



**HAL**  
open science

# Etude generale d'un reseau constitue de deux stations hyperexponentielles

Jean-Yves Le Boudec

► **To cite this version:**

Jean-Yves Le Boudec. Etude generale d'un reseau constitue de deux stations hyperexponentielles.  
[Rapport de recherche] RR-0221, INRIA. 1983. inria-00076337

**HAL Id: inria-00076337**

**<https://inria.hal.science/inria-00076337>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

CENTRE DE RENNES

IRISA

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P. 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél.: (3) 954 90 20

## Rapports de Recherche

N° 221

### ÉTUDE GÉNÉRALE D'UN RÉSEAU CONSTITUÉ DE DEUX STATIONS HYPEREXPONENTIELLES

Jean-Yves LE BOUDEC

Juillet 1983

ETUDE GENERALE D'UN RESEAU CONSTITUE  
DE DEUX STATIONS HYPEREXPONENTIELLES

Jean-Yves LE BOUDEC

RESUME : On établit un algorithme permettant de calculer les probabilités stationnaires d'un réseau constitué de deux files d'attente avec, chacune, un seul serveur et une loi de service hyperexponentielle. Plus précisément, si  $I$  (resp.  $J$ ) est le nombre d'états "fictifs" associés à une modélisation markovienne de la loi de service de la première (resp. seconde) station, on se ramène à l'inversion de matrices à  $I$  (resp.  $J$ ) lignes et colonnes et à l'étude d'une relation de récurrence d'ordre  $I+J$ .

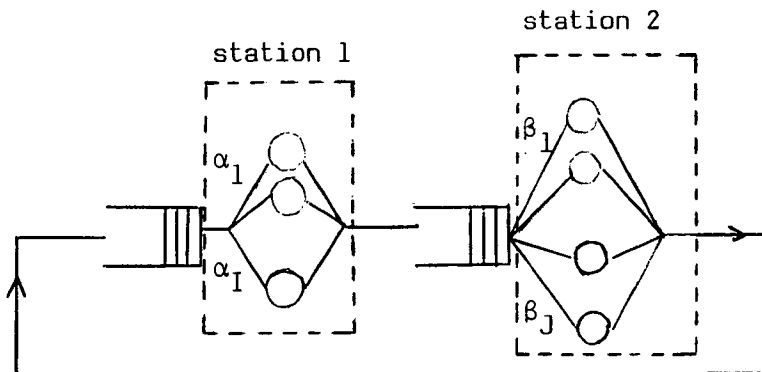
SUMMARY : Let us consider a queueing network with two single server queues ; in each queue, the distribution is hyperexponential. For such a network, it is shown that the equilibrium probabilities can be simply computed.

ETUDE GENERALE D'UN RESEAU CONSTITUE  
DE DEUX STATIONS HYPEREXPONENTIELLES

PLAN

- 0. DESCRIPTION DU RESEAU
- 1. CALCUL DES PROBABILITES STATIONNAIRES
  - 1.1 Notations
  - 1.2 Equations
  - 1.3 Inversion
  - 1.4 Elimination de  $(U_n, V_n)$
  - 1.5 Relation de récurrence
  - 1.6 Calcul de  $p(n)$ .
- 2. FILE H/H/1/C

0. DESCRIPTION DU RESEAU



Dans la première partie, le réseau comprend deux stations hyper-exponentielles, sans limitation de capacité. Il y a une seule classe de clients, un seul serveur, et au plus un client en service dans chaque station. La station 1 est constituée de I sous-stations (I états "fictifs"), la station 2 de J sous-stations (J états "fictifs"). Quand un client quitte la station 1 (resp. 2), la probabilité que le client suivant aille dans l'état "fictif" i vaut  $\alpha_i$  (resp.  $\beta_i$ ). Evidemment  $\sum_i \alpha_i = 1 = \sum_j \beta_j$ . De plus, si le client de la station 1 (resp. 2) en cours de service est dans l'état fictif i, le

taux de service de ce client vaut  $\lambda_i$  (resp.  $\mu_i$ ). Il y a N clients dans le réseau. Un client qui quitte la station 1 va dans la station 2 et vice versa. Les états sont décrits par  $(n,i,j)$  où n est le nombre de clients dans la station 1, i (resp. j) la sous-station du client en service dans 1 (resp. 2). Si  $n=0$ ,  $i=0$  et si  $n=N$ ,  $j=0$ .

Dans la deuxième partie, N est infini, le nombre initial de clients étant infini en station 2, fini en station 1. De plus, dans la partie 2, la station 1 a une capacité limitée à c.

1. CALCUL DES PROBABILITES STATIONNAIRES

1.1 Notations

Le calcul de  $p(n,i,j)$  s'effectuera par l'intermédiaire des variables définies ci-dessous :

$$\begin{array}{l|l} \underline{1 \leq n \leq N-1} & \begin{array}{l} U_n(i) = \sum_{1 \leq j \leq J} p(n,i,j) \\ X_n(i) = \sum_{1 \leq j \leq J} p(n,i,j) \mu_j \\ x_n = \sum_{1 \leq i \leq I} X_n(i) \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} V_n(j) = \sum_{1 \leq i \leq I} p(n,i,j) \\ Y_n(j) = \sum_{1 \leq i \leq I} p(n,i,j) \lambda_i \\ y_n = \sum_{1 \leq j \leq J} Y_n(j) \end{array}$$

$$\underline{n=0} \quad \begin{array}{l} U_0 = \sum_{1 \leq j \leq J} p(0,0,j) = p(0) \\ X_0(i) = \alpha_i \sum_{1 \leq j \leq J} p(0,0,j) \mu_j \end{array} \quad \begin{cases} X_0(i) = \alpha_i x_0 \\ x_0 = \sum_{1 \leq i \leq J} p(0,0,j) \mu_j \end{cases}$$

$$\underline{n=N} \quad \begin{array}{l} V_N = \sum_{1 \leq i \leq I} p(N,i,0) = p(N) \\ Y_N(j) = \beta_j \sum_{1 \leq i \leq I} p(N,i,0) \lambda_i \end{array} \quad \begin{cases} Y_N(j) = \beta_j y_N \\ y_N = \sum_{1 \leq j \leq J} p(N,i,0) \lambda \end{cases}$$

1.2 Equations

Equations résultant des définitions :

$$(1) \quad \begin{array}{l} \sum_{1 \leq i \leq I} U_n(i) = \sum_{1 \leq j \leq J} V_n(j) = p(n) \end{array} \quad 1 \leq n \leq N-1$$

$$(2) \quad \left\| \begin{array}{l} \sum_{1 \leq i \leq I} \lambda_i X_n(i) = \sum_{1 \leq j \leq J} \mu_j Y_n(j) \end{array} \right. \quad 1 \leq n \leq N-1$$

Equation de Chapman-Kolmogoroff :

$$(3) \quad \left\| \begin{array}{l} p(n,i,j) (\lambda_i + \mu_j) = \beta_j X_{n-1}(i) + \alpha_i Y_{n+1}(j) \end{array} \right. \quad 1 \leq n \leq N-1$$

$n=0$

$$\left\| \begin{array}{l} p(0,0,j) \mu_j = Y_1(j) \end{array} \right.$$

$n=N$

$$\left\| \begin{array}{l} p(N,i,0) \lambda_i = X_{N-1}(i) \end{array} \right.$$

Relation de Marie

$$(4) \quad \left\| \begin{array}{l} x_n = y_{n+1} \end{array} \right. \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Par sommation des relations 3 sur j, puis sur i, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i U_n(i) + X_n(i) = X_{n-1}(i) + \alpha_i y_{n+1} \\ Y_n(j) + \mu_j V_n(j) = \beta_j x_{n-1} + Y_{n+1}(j) \end{array} \right. \quad 1 \leq n \leq N-1$$

Par comparaison avec (4), on obtient :

$$(5) \quad \left\| \begin{array}{l} \lambda_i U_n(i) + X_n(i) = X_{n-1}(i) + \alpha_i x_n \\ Y_n(j) + \mu_j V_n(j) = \beta_j y_n + Y_{n+1}(j) \end{array} \right. \quad 1 \leq n \leq N-1$$

Ce système fournira une relation de récurrence, quand nous aurons éliminé  $U_n$  et  $V_n$ .

### 1.3 Relation d'inversion

On peut retrouver  $p(n,i,j)$  à l'aide des variables introduites en 1.2, c'est à dire inverser ces relations.

En effet, (3), (5) et (6) entraînent :

$$p(n,i,j)(\lambda_i + \mu_j) = \beta_j [\lambda_i U_n(i) + X_n(i) - \alpha_i x_n] + \alpha_i [Y_n(j) + \mu_j V_n(j) - \beta_j y_n]$$

soit :

$$(7) \quad \left\| \begin{aligned} p(n,i,j)(\lambda_i + \mu_j) &= \lambda_i \beta_j U_n(i) + \mu_j \alpha_i V_n(j) + \beta_j X_n(i) + \alpha_i Y_n(j) - \alpha_i \beta_j (x_n + y_n) \\ \text{pour } 1 \leq n \leq N-1. \end{aligned} \right.$$

#### 1.4 Elimination de $U_n$ et $V_n$

En multipliant (7) par  $\frac{\mu_j}{\lambda_i + \mu_j}$ , puis par sommation sur  $j$ , on obtient :

$$(8) \quad \left\| \begin{aligned} X_n(i) &= \lambda_i \left[ \sum_j \frac{\beta_j \mu_j}{\lambda_i + \mu_j} \right] U_n(i) + \alpha_i \left[ \sum_j \frac{\mu_j^2}{\lambda_i + \mu_j} V_n(j) \right] \\ &+ \left[ \sum_j \frac{\beta_j \mu_j}{\lambda_i + \mu_j} \right] X_n(i) + \alpha_i \left[ \sum_j \frac{\mu_j Y_n(j)}{\lambda_i + \mu_j} \right] - \alpha_i (x_n + y_n) \left[ \sum_j \frac{\beta_j \mu_j}{\lambda_i + \mu_j} \right] \end{aligned} \right.$$

De façon analogue, il vient :

$$(9) \quad \left\| \begin{aligned} Y_n(j) &= \beta_j \left[ \sum_i \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i + \mu_j} U_n(i) \right] + \mu_j \left[ \sum_i \frac{\alpha_i \lambda_i}{\lambda_i + \mu_j} V_n(j) \right] \\ &+ \beta_j \left[ \sum_i \frac{\lambda_i X_n(i)}{\lambda_i + \mu_j} \right] + \left[ \sum_i \frac{\alpha_i \lambda_i}{\lambda_i + \mu_j} \right] Y_n(j) - \beta_j (x_n + y_n) \left[ \sum_i \frac{\alpha_i \lambda_i}{\lambda_i + \mu_j} \right] \end{aligned} \right.$$

#### -Proposition-

Le système (E) formé des équations (8) et (9), où les inconnues sont  $(U_n(i))_i$  et  $(V_n(j))_j$ , est de rang  $(I+J-1)$ . On peut, pour le résoudre, supprimer une quelconque des  $(I+J)$  équations.

#### -Démonstration-

Considérons le système homogène associé ; il s'écrit :

$$\begin{cases} \lambda_i \left[ \sum_j \frac{\beta_j \mu_j}{\lambda_i + \mu_j} \right] U_n(i) + \alpha_i \left[ \sum_j \frac{\mu_j^2}{\lambda_i + \mu_j} V_n(j) \right] = 0 & 1 \leq i \leq I \\ \beta_j \left[ \sum_i \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i + \mu_j} U_n(i) \right] + \mu_j \left[ \sum_i \frac{\alpha_i \lambda_i}{\lambda_i + \mu_j} V_n(j) \right] = 0 & 1 \leq j \leq J \end{cases}$$

Pour le résoudre, effectuons le changement d'inconnues :

$$A(i) = \frac{\lambda_i U_n(i)}{\alpha_i} \quad B(j) = \frac{\mu_j V_n(j)}{\beta_j}$$

et posons :

$$\gamma_{i,j} = \left[ \sum_{j'} \frac{\beta_{j'} \mu_{j'}}{\lambda_i + \mu_{j'}} \right]^{-1} \frac{\beta_j \mu_j}{\lambda_i + \mu_j} \quad \text{et} \quad \delta_{j,k} = \left[ \sum_{k'} \frac{\alpha_{k'} \lambda_{k'}}{\lambda_{k'} + \mu_j} \right]^{-1} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda_k + \mu_j}$$

On a alors à résoudre :

$$\begin{cases} A = -\Gamma B \\ B = -\Delta A \end{cases} \quad \text{où} \quad \Gamma = (\gamma_{i,j})_{i,j} \quad \text{et} \quad \Delta = (\delta_{j,k})_{j,k}$$

$\Gamma$  et  $\Delta$  sont des matrices positives et :  $\sum_k \delta_{j,k} = 1 \quad \delta_{j,k} > 0$

$\sum_j \gamma_{i,j} = 1$  et  $\gamma_{i,j} > 0$  ; donc  $\Gamma \Delta$  est stochastique irréductible.

Ce système équivalent à :

$$\begin{cases} A = \Gamma \Delta A \\ B = -\Delta A \end{cases}$$

La première équation entraîne  $A = K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ , où  $K$  est un réel quelconque, puis on obtient  $B = -\Delta A = -K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Les solutions du système homogène sont donc finalement :

$$U_n(i) = K \frac{\alpha_i}{\lambda_i}, \quad V_n(j) = K \frac{\beta_j}{\mu_j}$$

D'où le rang du système.

Pour poursuivre la démonstration, il faut maintenant étudier les combinaisons linéaires reliant les équations (8) et (9) :

Ecrivons le système de ces équations sous la forme

$$\begin{cases} (8) & l_i(A,B) = \phi_i \\ (9) & m_j(A,B) = \psi_j \end{cases} \quad \text{où } (l_i) \text{ et } (m_j) \text{ sont des formes linéaires.}$$

Il existe une relation :  $\sum_i x_i l_i + \sum_j y_j m_j = 0$ . On a alors



$$\begin{cases} x = -y \Gamma \\ y = -x \Delta \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \Delta \Gamma \\ y = -x \Delta \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_I) \\ y = (y_1, \dots, y_J) \end{cases}$$

comme  $\Delta \Gamma$  est une matrice stochastique irréductible, les coefficients  $x_i$  sont tous soit positifs, soit négatifs. Cela entraîne la même propriété pour les coefficients  $y_j$ .

Ainsi, aucun des coefficients n'est nul, donc n'importe quelle équation est combinaison linéaire des autres, et on peut donc la supprimer.

#### -Remarque-

Le système des équations (8) et (9) peut se ramener à un système de (I-1) équations.

Soit le changement de variables  $(U_n, V_n) \rightarrow (A, B)$  défini plus haut ; le système s'écrit :

$$\begin{cases} A = -\Gamma B + 1_1(X_n, Y_n) \\ B = -\Delta A + 1_2(X_n, Y_n) \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} A = \Gamma \Delta A + (1_1 - \Gamma 1_2)(X_n, Y_n) \\ B = -\Delta A + 1_2(X_n, Y_n) \end{cases}$$

Il suffit alors de résoudre le premier système  $A = \Gamma \Delta A + (1_1 - \Gamma 1_2)(X_n, Y_n)$  qui est de rang I-1.

(Si  $I > J$ , on a intérêt à résoudre d'abord en B).

#### -Conclusion-

Les relations (8), (9) et (1) permettent d'exprimer  $U_n$  et  $V_n$  en fonction de  $(X_n, Y_n)$  ; il faut pour cela :

- inverser le système (E) ; il suffit d'inverser une matrice (I-1)×(I-1), et on obtient :

$$\begin{cases} U_n(i) = \Phi_i(X_n, Y_n) + K \frac{\alpha_i}{\lambda_i} \\ V_n(j) = \Psi_j(X_n, Y_n) - K \frac{\beta_j}{\mu_j} \end{cases}$$

- K est alors déterminé par l'équation (1) :  $\sum_i U_n(i) = \sum_j V_n(j)$

En effet, le coefficient de K dans cette dernière équation est

$$\sum_i \frac{\alpha_i}{\lambda_i} + \sum_j \frac{\beta_j}{\mu_j} \neq 0$$

### 1.5 Relation de récurrence

Nous pouvons maintenant calculer par récurrence  $X_n$  et  $Y_n$ .

#### □ Calcul de $Y_n$ :

L'équation (6) fournit  $Y_{n+1}$  en fonction de  $Y_n$  et  $V_n$  ; donc finalement à l'aide de 1-4, en fonction de  $(X_n, Y_n)$ .

#### □ Calcul de $X_n$ :

Soit  $F$  le système formé par les équations (5) appliquées à  $(n+1)$  ; il peut s'écrire, en posant :  $U_n(i) = L_i(X_n, Y_n)$  :

$$(F) : \lambda_i L_i(X_{n+1}, Y_{n+1}) + X_{n+1}(i) - X_n(i) - \alpha_i \sum_{i'} X_{n+1}(i') = 0, \quad 1 \leq i \leq I$$

Dans ce système, les inconnues sont  $X_{n+1}(i)$ , car  $Y_{n+1}$  est donné plus haut.

#### -Proposition-

*Le système des équations (F) est inversible.*

#### -Démonstration-

Considérons le système homogène associé, il s'écrit :

$$(F_0) \quad \lambda_i L_i(X_{n+1}, 0) + X_{n+1}(i) - \alpha_i \sum_{i'} X_{n+1}(i') = 0.$$

Posons  $L_i(X_{n+1}, 0) = U'(i)$  et  $M_j(X_{n+1}, 0) = V'(j)$  ( $M_j$  défini par :  $M_j(X_n, Y_n) = V_n$ ).

$U'$  et  $V'$  sont solutions de :

$$\begin{cases} \lambda_i \frac{U'_i}{\alpha_i} + \sum_j \gamma_{i,j} \frac{\mu_j V'_j}{\beta_j} + \frac{X_n(i)}{\alpha_i} - x_n = \frac{X_n(i)}{\alpha_i} \left[ \sum_j \frac{\beta_j \mu_j}{\lambda_i + \mu_j} \right]^{-1} \\ \sum_k \delta_{j,k} \frac{\lambda_j U'_k}{\alpha_k} + \mu_j \frac{V'_j}{\beta_j} + \sum_k \delta_{j,k} \frac{X_n(k)}{\alpha_k} - x_n = 0 \end{cases}$$

( $\delta$  et  $\gamma$  définis en 1-4).

$$\text{Posons } A'(i) = \frac{\lambda_i U'(i)}{\alpha_i} \quad \text{et} \quad B'(j) = \frac{\mu_j V'(j)}{\beta_j}$$

$$\text{et } G(i,j) = \left[ \sum_{j'} \frac{\beta_{j'} \mu_{j'}}{\lambda_i + \mu_{j'}} \right] \gamma_{i,j} \quad \text{et} \quad X'_n(i) = \frac{X_n(i)}{\alpha_i} ; \text{ on a alors :}$$

$$\begin{cases} A' + X' = x_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} & (F_0) \\ A' + \Gamma B' + X' - x_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \left( X'(i) \left( \sum_i \frac{\beta_j \mu_j}{\lambda_i \mu_j} \right)^{-1} \right)_i \\ \Delta(A' + X') + B' - x_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

En reportant la première équation dans la deuxième et la troisième, il vient :

$$\begin{cases} \Gamma B' = X' \\ \Delta x_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + B' - x_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \Delta \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où  $B' = 0$ ,  $X' = 0$  et finalement  $x_n = 0$ .

-Conclusion-

On obtient, grâce à l'élimination de  $(U_n, V_n)$ ,  $Y_{n+1}$  en fonction de  $(X_n, Y_n)$  dans (6) ; puis, après inversion d'un système de I équations, l'expression de  $X_{n+1}$  en fonction de  $X_n$  et  $Y_{n+1}$  grâce aux équations (5), donc de  $(X_n, Y_n)$ . Plus précisément, on aboutit à :

$$\begin{cases} X_{n+1} = H'(X_n, Y_{n+1}) = H(X_n, Y_n) & \text{pour } 1 \leq n \leq N-2 \\ Y_{n+1} = K(X_n, Y_n) & \text{pour } 1 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

H, H' et K étant des applications linéaires.

1.6 Calcul de p(n)

□ On obtient, à l'aide de 1.5 :  $X_1 = H'(X_0, Y_1)$ , or  $X_0(i) = x_0 \alpha_i$  (rappelons que  $Y_0$ , comme  $X_N$ , n'est pas défini).

On calcule donc, par récurrence,  $(X_n, Y_n)$  en fonction de  $x_0$  et  $Y_1$ . Puis,  $Y_N(j) = K_j(X_{N-1}, Y_{N-1}) = \beta_j x_{N-1}$  fournit un système de J équations en les J inconnues  $(Y_1(1) \dots Y_1(J))$ .

On calcule enfin  $U_n$  et  $V_n$  à l'aide de 1.4, puis  $p(n, i, j)$  à l'aide de la relation d'inversion 1.3 ;  $p(0, 0, j)$  et  $p(N, i, 0)$  sont donnés par les équations de Chapman-Kolmogorov (§ 1.2).

□ Si N est grand, on peut obtenir l'expression de p(n) pour tout n ≤ N-1 de façon plus rapide.

En effet, on obtient de façon générale 
$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \left[ \frac{H}{K} \right] \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ Y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Mais la relation  $\sum_i \lambda_i X_n(i) = \sum_j \mu_j Y_n(j)$  permet d'éliminer une variable et d'écrire :

$$\begin{pmatrix} X_n \\ \tilde{Y}_n \\ Y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ \tilde{Y}_{n-1} \\ Y_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \tilde{Y}_n = \begin{pmatrix} Y_n(1) \\ \vdots \\ Y_n(J-1) \end{pmatrix}$$

Or p(n) est fonction linéaire de  $(X_n, \tilde{Y}_n)$  ; d'où

- Si les valeurs propres  $u_1, \dots, u_{I+J-1}$  de la matrice P sont distinctes, alors il existe  $c_1, \dots, c_{I+J-1}$  tels que :  $\forall n \in [1, N-1], p(n) = \sum_{i=1}^{I+J-1} c_i u_i^n$
- En général, p(n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre I+J-1, définie par le polynôme caractéristique de P.

Il suffit alors de calculer  $p(1), \dots, p(I+J-1)$  par itération pour obtenir les constantes  $c_1, \dots, c_{I+J-1}$  après résolution d'un système de Vandermonde.

-Conclusion-

- Le calcul de p(n) demande, principalement, les opérations suivantes :
- inversion de deux matrices carrées à I lignes (élimination de  $U_n$ , calcul de  $X_{n+1}$ ) ;
  - puis étude d'une relation de récurrence d'ordre I+J-1, linéaire.

Les matrices qui interviennent sont donc toutes de taille inférieure à I+J.

2. FILE H/H/1/c

2.1 Description

Il s'agit de la file à un serveur, une seule classe de client, à

capacité limitée à  $c$ . Les interarrivées (resp. Les interservices) suivent une loi hyperexponentielle de paramètres  $\mu_1, \dots, \mu_j$ , [resp.  $\lambda_1, \dots, \lambda_I$ ], de répartitions  $\beta_1, \dots, \beta_j$  [resp.  $\alpha_1, \dots, \alpha_I$ ].

Pour étudier cette file, nous utilisons le modèle du §1, avec  $N = +\infty$ , et un nombre infini de clients dans la station 2, qui modélise les interarrivées.

## 2.2 Equations

On utilise, comme en §1, les variables  $X_0, Y_0, U_0, V_0, X_n, Y_n, U_n, V_n$ , etc, définies de la même façon. En particulier la formule générale s'applique pour  $n = c$ .

Les équations (1) à (6) restent alors valable pour  $n \leq c-1$ . Pour  $n = c$  on a : (1), (2) et (4) restent valables, mais :

$$\begin{array}{l} (3)_c \\ (5)_c \\ (6)_c \end{array} \left\| \begin{array}{l} p(c,i,j)(\lambda_i + \mu_j) = \beta_j X_{c-1}(i) + X_c(i) \\ \lambda_i U_c(i) + X_c(i) = X_{c-1}(i) + JX_c(i) \\ Y_c(j) + \mu_j V_c(j) = \beta_j y_c + x_c \end{array} \right.$$

L'équation (8) devient :

$$(8)_c \left\| U_c(i) \left[ \sum_j \frac{\beta_j \mu_j}{\lambda_i + \mu_j} \right] = X_c(i) \right.$$

L'équation (9) donne :

$$(9)_c \left\| Y_c(j) + \mu_j V_c(j) = \beta_j y_c + x_c \right.$$

## 2.3 Résolution

La méthode précédente s'applique pour exprimer  $(X_n, Y_n)$ ,  $n \leq c-1$  ainsi que  $Y_c$  en fonction de  $x_0$  et  $Y_1$ .

Pour éliminer  $U_c$  et  $V_c$ , on doit utiliser  $(8)_c$  et  $(9)_c$  qui donnent un résultat direct.

On calcule alors  $X_c$  grâce à  $(5)_c$ .

Enfin, l'équation  $(6)_c$  permet de calculer  $Y_1$ , après résolution d'un système linéaire à J inconnues.

---

#### REFERENCES

BREMAUD, "Point processes and queues" - Springer-Verlag, 1980.

GELENBE et PUJOLLE, "Introduction aux réseaux de files d'attente" - Eyrolles, 1982.

MARIE et PELLAUMAIL, "Steady-state probabilities for a queue with a general service distribution and state-dependent arrivals" - IEEE-TSE, vol. SE-9, n° 1, pp. 109-113, jan. 1983.

MARIE et PELLAUMAIL, "Régime stationnaire pour une file M/H/1 avec impatience" Rapport IRISA, publication interne n° 194, mars 1983.

## Liste des Publications Internes IRISA

- PI 168 **Impact de l'intégration sur le traitement automatique de la parole**  
P. Quinton . 14 pages : Mai 1982
- PI 169 **A systolic algorithm for connected word recognition**  
J.P. Banâtre, P. Frison, P. Quinton . 13 pages : Mai 1982
- PI 170 **A network for the detection of words in continuous speech**  
J.P. Banâtre, P. Frison, P. Quinton . 24 pages : Mai 1982
- PI 171 **Le langage ADA : Etude bibliographique**  
J. André, Y. Jégou, M. Raynal . 12 pages : Juin 1982
- PI 172 **Comparaison de groupes de variables : 2ème partie : un exemple d'application**  
B. Escofier, J. Pajès . 37 pages : Juillet 1982
- PI 173 **Unfold-fold program transformations**  
L. Kott . 29 pages : Juillet 1982
- PI 174 **Remarques sur les langages de parenthèses**  
J.M. Autebert, J. Beauquier, L. Boasson, G. Senizergues . 20 pages : Juillet 1982
- PI 175 **Langages de parenthèses, langages N.T.S. et homomorphismes inverses**  
J.M. Autebert, L. Boasson, G. Senizergues . 26 pages : Juillet 1982
- PI 176 **Tris pour machines synchrones ou Baudet Stevenson revisited**  
R. Rannou . 26 pages : Juillet 1982
- PI 177 **Un nouvel algorithme de classification hiérarchique des éléments constitutifs de tableau de contingence basé sur la corrélation**  
B. Tallur . Juillet 1982 :
- PI 178 **Programmes d'analyse des résultats d'une classification automatique**  
I.C. Lerman et collaborateurs . 79 pages : Septembre 1982
- PI 179 **Attitude à l'égard des mathématiques des élèves de sixième**  
J. Degouys, R. Gras, M. Postic . 29 pages : Septembre 1982
- PI 180 **Traitements de textes et manipulations de documents : bibliographie analytique**  
J. André . 20 pages : Septembre 1982
- PI 181 **Algorithme assurant l'insertion dynamique d'un processeur autour d'un réseau à diffusion et garantissant la cohérence d'un système de numérotation des paquets global et réparti**  
Annick Le Coz, Hervé Le Goff, Michel Ollivier . 31 pages : Octobre 1982
- PI 182 **Interprétation non linéaire d'un coefficient d'association entre modalités d'une juxtaposition de tables de contingence**  
Israel César Lerman . 34 pages : Novembre 1982
- PI 183 **L'IRISA vu à travers les stages effectués par ses étudiants de DEA (1<sup>ère</sup> année de thèse)**  
Daniel Herman . 41 pages : Novembre 1982
- PI 184 **Commande non linéaire robuste des robots manipulateurs**  
Claude Samson . 52 pages : Janvier 1983
- PI 185 **Dialogue et représentation des informations dans un système de messagerie intelligent**  
Philippe Besnard, René Quiniou, Patrice Quinton, Patrick Saint-Dizier, Jacques Siroux, Laurent Trilling . 45 pages : Janvier 1983
- PI 186 **Analyse classificatoire d'une correspondance multiple ; typologie et régression**  
I.C. Lerman . 54 pages : Janvier 1983
- PI 187 **Estimation de mouvement dans une séquence d'images de télévision en vue d'un codage avec compensation de mouvement**  
Claude Labit . 132 pages : Janvier 1983
- PI 188 **Conception et réalisation d'un logiciel de saisie et restitution de cartes élémentaires**  
Eric Sécher . 45 pages : Janvier 1983
- PI 189 **Etude comparative d'algorithmes pour l'amélioration de dessins au trait sur surfaces point par point**  
M.A. ROY . 96 pages : Janvier 1983
- PI 190 **Généralisation de l'analyse des correspondances à la comparaison de tableaux de fréquence**  
Brigitte Escofier . 35 pages : Mars 1983
- PI 191 **Association entre variables qualitatives ordinales «nettes» ou «floues»**  
Israel-César Lerman . 42 pages : Mars 1983
- PI 192 **Un processeur intégré pour la reconnaissance de la parole**  
Patrice Frison . 80 pages : Mars 1983
- PI 193 **The Systematic Design of Systolic Arrays**  
Patrice Quinton . 39 pages : Avril 1983
- PI 194 **Régime stationnaire pour une file M/H/1 avec impatience**  
Raymond Marie et Jean Pellaumail . 8 pages : Mars 1983
- PI 195 **SIGNAL : un langage pour le traitement du signal**  
Paul Le Guernic, Albert Benveniste, Thierry Gautier . 49 pages : Mars 1983
- PI 196 **Algorithmes systoliques : de la théorie à la pratique**  
Françoise André, Patrice Frison, Patrice Quinton . 19 pages : Mars 1983
- PI 197 **HAVANE : un système de mise en relation automatique de petites annonces**  
Patrick Bose, Michele Courant, Sophie Robin, Laurent Trilling . 79 pages : Mai 1983
- PI 198 **Une procédure de décision en logique non-monotone**  
Philippe Besnard . 59 pages : Mai 1983
- PI 199 **A formal proof system for infinitary rational expressions**  
Philippe Darondeau, Laurent Kott . 28 pages : Mai 1983
- PI 200 **Etude générale d'un réseau constitué de deux stations hyperexponentielles**  
Jean-Yves Le Boudec . 12 pages : Mai 1983
- PI 201 **Langage de Dyck et groupe symétrique**  
Yves Cochet . 13 pages : Juin 1983

1925-1926