemme 4.7 - Tout circuit de $G_o(A)$ est critique.

Démonstration. Soit $\gamma = \{(i,i_1) \ldots\ldots (i_k,i)\}$ un circuit de $G_o(A)$. Il existe des circuits critiques $\gamma_1 \ldots\ldots \gamma_{k+1}$ tels que :

$$\gamma_1 = (i,i_1) \cup \ell_{i_1,i}$$
$$\vdots$$
$$\gamma_{k+1} = (i_k,i) \cup \ell_{i,i_k}$$

Et $\Gamma = \{ \ell_{ii_k} \quad \ell_{i_k i_{k-1}} \quad \ldots\ldots \ell_{i_1 i} \}$ définit également un circuit passant par i.

Mais

$$w(\gamma \cup \Gamma) = w(\gamma_1) \ldots\ldots w(\gamma_{k+1}) = e$$
$$w(\gamma \cup \Gamma) = w(\gamma)\, w(\Gamma).$$

Et comme tous les circuits de A sont de poids $\leq e$, cela n'est possible que si $w(\gamma) = w(\Gamma) = e$.

Lemme 4.8 - Soit A une matrice de valeur propre e. Si y est un vecteur propre de A, y est également vecteur propre de A^+ pour la valeur propre e. De plus

$$(4.5) \qquad y = \sum_{i \in X_o} y_i A_i^+$$

où X_o est donné par la définition 4.6.

<u>Démonstration</u>. La première partie découle de la définition de $A^+ = A + A^2 + \ldots A^{n-1} + \ldots$ et de l'idempotence de +.

Pour démontrer (4.5) revenons au graphe H associé à y et qui a été introduit dans la démonstration du théorème 4.3.

Dans chaque composante connexe H^k il existe un circuit γ_k unique tel que

$$e = w(\gamma_k).$$

Choisissons arbitrairement un $i_k \in \gamma_k$.

Pour $j \in H^k$, $j \neq i_k$ il existe un chemin ℓ de i_k à j inclus dans H^k. Le long de ce chemin on a les relations,

$$y_i = y_{i_k} A_{i_k i_1}$$

$$\vdots$$

$$y_j = y_{i_p} A_{i_p j}$$

D'où $$y_j = y_{i_k} w(\ell).$$

Etant donné que les chemins de poids maximum joignant i_k à un sommet quelconque de X ne passent pas a priori par j, on a l'inégalité

$$w(\ell) A^+_j \leq A^+_{i_k}.$$

On en déduit,

$$y_j A^+_j = y_{i_k} w(\ell) A^+_j \leq y_{i_k} A^+_{i_k}.$$

D'où

$$y = \sum_{j \in X} y_j A^+_j = \sum_{k=1}^{K} y_{i_k} A^+_{i_k}$$

Par ailleurs, comme $\{i_k \ldots\} \subset X_o \subset X$,

$$\sum_{j \in X} y_j A^+_j \geq \sum_{j \in X_o} A^+_j \geq \sum_{k=1}^{K} y_{i_k} A^+_{i_k}$$

d'où (4.5).

Théorème 4.9 - Soit A une matrice de valeur propre e. La dimension du moduloïde ϑ (A) des vecteurs propres de A est égale au nombre de composantes connexes du graphe critique $G_o(A)$. Soit C_k, k = 1... K l'ensemble de ces composantes connexes et i_k un sommet arbitraire de C_k. Les vecteurs $A^+_{i_k}$, k = 1... K, forment une base de ϑ (A).

Démonstration. Etant donné que les chemins de poids maximum joignant un sommet i à un sommet quelconque de X ne passent pas en général par un sommet j donné, on a la majoration

$$A^+_i \geq A^+_{ij} A^+_j .$$

Par contre, si i, j $\in C_k$, par i et j passe un circuit critique. Donc,

$$A^+_{ij} A^+_{ji} = A^+_{ii} = e.$$

D'où, pour i,j $\in C_k$:

$$A^+_{ij} A^+_j \leq A^+_i = A^+_{ij} A^+_{ji} A^+_i \leq A^+_{ij} A^+_j .$$

Donc, pour i,j $\in C_k$:

(4.6) $A^+_i = A^+_{ij} A^+_j$ et réciproquement $A^+_j = A^+_{ji} A^+_i$.

C'est dire que par composante, tous les A^+_i (qui sont vecteurs propres de A d'après le corollaire 4.4) sont colinéaires.

Soit i $\in C_k$ et supposons,

(4.7) $$A^+_i = \sum_{j \in X_o - C_k} A^+_{ij} A^+_j .$$

Il va exister j $\in X_o - C_k$ tel que

$$e = A^+_{ii} = A^+_{ij} A^+_{ji} .$$

C'est dire que i et j sont sur un même circuit critique, contrairement à l'hypothèse $j \in X_o - C_k$. Donc (4.7) est impossible et les $A^+_{i_k}$, $k = 1 \ldots K$ forment un ensemble linéairement indépendant.

Soit maintenant y un vecteur propre de A. D'après (4.5) et (4.6),

$$y = \sum_{j \in X_o} y_j A^+_j = \sum_k \left(\sum_{j \in C_k} y_j A^+_{ji_k} \right) A^+_{i_k} .$$

D'où le résultat.

4.3 Cyclicité.

Définition 4.10 - Soit A une matrice de valeur propre e. A est dite cyclique d'ordre d, s'il existe n_o tel que

$$A^{n+d} = A^n \quad , \forall \; n \geq n_o .$$

Remarque 4.11 - Soit A une matrice de valeur propre λ. Dire que $A_\lambda = \lambda^{-1} A$ est cyclique d'ordre d, entraîne

$$A^{n+d} = \lambda^d A^n \quad , \forall \; n \geq n_o .$$

Par extension nous dirons également que A est cyclique d'ordre d.

Définition 4.12 - Soit A une matrice de valeur propre e, et $C_1 \ldots C_k$ les composantes du graphe critique $G_o(A)$. On appelle période de C_k, le p.g.c.d. de la longueur des circuits de C_k.

D'après le lemme 4.7, ces p.g.c.d. sont calculés uniquement sur des longueurs de circuits critiques.

Théorème 4.13 - Soit A une matrice de valeur propre e. Supposons toutes les composantes de $G_o(A)$ de période 1. Alors A est cyclique d'ordre 1.

Démonstration. Supposons tout d'abord que C_k contienne une boucle critique en i_o. D'après (4.6) pour tout $i \in C_k$,

$$A^+_i = A^+_{ii_o} \; A^+_{i_o}$$

Soit $p < N$, dépendant de j tel que

$$(4.8) \qquad A^p_{ij} = A^+_{ij} = A^+_{ii_o} A^+_{i_oj} .$$

Mais pour tout $n \geq p$ la relation (4.8) sera conservée car en bouclant (n-p) fois en i_o on obtient un chemin de i à j de longueur n et de poids toujours égal à A^+_{ij}, le maximum des poids des chemins de i à j.

Donc dans le cas où C_k contient une boucle critique on aura,

$$A^{n+1}_i = A^n_i = A^+_i \quad \forall\, n \geq N-1, \quad \forall\, i \in C_k.$$

Supposons que C_k ne contienne pas de boucle. Dans ce cas il existe deux circuits γ_1, γ_2 inclus dans C_k et de longueurs n_1 et n_2 premiers entre eux. Soit i un point arbitraire de C_k ; il existe, un chemin de longueur ℓ_1 joignant i à un point $i_1 \in \gamma_1$, un chemin de longueur ℓ_2 joignant i_1 à un point $i_2 \in \gamma_2$, et un chemin de longueur ℓ_3 joignant i_2 à i, (tous ces chemins étant inclus dans C_k).

Par ailleurs d'après le théorème de Bezout, il existe $\nu_o > 0$ tel que tout entier $n \geq \nu_o$ soit obtenu comme combinaison de multiples positifs de n_1 et n_2 :

$$\exists\, \nu_o > 0, \forall\, n \geq \nu_o, \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 : n = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 .$$

Donc pour tout $m \geq m_i = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \nu_o$ il existe un circuit de longueur m inclus dans C_k et passant par le point i_o. Et d'après le lemme 4.7 ce circuit est critique.

Soit alors,

$$i_o \in \arg \min_{i \in C_k} m_i$$

D'après (4.6) pour tout $i \in C_k$,

$$A^+_i = A^+_{ii_o} A^+_{i_o}.$$

Soit $p < N$ tel que

$$A^p_{ij} = A^+_{ij}.$$

Pour $m \geq m_{i_o}$ on aura encore,

$$A^{p+m}_{ij} = A^+_{ii_o} A^+_{i_oj} = A^+_{ij}.$$

Donc on peut affirmer que :

$$(4.9) \qquad \forall\, n \geq N-1 + m_{i_o},\ \forall\, i \in C_k,\ A^{n+1}_i = A^n_i = A^+_i.$$

Pour j donné, $j \notin X_o$, on va montrer pour terminer que,

$$(4.10) \qquad \exists\, n_o,\ \forall\, n \geq n_o,\ A^n_j = \sum_{i \in X_o} A^+_{ij} A^+_i.$$

Il existe $p_i < N$ tel que $A^{p_i}_{ji} = A^+_{ji}$
et pour $n \geq \max p_i$:

$$A^n_j \geq \sum_{i \in X_o} A^{p_i}_{ji} A^{n-p_i}_i.$$

Mais d'après ce qui précède pour n suffisamment grand,

$$A^{n-p_i}_i = A^+_i,\ i \in X_o.$$

$$(4.11) \qquad A_j^n \geq \sum_{i \in X_o} A^+_{ji} \; A^+_i \quad \text{(à partir d'un certain rang)}.$$

Introduisons maintenant,

$$\eta = \sum_{\gamma \not\in X_o} w(\gamma)^{1/n(\gamma)}$$

Donc $\eta < e$. Et si les chemins optimaux definissant $A^n j$ ne passent pas par X_o, ils vont comporter des circuits de poids moyen $\leq \eta$. D'où la majoration :

$$A_j^n \leq \eta^{(n-N+1)} \; A^+_j \rightarrow \varepsilon \quad \text{pour } n \rightarrow \infty .$$

En comparant avec (4.11) il existe donc un n_o tel que,

$$A_j^{n_o} = \sum_{j \in X_o} A^+_{ji} \; A^+_i .$$

Et à partir de n_o (4.10) sera vérifié.

Remarque 4.14 Au vu de la démonstration précédente, il apparaît difficile de donner une estimation précise du rang n_o à partir duquel les matrices A^n deviendront cycliques. Cette cyclicité est atteinte par ligne A_i^n de façon différente selon que $i \in X_o$ ou non. Pour $i \in X_o$, ce rang est de l'ordre de N, plus un "effet Bezout" difficilement quantifiable, lorsque les composantes ne contiennent pas de boucle.

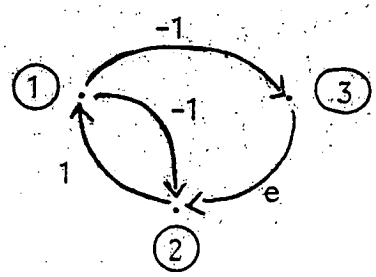
Pour $i \not\in X_o$, le rang est fonction des valeurs relatives entre η et le poids des chemins joignant i à un sommet quelconque en passant par X_o. Pour illustrer cette situation voici deux exemples :

Exemple 1 - "Effet Bezout".

Cas d'une matrice 3 x 3 telle que G_o (A) ne possède qu'une seule composante connexe générée par deux circuits l'un de longueur 2, l'autre de longueur 3. On est donc dans une situation où $X_o = X$, A est cyclique d'ordre 1, ϑ(A) de dimension 1.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & e & -2 \end{bmatrix}$$

$G_o(A)$



$$A^2 = \begin{bmatrix} e & -1 & -3 \\ -1 & e & e \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} e & -1 & -1 \\ 1 & e & -2 \\ -1 & e & e \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} e & -1 & -1 \\ 1 & e & e \\ 1 & e & -2 \end{bmatrix} \quad A^5 = \begin{bmatrix} e & -1 & -1 \\ 1 & e & e \\ 1 & e & e \end{bmatrix}$$

$$\lim_n A^n = A^5 = A^6 = \ldots\ldots \quad .$$

La cyclicité apparaît donc au rang $n_o = 5$ pour un $N = 3$.

Pour terminer cet exemple notons que

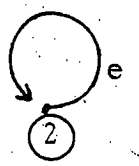
$$A^+ = \begin{bmatrix} e & -1 & -1 \\ 1 & e & e \\ 1 & e & e \end{bmatrix}$$

et on vérifie bien que toutes les lignes de A^+ sont colinéaires, i.e. $\dim V(A)=1$.

<u>Exemple 2</u> - <u>Importance du η .</u>

$$A = \begin{bmatrix} -\eta & -2 \\ -1 & e \end{bmatrix}$$

$G_o(A)$:



$$A^n = \begin{bmatrix} \eta^{-n} & -2 \\ -1 & e \end{bmatrix} \quad \text{si} \quad \eta^n \leq 3$$

$$A^n = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & e \end{bmatrix} \quad \text{si} \quad \eta^n > 3$$

$$\lim_n A^n = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & e \end{bmatrix}.$$

Donc pour η voisin de e, $n_o = \min_n \{\eta^n > 3\}$ peut être très grand.

Notons que $A^+ = A$ (sur cet exemple) et que $(-1,e)$ est "l'unique" vecteur propre à gauche de A.

Corollaire 4.15 - Soit A une matrice de valeur propre e. On suppose que $G_o(A)$ ne possède qu'une composante connexe de période d.

Alors A est cyclique d'ordre d.

Démonstration. De façon classique on définit dans $G_o(A)$ la relation d'équivalence : $i \sim j$ si la longueur de tout chemin allant de i à j est multiple de d. Il existe d classes pour cette relation que l'on peut noter $C_o, C_1, \ldots C_{d-1}$ de telle façon que tout chemin partant de C_h et aboutissant dans C_k ait une longueur congrue à k-h (mod.d). De plus si $i_o, i_1, \ldots i_k$ sont les sommets successifs d'un chemin et si $i_o \in C_p$ alors $i_k \in C_{pk}$ ou $p_k \equiv p + k$ (mod.d). Donc tous les chemins multiples de d aboutissent toujours dans la classe du point d'origine.

C'est dire que $G_o(A^d)$ possède les d classes $C_o, C_1, \ldots, C_{d-1}$ comme composantes connexes de période 1. Et du théorème 4.13 il vient

$$(A^d)^{n+1} = (A^d)^n \quad , \forall n \geq n_o .$$

D'où $$A^{(n+1)d+r} = A^{nd+r} \quad , \forall 0 \leq r < d , \forall n \geq n_o .$$

Et $$A^{n+d} = A^n \quad , \forall n \geq n_o d.$$

Remarque 4.16 - Si $G_o(A)$ ne possède qu'une composante connexe de période d, $\vartheta(A)$ est de dimension 1, par contre $\vartheta(A^d)$ est de dimension d et naturellement $\vartheta(A) \subset \vartheta(A^d)$. On peut trouver une certaine analogie de structure avec le théorème de Frobenius pour les matrices stochastiques : un seul vecteur propre pour la valeur propre 1, d vecteurs propres associés aux valeurs propres solution de $s^d = 1$.

Corollaire 4.17 - Soit A une matrice de valeur propre e, $C_1 \ldots\ldots C_k$ les composantes de $G_o(A)$, d_k la période de C_k. Soit d le p.p.c.m. des d_k, alors A est cyclique d'ordre d.

Démonstration. Chaque composante C_k de $G_o(A)$ se subdivisant en d_k composantes de période 1 de $G_o(A^d)$, $G_o(A^d)$ se trouve donc constitué de $(d_1 + d_2 \ldots + d_k)$ composantes de période 1.

Remarque 4.18 - Dire que A est cyclique d'ordre d entraîne que les vecteurs $A^n i$ sont vecteurs propres de A^d pour n suffisamment grand. De plus,

(4.12) $\forall$ k, $\forall$ y vecteur propre de A^k, alors y est vecteur propre de A^d.

En effet,

$$\forall\, n,\ y\,(A^k)^n = y \Rightarrow \text{si } nk \text{ est suffisamment grand}$$

$$yA^{nk+d} = yA^d = yA^{nk} = y.$$

4.4 Structure des "Projecteurs Spectraux".

Une manière équivalente de définir la cyclicité d'ordre d d'une matrice A de valeur propre e, serait :

$$(4.13) \qquad \exists\, n_o,\ \forall\, n, m \geq n_o,\ n \equiv m(\text{mod.}d) \Rightarrow A^n = A^m.$$

Cela permet de définir les opérateurs $Q_o, Q_1, \ldots, Q_{d-1}$ par,

$$(4.14) \qquad Q_h = \lim_{n\to\infty} \{ A^n : n \equiv h(\text{mod.}d) \}, \quad h = 0,1 \ldots d-1.$$

Il est clair que $Q_h = Q_o A^h = A^h Q_o$.

<u>Lemme 4.20</u> - <u>Q_o est un projecteur (le projecteur spectral de A^d). Si de plus pour $i \in X_o$, $\bar{y}_i$ désigne le vecteur ligne $(A^d)^+_{i.}$, et $\bar{z}_i$ le vecteur colonne $(A^d)^+_{.i}$, on a,</u>

$$(4.15) \qquad Q_o = \sum_{i \in X_o} \bar{z}_i \otimes \bar{y}_i ,$$

<u>de façon plus précise pour $j \in X_o$ et ℓ quelconque,</u>

$$(4.16) \qquad (Q_o)_{j\ell} = (\bar{z}_j \otimes \bar{y}_j)_{j\ell} .$$

<u>Enfin si le graphe critique $G_o(A)$ est composé de K composantes connexes C_k de période d_k, $k = 1 \ldots K$, le rang de Q_o est égal à $d_1 + d_2 + \ldots d_K$.</u>

Démonstration.

Il existe ν_o tel que $Q_o = A^{\nu d}$, $\forall\ \nu \geq \nu_o$. Donc $Q_o^2 = A^{2\nu d} = A^{\nu d} = Q_o$ pour $\nu \geq \nu_o$.

Si $j \in X_o$, d'après (4.9),

$$(Q_o)_{j\ell} = (A^d)^+_{j\ell} = (A^d)^+_{jj}\ (A^d)^+_{j\ell} = (\bar{z}_j \otimes \bar{y}_j)_{j\ell}.$$

De plus toujours pour $j \in X_o$,

$$(\bar{z}_i \otimes \bar{y}_i)_{j\ell} = (A^d)^+_{ji}\ (A^d)^+_{i\ell} \leq (A^d)^+_{j\ell} = (\bar{z}_j \otimes \bar{y}_j)_{j\ell}.$$

Par ailleurs d'après (4.10) pour $j \notin X_o$,

$$(Q_o)_{j\ell} = \sum_{i \in X_o} (A^d)^+_{ji}\ (A^d)^+_{i\ell} = \sum_{i \in X_o} (\bar{z}_i \otimes \bar{y}_i)_{j\ell}.$$

Enfin si le graphe critique $G_o(A)$ est composé de K composantes connexes C_k de période d_k, $G_o(A^d)$, $d = \text{p.p.c.m.}d_k$, sera composé de $d_1 + d_2 + \ldots + d_k$ composantes. D'après le théorème 4.9, le moduloïde des vecteurs propres de A^d est de dimension $d_1 + d_2 + \ldots + d_k$ et de l'ensemble des $(A^d)^+_i = \bar{y}_i$, $i \in X_o$ on peut extraire un système de $(d_1 + d_2 + \ldots d_k)$ vecteurs propres de A^d linéairement indépendant. Le rang de Q_o découle donc de (4.16).

Pour étudier la structure des Q_h nous aurons besoin des opérateurs,

$$(A^{d,h})^+ = A^h + A^{d+h} + \ldots + A^{nd+h} + \ldots,\quad 0 \leq h \leq d-1.$$

C'est donc la matrice des poids maximum des chemins de longueur congrue à h (mod.d).

Remarquons que

$$(4.17)\qquad (A^{d,h})^+ = A^h\ (A^d)^* = (A^d)^*\ A^h.$$

Pour commencer nous supposerons que $G_o(A)$ est réduit à une composante de période d. Comme dans le corollaire 4.15, nous noterons $C_o, C_1 \ldots C_{d-1}$ les composantes de $G_o(A^d)$: par construction tout chemin critique partant de C_k et aboutissant dans C_h a une longueur congrue à h-k (mod.d). Il sera également utile de noter pour tout entier h : $C_{k+h} = C_{h'}$ où $h' \equiv k+h$ (mod.d).

Sous ces hypothèses, si $j \in C_k$ et $i \in C_{k+h}$,

$$(4.18) \qquad (A^{d,h})^+_{ji} \; (A^{d,d-h})^+_{ij} = (A^d)^+_{jj} = e.$$

<u>Lemme 4.21</u> - <u>On suppose $G_o(A)$ réduit à une composante de période d.</u>

Si $j \in C_k$, $i \in C_{k+h}$, <u>on a la relation</u>

$$(A^{d,h})^+_j = (A^{d,h})^+_{ji} \; (A^d)^+_i .$$

<u>Démonstration</u>. D'après (4.18)

$$(A^{d,h})^+_{ji} \; (A^d)^+_i \leq (A^{d,h})_j = (A^{d,d-h})^+_{ij} \; (A^{d,h})^+_j \; (A^{d,h})^+_{ji}$$
$$\leq (A^{d,h})^+_{ji} \; (A^d)^+_i .$$

<u>Lemme 4.22</u> - <u>Sous les hypothèses du lemme 4.21</u> et <u>si $j \in X_o$, $(Q_h)_j = (A^{d,h})^+_j$</u>.

<u>Démonstration</u>.

$$(Q_h)_j = \sum_p (Q_o)_{jp} \, A^h_{p\ell}$$
$$= \sum_p (A^d)^+_{jp} \, A^h_{p\,\ell}$$
$$= \sum_p (A^d)^*_{jp} \, A^h_{p\,\ell}$$
$$= (A^{d,h})^+_{j\ell} \quad \text{(d'après (4.17))}.$$

<u>Lemme 4.23</u> - <u>Sous les hypothèses du lemme 4.21</u>, <u>soit</u> φ <u>une application</u> de X_o <u>dans</u> X_o <u>vérifiant</u> $j \in C_k \Rightarrow \varphi(j) \in C_{k+h}$, <u>alors</u>

$$(4.19) \qquad Q_h = \sum_{i \in X_o} (A^{d,h})^+_{j\varphi(j)} \; \bar{z}_j \otimes \bar{y}_{\varphi(j)} .$$

Démonstration.

$$(Q_h)_{i\ell} = \sum_p (Q_o)_{ip} A^h_{p\ell}$$

$$= \sum_p \sum_{j \in X_o} (A^d)^+_{ij} (A^d)^+_{jp} A^h_{p\ell}$$

$$= \sum_{j \in X_o} (A^d)^+_{ij} \sum_p (A^d)^*_{jp} A^h_{p\ell}$$

$$= \sum_{j \in X_o} (A^d)^+_{ij} (Q_h)_{j\ell} \quad \text{(d'après le lemme 4.22)}$$

$$= \sum_{j \in X_o} (A^d)^+_{ij} (A^{d,h})^+_{j\varphi(j)} (A^d)^+_{\varphi(j)\ell} \quad \text{(d'après le lemme 4.21)}$$

$$= \sum_{j \in X_o} (A^{d,h})^+_{j\varphi(j)} (\bar{z}_j \otimes \bar{y}_{\varphi(j)})_{i\ell} .$$

Corollaire 4.24 - Soit C_k, $k = 1 \ldots K$ les composantes connexes de période d_k de $G_o(A)$ et C_k, $k = 1 \ldots K$, $\ell = 0,1 \ldots d_k - 1$, les composantes de période 1 de $G_o(A^d)$, d = p.p.c.m. (d_k).

Soit $\varphi_k : C_k \to C_k$ telle que $j \in C_k^\ell \Rightarrow \varphi(j) \in C_k^{\ell+h}$ (mod. d_k).

Alors,

$$(4.20) \qquad Q_h = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j \in C_k} (A^{d,h})^+_{j\varphi_k(j)} \bar{z}_j \otimes \bar{y}_{\varphi_k(j)}.$$

4.5 Application aux systèmes récurrents linéaires.

Théorème 4.25 - Soit A une matrice irréductible de valeur propre λ et de cyclicité d. Soit y^n et z^n les solutions des systèmes récurrents linéaires

$$(4.21) \qquad y^n = y^{n-1} A, \; y_o \text{ donné}, \; n \geq 0 \text{ (système primal)}$$

(4.22) $z^n = A\, z^{n+1}$, z_N donné, $n \leq N$. (système dual)

Il existe n_o tel que :

$$(4.23)\qquad \begin{aligned} y^{n+d} &= \lambda^d\, y^n \quad , \ \forall\, n \geq n_o \\ z^{n-d} &= \lambda^d\, z^n \quad , \ \forall\, n \leq N-n_o . \end{aligned}$$

De plus (4.21) et (4.22) sont duaux au sens,

$$(4.24)\qquad y^n . z^n = \sum_{i=1}^{N} y_i^n\, z_i^n = C \quad , \ \forall\ 0 \leq n \leq N.$$

En fonction de la structure du graphe critique $G_o(A)$ et des opérateurs Q_h (n° 4.4) on peut préciser (4.23) de la manière suivante :

1er cas - $G_o(A)$ réduit à une composante de période 1 :

A est cyclique d'ordre 1

$y^n = \lambda^n\, y_o\, Q_o \quad , \ n \geq n_o.$

Q_o est projecteur de rang 1.

Exemple. On reprend l'exemple 1 de la remarque 4.14 :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & e & -2 \end{bmatrix}$$

$$Q_o = \lim_{n\uparrow\infty} A^n = \begin{bmatrix} e & -1 & -1 \\ 1 & e & e \\ 1 & e & e \end{bmatrix}$$

$\vartheta(A)$ engendré par $(1,e,e)$ colinéaire à $(e,-1,-1)$

2ème Cas. $G_o(A)$ réduit à une composante de période d.

A est cyclique d'ordre d

$$y^n = \lambda^n y_o Q_h \ , \ n \equiv h \ (\text{mod.}d), \ h = 0,1 \ \dots \ d-1, \ n \geq n_o$$

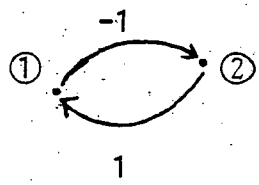
Q_o est projecteur de rang d

$$\underline{Q_h = A^h Q_o = Q_o A^h}$$

Exemple. $G_o(A)$ engendré par un circuit critique de longueur 2 :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$G_o(A)$:



A est de cyclicité 2 :

$$A^2 = \begin{bmatrix} e & -2 & -3 \\ -1 & e & e \\ e & -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q_o = \lim_n (A^n : n \equiv 0 \bmod 2) = A^4 = A^6 = \dots = \begin{bmatrix} e & -2 & -2 \\ e & e & e \\ e & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \lim_n (A^n : n \equiv 1 \bmod 2) = A^5 = A^6 = \dots = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\vartheta(A)$ est de dimension 1 :

$$A^+ = \begin{bmatrix} e & -1 & -1 \\ 1 & e & e \\ e & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\vartheta(A)$ engendré par (1,e,e) colinéaire à (e,-1,-1)

$\vartheta(A^2)$ est de dimension 2 $\Longleftrightarrow$ Q_o de rang 2 :

$\vartheta(A^2)$ est engendré par les vecteurs $\begin{cases} (e, -2, -2) \\ (e, e, e) \end{cases}$

3ème cas - $G_o(A)$ composé de K composantes $C_1 \ldots C_K$ de période 1.

A est cyclique d'ordre 1.

$$y^n = \lambda^n y_o Q_o , \; n \geq n_o$$

Q_o est un projecteur de rang K

Exemple : deux composantes réduites à deux boucles.

$$A = \begin{bmatrix} e & -1 & -2 \\ -3 & e & e \\ e & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$G_o(A)$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} e & -1 & -1 \\ e & e & e \\ e & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Q_o = \lim_n A^n = A^3 = A^4 = \ldots\ldots = \begin{bmatrix} e & -1 & -1 \\ e & e & e \\ e & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\vartheta(A)$ est de dimension 2 $\Longleftrightarrow$ Q_o de rang 2

$\vartheta(A)$ est engendré par $\begin{cases} (e, -1, -1) \\ (e, e, e). \end{cases}$

Cas général - $G_o(A)$ comporte K composantes C_k, $k = 1 \ldots k$ de période d_k.

A est cyclique d'ordre $d \equiv$ p.p.c.m (d_k).

$$y^n = \lambda^n y_o Q_h , \; n \equiv h \; (\text{mod.} d), \; h = 0, 1 \ldots d-1, \; n \geq n_o.$$

Q_o est un projecteur de rang $d_1 + d_2 + \ldots + d_k$.

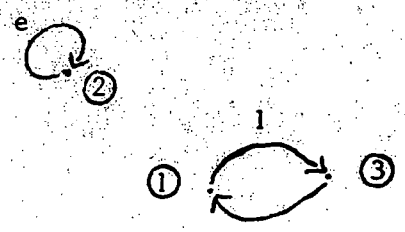
$$Q_h = A^h Q_o = Q_o A^h$$

<u>Exemple 1</u> - $G_o(A)$ formé de deux composantes : l'une engendrée par une boucle, l'autre par un circuit de longueur 2.

A est cyclique d'ordre 2.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & e & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$G_o(A)$:



$$A^2 = \begin{bmatrix} e & e & -1 \\ -1 & e & e \\ -2 & -1 & e \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} -1 & e & 1 \\ -1 & e & e \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q_o = \lim_n (A^n : n \equiv 0 \mod 2) = A^4 = A^6 = \ldots = \begin{bmatrix} e & e & e \\ -1 & e & e \\ -2 & -1 & e \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \lim_n (A^n : n \equiv 1 \mod 2) = A^5 = A^7 = \ldots = \begin{bmatrix} -1 & e & 1 \\ -1 & e & e \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} e & e & 1 \\ -1 & e & e \\ -1 & -1 & e \end{bmatrix}$$

$\vartheta(A)$ est de dimension 2, engendré par $\begin{cases} (e,e,1) \\ (-1,e,e) \end{cases}$

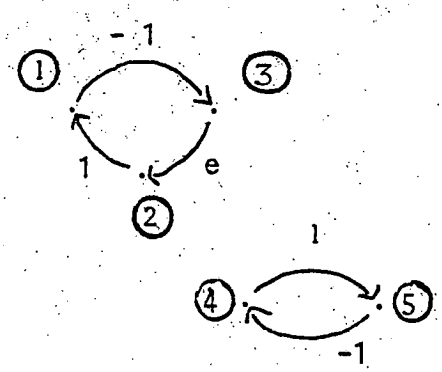
Q_o de rang 3 $\Longleftrightarrow$ $\vartheta(A^2)$ de dimension 3, engendré par $\begin{cases} (e,e,e) \\ (-1,e,e) \\ (-2,-1,e) \end{cases}$

<u>Exemple 2</u> - $G_o(A)$ composé de 2 composantes : l'une engendrée par un circuit de longueur 2, l'autre par un circuit de longueur 3.

A est cyclique d'ordre 6.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & e & -2 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$G_o(A)$:



$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & e & -2 & e \\ 1 & -2 & -2 & -1 & e \\ e & -1 & -1 & e & e \\ -1 & -2 & -2 & -2 & e \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} e & -3 & -2 & -2 & -1 \\ e & e & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & e & -1 & e \\ e & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & e \\ e & e & -2 & -1 & e \\ e & -1 & -1 & e & e \\ -1 & -2 & -2 & -2 & e \end{bmatrix} \qquad A^5 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & e & -1 & e \\ 1 & -2 & -1 & -1 & e \\ e & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} e & -3 & -2 & -2 & -1 \\ e & e & -2 & -1 & e \\ -1 & -1 & e & -1 & e \\ e & -1 & -1 & e & e \\ -1 & -2 & -2 & -2 & e \end{bmatrix} \qquad A^7 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & e \\ e & e & -2 & -1 & e \\ e & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & e & -1 & e \\ 1 & -2 & -1 & -1 & e \\ e & -1 & -1 & e & e \\ -1 & -2 & -2 & -2 & e \end{bmatrix} \qquad A^9 = \begin{bmatrix} e & -3 & -2 & -2 & -1 \\ e & e & -2 & -1 & e \\ -1 & -1 & e & -1 & e \\ e & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q_o = A^6 = A^{12} = \dots$$

$$Q_1 = A^7 = A^{12} = \dots$$

$$Q_2 = A^8 = A^{14} = \dots$$

$$Q_3 = A^9 = A^{15} = \dots$$

$$Q_4 = A^4 = A^{10} = \dots$$

$$Q_5 = A^5 = A^{11} = \dots$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} e & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & e & e & -1 & e \\ 1 & e & e & -1 & e \\ e & -1 & -1 & e & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & e \end{bmatrix}$$

$\vartheta(A)$ est de dimension 2, engendré par $\begin{cases} (1,e,e,-1,e) \\ (e,-1,-1,e,1) \end{cases}$

$\vartheta(A^6)$ est de dimension 5, engendré par les lignes de Q_o.

Remarquons que les lignes de Q_h , $h \neq 0$ s'obtiennent bien à partir de celles de Q_o par permutation et multiplication comme dans (4.20).

V. ALGORITHME DE KARP ET APPLICATIONS NUMERIQUES

Si G(H) désigne le graphe associé à la matrice H définie au § 3.5, n le nombre de sommets et m le nombre d'arcs. Un algorithme en O(mn) est donné par Karp [10] pour calculer le poids du circuit moyen maximum dans un graphe fortement connexe.

C'est la formule suivante :

$$(5.1) \qquad \lambda = \max_{j=1,\dots n} \ \min_{0 \le k \le n-1} \frac{H_{ij}^{n} - H_{ij}^{k}}{n-k}$$

où λ est solution du problème spectral

$$(5.2) \qquad \lambda Y = Y H$$

au sens du dioïde.

La démonstration de (5.1) (Karp [10]) montre que pour tout circuit critique il existe un sommet appartenant à celui-ci réalisant le maximum dans (5.1).

Plaçons nous dans le cas générique où il y a un seul circuit critique. Il existe alors j^* et k^* réalisant respectivement le Max et le Min de (5.1). Alors la longueur du circuit critique est $d = n - k^*$.

Le système récurrent est alors de cyclicité d.

La caractérisation du régime périodique nécessite la connaissance des vecteurs propres à gauche et à droite de H^d. Il y en a d : Y^o, Y^1, ... Y^{d-1} et Z^o, Z^1, ... Z^{d-1} (cf. remarque 4.16).

Les formules suivantes permettent de les calculer

$$(5.3) \qquad \begin{cases} Y_i^o = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} H_{j^*i}^{kd} / \lambda^{kd} \\ Y^h = Y^{h-1} H \qquad h = 1, \dots d-1 \end{cases}$$

$$(5.4)\quad \begin{cases} Z^o_i = \sum_{k=0}^{n-1} H^{kd}_{ij}{}^*/\lambda^{kd} \\ Z^h = H\,Z^{h-1} \qquad\qquad h = 1, \ldots. d-1 \end{cases}$$

$Y^o = Y^o(H/\lambda)^d$.

$(H/\lambda)^d$ n'ayant aucun circuit positif $(H^d/\lambda^d)^* = \sum_{k=o}^{n-1} (H^d/\lambda^d)^k$ existe, alors les lignes de (H^d/λ^d) correspondant à des sommets du circuit critique sont des vecteurs propres à gauche (cf § 4).

On dispose donc d'un algorithme en O (dmn) pour calculer $\lambda, Y^o, Y^{d-1}, Z^o \ldots Z^{d-}$. Si l'on se souvient que pour un atelier flexible : $n = |M|+|I|$ (nombre d'opérations à distinguer pour rendre la gamme linéaire plus nombre de pièces de la séquence de base d'entrée assurant les ratios de production) ; m est de l'ordre de $(|M|+|I|)^2$ car le graphe entrée sortie est presque plein ; alors on dispose d'un algorithme en $O((|M|+|I|)^3 d)$ pour une connaissance complète du régime périodique dans le graphe entrée sortie pour un système récurrent ayant un seul retard. Dans le cas général le coût est $O((|M|+|I|)^2 (p+q)d)$ où p désigne le nombre total de palettes dans l'atelier et q le nombre total de machines.

D'autre part, le calcul de la matrice H coûte $O((|M|+|I|)^3)$ opérations. L'algorithme d'évaluation des performances de l'atelier est donc $O((|M|+|I|)^2 (p+q)d)$ ce qui se compare favorablement aux algorithmes du type Mean Value Analysis. Seul le modèle file d'attente le plus simple (une seule classe de client, monoserveur) gagne un ordre de grandeur par rapport au modèle proposé ici.

Dans la suite de ce paragraphe nous décrivons les résultats obtenus sur des données réelles d'un atelier flexible, d'abord en négligeant les retards puis sans les négliger et en augmentant progressivement et de façon raisonnable le nombre de palettes jusqu'à saturation de la machine la plus lente. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par les méthodes de file d'attente décrites au paragraphe 2 dans le cas de la ligne de production. Ils sont également comparés à ceux obtenus par simulation et choix empirique de règle de gestion. Bien que l'aspect optimisation des ordonnancements n'ait pas été abordé , les résultats obtenus sont très favorables à l'approche proposée ici.

5.1 Un exemple d'atelier flexible réel négligeant les temps de transport.

On considère le problème 6 x 8 flow-shop suivant :

Machines \ Types de pièces	1	2	3	4	5	6
1	2	3,9	0,95	1,1	0,7	1,4
2			2	1,2		1,7
3	3,7		2,2		6,4	
4			2		1	1
5	1,7	3,1	3		1,3	
6	0,5	3,2	4,3	1,9	1,6	0,4
7	1	1	1	1	1	1
8	1,5	1,5	1,5	1,2	1,2	1,2
Σ	10,4	12,7	16,95	6,4	13,2	6,7

Chaque type de pièce doit être produit en même quantité que les autres, soit une séquence de base contenant les 6 produits.

La charge de la machine critique est 12,3 et c'est la machine 3. On voit tout de suite qu'une palette par type de pièce est insuffisant pour saturer la machine critique car la durée de la plus longue gamme est supérieure à la charge de cette machine.

On supposera dans la suite les ordres de passage aux machines fixés et définis comme suit :

MACHINE 1
SEQUENCE 1 2 3 4 5 6
MACHINE 2
SEQUENCE 3 4 6
MACHINE 3
SEQUENCE 1 3 5
MACHINE 4
SEQUENCE 3 5 6
MACHINE 5
SEQUENCE 1 2 3 5
MACHINE 6
SEQUENCE 1 2 3 4 5 6
MACHINE 7
SEQUENCE 1 2 3 4 5 6
MACHINE 8
SEQUENCE 1 2 3 4 5 6

Les résultats sont présentés avec les notations suivantes :

. $|P|$ = nombre de palettes

. $P = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ répartition des nombres de palettes par type de pièces

. λ valeur propre du système (poids moyen du circuit critique)

. $1/\lambda$ taux de production de l'atelier

. d cyclicité (longueur du circuit critique)

. $\lambda \times d$ période du système

. $\lambda_o = 12,3$ charge de la machine menante

. $1/\lambda_o$ taux de production maximum de l'atelier

. $\frac{\lambda_o}{\lambda}$ taux d'occupation de la machine menante

. $(m,k) = (m^{\text{ième}}$ machine, $k^{\text{ième}}$ pièce)

$\|P\| = 6$	$P = (1,1,1,1,1,1)$	
λ	16.95	circuit critique :
d	1	(8,3) ⟶ (8,3)
$\lambda \times d$	16.95	
λ_o/λ	0.7257	

La pièce 3 étant menante, on rajoute une palette de type 3.

$\|P\| = 7$	$P = (1,1,2,1,1,1)$	
λ	15.11	circuit critique :
d	3	$(3,6) \rightarrow (8,2) \rightarrow (8,5) \rightarrow (3,6)$
$\lambda \times d$	45.35	
λ_o/λ	0.8137	

Pour détruire ce circuit critique il faut rajouter des palettes aux pièces de type 2 ou 5. Au vu de la durée des gammes on choisit une palette de type 5.

$\|P\| = 8$	$P = (1,1,2,1,2,1)$	
λ	14.95	circuit critique :
d	3	$(3,6) \rightarrow (8,2) \rightarrow (8,4) \rightarrow (3,6)$
$\lambda \times d$	44.85	
λ_o/λ	0.8227	

On ajoute une palette de type 2, plus chargée que celle de type 4.

$\|P\| = 9$	$P = (1,2,2,1,2,1)$	
λ	14.375	circuit critique :
d	2	$(8,6) \longrightarrow (8,1) \longrightarrow (8,6)$
$\lambda \times d$	28.75	
λ_o/λ	0.8557	

On ajoute une palette de type 1.

$\|P\| = 10$	$P = (2,2,2,1,2,1)$	
λ	14.325	circuit critique :
d	2	$(1,6) \longrightarrow (8,6) \longrightarrow (1,6)$
$\lambda \times d$	28.65	
λ_o/λ	0.8586	

On rajoute une palette de type 6.

$\|P\| = 11$	$P = (2,2,2,1,2,2)$	
λ	14.15	circuit critique :
d	2	(3,6) → (8,4) → (3,6)
$\lambda \times d$	28.30	
λ_o / λ	0.8693	

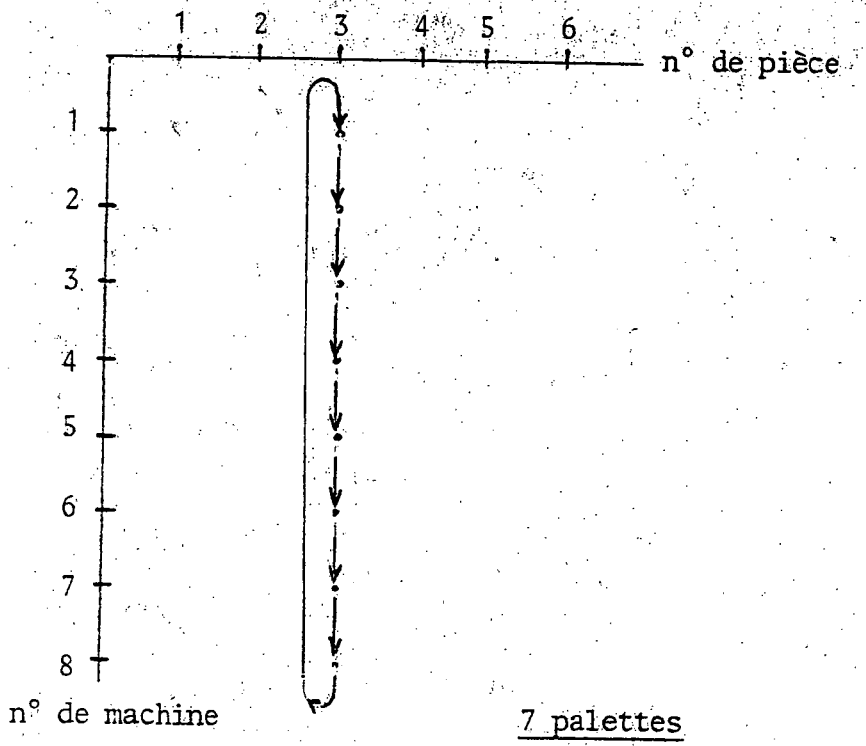
On rajoute une palette de type 4.

$\|P\| = 12$	$P = (2,2,2,2,2,2)$	
λ	12.3	circuit critique :
d	1	(3,6) → (3,6)
$\lambda \times d$	12,3	
λ_o / λ	1	

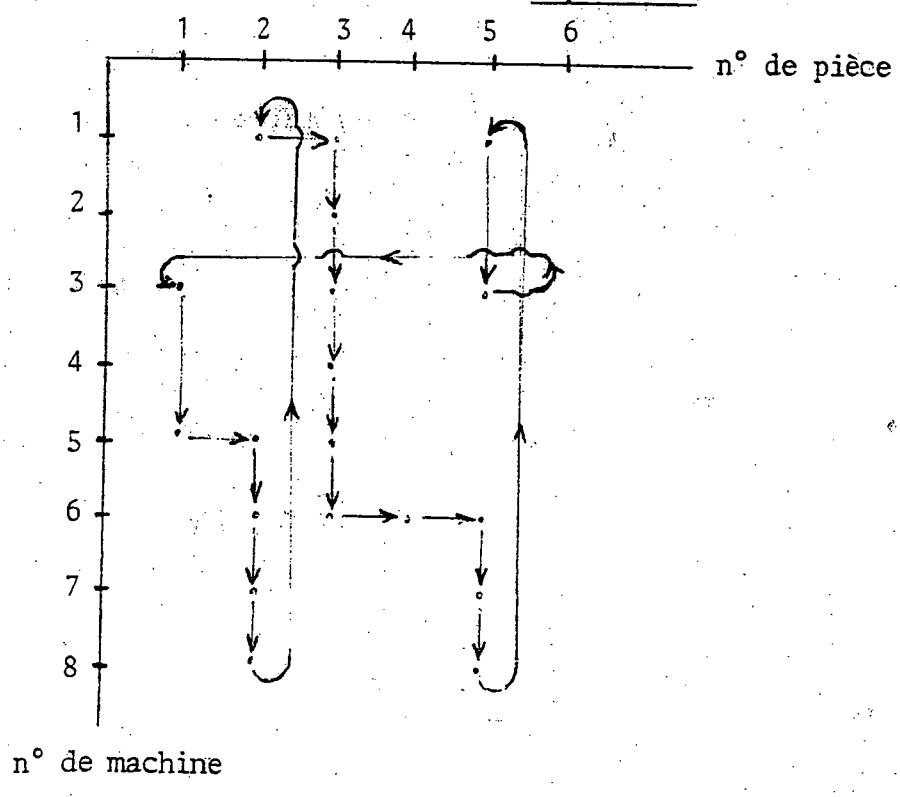
La machine menante est saturée.

Détails des circuits critiques :

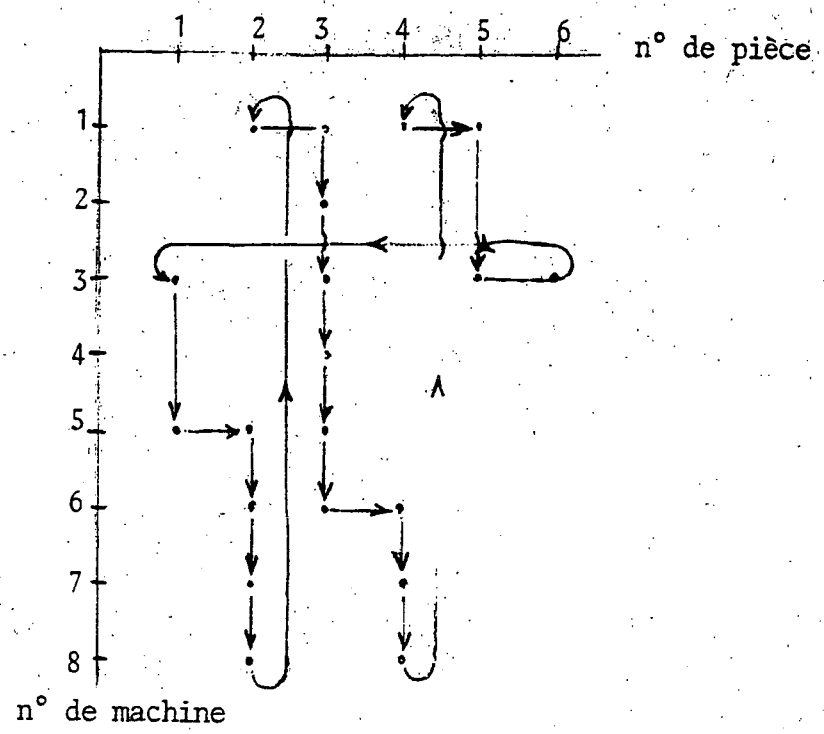
6 palettes



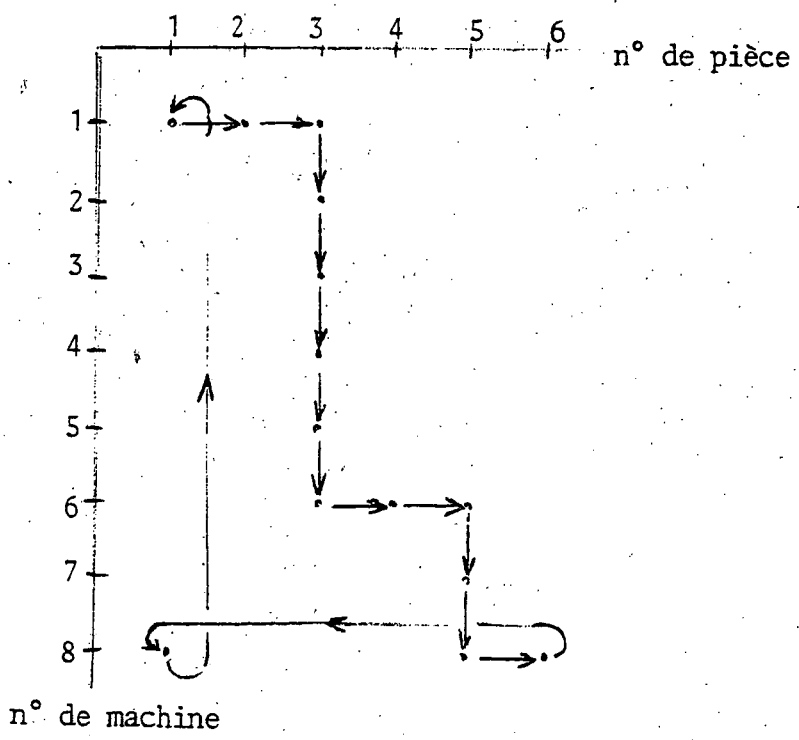
7 palettes



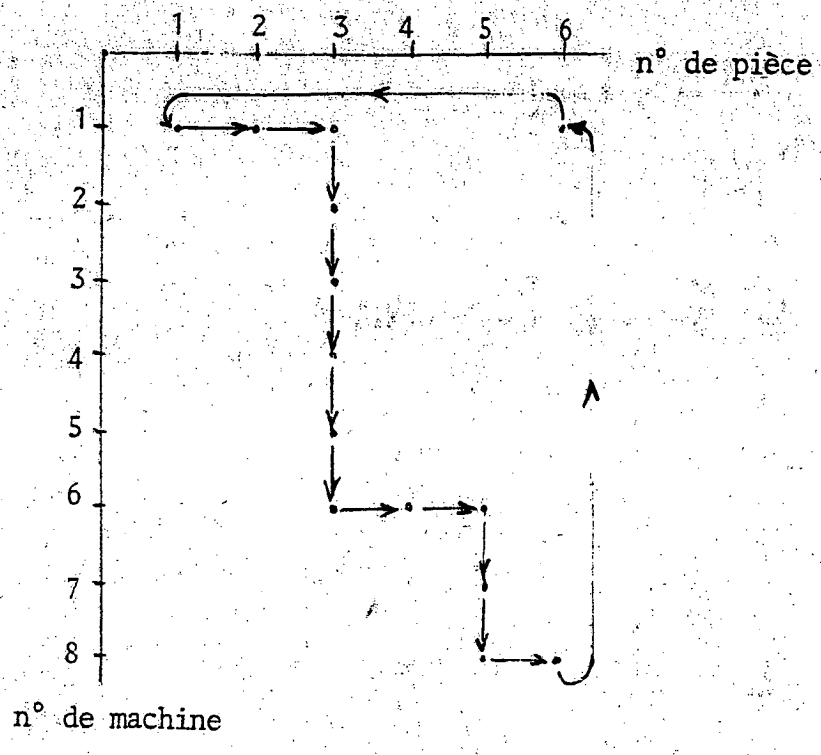
8 palettes



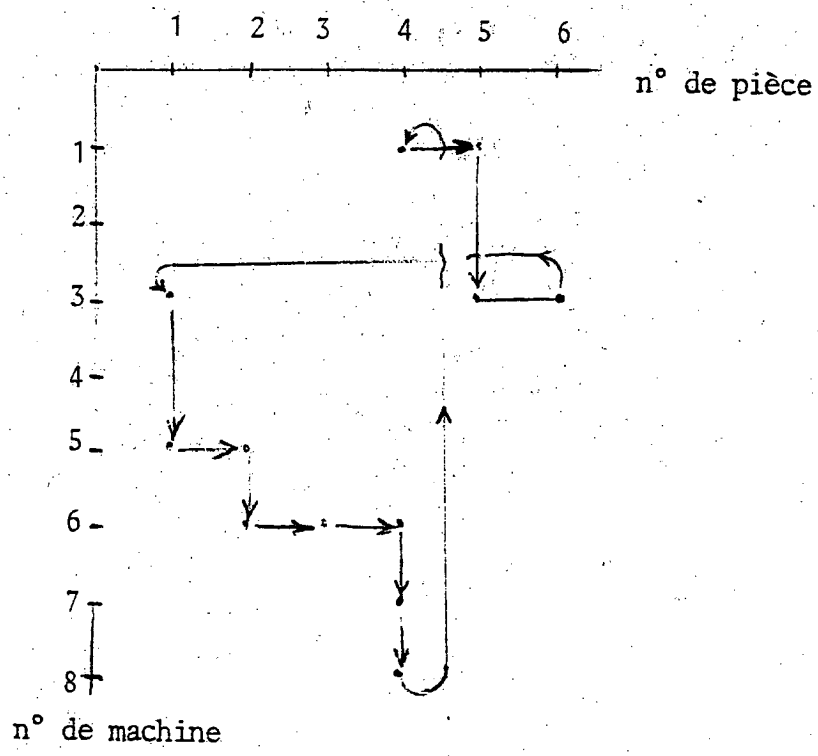
9 palettes



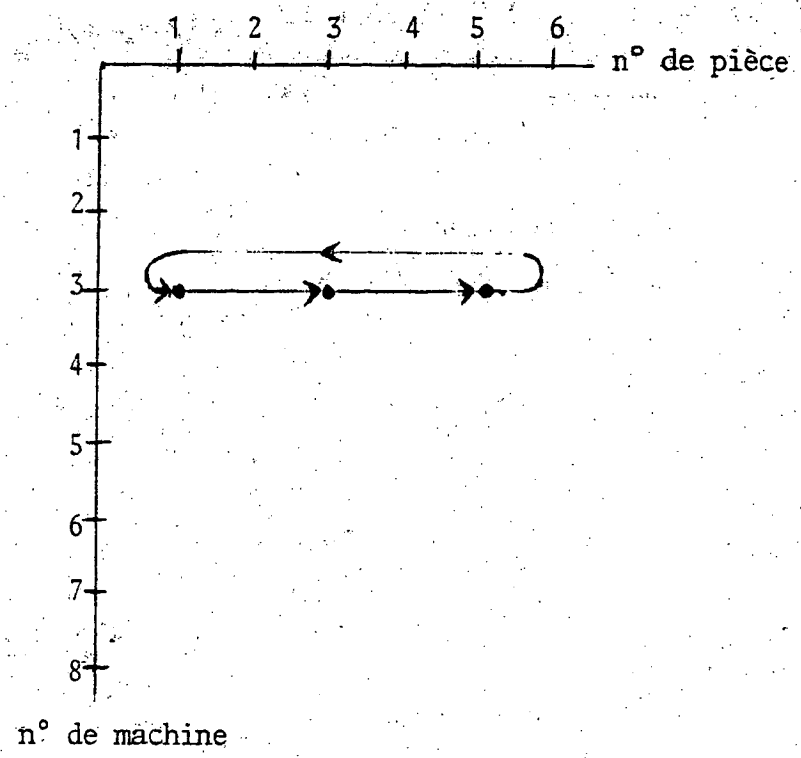
10 palettes



11 palettes



12 palettes



5.2 Comparaison avec les méthodes d'évaluation de performances basées sur la théorie de files d'attente.

Le diagramme ci-contre contient les courbes d'utilisation de la machine critique en fonction du nombre de palettes circulant dans l'atelier, pour l'exemple de flow-shop traité ci-dessus. Ces courbes sont toutes, sauf une, obtenue à partir des modélisations type réseaux de files d'attente. La dernière provient du programme d'évaluation de performances décrit dans ce rapport. Les trois méthodes de files d'attente utilisées sont :

- a) Réseau fermé à un seul type de client et serveurs exponentiels

C'est le modèle utilisé par Solberg [16], et appelé CAN-Q. Dans ce modèle, les ratios de production sont supposés respectés, mais on n'a accès qu'au nombre total de palettes circulant dans l'atelier. Elles sont implicitement réparties entre les divers types de pièces au prorata des ratios de production.

- b) Réseau fermé à plusieurs types de clients et serveurs exponentiels

C'est le modèle utilisé par Hildebrandt [7] ; dans ce modèle le nombre de palettes de chaque type est fixé, et la production de l'atelier est déterminée complètement par la répartition des palettes, les temps de traitement dépendent de la classe, et la méthode de calcul des performances est une heuristique dérivée de l'approche "Mean-value analysis". La méthode ne supposant pas des nombres entiers de palettes, on a pu itérer sur ces nombres, à quantité globale constante, afin de satisfaire les ratios de production. La règle de gestion implicite aux machines est FIFO.

- c) Réseau fermé à plusieurs types de clients et serveurs déterministes

Le modèle s'inspire d'une suggestion de Reiser-Lavenberg [12]. C'est une variante heuristique de "Mean-value analysis" dans laquelle le temps d'attente d'un client arrivant à un guichet est estimé à partir de la file d'attente a ce guichet vue par ce client (= file d'attente au guichet dans le réseau avec un client en moins) et du temps moyen résiduel de service du client présent au guichet. La répartition des palettes conditionne aussi les taux de production de

chaque type. Néanmoins l'algorithme ne travaillant qu'avec des nombres entiers de palette il n'a pas été possible d'itérer la procédure pour satisfaire les ratios. Cela limite la portée de la comparaison entre la courbe obtenue par ce modèle et les autres courbes, et explique son irrégularité : le profil de production change quand on ajoute une palette et certaines machines peuvent, compte tenu de la règle de gestion implicite (FIFO), voir leur charge diminuer par cet ajout.

On constate le caractère pessimiste des méthodes de files d'attente à serveurs exponentiels ; de plus, la courbe obtenue par ces méthodes croît très régulièrement tandis que le système à ordonnancements fixes a une croissance du taux d'utilisation fondamentalement irrégulière. Néanmoins, on peut trouver des ordonnancements tels que CAN-Q fournisse des résultats optimistes pour un nombre de palettes donné (e.g. 10 palettes et ordonnancement 132465).

On remarque que la productivité peut varier beaucoup en fonction de l'ordonnancement choisi. Il est aussi prévisible que même si on parvient à saturer la machine critique avec un certain nombre d'ordonnancements possibles, les marges existant sur les dates de lancement des tâches vont varier en fonction des ordonnancements. Donc la recherche d'un bon ordonnancement, qui n'a pas été étudié dans ce rapport, représente un certain enjeu et constitue un prolongement naturel de l'étude.

Utilisation de la machine menante

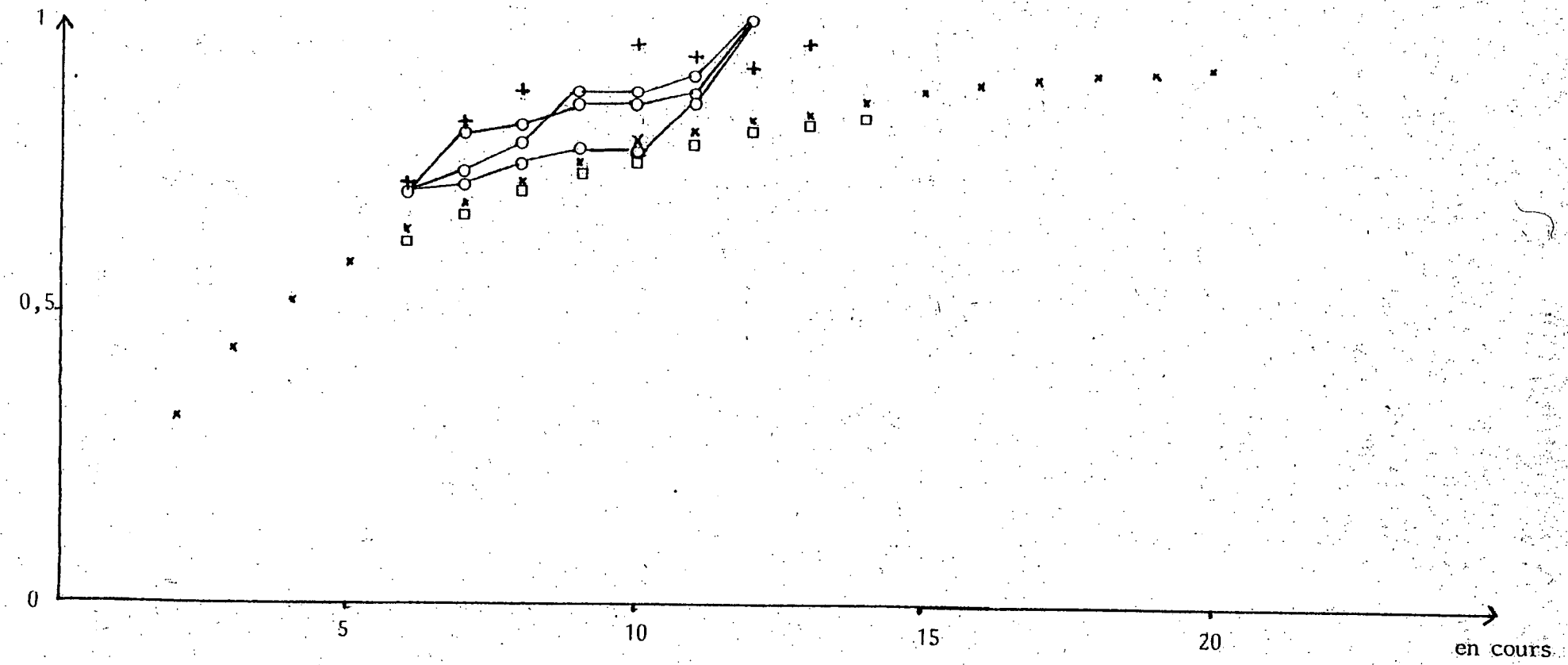
Nombre de palettes	6	7	8	9	10	11	12
CAN-Q	0,643	0,689	0,728	0,760	0,787	0,811	0,831
Mean value Analysis	0,63	0,67	0,71	0,74	0,76	0,79	0,81
Ordonnancements fixes							
1.2.3.4.5.6.	0,726	0,814	0,823	0,856	0,859	0,869	1.
3.2.1.4.5.6.	0,726	0,741	0,799	0,872	0,875	0,897	1.
1.3.2.4.6.5.	0,715	0,726	0,764	0,766	0,769	0,861	1.

oooo Evaluation exacte avec ordonnancements fixes

++++ Méthode heuristique file d'attente déterministe multiclient (ratios non respectés)

xxxx Méthode file d'attente monoclient stochastique (CAN-Q)

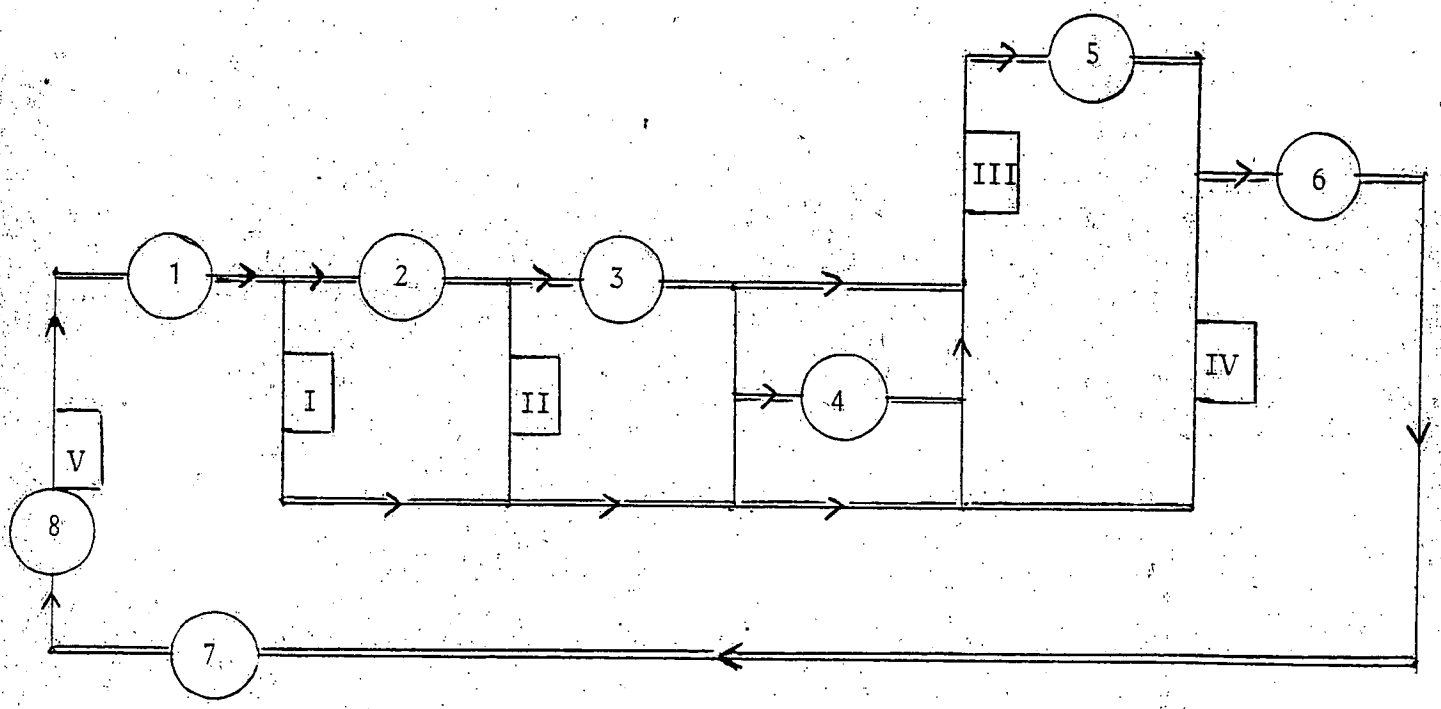
□ □ □ □ Méthode heuristique file d'attente multiclient stochastique (Hildebrandt)



5.3 Application à un exemple industriel

Le problème 6 x 8 Flow-shop décrit précédemment correspond à une étude de cas industriel menée au CERT-DERA. Il s'agit d'un atelier d'usinage spécialement étudié pour la production moyenne série en simultané de deux types de pièces, chacun étant usiné dans trois positions différentes, ce qui fournit les six gammes explicitées au § 5.1.

L'atelier est schématisé ci-dessous :



Machines
1 : 2 fraiseuses
2 : 1 machine multibroche
3 : Aléseuse-dresseuse
4 : Machine de contrôle
5 : Machine multibroche
6 : 2 centres d'usinage
7 : Machine à laver
8 : Poste de palettisation

Convoyeurs : doubles traits horizontaux
Navettes : traits verticaux
Stockage : I II III IV V

Les temps de transport entre machines sont importants, et du même ordre de grandeur que les temps d'usinage.

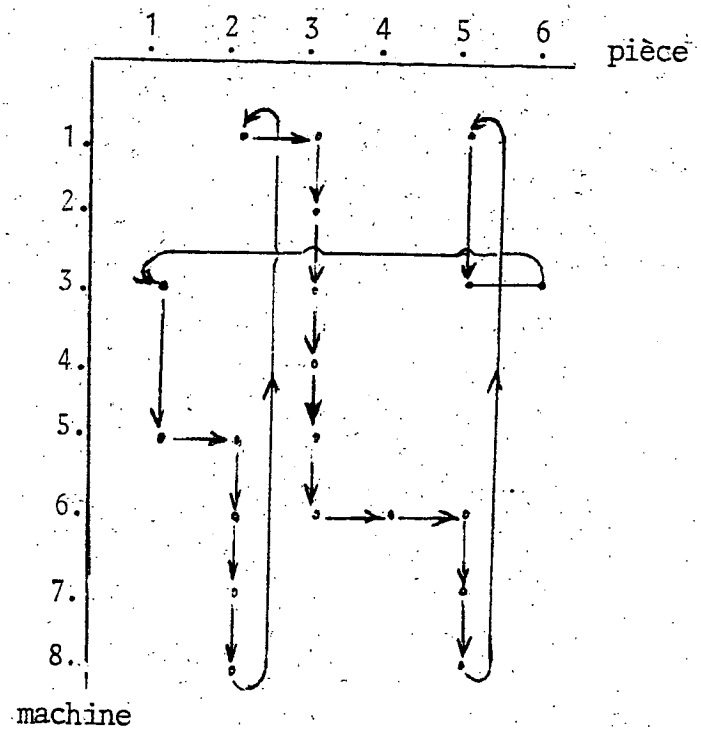
Ils sont fournis ci-après.

mn	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2	4,3		6			
2			1,3	4		5,3		
3				1,4	4,2			
4					2,1	4		
5						2		
6							5,5	
7								1
8	1,4							

On suppose toujours l'ordonnancement fixé à 1,2,3,4,5,6 sur toutes les machines. L'algorithme de Karp a donné les résultats suivants en partant de $|P| = 13$ palettes.

$\lvert P \rvert = 13$	$P = (2,2,3,2,2,2)$	
λ	16,08	Circuit critique :
d	3	
$\lambda \times d$	48,24	(3,6) → (8,2) → (8,5) → (3,6)
λ_o / λ	0,7644	

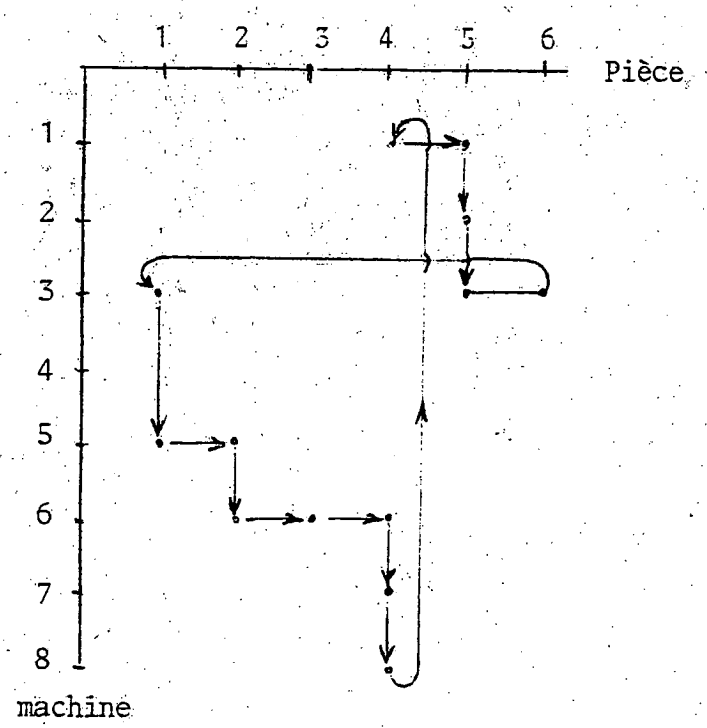
Détail du circuit critique



On rajoute une palette de type 2 et une palette de type 5.

$\|P\| = 15$	$P = (2,3,3,2,3,2)$	
λ	15,566	Circuit critique :
d	2	$(3,6) \rightarrow (8,4) \rightarrow (3,6)$
x d	31,132	
λ_o / λ	0,7902	

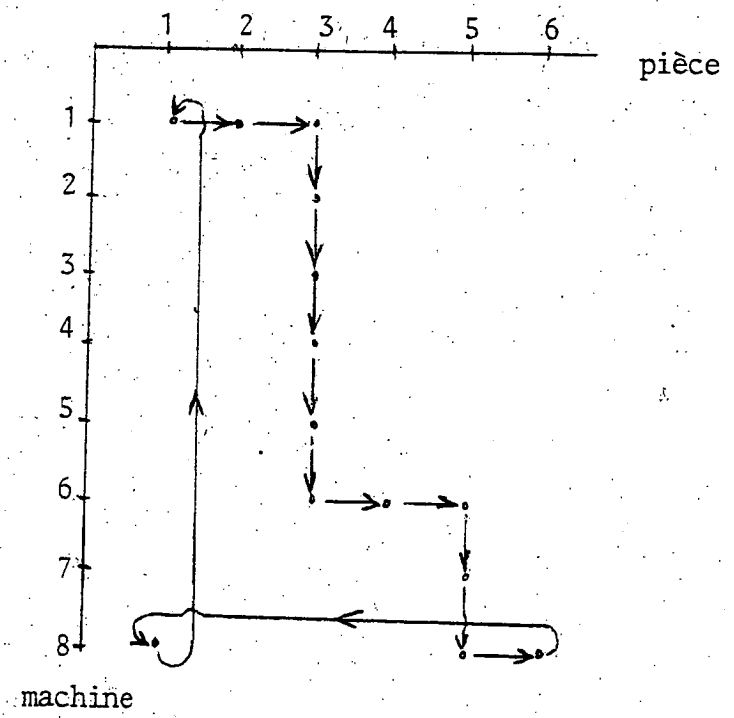
Détail du circuit critique



On rajoute une palette de type 4.

$\lvert P \rvert = 16$	$P = (2,3,3,3,3,2)$	
λ	15,15	circuit critique :
d	2	(8,6) → (8,1) → (8,6)
$\lambda \times d$	30,30	
λ_o / λ	0,8119	

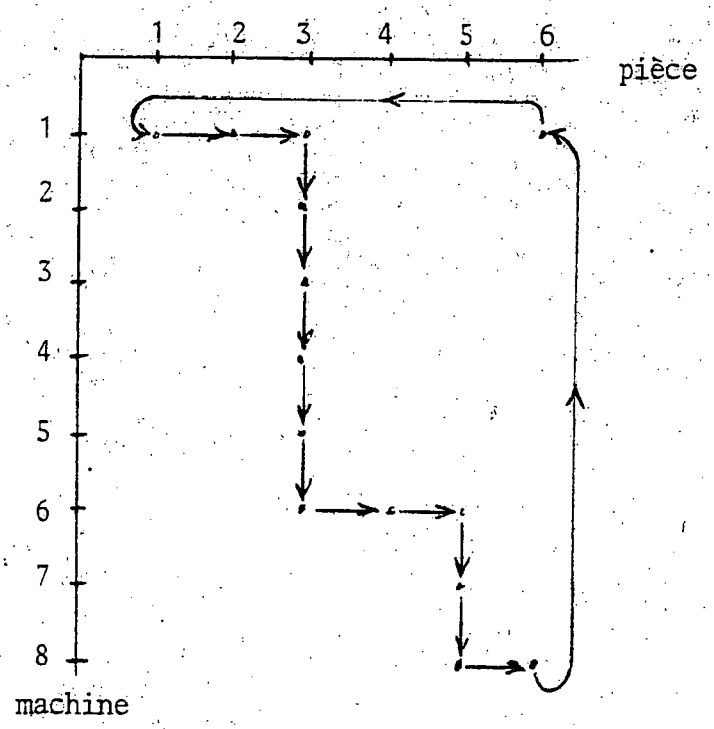
Détail du circuit critique



On rajoute une palette de type 1.

$\|P\| = 17$	$P = (3,3,3,3,3,2)$	
λ	15,117	circuit critique :
d	2	(1,6) → (8,6) → (1,6)
$\lambda \times d$	30,234	
λ_o / λ	0,8137	

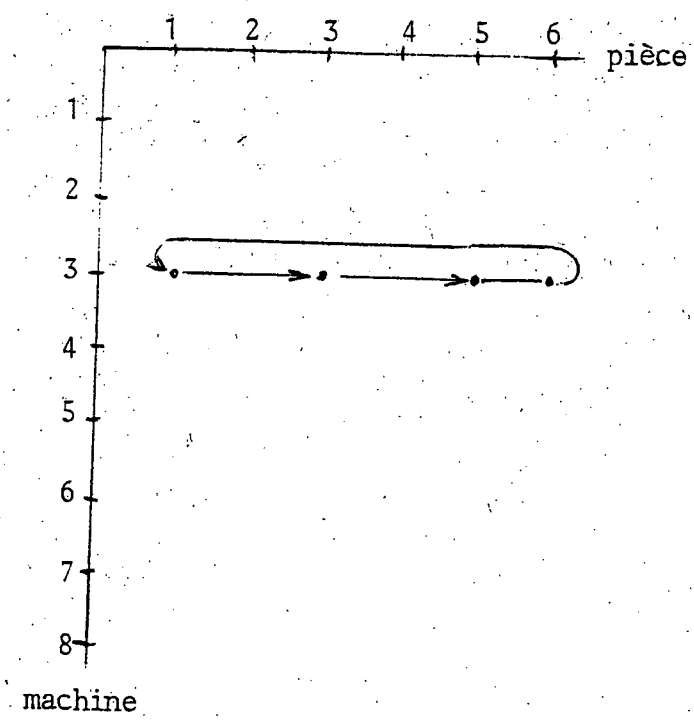
Détail du circuit critique



On rajoute une palette de type 6.

$\|P\| = 18$	$P = (3,3,3,3,3,3)$	
λ	12,3	circuit critique :
d	1	(3,6) → (3,6)
$\lambda \times d$	12,3	
λ_o/λ	1	

La machine menante est saturée



Avec ordonnancement périodique, on obtient les caractéristiques suivantes en régime périodique stabilisé :

18 palettes (3,3,3,3,3,3)

Machines	1	2	3	4	5	6
Utilisation	0,817	0,398	1	0,325	0,740	0,967
Quantité produite (sur 12,3 mn = période)	1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1

Le mode de gestion par ordonnancement périodique semble plus économique et plus performant que le mode de gestion feedback en temps réel. Sur cet exemple on fait un gain de 5 palettes par rapport à une gestion en feedback sur les stocks locaux développée au CERT-DERA au cours d'une étude précédente. On diminue de plus notablement l'horizon où les ratios sont respectés.

Cette comparaison avec un cas réel démontre tout l'intérêt de l'approche proposée dans ce rapport pour la gestion d'atelier flexible.

5.4 - Avantages de la gestion périodique par rapport à la gestion feedback précédente

- Régime de fonctionnement stable
- Réduction des quantités d'information qui circulent dans l'atelier en fonctionnement normal
- Réduction de l'en-cours
- Plus de problème de gestion des stocks inter-prises en fonctionnement normal
- Possibilité de changer plus facilement d'outils quand on change de pièce
- Mouvements de pièce dans l'atelier complètement prévus.

REFERENCES

[1] R.W. CONWAY, W.L. MAXWELL, L.W. MILLER
The Theory of scheduling . Addison Wesley 1967.

[2] R.H. CUNINGHAME GREENE
Describing industrial process and approximating their steady state behabiour. Op. Research Quaterly ,13(62),p.95-100.

[3] P.J. DENNING, J.P. BUZEN
The operational analysis of Queuing models . Computing surveys 10, 3(78).

[4] J.B. ERSCHLER, G. FONTAN, F. ROUBELLAT
Multilevel control structure and decision aid in production management IFAC Worshop on control and management of industrial processes Toulouse 77.

[5] M. GONDRAN, M. MINOUX
Graphes et Algorithmes .Eyrolles 79.

[6] M. GONDRAN, M. MINOUX
Valeur et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes . E.D.F, série C, Bul.Dir. Et. et Rech., 2(77) p 25-41.

[7] R.R. HILDEBRANT
Scheduling flexible machining systems using mean value analysis .CDC 1980 et thèse MIT (81).

[8] K.L. HITZ
Scheduling of flexible flowshops . MIT Rapport LIDS-R-879(Mars 79).

[9] Y.C. HO, C. CASSANDRAS
Computing costate variable for discrete event systems . CDC(Déc 78).

[10] R.M. KARP
A characterization of the minimum cycle mean in a Digraph .Discr. Math. 23(78),p.309-311.

[11] F.P. KELLY
Reversibility and stochastic networks . J. Wiley ans Sons(79).

[12] M. REISER, S.S. LAVENBERG
Mean value analysis of closed multichain Queuing networks . IBM Res. Rept. RC 7023,Yorktown Heights,N.Y(78).

[13] C.V. ROMAMORTHY, G.S. HO
Performance evaluation of asynchronous concurrent systems using Petri nets. IEEE Trans. on Soft. Eng. 6, 5,(80).

[14] B. ROY
Les problèmes d'ordonnancement:applications et méthodes . Dunod(64).

[15] G. SECCO-SUARDO
Optimization of a closed network of queues for complex material Handling Systems .vol. 3.MIT Rpt. ESL-FR-834-5(78).

[16] J.J. SOLBERG
Analytical performance evaluation of flexible manufacturing systems. CDC(Déc 78).

[17] R. SURI
Robustness of analytical formulae for performance prediction in certain non classical queuing networks . Rpt.674, Havard Dv. of Applied sciences(80).

AUTRES REFERENCES

[19] H. PRADE
Etude bibliographique des problèmes et méthodes d'ordonnancement d'atelier t.1, 2, 3 ; (76, 76, 77) Rapport CERT.

[20] F. BASKET, K.M. CHANDY, R.R. MUNTZ, F.G. PALACIOS
Open,Closed and mixed networks of queues with different class of customers. JACM 22-2, (Av. 75). p 248-260.

[21] D. LEVEQUE
Etude du lancement périodique des produits dans un atelier flexible de fabrication. note 82.0.10 LAAS(Fev. 82).

[22] J.G. KIMEMIA, S.B. GERSHWIN
An algoithm for the computer control of production on a flexible manufacturing system. MIT Rapport LIDS-P-1134 (Janvier 1982)

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique