



Etude comparative d'algorithmes pour l'amélioration de dessins au trait sur surfaces point par point

Marie-Anne Roy

► To cite this version:

Marie-Anne Roy. Etude comparative d'algorithmes pour l'amélioration de dessins au trait sur surfaces point par point. [Rapport de recherche] RR-0232, INRIA. 1983. inria-00076326

HAL Id: inria-00076326

<https://inria.hal.science/inria-00076326>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



CENTRE DE RENNES
IRISA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
— France
Tél. (3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 232

**ÉTUDE COMPARATIVE
D'ALGORITHMES POUR
L'AMÉLIORATION DE DESSINS
AU TRAIT SUR SURFACES
POINT PAR POINT**

M. A. ROY

Août 1983

ETUDE COMPARATIVE D'ALGORITHMES
POUR L'AMELIORATION DE DESSINS AU TRAIT
SUR SURFACES POINT PAR POINT

M.A. ROY
Janvier 1983
96 pages
Publication Interne n°189

RESUME :

Les techniques simples de génération de courbes produisent des "effets d'escalier" lors de l'affichage à l'écran. Aussi diverses techniques plus complexes, basées sur la variation de l'intensité de luminosité des points-écran, ont-elles été proposées; mais elles ont l'inconvénient de nécessiter de très nombreux calculs. Nous présentons ici des algorithmes, permettant le tracé de coniques sans apparition d'effets d'escalier, obtenus par simple généralisation de l'algorithme de Bresenham de génération de segments de droite.

ABSTRACT :

The simple curve-drawing techniques produce "staircase" appearance on raster images. So, more complex techniques using gray-scale were proposed. Unfortunately, these techniques require considerable computation. Here we present conic-drawing algorithms producing smooth curves. These algorithms are obtained by simply generalizing Bresenham line-drawing algorithm.



ÉTUDE COMPARATIVE D'ALGORITHMES
POUR L'AMÉLIORATION DE DESSINS AU TRAIT
SUR SURFACES POINT PAR POINT

M.A. ROY

LE 25 NOVEMBRE 1982

*Une partie de ce travail a été
réalisée en exécution de la
convention P et T n° 82 35 068*

RAPPORT DE RECHERCHE
IMI - INFO - n° 10

SOMMAIRE

I. INTRODUCTION

II. TRACE DE SEGMENTS DE DROITE

II.0 Introduction

II.1. Méthodes utilisées pour l'élimination de l'effet d'escalier

II.1.1. Méthode de Bresenham

II.1.2. Méthode de Pitteway-Watkinson

II.1.3. Méthode de Piller-Widner

II.1.4. Méthode de Gupta-Sproull

II.1.5. Méthode de Crow

II.1.6. Comparaison de ces méthodes

II.2. Génération de segments de droite par la méthode de Bresenham

II.2.1. Version "escalier"

II.2.2. Elimination des effets d'escalier

II.3. Autres méthodes de génération des segments de droite

II.3.1. Méthode de Lucas

II.3.2. Méthode de Earnshaw

II.4. Conclusion

III. TRACE DE CONIQUES

III.0. Introduction

III.1. Cercles - Ellipses admettant des axes de symétrie parallèles aux axes du repère

III.1.1. Génération suivant le principe de Bresenham, sur 2 mouvements élémentaires

III.1.2. Impossibilité d'appliquer cette méthode sur 3 mouvements élémentaires

III.1.3. Conclusion

III.2. Généralisation aux tracés des ellipses subissant une rotation

III.2.1. Introduction

III.2.2. Elimination des effets d'escalier - Procédé de Bresenham

III.2.3. Tracé des ellipses par la méthode de Pitteway

III.2.4. Autres méthodes de génération de coniques

III.2.4.1. Méthode de Danielsson

III.2.4.2. Méthode de Jordan-Holm-Lennon

III.2.5. Conclusion

III.3. Arcs de paraboles admettant un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées

III.3.1. Génération suivant le procédé de Bresenham

III.3.2. Application d'une rotation aux paraboles considérées

III.3.3. Autres méthodes de génération

III.3.4. Conclusion

IV. GÉNÉRATION DES CARACTÈRES

IV.1. Introduction

IV.2. Génération de caractères sur un support de visualisation de faible résolution

IV.2.1. Méthode de Warnock

IV.2.2. Méthode de Wilkes et Wiseman

IV.2.3. Méthode de Crow

IV.2.4. Méthode de Kajiya et Ullner

IV.3. Génération de caractères sur un support de visualisation de résolution élevée

IV.3.1. Codage de la surface

IV.3.2. Codage du contour

IV.3.3. Codage de la structure

IV.4. Conclusion

CONCLUSION

ANNEXE - Simulation de grisés

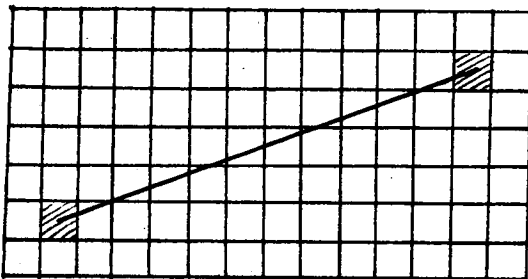
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

I.

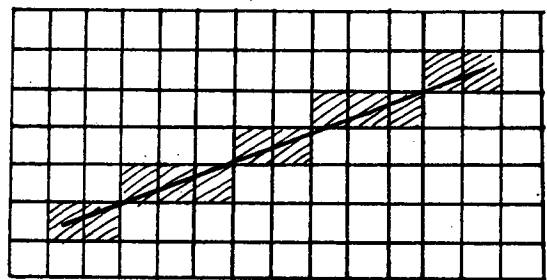
INTRODUCTION

L'utilisation sans cesse grandissante d'écrans de visualisation de type télévision pose le problème de l'inscription d'une courbe sur une surface à pointillage : nous devons donner une approximation telle que l'oeil puisse reconstituer la courbe théorique de manière aussi satisfaisante que possible.

Par exemple, un segment de droite sera défini par la donnée des coordonnées de ses extrémités (cf. figure 0-a). Il nous faudra engendrer la suite de points situés sur la grille de l'écran approchant le mieux le segment théorique (cf. figure 0-b).



a- Segment théorique défini par ses extrémités



b- Segment engendré

Figure 0 - Génération d'un segment de droite

De nombreux algorithmes ont été proposés pour réaliser la génération de courbes.

Mais l'utilisation de ces algorithmes pour l'affichage de dessins au trait, ne permet pas une représentation totalement satisfaisante du dessin théorique.

En effet, ces algorithmes génèrent des suites de points alignés par paliers verticaux ou horizontaux.

Il se produit alors une impression visuelle "d'effet d'escalier", d'autant plus sensible que le pouvoir de résolution de l'écran est faible.

La figure 1 montre des exemples de ce phénomène.

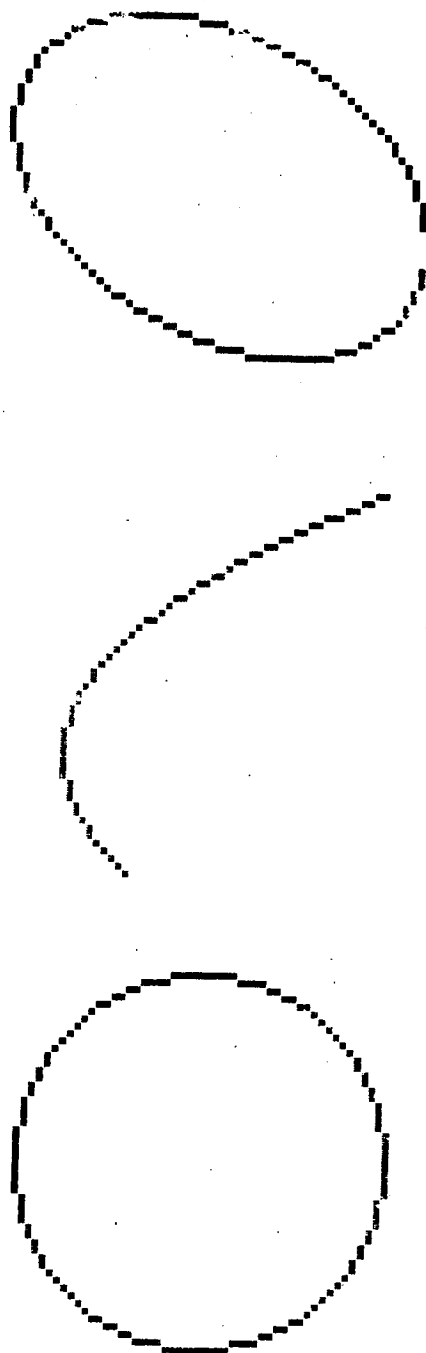
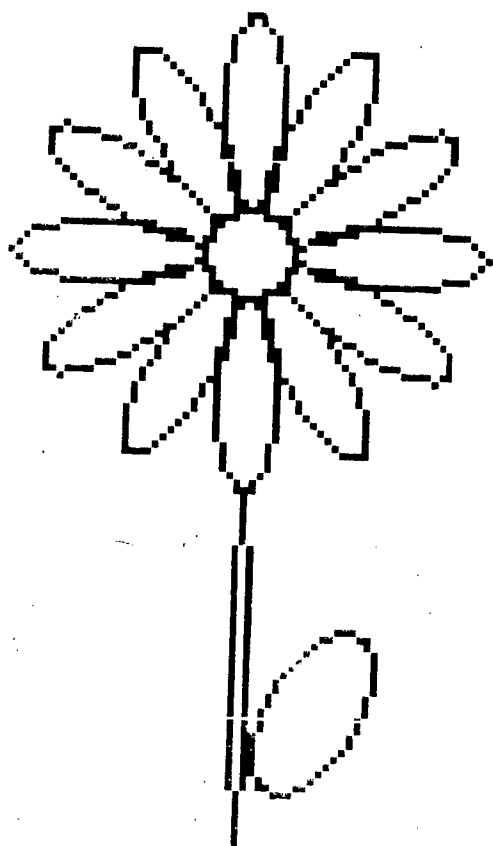


Figure 1 : Exemples d'effet d'escalier

N.B.: Ici les effets d'escalier sont accentués par le fait qu'un pixel est formé de 9 points-écrans formant une matrice 3x3.

4

Pour estomper cet effet d'escalier, de nouvelles versions d'algorithmes de création de courbes ont été proposés.

Ces nouvelles versions découlent toutes de la même idée de base :

il s'agit de procéder à une meilleure répartition de la luminosité entre les points "les plus proches" du trait théorique, c'est-à-dire les pixels de l'écran traversés par ce trait. (En fait, ceci revient à tenir compte de l'épaisseur du trait affiché).

On augmentera donc le nombre de points affichés, et l'intensité de luminosité attribuée à chacun d'entre eux sera inversement proportionnelle à la distance de ce point au trait théorique.

Ces algorithmes éliminant l'effet d'escalier impliquent l'utilisation d'écrans à luminosité variable, puisque, au contraire des algorithmes de génération version "escalier", où tous les points ont la même intensité de luminosité, ici l'intensité varie d'un point à l'autre.

Cependant, il est possible d'utiliser de tels algorithmes sur des écrans où un pixel ne peut avoir que deux états, à savoir allumé ou éteint. Pour cela, on a recours aux techniques de simulation de grisée (voir [JJN76]). Ne disposant pas d'un écran à luminosité variable, nous avons appliqué l'une de ces techniques de simulation (que nous exposons en détail en annexe).

En conséquence, nous avons affaibli la révolution de l'écran :

un pixel est maintenant représenté par 9 points-écran contigus formant une matrice carrée 3x3 (d'où 10 niveaux de luminosité possibles).

Pour pouvoir comparer les dessins engendrés par les deux types d'algorithmes, nous avons utilisé la même échelle de représentation dans les deux cas, c'est-à-dire que même dans le cas de la génération avec "effet d'escalier" un pixel est représenté par 9 points-écran contigus (qui sont tous allumés lorsque le pixel est utilisé pour engendrer un trait, d'où une accentuation des effets d'escalier par grossissement).

Si toutes les méthodes d'élimination de l'effet d'escalier sont basées sur la même idée exposée plus haut, elles diffèrent néanmoins dans son application.

Ces différences résident dans le nombre de points supplémentaires affichés et dans le calcul de l'intensité de luminosité attribuée à un point.

Les algorithmes de génération en "version escalier" engendrent le trait voulu de manière incrémentale, en sélectionnant à chaque étape le point le plus proche du trait théorique (ces algorithmes sont étudiés en détail dans [HER 82] et [ROY 82]).

Pour éliminer les effets d'escalier, à chaque étape on ne sélectionne plus un seul point, mais 2 ou 3 suivant la méthode d'élimination utilisée de manière à "encadrer" le trait théorique (cf. II.1). (On remarquera que le 3ème point sélectionné admet une intensité très faible ([PIT 81])).

L'intensité de luminosité attribuée à chaque point est une fonction plus ou moins directe de la distance du centre du pixel au trait théorique. On peut classer la méthode de calcul en 2 catégories :

1. On utilise uniquement l'évaluation de l'erreur commise à chaque étape, évaluation calculée par les algorithmes "version escalier" (Bresenham, Pitteway-Watkinson, Piller-Widner, cf. paragraphe II.1.).
2. On utilise, en plus de l'évaluation de l'erreur commise, des fonctions filtres faisant appel aux fonctions telles que racine carrée, cosinus, logarithme... (Crow, Gupta-Sproull, cf. paragraphe II.1.).

Ces méthodes d'élimination de l'effet d'escalier, par affichage de points supplémentaires et attribution d'une intensité de luminosité appropriée à chaque point affiché, permettent à l'oeil de recréer de manière satisfaisante le trait théorique.

Nous nous proposons de :

- passer en revue les différents procédés d'élimination de l'effet d'escalier utilisés et étudier en détail celui qui nous paraît le plus intéressant.

- essayer d'étendre le procédé retenu à la génération des coniques car il n'a été développé que dans le cadre de la génération de segments de droite.

- essayer d'appliquer le procédé retenu aux principaux algorithmes de génération de coniques et de vecteurs (algorithmes produisant des effets d'escalier).

- étudier le cas particulier de la génération des caractères

- montrer que ce procédé peut être utilisé pour améliorer le contour de tâches dans le cas d'images de faible qualité ; ie que pour ce type d'images une méthode d'amélioration locale donne des résultats satisfaisants, et donc qu'il n'est pas indispensable de faire appel à une méthode d'amélioration globale.

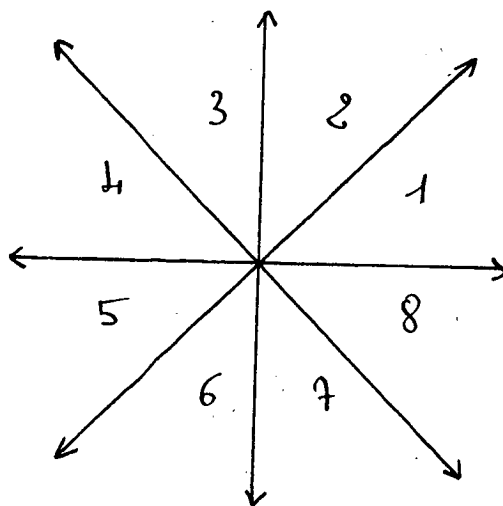
II. TRACÉ DE SEGMENTS DE DROITE

II.0. Introduction

A partir d'un point donné peuvent s'effectuer 8 mouvements :
4 axiaux et 4 diagonaux.

A chaque octant sont associés 1 mouvement axial et 1 mouvement diagonal. La figure 2 donne la numérotation des octants.

Figure 2 : Numérotation des octants



La détermination de l'octant auquel appartient le segment traité est donné par le tableau suivant :

1er octant : $DX > 0 - DY > 0 - DX \geq DY$
2ème octant : $DX \geq 0 - DY > 0 - DX < DY$
3ème octant : $DX < 0 - DY > 0 - |DX| \leq |DY|$
4ème octant : $DX < 0 - DY \geq 0 - |DX| > |DY|$
5ème octant : $DX < 0 - DY < 0 - |DX| \geq |DY|$
6ème octant : $DX \leq 0 - DY < 0 - |DX| < |DY|$
7ème octant : $DX > 0 - DY < 0 - |DX| \leq |DY|$
8ème octant : $DX > 0 - DY \leq 0 - |DX| > |DY|$

Dans le cas du 1er, 4ème, 5ème et 8ème octants, nous nous déplacerons suivant l'axe des x, et dans le cas du 2ème, 3ème, 6ème et 7ème octants suivant l'axe des Y, ceci pour afficher le plus de points possibles et donc donner une meilleure représentation du segment théorique.

II.1. Méthodes utilisées pour l'élimination de l'effet d'escalier

Toutes les méthodes d'élimination des effets d'escalier proposées appliquent le même principe :

assurer une meilleure répartition de la luminosité entre les points les "plus proches" du trait théorique ie entre les pixels de l'écran traversés par ce trait.

D'où, un affichage de points supplémentaires et nécessité de calculer l'intensité attribuée à chacun des points affichés.

Nous appellerons point principal le point le plus proche du trait théorique, c'est le point sélectionné par les algorithmes version escalier.

C'est donc le pixel représentant ce point qui aura la plus forte intensité de luminosité.

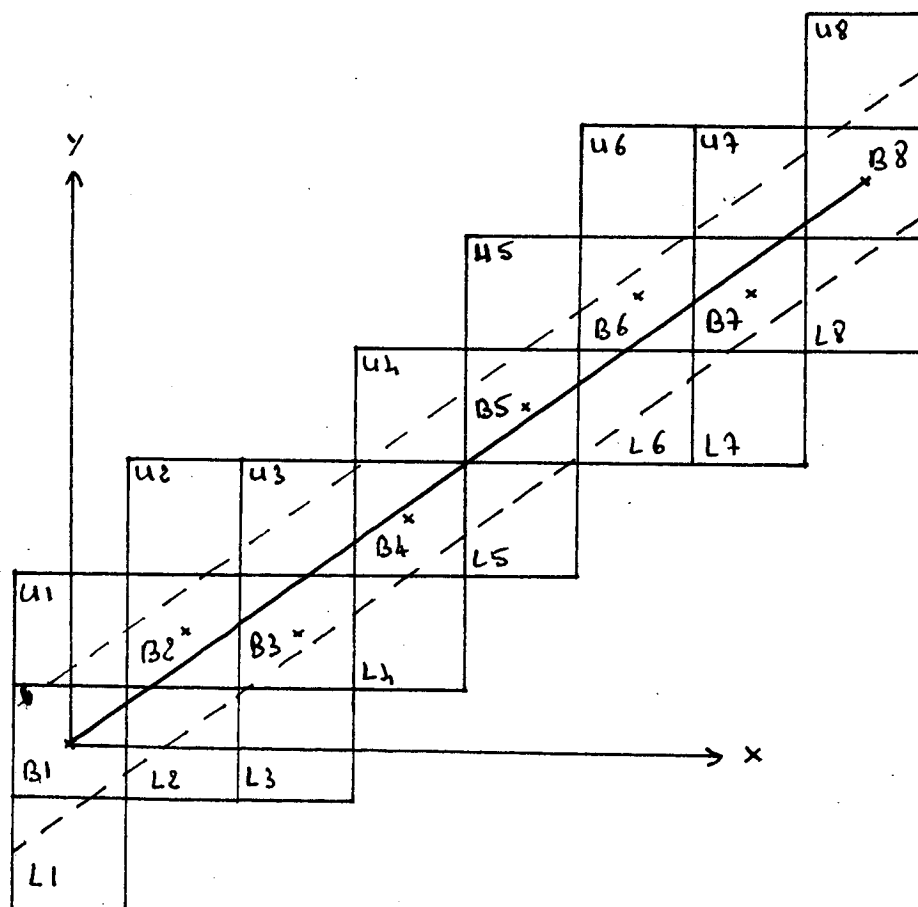
Les points supplémentaires affichés seront appelés points secondaires.

Dans tous les cas, la méthode de détermination du point principal dérive plus ou moins directement de celle donnée par Bresenham [Bre 65].

Les coordonnées des points "début du segment" et "fin du segment" sont entières.

Nous n'exposerons pas en détail les différentes méthodes. Nous nous bornons à en indiquer les idées caractéristiques.

La figure 3 présente, sur un exemple, les points sélectionnés par les différents algorithmes proposés (ie les pixels de l'écran mis à contribution).



B_i : points principaux donnés par [Bre 65]
 U_i : points secondaires
 L_i

Figure 3 : Tracé du segment d'origine (0,0) et d'extrémité (7,5)

II.1.1. Méthode de Bresenham

Cette méthode d'élimination de l'effet d'escalier dérive directement de l'algorithme de Bresenham [Bre 65] de génération des segments de droite. (Cette méthode est très souvent utilisée mais rarement publiée. On la trouve exposée, par exemple dans [Gra 80]).

Cette méthode sélectionne le point principal et un point secondaire. Le point secondaire est tel que le segment passe entre ce point et le point principal. Ces deux points sont les points les plus proches du segment théorique.

L'intensité attribuée à un point est fonction de la distance de ce point au segment.

Dans le cas de la figure 2, les pixels mis à contribution seront : B1 - B2, L2 - U3, B3 - U4, B4 - B5, L5 - B6, L6 - U7, B7 - B8

La somme des intensités de luminosité des points principal et secondaire est égale à l'intensité maximale (notée I_{max}) pouvant être attribuée à un pixel.

Aucune modification fondamentale n'est apportée à l'algorithme de Bresenham [Bre 65]. On se contente d'exploiter toutes les informations données.

En effet, dans [Bre 65], les différents cas de figure avaient été regroupés en deux catégories : cas du mouvement axial et cas du mouvement diagonal.

Il suffit donc de faire "éclater" ces regroupements pour obtenir tous les cas de figure possibles.

Les opérations effectuées restent des opérations entières (addition ou soustraction) et des comparaisons.

Seul le coefficient donnant la répartition de l'intensité entre les points principal et secondaire est un réel. Il est le résultat de la division de 2 variables entières.

L'intérêt de cette méthode réside dans le fait que ces 2 variables entières sont déjà calculées dans [Bre 65], et donc qu'elles n'ont pas été introduites spécialement pour le calcul des intensités de luminosité.

II.1.2. Méthode de Pitteway-Watkinson [PIW 80]

Cette méthode sélectionne le point principal et un point secondaire. Le point secondaire que celui donné par la méthode de Bresenham.

Et, en supplément par rapport à la méthode de Bresenham, deux points secondaires sont adjoints à chacun des points donnant les extrémités du segment.

Dans le cas de la figure 2, les pixels mis à contribution seront donc :

U1,B1,L1 - B2,L2 - U3,B3 - U4,B4 - B5,L5 - B6,L6 - U7,B7 - U8,B8,L8.

L'intensité attribuée à un point est fonction de la fraction de surface du pixel traversé, située suivant les cas au-dessus ou au-dessous de la droite théorique. (Cette surface est censée s'exprimer en fonction des variables utilisées dans [Bre 65]).

L'algorithme de Bresenham a été réécrit : bien que suivant le schéma initial, le nouvel algorithme travaille sur des réels et non plus sur des entiers.

Il est difficile d'étudier à fond cette méthode, l'article de [PIW 80] n'étant pas très explicite.

En effet, il n'indique pas la manière dont est déterminé le point secondaire ; et la manière dont sont calculées les intensités est loin d'être claire :

Les formules données comme représentant la surface dans les 2 cas possibles, sont en fait erronées de $|\frac{m}{2}|$ par rapport aux vraies valeurs (où m représente la pente de la droite).

De plus, le fait que la somme des intensités des deux points sélectionnés soit égale à $\sqrt{1+m^2} \times I_{\max}$ n'apparaît que dans [Pit 81].

Or, il semblerait nécessaire de connaître cette relation pour déterminer l'intensité du point secondaire.

Les résultats numériques (donnés pour l'exemple de la figure 2) dans [Pit 81] ne correspondent pas aux indications de calcul données dans [Piw 80].

II.1.3. Méthode de Piller-Widner [Pwi 80]

Cette méthode sélectionne le point principal et deux points secondaires.

Elle a été conçue pour s'adapter aux techniques du calcul en parallèle : la génération s'effectue ligne par ligne, ce qui implique de nombreuses réinitialisations à chaque changement de ligne.

Cette méthode ne présente aucun intérêt pour un calculateur non parallèle car elle est très "lourde", elle nécessite un nombre important de calculs.

II.1.4. Méthode de Gupta-Sproull [Gsp 81]

Cette méthode sélectionne le point principal et 2 points secondaires.

Pour le calcul des intensités, on utilise une fonction filtre.

Cette fonction filtre fait intervenir des racines carrées, des logarithmes et la fonction cosinus inverse.

Dans ce cas, il ne s'agit donc plus d'apporter des modifications à un algorithme, mais bien d'introduire une technique relativement sophistiquée.

Car bien que le schéma de base de [Bre 65] soit conservé, et que le calcul de l'intensité attribuée à un point utilise la distance de ce point au segment, cette variable n'est plus la seule en cause, interviennent également toutes celles caractérisant la fonction filtre.

II.1.5. Méthode de Crow [Cro 77]

Cette méthode comme la précédente est basée sur l'image d'une fonction filtre. (Dans ce cas, on utilise la convolution discrète).

Cette méthode est elle aussi complexe et comme la précédente tient plus de l'introduction d'une technique que de la simple modification d'algorithme.

II.1.6. Comparaison de ces méthodes

Pitteway [Pit 81] présente (sur l'exemple de la figure 2) une étude comparative sur la qualité de représentation de ces différentes classes de méthodes d'élimination des effets d'escalier.

Les deux méthodes donnant les résultats les plus intéressants sont celles de Pitteway-Watkinson et de Gupta-Sproull (dans le cas où le rayon utilisé pour la fonction filtre est égal à $2/3$).

Ceci prouve que l'introduction d'un unique point secondaire est suffisante et donne des résultats aussi corrects que ceux obtenus dans le cas où deux points secondaires sont introduits. On remarque que le second point supplémentaire admet le plus souvent une intensité proche de 0.

Cette étude tend à prouver également que pour obtenir des résultats satisfaisants, il n'est pas indispensable de recourir à l'emploi de fonctions filtres.

La méthode de Bresenham donne des résultats moins satisfaisants sur le plan théorique que ceux obtenus par la méthode de Pitteway-Watkinson (on constate une erreur moyenne de 7 % sur l'exemple de la figure 2) ; mais sur le plan pratique les effets d'escalier sont réellement estompés et les résultats obtenus sont concluants.

La méthode de Bresenham est celle donnant les meilleurs résultats par rapport aux difficultés de mise en oeuvre.

En effet, dans le cas où elle est applicable, elle ne nécessite aucune modification de la structure de base des algorithmes "version escalier", et surtout, elle ne nécessite pas l'introduction de variables supplémentaires. Le calcul des intensités de luminosité s'effectue à partir de valeurs déjà utilisées dans les versions initiales (ie dans la version "escalier").

C'est donc ce procédé d'élimination des effets d'escalier, issu de [Bre 65], que nous allons étudier en détail (et que nous essayerons d'appliquer à la génération des coniques dans les paragraphes suivants.

II.2. Génération des segments de droite par la méthode de Bresenham |Bre 65|

II.2.1. Version escalier

Nous allons nous restreindre à l'étude du 1er octant, sachant que l'étude des autres cas s'effectue de manière analogue.

Notation : origine du segment : (X_D, Y_D)

extrémité du segment : (X_F, Y_F)

$$DX = X_F - X_D$$

$$DY = Y_F - Y_D$$

Hypothèse : $\left. \begin{array}{l} DX > 0 \\ DY > 0 \\ DX \geq DY \end{array} \right\} \text{cas du 1er octant}$
 $X_D, Y_D, X_F \text{ et } Y_F \text{ sont des entiers}$

Nous supposons que le dernier point sélectionné soit le point de coordonnées (r, q) .

La figure 4 montre les différents cas de figure possibles.

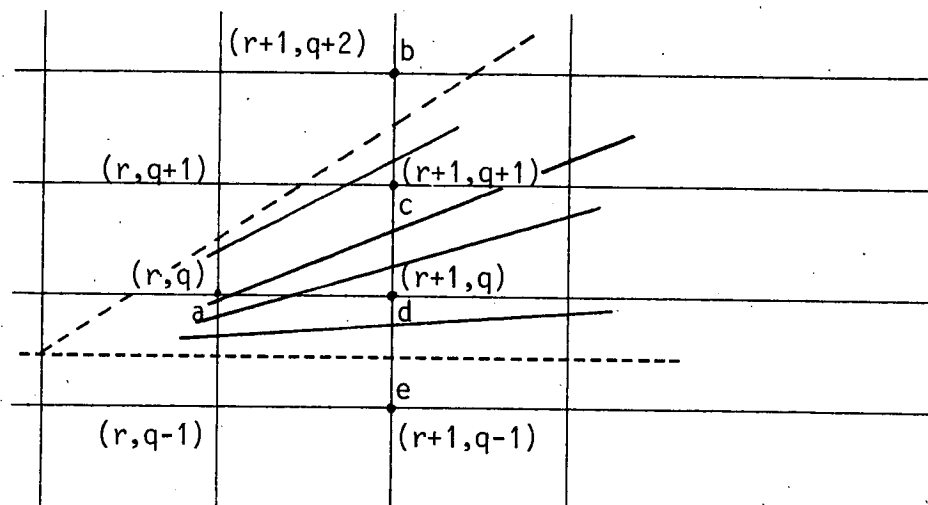


Figure 4 : Différents cas de figure possibles de la situation du point $a(r, q)$ par rapport au segment théorique.

Soit $P_1(r_1, y_1)$ le point du segment à afficher. Le point (r, q) étant le point le plus proche de P_1 , on a :

$$q - 1/2 \leq y \leq q + 1/2$$

On considère la distance du point $P_1(r, y_1)$ au point (r, q) :

$$y_1 - q = \frac{DY}{DX} (r - XD) + YD - q$$

On pose alors : (pour manipuler une représentation de cette distance qui soit entière)

$$D(r, q) = DX(y_1 - q)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } D(r, q) &= DY \cdot r - DX \cdot q + DX \cdot YD - DY \cdot XD \\ &= DY \cdot r - DX \cdot q + \text{cste} \end{aligned}$$

D'après les hypothèses, on sait que $DX > 0$ donc $D(r, q)$ et $y_1 - q$ sont de même signe.

Soit $P_2(r+1, y_2)$ le point suivant à afficher. Etant dans le cas du 1er octant, nous avons :

$$q - 1/2 < y_2 \leq q + 3/2$$

Nous aurons donc le choix entre deux points pour l'affichage, à savoir :

soit $(r+1, q)$ ie que l'on effectuera un mouvement axial

soit $(r+1, q+1)$ ie que l'on effectuera un mouvement diagonal.

Le point P_2 peut vérifier l'un des 4 cas de figure suivants :

- a) $q - 1/2 < y_2 < q$ } dans ces deux cas on
- b) $q < y_2 \leq q + 1/2$ } aura un mot axial
- c) $q + 1/2 < y_2 \leq q + 1$ } dans ces deux cas, on
- d) $q + 1 < y_2 \leq q + 3/2$ } aura un mot diagonal

Etudions les 2 mouvements possibles et pour cela les 4 cas de figure possibles.

Notons que l'on a les relations :

$$D(r+1, q) = D(r, q) + DY$$

$$D(r+1, q+1) = D(r, q) + DY - DX$$

19

a) $q-1/2 < y_2 \leq q$

Nous avons : $D(r+1,q) < 0$ et $D(r+1,q+1) < 0$ avec $|D(r+1,q)| < |D(r+1,q+1)|$

D'où nous en déduisons que : $D(r+1,q) + D(r+1,q+1) < 0$

b) $q < y_2 < q+1/2$

Nous avons : $D(r+1,q) > 0$ et $D(r+1,q+1) < 0$

avec $D(r+1,q) < D(r+1,q+1)$

D'où : $D(r+1,q) + D(r+1,q+1) \leq 0$

c) $q+1/2 < y_2 \leq q+1$

Nous avons : $D(r+1,q) > 0$ et $D(r+1,q+1) < 0$ avec

$|D(r+1,q)| > |D(r+1,q+1)|$

D'où : $D(r+1,q) + D(r+1,q+1) > 0$

d) $q+1 < y_2 \leq q+3/2$

Nous avons : $D(r+1,q) > 0$ et $D(r+1,q+1) > 0$ avec

$|D(r+1,q)| > |D(r+1,q+1)|$

D'où : $D(r+1,q) + D(r+1,q+1) > 0$

Nous notons E la quantité $D(r+1,q) + D(r+1,q+1)$.

Nous constatons que dans les cas a) et b) ie dans le cas du mouvement axial, nous avons $E \leq 0$.

Et dans les cas c) et d) ie dans le cas du mouvement diagonal, nous avons : $E > 0$

Exprimons E en fonction de $D(r,q)$. Nous avons : $E = D(r+1,q) + D(r+1,q+1)$

d'où : $E = D(r,q) + DY + D(r,q) + DY - DX$

donc $E = 2 \cdot D(r,q) + 2 \cdot DY - DX$

Dans le cas du mouvement axial le prochain point affiché sera $(r+1,q)$.
En conséquence, dans ce cas, la prochaine valeur de E à considérer sera :

$$\begin{aligned}
& 2*D(r+1,q) + 2*DY - DX \\
&= (2*D(r,q) + 2*DY) + 2*DY - DX \\
&= \underline{E_{r,q} + 2*DY}
\end{aligned}$$

Dans le cas du mouvement diagonal, le prochain point affiché sera (r+1,q+1). En conséquence, dans ce cas, la prochaine valeur de E à considérer sera :

$$\begin{aligned}
& 2*D(r+1,q+1) + 2*DY - DX \\
&= (2*D(r,q) + 2*DY - 2*DX) + 2*DY - DX \\
&= \underline{E_{r,q} + 2*DY - 2*DX}
\end{aligned}$$

En résumé, le mouvement à effectuer pour se placer au point le plus proche du segment sera donné par :

Si $E \leq 0$	
alors	mouvement axial E ppv $E + 2*DY$
union	mouvement diagonal E ppv $E + 2*DY - 2*DX$

Initialisation :

Nous avons : $D(XD,YD)=0$ (le point (XD,YD) appartenant au segment à tracer).

Nous avons vu que $E = 2*D(r,q) + 2*DY - DX$. Donc, à la 1ère étape du calcul, nous aurons : $E = 2*D(XD,YD) + 2*DY - DX$
 $= 2*DY - DX$

Dans le cas du 1er octant, nous appliquerons l'algorithme suivant :

```

DX ppv XF - XD
DY ppv YF - YD
CA ppv 2*DY
CD ppv CA - 2*DX
E ppv CA - DX
X ppv XD ; Y ppv YD
Afficher (X,Y)
Pour I ppv 1 par 1 jusqu'à DX faire
début
  X ppv X+1
  Si E <= 0
    alors E ppv E + CA      /* mot axial */
    sinon début             /* mot diagonal */
      Y ppv Y+1
      E ppv E+CD
    fin
  Afficher (X,Y)
fin

```

La généralisation à tous les octants s'effectuera en envisageant deux cas : $|DX| > |DY|$ et $|DX| < |DY|$.

On appliquera alors l'algorithme généralisé suivant :

Génération d'un segment (ENTIER XD,YD,XF,YF)

```

DX ppv XF - XD
DY ppv YF - YD
DELTAX ppv ABS(DX)
DELTAY ppv ABS(DY)
Si DX>0
    alors Xinc ppv+1 /* 1er-2ème-7ème et 8ème octants */
    sinon Yinc ppv-1 /* 3ème-4ème-5ème-6ème octants */
Si DY>0
    alors Yinc ppv+1 /* 1er-2ème-3ème-4ème octants */
    sinon Yinc ppv-1 /* 5ème-6ème-7ème-8ème octants */
X ppv XD ; Y ppv YD
Afficher (X,Y)

```

Suivant cas faire

DELTAX >= DELTAY

début

```

CA ppv 2*DELTAY
CD ppv CA - 2*DELTAX
E ppv CA - DELTAX

```

Pour I ppv 1 pas 1 jusqu'à DELTAX faire

début

```

X ppv X+Xinc
Si E ≤ 0
    alors E ppv E+CA /* mot axial */
    sinon début /* mot diagonal */
        Y ppv Y+Yinc
        E ppv E+CD
    fin

```

Afficher(X,Y)

fin

fin

DELTAX < DELTAY

début

```

CA ppv 2*DELTAX
CD ppv CA-2*DELTAY
E ppv CA-DELTAY

```

Pour I ppv 1 pas 1 jusqu'à DELTAY faire

début

```

Y ppv Y+Yinc
Si E ≤ 0
    alors E ppv E+CA /* mot axial */
    sinon début /* mot diagonal */
        X ppv X+Xinc
        E ppv E+CD
    fin

```

Afficher(X,Y)

fin

fin.

Fin cas

II.2.2. Elimination de l'effet d'escalier

L'idée de base de cette version est que le segment à afficher est toujours compris entre 2 points (r,q) et $(r,q+1)$.

Celui de ces 2 points le plus proche du segment sera appelé point principal (noté P) (c'est le point donné par la version "escalier"), l'autre de ces points sera appelé point secondaire (noté S).

Soit le point $P_1(r,y_1)$, le point appartenant au segment. (On se restreint à l'étude du 1er octant comme précédemment).

La répartition d'intensité entre le point principal et le point secondaire sera inversement proportionnelle à la distance de ces points au point P_1 .

N.B. (Le rapport entre ces deux distances (P,P_1) et (S,P_1) est égal au rapport entre la distance de P à la droite et la distance de S à la droite).

$$\begin{aligned}\text{Nous posons : } C_p &= \min(|y_1 - q|, |y_1 - (q+1)|) \\ C_s &= \max(|y_1 - q|, |y_1 - (q+1)|)\end{aligned}$$

$$\text{On sait que } C_p + C_s = 1$$

Si I_p est l'intensité attribuée au point p et I_s celle attribuée au point s, nous la définissons par :

$$I_p = (1 - C_p) * I_{\max} = C_s * I_{\max}$$

$$I_s = I_{\max} - I_p = C_p * I_{\max}$$

Par définition, C_p représente la distance entre le point $P_1(r,y_1)$ et le point principal $P(r,q_p)$.

$$\text{Donc : } C_p = |y_1 - q_p|$$

Ayant posé :

$$D(r,q) = DX(y_1 - q)$$

$$\text{nous aurons : } C_p = \left| \frac{D(r,q_p)}{DX} \right| \quad (DX > 0 \text{ pour le 1er octant})$$

$$\text{D'où : } I_s = \left| \frac{D(r,q_p)}{DX} \right| * I_{\max} \text{ et } I_p = I_{\max} - I_s$$

On considère à nouveau la figure 6 avec les points :

$a(r,q) - b(r+1,q+2) - c(r+1,q+1) - d(r+1,q) - e(r+1,q-1)$

Le dernier point sélectionné est le point a.

Nous avons vu que :

$$\begin{aligned} D(r+1,q) &= \underline{D(d)} = D(r,q) + DY \\ &= D(a) + DY \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(r+1,q+1) &= D(c) = D(r,q) + DY - DX \\ &= D(a) + DY - DX \\ &= D(d) - DX \end{aligned}$$

On considère à nouveau les 4 cas de figure étudiés en III.1.

Mouvement axial

- a) $q-1/2 < y_2 \leq q$: $P=d$ et $s=e$
 b) $q < y_2 \leq q+1/2$: $P=d$ et $s=c$

Mouvement diagonal

- c) $q + 1/2 < y_2 < q+1$: $P=c$ et $s=d$
 d) $q+1 < y_2 < q+3/2$: $P=c$ et $s=b$

Reprenons chacun de ces cas :

- a) $q-1/2 < y_2 \leq q$ (P: d ; s:e)

$$\boxed{D(r+1,q) < 0} \text{ et } D(r+1,q+1) < 0 \text{ avec}$$

$$|D(r+1,q)| < |D(r+1,q+1)|$$

La condition caractérisant ce cas sera : $D(r+1,q) < 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{D(d) < 0}}$

- b) $q < y_2 \leq q+1/2$ (P:d, s:c)

$$D(r+1,q) > 0 \text{ et } \boxed{D(r+1,q+1) < 0} \text{ avec } \boxed{|D(r+1,q)| \leq |D(r+1,q+1)|}$$

La condition caractérisant ce cas sera :

$$D(r+1,q+1) < 0$$

$$\{ D(r+1,q+1) + D(r+1,q) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \{ \begin{aligned} D(c) &< 0 \\ D(c) + D(d) &\leq 0 \end{aligned}$$

c) $q+1/2 < y_2 < q+1$ (P: c ; S: d)

$D(r+1,q) > 0$ et $D(r+1,q+1) < 0$ avec $D(r+1,q) > D(r+1,q+1)$

La condition caractérisant ce cas sera :

$\begin{cases} D(r+1,q+1) < 0 \\ D(r+1,q+1) + D(r+1,q) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} D(c) < 0 \\ \underline{D(c) + D(d) > 0} \end{cases}$

d) $q+1 < y_2 \leq q+3/2$ (P: c ; S: b)

$D(r+1,q) > 0$ et $D(r+1,q+1) > 0$ avec

$|D(r+1,q+1)| < |D(r+1,q)|$

La condition caractérisant ce cas sera : $D(r+1,q+1) > 0 \Leftrightarrow \underline{D(c) > 0}$

La relation : $D(c) = D(d) - DX$ implique que $\underline{D(c) + D(d) = 2*D(d) - DX}$

La détermination du couple (P,S) s'effectuera donc suivant le schéma :

```

Si D(d) < 0
  alors (P,S) ppv (d,e)
  sinon début
    Si D(d) - DX < 0 /*D(c) < 0 */
    alors début
      Si 2*D(d) - DX < 0
      alors (P,S) ppv (d,c)
      sinon (P,S) ppv (c,d)
    fin
  sinon (P,S) ppv (c,b)
  
```

On note par D la quantité D(a).

On rappelle que lorsque le mouvement effectué est axial, le nouveau point affiché est "d" et donc que la nouvelle valeur de D à considérer est D + DY.

Et lorsque le mouvement effectué est diagonal, le nouveau point affiché est "c" et donc que la nouvelle valeur de D à considérer est $D+DY-DX$ (ceci d'après les relations existant entre $D(a)$, $D(c)$ et $D(d)$).

Le point (X_D, Y_D) appartenant au segment nous aurons $D(X_D, Y_D)=0$
D'où l'initialisation de D à 0.

On notera par (X, Y) les coordonnées du point P et par (X_S, Y_S) celles du point S.

Imax est l'intensité maximale disponible.

Dans le cas du 1er octant, nous appliquerons l'algorithme suivant :

```
DX ppv XF - XD
DY ppv YF - YD
D ppv 0
X ppv XD ; Y ppv YD
Afficher(X, Y, Imax)
Pour I ppv 1 par 1 jusqu'à DX faire
début
  X ppv X+1
  D ppv D+DY
  Si  $D \leq 0$ 
    alors  $Y_S$  ppv  $Y-1$  /* d, e */
    sinon début
      Si  $D-DX < 0$ 
        alors début
          Si  $2*D - DX \leq 0$ 
            alors  $Y_S$  ppv  $Y+1$  /* d, c
            sinon début
               $Y_S$  ppv Y
              Y ppv  $Y+1$ 
              D ppv  $D-DX$ 
            fin
          fin
        fin
      fin
    fin
  fin
```

```

        sinon début                                     /* c, b */
            Y ppv Y+1
            Ys ppv Y+1
            D ppv D-DX
            fin
        fin

/* Intensité attribuée au point secondaire */
    Cp ppv ABS (D/DX)
    Is ppv ARRondi (Cp*Imax)

/* Intensité attribuée au point principal */
    Ip ppv Imax-Is

Afficher(X,Y,Ip)
Afficher(X,Ys,Is)
fin

```

L'algorithme se généralise aux autres octants de la manière suivante :

Génération d'un segment de droite - Elimination des effets d'escalier
 (ENTIER : XD,YD,XF,YF,Imax)

```

DX ppv XF-XD
DY ppv YF-YD
DELTAX ppv ABS(DX)
DELTAY ppv ABS(DY)
Si DX>0
    alors Xinc ppv+1
    sinon Xinc ppv-1
Si DY>0
    alors Yinc ppv+1
    sinon Yinc ppv-1
X ppv XD ; Y ppv YD
Afficher (X,Y,Imax)

```

37

Suivant car faire

DELTA_X >= DELTA_Y

début

D ppv 0

Pour I ppv 1 par 1 jusqu'à DELTA_X faire

début

Xppv X+Xinc

D ppv D+DELTA_Y

Si D <= 0

alors Y_S ppv Y - Yinc

sinon début

Si D-DELTA_X<0

alors début

Si 2*D - DELTA_X <= 0

alors Y_S ppv Y+Yinc

sinon début

Y_S ppv Y

Y ppv Y+Yinc

D ppv D-DELTA_X

fin

fin

sinon début

Y ppv Y+Yinc

Y_S ppv Y+Yinc

D ppv D-DELTA_X

fin

fin

Cp ppv ABS(D/DELTA_X)

Is ppv ARRONDI (Cp*Imax)

Ip ppv Imax-Is

Afficher(X,Y,Ip)

Afficher(X,Y_S,Is)

fin

fin

DELTAY > DELTAX

début

D ppv 0

Pour I ppv 1 par 1 jusqu'à DELTAY faire

début

Y ppv Y+Yinc

D ppv D+DELTAX

Si D ≤ 0

alors Xs ppv X - Xinc

sinon début

Si D - DELTAY < 0

alors début

Si 2*D - DELTAY ≤ 0

alors Xs ppv X+Xinc

sinon début

Xs ppv X

X ppv X+Xinc

D ppv D-DELTAY

fin

fin

sinon début

X ppv X+Xinc

Xs ppv X+Xinc

D ppv D-DELTAY

fin

fin

Cp ppv ABS(D/DELTAY)

Is ppv ARRONDI(Cp*Imax)

Ip ppv Imax-Is

Afficher(X,Y,Ip)

Afficher(Xs,Y,Is)

fin

fin

Fincar

II.3. Autres méthodes de génération de segments de droite

II.3.1. Méthode de Lucas |Luc 77 b|

Cette méthode se prête bien à l'application du procédé d'élimination des effets d'escalier donnés par Bresenham.

Il est en effet assez facile de "récupérer" la quantité $Y_1 - q_p$ (et donc de calculer c_p), ainsi que de déterminer la position du point s par rapport au point p .

L'application du procédé de Bresenham modifie le corps de boucle générant le segment de la manière suivante : (les initialisations sont inchangées)

```
Pour I ppv 1 par 1 jusqu'à DELTAX faire
début
    X ppv X+Xinc
    CUMUL ppv CUMUL + DELTAY
    Si CUMUL ≥ DELTAX
        alors début
            CUMUL ppv CUMUL - DELTAX
            Y ppv Y+Yinc
        fin
    Si CUMUL ≤ 0.5
        DELTAX
        alors Ys ppv Y - Yinc
        sinon Ys ppv Y + Yinc
    Cp ppv ABS(CUMUL - 0.5)
        DELTAX
    Is ppv ARRONDI(Cp*Imax)
    Ip ppv Imax - Is
    Afficher(X,Y,Ip)
    Afficher(X,Ys,Is)
fin
```

II.3.2. Méthode de Earnsham |Ear 77|

Cette méthode se prête bien à l'application du procédé de Bresenham.

Dans ce cas, il est également assez facile de "récupérer" la quantité $y_1 - q_p$, ainsi que de déterminer la position du point s par rapport au point P .

L'application du procédé de Bresenham modifie le corps de boucle de la manière suivante : (les initialisations restent inchangées).

Pour I ppv 1 par 1 jusqu'à DELTAX faire

début

X ppv X + Xinc

Si $I \cdot DV \leq DU \cdot CMD + DELTAX$

alors /* mot axial */

sinon /* mot diagonal */

Y ppv Y+Yinc

CMD ppv CMD +1

Si $I \cdot \frac{DELTAY}{DELTAX} \leq CMD$

alors Ys ppv Y-Yinc

sinon Ys ppv Y+Yinc

Cp ppv $ABS(I \cdot \frac{DELTAY}{DELTAX} - CMD)$

Is ppv ARRONDI (Cp*Imax)

Ip ppv Imax - Is

Afficher (X,Y,Ip)

Afficher (X,Ys,Is)

fin

II.4. Conclusion

Nous constatons que le procédé d'élimination des effets d'escalier de Bresenham, est facilement applicable aux algorithmes de génération de segments lorsque ceux-ci sont basés sur une idée simple.

Il a l'avantage de conserver la structure initiale de l'algorithme et de calculer les intensités de luminosité à partir de variables directement disponibles dans l'algorithme auquel on applique ce procédé.

Malgré sa simplicité, aussi bien dans sa mise en oeuvre que dans son idée de base, ce procédé donne de bons résultats (cf. Figure 5).

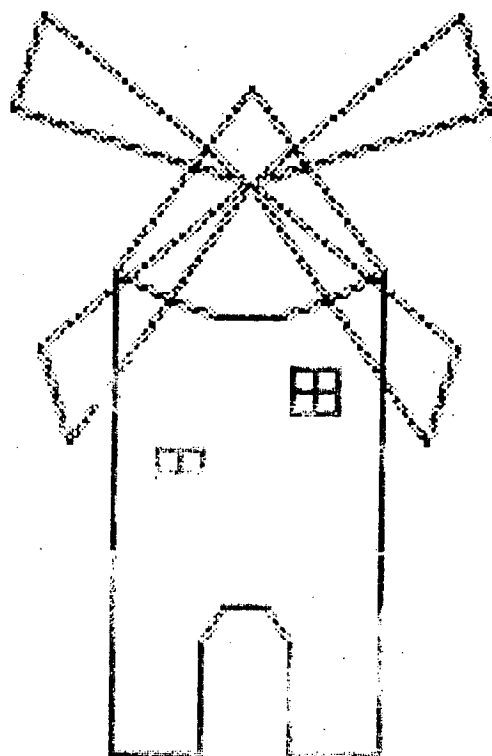
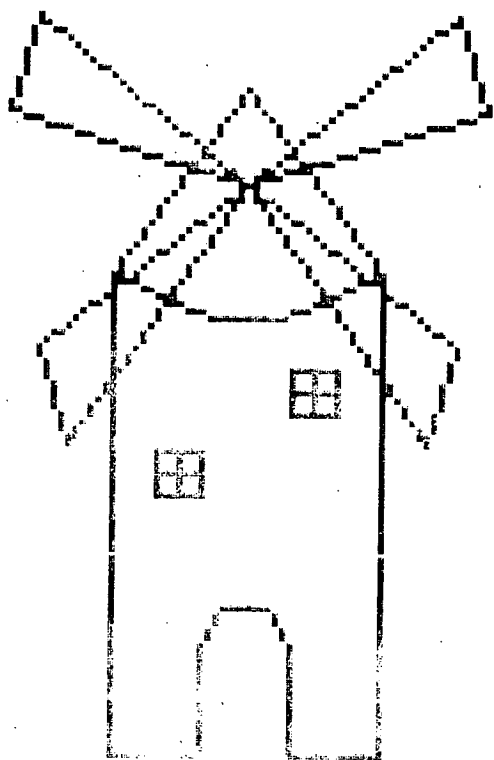


Figure 5 : Génération de segments de droite par la méthode de Bresenham
 a) version "escalier"
 b) version "améliorée" - élimination des effets d'escalier

III. TRACÉ DE CONIQUES

III.0. Introduction

Dans [Her 82] nous avons étudié en détail la génération des coniques par généralisation de la méthode présentée dans [Bre 65] pour la génération des segments de droite.

Et l'application du procédé d'élimination des effets d'escalier de Bresenham, à ces algorithmes de génération des coniques est donnée de manière détaillée dans [Roy 82].

Nous rappelons que pour tracer une courbe, nous disposons de 8 mouvements : 4 axiaux et 4 diagonaux (cf. paragraphe II.0 Figure 2).

Nous donnons ci-dessous la relation entre le nombre des mouvements envisageables à partir d'un point donné et le nombre de couples (P,S) possibles correspondant : (P étant le point principal et S le point secondaire ie les 2 points les plus proches du trait théorique).

2 mots envisageables	=> 4 couples (P,S) possibles
3	=> 8
4	=> 10
5	=> 14
6	=> 16
7	=> 20
8	=> 22

Dans un premier temps, pour éviter des discussions trop complexes, nous avons pris la décision d'effectuer une partition de la courbe étudiée qui soit telle que, chaque partie ne présente que 2 éventualités de mouvements : un mouvement axial et un mouvement diagonal.

Nous procédons donc octant par octant, et à chaque mouvement effectué correspondront 4 couples (P,S) possibles.

Cette partition se fera par l'étude des pentes des tangentes à la courbe.

Lorsque la pente $\in]-1,1]$ (ie cas des 1er, 4ème, 5ème et 8ème octants) nous nous déplacerons sur l'axe des abscisses.

Lorsque la pente $\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ (ie cas du 2ème, 3ème, 6ème et 7ème octants) nous nous déplacerons sur l'axe des ordonnées.

Nous remarquerons que les 1er et 2ème octants (de même les 3ème et 4ème, 5ème et 6ème, 7ème et 8ème) admettent le même mouvement diagonal.

Nous avons donc essayé de travailler sur une partition de la courbe étudiée correspondant aux quadrants ie telle que chaque partie présente 3 éventualités de mouvement : 2 mouvements axiaux et 1 mouvement diagonal.

C'est sur cette partition qu'est basé l'algorithme de Bresenham [Bre 77] générant les cercles.

Mais si cette méthode est applicable lorsque l'on sélectionne le seul point P, elle est inapplicable pour sélectionner les couples (P,S).

En effet nous verrons par la suite qu'il n'est pas possible de départager les candidats correspondant à un mouvement diagonal.

De plus, cette partition en quadrants implique des tests supplémentaires au niveau de la détermination du mouvement à effectuer pour passer d'un point au suivant.

III.1. Cercles - Ellipses admettant des axes de symétrie parallèles aux axes du repère

III.1.1. Génération suivant le principe de Bresenham, sur 2 mouvements élémentaires

Nous considérons une ellipse centrée en C(Xc,Yc) et d'équation :

$$\frac{(x-Xc)^2}{a^2} + \frac{(y-Yc)^2}{b^2} = 1$$

avec a et b > 0 ; a, b, Xc et Yc entiers.

Nous allons nous restreindre à l'étude du quadrant d'origine (Xc, Yc+b) et d'extrémité (Xc+a, Yc).

Nous aurons donc $x \in [Xc, Xc+a]$ et $y \in [Yc, Yc+b]$.

(L'étude complète de la génération de cette courbe a été effectuée dans [HeR 82]).

Le quadrant considéré peut se diviser en deux parties :

A) Les pentes des tangentes à la courbe appartiennent à l'intervalle $[-1,0]$.

Dans ce cas

$$x \in \left[Xc, Xc + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]$$

B) Les pentes des tangentes à la courbe appartiennent à l'intervalle $[-\infty, -1[$.

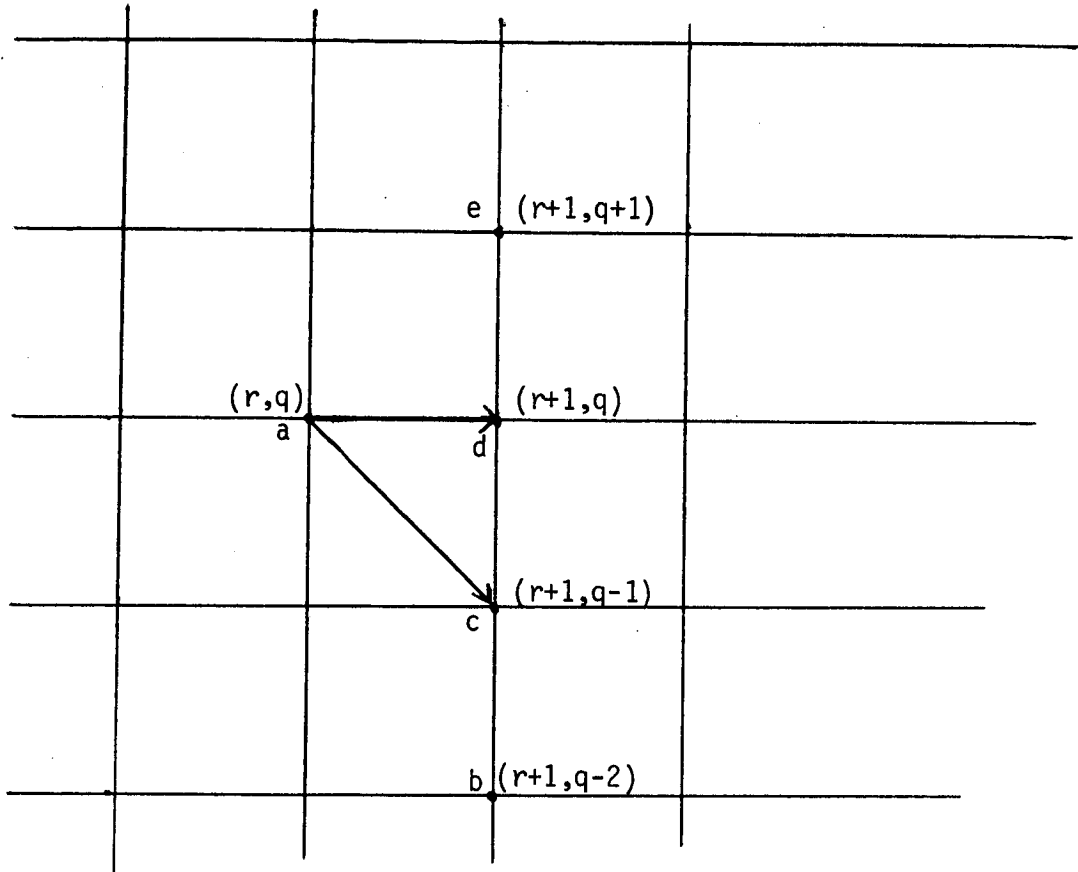
Dans ce cas

$$x \in \left[Xc + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, Xc+a \right]$$

Dans le cas A) nous nous déplacerons sur l'axe des abscisses et dans la cas B) sur l'axe des ordonnées.

$$A) x \in \left[X_c, X_c + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]$$

On suppose être arrivé au point de coordonnée (r,q)



Soit $P_1(r,y_1)$ le point de l'ellipse à afficher. Le point (r,q) étant le plus proche de la courbe, on a :

$$q+1/2 > y_1 \geq q-1/2$$

$$\text{On a : } a^2(y_1 - y_c)^2 = a^2b^2 - b^2(r - x_c)^2$$

D'où :

$$\begin{aligned} & a^2(y_1 - y_c)^2 - a^2(q - y_c)^2 \\ &= a^2b^2 - b^2(r - x_c)^2 - a^2(q - y_c)^2 \end{aligned}$$

Ayant y_1 et $q \geq y_c$ par hypothèse, on en déduit que :

$$(y_1 - y_c)^2 - (q - y_c)^2 > 0 \Leftrightarrow y_1 - q > 0$$

et

$$(y_1 - y_c)^2 - (q - y_c)^2 < 0 \Leftrightarrow y_1 - q < 0$$

Et ayant $a^2 > 0$, la quantité $a^2[(y_1 - Y_c)^2 - (q - Y_c)^2]$ est de même signe que $(y_1 - Y_c)^2 - (q - Y_c)^2$.

Nous posons alors :

$$D(r, q) = a^2 b^2 - b^2 (r - X_c)^2 - a^2 (q - Y_c)^2$$

Cette quantité est un nombre entier de même signe que la quantité $y_1 - q$.

Nous posons également :

$$T(r) = \frac{d D(r, q)}{dr} = -2b^2 (r - X_c)$$

$$S(q) = \frac{d D(r, q)}{dq} = -2a^2 (q - Y_c)$$

De la même manière que pour le cas des vecteurs, nous avons :

$$C_p = \min(|y_1 - q|, |y_1 - (q-1)|)$$

$$C_s = \max(|y_1 - q|, |y_1 - (q-1)|)$$

avec $I_s = C_p * I_{\max}$ et $I_p = I_{\max} - I_s = C_s * I_{\max}$ (I_p étant l'intensité lumineuse attribuée au point principal P et I_s celle attribuée au point secondaire S).

Par définition C_p représente la distance entre le point $P_1(r, y_1)$ appartenant au trait théorique et le point principal P(r, q_p). Donc

$$C_p = |y_1 - q_p|.$$

Mais nous avons posé :

$$\begin{aligned} D(r, q) &= a^2 b^2 - b^2 (r - X_c)^2 - a^2 (q - Y_c)^2 \\ &= a^2 [(y_1 - Y_c)^2 - (q - Y_c)^2] \end{aligned}$$

Nous devons donc essayer d'évaluer $|y_1 - q_p|$ en fonction de $D(r, q_p)$:

$$D(r, q_p) = a^2 * (y_1 - q_p) * (y_1 + q_p - 2 * Y_c)$$

Ayant $|y_1 - q_p| \leq 1/2$, nous pouvons effectuer l'approximation suivante :

$$\underline{y_1 + q_p \approx 2q_p}$$

D'où :

$$D(r, qp) = a^2 * (y_1 - qp) * 2 * (qp - yc)$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} y_1 - qp &= \left| \frac{D(r, qp)}{2 * a^2 * (qp - yc)} \right| \\ &= \left| \frac{D(r, qp)}{S(qp)} \right| \end{aligned}$$

Nous aurons donc :

$$I_s = \left| \frac{D(r, qp)}{S(qp)} \right| * I_{\max} \text{ et } I_p = I_{\max} - I_s$$

Nous considérons les points :

$$a(r, q) - b(r+1, q-2) - c(r+1, q-1) - d(r+1, q) - e(r+1, q+1)$$

Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} D(r+1, q) &= D(d) \\ &= D(r, q) + T(r) - b^2 \\ &= \underline{D(a) + T(r) - b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(r+1, q-1) &= D(c) \\ &= D(r, q) + T(r) - S(q) - b^2 - a^2 \\ &= \underline{D(d) - S(q) - a^2} \end{aligned}$$

Nous suivons la même démarche que dans le cas de la génération de **vecteurs**. (cf. II.2.)

Nous obtenons alors de manière similaire des conditions sur $D(r+1, q)$ et $D(r+1, q-1)$ (ie $D(d)$ et $D(c)$) qui déterminent le mouvement à effectuer.

Cette détermination s'effectuera suivant le schéma suivant :

Si $D(d) \geq 0$ alors P ppv d ; S ppv e sinon Si $D(d) - S(q) - a^2 > 0$ alors Si $2 * D(d) - S(q) - a^2 \geq 0$ alors P ppv d ; S ppv c sinon $2 * D(d) - S(q) - a^2 < 0$ */ sinon $D(d) - S(q) - a^2 \leq 0$ */ P ppv c ; S ppv d P ppv c ; S ppv b
--

Dans l'algorithme qui utilisera cette méthode de détermination du couple (P,S), les mises à jour de D, T et S seront effectuées en fonction du point principal P choisi (ie suivant que celui-ci sera le point d ou le point c) et utiliseront les relations récurrentes suivantes :

$$T(r+1) = T(r) - 2b^2$$

$$S(q-1) = S(q) + 2a^2$$

D'où, lorsque le point principal P choisi sera le point c(r+1,q-1) nous mettons à jour les variables T et S en utilisant la relation ci-dessus et lorsque le point principal P choisi sera le point d(r+1,q) nous mettons à jour la seule variable T.

$$B) - x \in \left[X_c + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, X_c + a \right]$$

Cette partie de la courbe passe toujours entre 2 points (r,q) et (r+1,q).

De la même façon qu'en A) on considère le point principal P(rp,q) et le point secondaire S.

Soit $P_1(x_1,q)$ le point appartenant à l'ellipse. C_p représente la distance entre P_1 et P.

$$\text{On a donc : } C_p = |x_1 - r_p|$$

Mais on a posé :

$$\begin{aligned} D(r,q) &= a^2b^2 - b^2(r-x_c)^2 - a^2(q-y_c)^2 \\ &= b^2 |(x_1-x_c)^2 - (r-x_c)^2| \end{aligned}$$

On doit donc essayer d'évaluer $|x_1 - r_p|$ en fonction de $D(rp,q)$:

$$D(rp,q) = b^2(x_1 - r_p)(x_1 + r_p - 2x_c)$$

Ayant $|x_1 - r_p| \leq 1/2$ on effectue l'approximation suivante :

$$\underline{x_1 + r_p \simeq 2r_p}$$

D'où :

$$D(rp,q) = b^2(x_1 - r_p) \cdot 2(r_p - x_c)$$

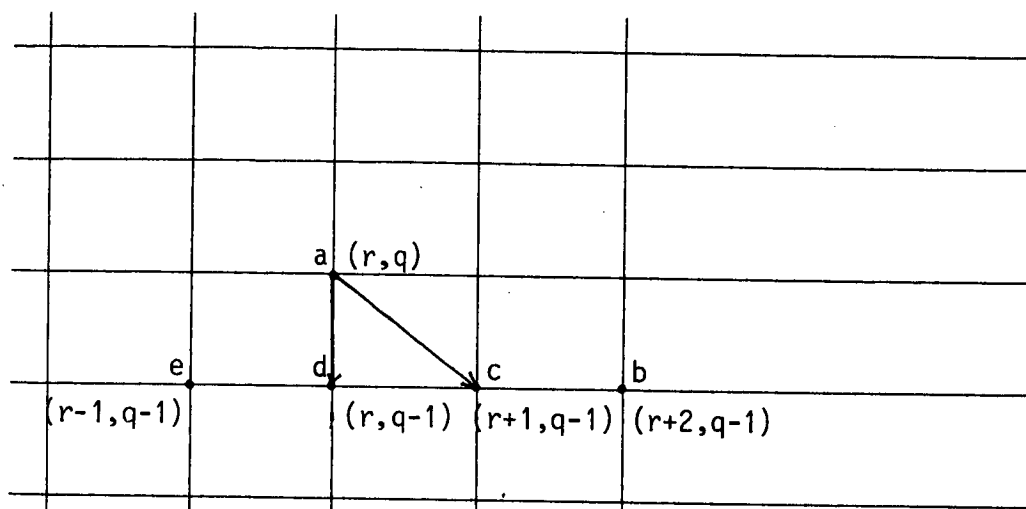
$$\Rightarrow |x_1 - r_p| = \frac{D(rp,q)}{2b^2(r_p - x_c)} = \frac{D(rp,q)}{T(rp)}$$

Donc, nous avons :

$$I_s = c_p \cdot I_{\max} = \left| \frac{D(r_p, q)}{T(r_p)} \right| \cdot I_{\max}$$

$$I_p = I_{\max} - I_s.$$

On suppose être arrivé au point de coordonnées (r, q) .



Nous considérons les points :

$$\begin{aligned} a(r, q) - b(r+2, q-1) - c(r+1, q-1) \\ d(r, q-1) - e(r-1, q-1) \end{aligned}$$

Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} D(r, q-1) &= D(d) \\ &= D(r, q) - S(q) - a^2 \\ &= \underline{D(a) - S(q) - a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(r+1, q-1) &= D(c) \\ &= D(r, q) + T(r) - S(q) - b^2 - a^2 \\ &= \underline{D(d) + T(r) - b^2} \end{aligned}$$

La détermination du mouvement à effectuer suit un schéma analogue à celui obtenu en A) :

Si $D(d) \leq 0$

alors P ppv d ; S ppv e

sinon Si $D(d) + T(r) - b^2 < 0$

alors Si $2*D(d) + T(r) - b^2 \leq 0$

alors Pppv d ; S ppv c

sinon /* $2*D(d) + T(r) - b^2$

Pppv c ; S ppv d

sinon /* $D(d) + T(r) - b^2 \leq 0$ */

P ppv c ; S ppv b

Les mises à jour de D, T et S seront effectuées en fonction du point principal P choisi (ie suivant que celui-ci sera c ou d).

Initialisation

A - Cas des tangentes de pente $E|0,1|$

Le point de départ est donné par :

$$XD = XC$$

$$\begin{cases} YD = YX+b \end{cases}$$

Ce point appartient à l'ellipse à tracer, donc

$$D(XD, YD) = 0.$$

$$\text{Et on a : } T(XD) = -2b^2(XD-XC) = 0$$

$$S(YD) = -2a^2(YD-YC) = -2a^2*b$$

On aura donc les initialisations :

$$T \text{ ppv } 0$$

$$S \text{ ppv } -2*a^2*b$$

$$D \text{ ppv } 0$$

B - Cas des tangentes de pente E $|1, +\infty|$

On a vu dans la 1ère version que :

$$DY(r,q) = DX(r,q)$$

$$TY(r) = TX(r)$$

$$Sy(q) = Sx(q)$$

Donc, les valeurs de T, S et D seront inchangées et en conséquence il n'y aura pas d'initialisation.

On appliquera donc l'algorithme suivant

Nous donnons directement l'algorithme traçant l'ellipse entière.

A2 ppv A*A

B2 ppv B*B

DS ppv 2*A2

DT ppv 2*B2

DXT ppv ARRondi (A2/SQR(A2+B2))

Xinc ppv+1 /* 1er quadrant */

Yinc ppv-1

TRACER-QUADRANT

Yinc ppv+1 /* 2ème quadrant */

TRACER-QUADRANT

Xinc ppv-1 /* 3ème quadrant */

TRACER-QUADRANT

Yinc ppv-1 /* 4ème quadrant */

TRACER-QUADRANT

Procédure TRACER-QUADRANT

T ppv 0

S ppv -2*A2*B

D ppv 0

X ppv XC

Y ppv Y-Yinc*B

Afficher(X,Y)

61

Pour I ppv 1 par 1 jusqu'à DXT faire
début

Xppv X+Xinc

D ppv D + T - B2

Si D > = 0

alors début /* P: d ; S: e */

YS ppv Y - Yinc

fin

sinon début

Si D - S - A2 > 0

alors début

Si 2*D - S - A2 > = 0

alors début /* P: d ; S: c */

YS ppv Y+Yinc

fin

sinon début /* P: c ; S: d */

YS ppv Y

Y ppv Y+Yinc

D ppv D - S - A2

S ppv S+DS

fin

fin

sinon début /* P: c ; S: b */

Y ppv Y+Yinc

YS ppv Y+Yinc

D ppv D - S - A2

S ppv S+DS

fin

fin

T ppv T - DT

Cp ppv ABS(D/S)

Is ppv Cp*Imax

Ip ppv Imax-Is

Afficher(X,Y,Ip)

fin

DYT ppv ABS(Y-YC)

Pour I ppv 1 par 1 jusqu'à DYT faire
début

Y ppv Y+Yinc

D ppv D - S - A2

Si D ≤ 0

alors début /* P:d ; S:e */

XS ppv X-XINC

fin

sinon début

Si D + T - B2 < 0

alors début

Si 2*D+T-B2 ≤ 0

alors début /* P:d ; S:c */

XS ppv X+XINC

fin

sinon début /* P:c ; S:d */

XS ppv X

X ppv X+XINC

D ppv T - B2 + D

T ppv T - DT

fin

fin

sinon début /* P:c ; S:b */

X ppv X+XINC

XS ppv X+XINC

D ppv D+T - B2

T ppv T - DT

fin

fin

S ppv S + DS

Cp ppv ABS(D/T)

Is ppv Cp*Imax

Ip ppv Imax-Is

Afficher (X,Y,Ip)

Afficher (XS,Y,Is)

fin

Fin TRACER-QUADRANT

III.1.2. Impossibilité d'appliquer cette méthode sur 3 mouvements élémentaires

Nous nous restreignons à l'étude du même quadrant que dans le paragraphe précédent.

Nous avons exposé dans [HeR 82] la génération en version escalier, d'un cercle ou d'une ellipse "simple" lorsque 3 mouvements sont envisageables à partir d'un point donné.

Nous rappelons que dans ce cas nous obtenions la même définition de la quantité $D(r,q)$ que celle obtenue en IV.1.1., à savoir :

$$\underline{D(r,q) = a^2b^2 - a^2(r-X_c)^2 - b^2(q-Y_c)^2}$$

En conséquence, le calcul du coefficient c_p , coefficient qui permet de déterminer les intensités lumineuses attribuées aux différents points sélectionnés, s'effectue de manière analogue à celle exposée en III.1.1.

Nous aurons donc :

dans le cas où la pente de la tangente à la courbe $E|-1,0|$

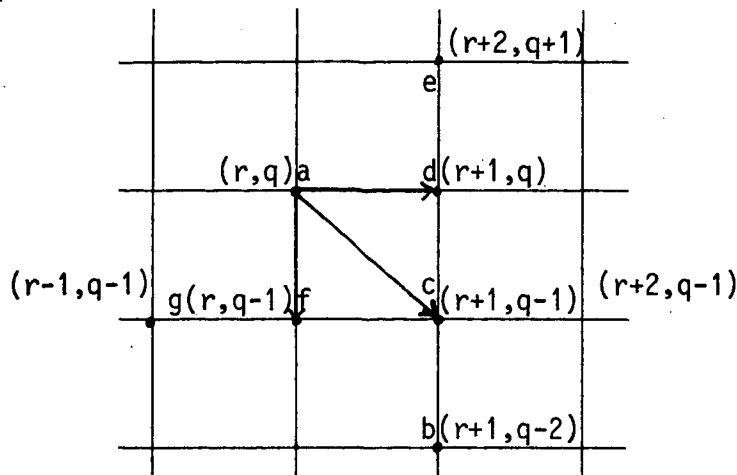
$$C_p = \left| \frac{D(r,qp)}{S(qp)} \right|$$

dans le cas où la pente de la tangente à la courbe $E|-\infty,-1|$

$$C_p = \left| \frac{D(rp,q)}{T(rp)} \right|$$

Le problème ne réside donc pas dans le calcul du coefficient C_p .

Rappelons quelques résultats obtenus dans . Nous supposons être arrivé au point de coordonnées (r,q) .



Nous considérons les points :

$$a(r, q) - b(r+1, q-2) - c(r+1, q-1)$$

$$d(r+1, q) - e(r+1, q+1)$$

$$h(r+2, q-1) - f(r, q-1) - g(r-1, q-1)$$

Nous avons les 7 relations suivantes :

$$D(r+1, q) = D(d)$$

$$= D(r, q) + T(r) - b^2$$

$$= D(a) + T(r) - b^2$$

$$D(r+1, q-1) = D(c)$$

$$= D(r, q) + T(r) - S(q) - b^2 - a^2$$

$$= D(a) + T(r) - S(q) - b^2 - a^2$$

$$D(r, q-1) = D(f)$$

$$= D(r, q) - S(q) - a^2$$

$$= D(a) - S(q) - a^2$$

$$D(c) = D(d) - S(q) - a^2$$

$$D(c) = D(f) + T(r) - b^2$$

$$D(d) + D(c) = 2 * D(d) - S(q) - a^2$$

$$D(f) + D(c) = 2 * D(f) + T(r) - b^2$$

Le problème se situe au niveau suivant :

dans le cas du mouvement diagonal ie lorsque le nouveau point principal P déterminé est le point c, il existe 4 possibilités de choix pour le couple (P,S) correspondant qui sont : (e,d), (e,h), (c,b) et (c,f).

Il nous faut donc "départager" ces cas :

Or, nous avons :

dans le cas 1): (P=c ; S=d): $x_2 = r+1$ et $q-1/2 > y_2 \geq q-1$

dans le cas 2): (P=c ; S=h): $y_2 = q-1$ et $r+1 < x_2 \leq r+3/2$

et sur ces 2 cas nous obtenons les mêmes conditions, à savoir :

$$\begin{aligned} & D(r+1, q) < 0, D(r+1, q-1) \geq 0, D(r, q-1) > 0 \\ \text{avec} \quad & |D(r, q-1)| \geq |D(r+1, q)| > |D(r+1, q-1)| \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} & D(r+1, q-1) \geq 0 \text{ et } D(r+1, q) < 0 \\ & \text{et } D(r+1, q) + D(r+1, q-1) < 0 \end{aligned}$$

$$\text{ie } \underline{\underline{D(c) \geq 0 \text{ et } D(d) < 0 \text{ et } D(c) + D(d) < 0}}$$

Pour distinguer ces deux cas, nous devons faire intervenir une condition supplémentaire.

Cette condition doit traduire le résultat de la comparaison des 2 distances suivantes :

- distance du point h au point P2
- distance du point d au point P2.

Mais dans le cas 1) $D(h)$ ne représente pas la distance de h à P2.

En effet, dans ce cas $D(r, q)$ représente la quantité :

$$a^2(y_2 - q)(y_2 + q - 2 \cdot Y_c)$$

et on a $x_h \neq x_2$

De même, dans le cas 2) $D(d)$ ne représente pas la distance de d à P2.

En effet, dans ce cas $D(r, q)$ représente la quantité :

$$b^2(x_2 - r)(x_2 + 2 - 2 \cdot X_c)$$

et on a $y_d \neq y_2$

Et bien que l'on puisse exprimer les distances cherchées en fonction de $D^2(r,q)$, $T^2(r)$ et $S^2(q)$, on n'obtient aucune condition capable de départager efficacement les cas 1) et 2).

On rencontre les mêmes difficultés pour départager les cas des couples (c,f) et (c,b).

En conséquence, on ne peut adapter cette méthode pour traiter les effets "d'escalier".

III.1.3. Conclusion

On constate que le procédé de Bresenham s'applique assez facilement à des courbes d'équations plus complexes que celle d'une droite.

De même que dans le cas du tracé des segments, l'application de la méthode de Bresenham ne nécessite pas l'introduction de variables supplémentaires pour le calcul de C_p . Le coefficient C_p est déterminé à partir de variables apparaissant déjà dans la version "escalier" de l'algorithme.

Donc la mise en oeuvre de cette méthode s'effectue de manière fort simple.

Cette méthode d'élimination des effets d'escalier est donc intéressante par sa simplicité de mise-en-oeuvre et par les résultats qu'elle donne. La figure 8 donne des exemples de résultats obtenus.

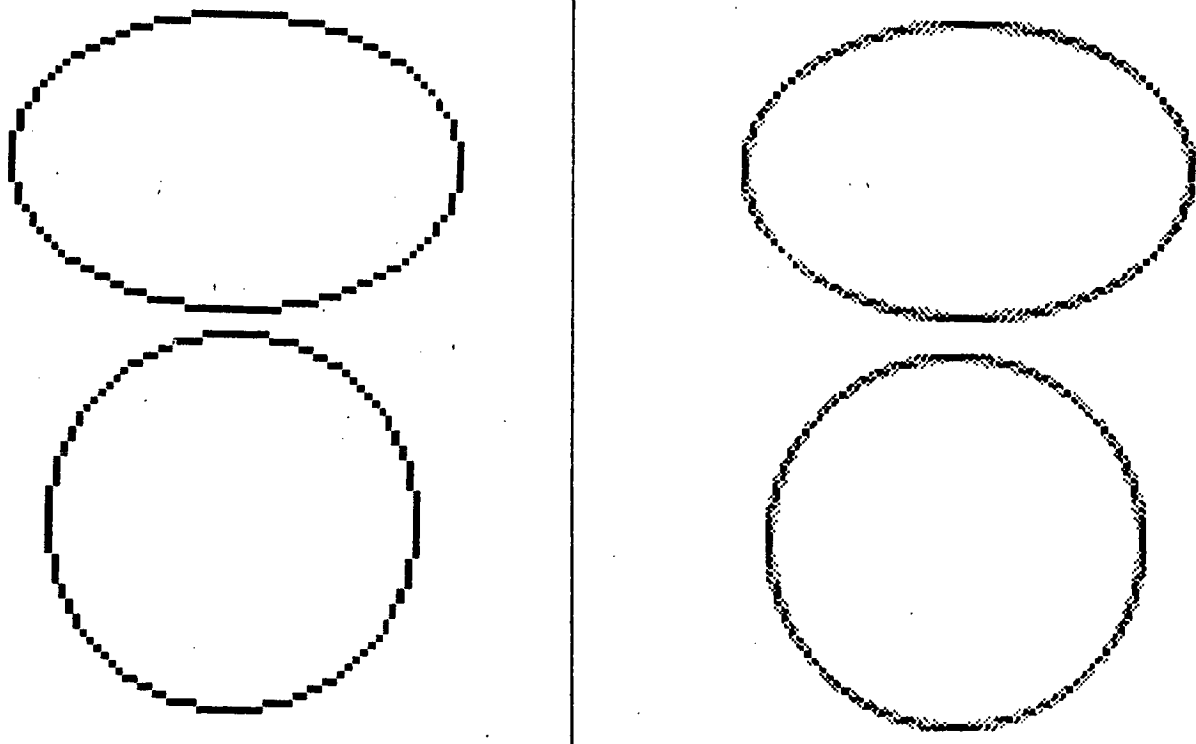


Figure 8 : Résultats obtenus par application du procédé de Bresenham.

Le procédé de Bresenham donnant de bons résultats et s'appliquant facilement dans le cas de la génération des cercles et ellipses "simples", nous allons essayer de l'appliquer aux ellipses subissant une rotation.

III.2. Généralisation au tracé des ellipses subissant une rotation

III.2.1. Introduction

L'étude de la courbe et de sa génération suivant le principe de Bresenham a été faite dans [HeR 82] et [Roy 82].

Nous rappelons que lorsque les axes de l'ellipse sont parallèles aux axes du repère, l'équation de la courbe est donnée par :

$$b^2(x_0 - x_c)^2 + a^2(y_0 - y_c)^2 = a^2b^2 \quad (1)$$

Si nous appliquons une rotation d'angle $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont la tangente est donnée par :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m}{p} \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \mathbb{Z}^*.$$

Nous obtenons alors l'équation (2) :

$$\alpha(x-x_c)^2 + \beta(y-y_c)^2 + \gamma(x-x_c)(y-y_c) = k$$

avec : $\alpha = p^2b^2 + a^2m^2$

$$\beta = b^2m^2 + a^2p^2$$

$$\gamma = 2(b^2 - a^2) pm$$

$$k = a^2b^2(p^2 + m^2)$$

$$\begin{pmatrix} x - x_c \\ y - y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_0 - x_c) \cos \theta - (y_0 - y_c) \sin \theta \\ (x_0 - x_c) \sin \theta + (y_0 - y_c) \cos \theta \end{pmatrix}$$

La partition de la courbe s'effectuera de la manière suivante :

	point de départ	point d'arrivée	changement de mouvement	incrémenta-tion
1er quadrant	$X = X_c - D_{x0}$ $Y = Y_c + D_{y0}$	$X = X_c + D_{x\infty}$ $Y = Y_c - D_{y\infty}$	$X = X_c + D_{xt2}$	$X_{inc} = +1$ $Y_{inc} = -1$
2è quadrant	$X = X_c + D_{x0}$ $Y = Y_c - D_{y0}$	$X = X_c + D_{x\infty}$ $Y = Y_c - D_{y\infty}$	$X = X_c + D_{xt1}$	$X_{inc} = +1$ $Y_{inc} = +1$
3è quadrant	$X = X_c + D_{x0}$ $Y = Y_c - D_{y0}$	$X = X_c - D_{x\infty}$ $Y = Y_c + D_{y\infty}$	$X = X_c - D_{xt2}$	$X_{inc} = -1$ $Y_{inc} = +1$
4è quadrant	$X = X_c - D_{x0}$ $Y = Y_c + D_{y0}$	$X = X_c - D_{x\infty}$ $Y = Y_c + D_{y\infty}$	$X = X_c - D_{xt1}$	$X_{inc} = -1$ $Y_{inc} = -1$

N.B. Les valeurs D_{x0} , D_{y0} , D_x , D_y , D_{xt1} et D_{xt2} sont des valeurs entières (qui sont des valeurs arrondies d'expression calculées lors de l'étude de la courbe effectuée dans [HeR 82] et [Roy 82].

Nous donnons un exemple de courbe où :

$$a=\sqrt{5} \quad b=\sqrt{20} \quad m=3 \quad p=5 \quad X_c=Y_c=0$$

III.2.2. Elimination des effets d'escalier - Procédé de Bresenham

Nous nous restreindrons à l'étude du 1er quadrant, l'étude complète de la génération de cette courbe ayant été donnée dans [Roy 82].

A) Mouvement en X ie $x \in [X_c - D_{x0}, X_c + D_{xt2}]$

On suppose être arrivé au point de coordonnées (r,q) .

Soit $P_1(r,y_1)$ le point de l'ellipse à afficher. Le point (r,q) étant le plus proche de la courbe, on a :

$$q + 1/2 > y_1 \geq q - 1/2$$

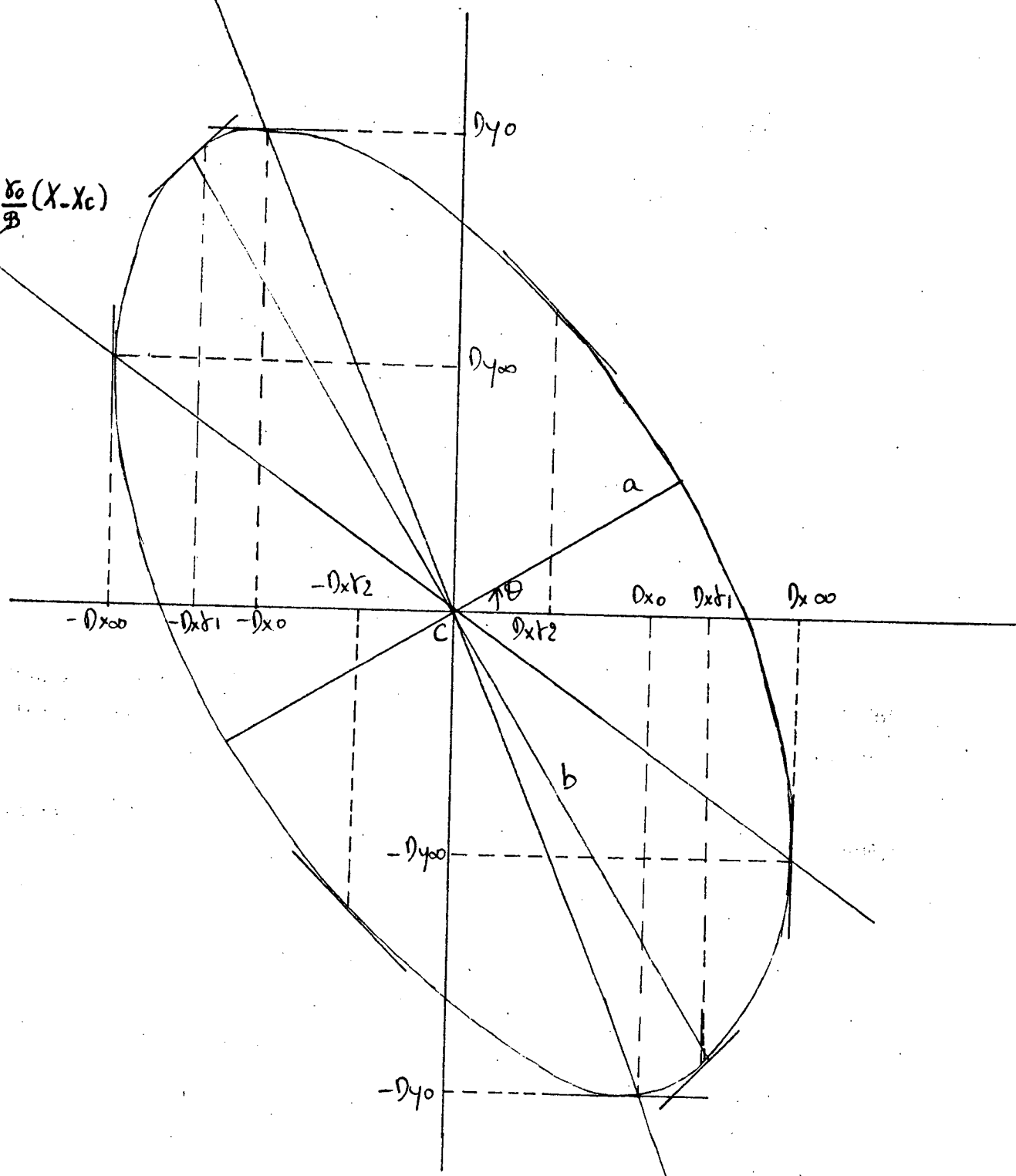
$$\text{On a : } \beta(y_1 - Y_c)^2 + \gamma(r - X_c)(y_1 - Y_c) = k - \alpha(r - X_c)^2$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \beta(y_1 - Y_c)^2 + \gamma(r - X_c)(y_1 - Y_c) - \beta(q - Y_c)^2 - \gamma(r - X_c)(q - Y_c) \\ &= k - \alpha(r - X_c)^2 - \beta(q - Y_c)^2 - \gamma(r - X_c)(q - Y_c) \end{aligned}$$

$$y - y_c = -\frac{\alpha}{\gamma_0} (x - x_c)$$

$$y - y_c = \frac{\gamma_0}{\beta} (x - x_c)$$



Nous posons :

$$D(r,q) = k - \alpha(r-X_c)^2 - \beta(q-Y_c)^2 - \gamma(r-X_c)(q-Y_c)$$

Vérifions que $D(r,q)$ conserve le signe de $y_1 - q$

Nous avons :

$$\begin{aligned} D(r,q) &= \beta(y_1 - q)(y_1 + q - 2Y_c) + \gamma(r - X_c)(y_1 - q) \\ &= (y_1 - q)(\beta(y_1 + q - 2Y_c) + \gamma(r - X_c)) \end{aligned}$$

Ayant $|q - y_1| \leq 1/2$, on peut écrire :

$$\beta(y_1 + q - 2Y_c) + \gamma(r - X_c) \simeq 2\beta(y_1 - Y_c) + \gamma(r - X_c)$$

Et la relation :

$$\begin{aligned} 2\beta(y_1 - Y_c) + \gamma(r - X_c) &> 0 \\ \Leftrightarrow y_1 - Y_c &> -\frac{\gamma_0}{\beta}(r - X_c) \end{aligned}$$

est vérifiée dans le cas du 1er quadrant.

(L'égalité $y_1 - Y_c = -\frac{\gamma_0}{\beta}(r - X_c)$ correspond aux points où la pente de la tangente à la courbe est infinie ie aux points marquant le passage du 1er au 2ème quadrant et le passage du 3ème au 4ème quadrant).

Nous pouvons donc dire que $D(r,q)$ et la quantité $y_1 - q$ admettant le même signe $D(r,q)$ étant un nombre entier.

Nous posons :

$$T(r,q) = \frac{d D(r,q)}{dr} = \underline{-2 \alpha(r - X_c) - \gamma(q - Y_c)}$$

$$S(r,q) = \frac{d D(r,q)}{dq} = \underline{-2 \beta(q - Y_c) - \gamma(r - X_c)}$$

Nous avons les relations récurrentes suivantes :

$$T(r+1,q) = T(r,q) - 2\alpha$$

$$T(r+1,q-1) = T(r,q) - 2\alpha + \gamma$$

$$S(r+1,q) = S(r,q) - \gamma$$

$$S(r+1,q-1) = S(r,q) + 2\beta - \gamma$$

Déterminons les intensités I_p et I_s attribuées aux points P et S.

Nous avons :

$$C_p = \min(|y_1 - q|, |y_1 - (q-1)|)$$

$$C_s = \max(|y_1 - q|, |y_1 - (q-1)|)$$

$$I_s = C_p \cdot I_{\max}$$

$$I_p = I_{\max} - I_s = C_s \cdot I_{\max}$$

Par définition, C_p représente la distance entre le point $P(r, y_1)$ et le point $P(r, q)$, d'où : $C_p = |y_1 - q|$

Mais nous avons posé :

$$\begin{aligned} D(r, q) &= k - \alpha(r - X_c)^2 - \beta(q - Y_c)^2 - (r - X_c)(q - X_c) \\ &= (y_1 - q) * (\beta(y_1 + q - 2Y_c) + \gamma(r - X_c)) \end{aligned}$$

Nous devons donc essayer d'évaluer $|y_1 - q|$ en fonction de $D(r, q)$:

Ayant $|q - y_1| \leq 1/2$, on peut écrire :

$$\beta(y_1 + q - 2Y_c) + \gamma(r - X_c) \simeq 2\beta(q - Y_c) + \gamma(r - X_c)$$

D'où :

$$D(r, q) = (y_1 - q) * (2\beta(q - Y_c) + \gamma(r - X_c))$$

$$\Rightarrow |y_1 - q| = \left| \frac{D(r, q)}{2\beta(q - Y_c) + \gamma(r - X_c)} \right| = \left| \frac{D(r, q)}{S(r, q)} \right|$$

$$\text{On a donc : } I_s = C_p \cdot I_{\max} = \left| \frac{D(r, q)}{S(r, q)} \right| * I_{\max}$$

$$I_p = I_{\max} - I_s$$

On suppose être arrivé au point de coordonnées (r, q) . On considère les points :

$$a(r, q) - b(r+1, q-2) - c(r+1, q-1)$$

$$d(r+1, q) - e(r+1, q+1)$$

On a les relations suivantes :

$$D(r+1, q) = D(d)$$

$$= D(r, q) + T(r, q) - \alpha$$

$$= \underline{D(a) + T(r, q) - \alpha}$$

$$\begin{aligned}
 D(r+1,q-1) &= D(c) \\
 &= D(r,q) + T(r,q) - S(r,q) - \alpha - \beta + \gamma \\
 &= \underline{D(d) - S(r,q) - \beta + \gamma}
 \end{aligned}$$

La détermination des couples (P,S) s'effectuera suivant le schéma suivant :

D ppv $D + T - \alpha$

Si $D \geq 0$

alors début

P ppv d

S ppv e

fin

sinon début

Si $D - S - \beta + \gamma > 0$

alors début

Si $2*D - S - \beta + \gamma \geq 0$

alors début

P ppv d

S ppv c

fin

sinon début

P ppv c

S ppv d

D ppv $D - S - \beta + \gamma$

T ppv $T + \gamma$

S ppv $S + 2*\beta$

fin

fin

sinon début

P ppv c

S ppv b

D ppv $D - S - \beta + \gamma$

T ppv $T + \gamma$

S ppv $S + 2*\beta$

fin

fin

T ppv $T - 2*\alpha$

S ppv $S - \gamma$

Cp ppv $ABS(D/S)$

33

B) Mouvement en Y ie $x \in [X_c + Dx_{t2}, X_c + Dx_{\infty}]$

On suppose être arrivé au point de coordonnées (r, q) .

Soit $P_1(x_1, q)$ le point de l'ellipse à afficher. Le point (r, q) étant le plus proche de la courbe, on a :

$$r - 1/2 < x_1 \leq r + 1/2$$

$$\text{On a : } \alpha(x_1 - X_c)^2 + \gamma(x_1 - X_c)(q - Y_c) = k - \beta(q - Y_c)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \alpha(x_1 - X_c)^2 + \gamma(x_1 - X_c)(q - Y_c) - \alpha(r - X_c)^2 - \gamma(r - X_c)(q - Y_c) \\ = k - \beta(q - Y_c)^2 - \alpha(r - X_c)^2 - \gamma(r - X_c)(q - Y_c) \end{aligned}$$

Nous posons :

$$D(r, q) = k - (r - X_c)^2 - (q - Y_c)^2 - (r - X_c)(q - Y_c)$$

Vérifions que $D(r, q)$ conserve le signe de $x_1 - r$

Nous avons :

$$\begin{aligned} D(r, q) &= \alpha(x_1 - r)(x_1 + r - 2X_c) + \gamma(q - Y_c)(x_1 - r) \\ &= (x_1 - r)(\alpha(x_1 + r - 2X_c) + \gamma(q - Y_c)) \end{aligned}$$

Ayant $|r - x_1| \leq 1/2$, on peut écrire :

$$\alpha(x_1 + r - 2X_c) + \gamma(q - Y_c) \simeq 2\alpha(x_1 - X_c) + \gamma(q - Y_c)$$

Et la relation : $2\alpha(x_1 - X_c) + \gamma(q - Y_c) > 0$

$$\Leftrightarrow q - Y_c > -\frac{\alpha}{\gamma_0}(x_1 - X_c)$$

est vérifiée dans le cas du 1er quadrant.

(L'égalité $q - Y_c = -\frac{\alpha}{\gamma_0}(x_1 - X_c)$ correspond aux points où la pente de la tangente à la courbe est nulle ie aux points marquant le passage du 4ème au 1er quadrant et le passage du 2ème au 3ème quadrant).

Nous pouvons donc dire que $D(r,q)$ et la quantité x_1-r admettant le même signe $D(r,q)$ étant un nombre entier.

De la même façon qu'en A) on considère le point principal $P(rp,q)$ et le point secondaire S.

Soit $P_1(x_1,q)$ le point appartenant à l'ellipse. Par définition, C_p représente la distance entre le point $P_1(x_1,q)$ et le point principal $P(rp,q)$. On a donc : $C_p = |x_1-rp|$

Mais on a posé :

$$\begin{aligned} D(r,q) &= k - \alpha(r-X_c)^2 - \beta(q-Y_c)^2 - \gamma(r-X_c)(q-Y_c) \\ &= (x_1-r) * (\alpha(x_1+r-2X_c) + \gamma(q-Y_c)) \end{aligned}$$

On doit donc essayer d'évaluer $|x_1-rp|$ en fonction de $D(rp,q)$:

Ayant $|x_1-r| \leq 1/2$, on peut écrire :

$$\alpha(x_1+r-2X_c) + \gamma(q-Y_c) \simeq 2\alpha(rp-X_c) + \gamma(q-Y_c)$$

D'où :

$$D(rp,q) = (x_1-rp) * (2\alpha(rp-X_c) + \gamma(q-Y_c))$$

$$\Rightarrow |x_1-rp| = \left| \frac{D(rp,q)}{2\alpha(rp-X_c) + \gamma(q-Y_c)} \right| = \left| \frac{D(rp,q)}{T(rp,q)} \right|$$

$$\text{On a donc : } I_s = C_p * I_{\max} = \left| \frac{D(rp,q)}{T(rp,q)} \right| * I_{\max}$$

$$I_p = I_{\max} - I_s$$

On suppose être arrivé au point de coordonnées (r,q) . On considère les points :

$$a(r,q) - b(r+2,q-1) - c(r+1,q-1) - d(r,q-1) - e(r-1,q-1)$$

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} D(r,q-1) &= D(d) \\ &= D(r,q) - S(r,q) - \beta \\ &= \underline{D(a) - S(r,q) - \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(r+1,q-1) &= D(c) \\ &= D(r,q) + T(r,q) - S(r,q) - \alpha - \beta + \gamma \\ &= D(d) + T(r,q) - \alpha + \gamma \end{aligned}$$

La détermination du couple (P,S) se fera suivant le schéma suivant :

```

D ppv D - S - β
Si D ≤ 0
  alors début
    P ppv d
    S ppv e
    fin
  sinon début
    Si D + T - α + γ < 0
      alors début
        Si 2*D + T - α + γ ≤ 0
          alors début
            P ppv d
            S ppv c
            fin
          sinon début
            P ppv c
            S ppv d
            D ppv D+T-α+γ
            T ppv T-2α
            S ppv S-γ
            fin
          fin
        sinon début
          P ppv c
          S ppv b
          D ppv D+T-α+γ
          T ppv T-2α
          S ppv S-γ
          fin
        fin
      fin
    fin
  fin
T ppv T + γ
S ppv S + 2β
Cp ppv ABS(D/T)

```

Initialisation

A -

$$XD = Xc - DX0$$

$$YD = Yc + DY0$$

$$D(XD, YD) = k - \alpha * DX0^2 - \beta * DY0^2 + \gamma * DX0 * DY0$$

$$T(XD, YD) = 2\alpha * DX0 - \gamma * DY0$$

$$S(XD, YD) = -2\beta * DY0 + \gamma * DX0$$

B -

Ayant $Dx(r, q) = Dy(r, q)$, $Tx(r, q) = Ty(r, q)$ et $Sx(r, q) = Ty(r, q)$ les valeurs de D, T et S seront inchangées et en conséquence il n'y aura pas d'initialisation.

Le traitement des autres quadrants s'effectue de manière similaire.

Nous appliquons donc l'algorithme suivant :

Génération d'ellipses quelconques

ENTIER Xc, Yc, A, B, M, P

ENTIER α , β , γ_0 , γ , k, D, D1, T, S

ENTIER Dsa, Dsd, Dta, Dtd

ENTIER Dxt1, Dxt2, Dxo, Dyo, Dy ∞

REEL U

/* Initialisation */

A2 ppv A*A

B2 ppv B*B

M2 ppv M*M

P2 ppv P*P

α ppv P2*B2 + M2*P2

β ppv M2*B2 + P2*A2

γ_0 ppv (B2-A2)*P*M

γ ppv 2* γ_0

k ppv A2*B2*(P2+M2)

Dxt1 ppv ARRONDI(SQR(k*($\beta + \gamma_0$)²/(($\alpha + \beta + 2 * \gamma_0$)*($\alpha + \beta - \gamma_0^2$))))

Dxt2 ppv ARRONDI(SQR(k*($\beta - \gamma_0$)²/(($\alpha + \beta - 2 * \gamma_0$)*($\alpha * \beta - \gamma_0^2$))))

U ppv $\gamma_0 * \text{SQR}(k / (\beta * \alpha^2 - \alpha * \gamma_0^2))$

DX0 ppv ARRondi (U)

Si $\gamma_0 = 0$ alors Dyo ppv β

sinon Dyo ppv ARRondi($\alpha * u / \gamma_0$)

Dy $^\infty$ ppv ARRondi ($((\gamma_0 / \beta) * \text{SQR}(k * \beta / (\beta * \alpha - \gamma_0^2)))$)

D1 ppv $k - \alpha * DX0^2 - \beta * DY0^2 + \gamma * DX0 * DX0$

T0 ppv $2 * \alpha * DX0 - \gamma * DY0$

S0 ppv $2 * \beta * DY0 - \gamma * DX0$

/* 1er quadrant */

X ppv Xc - DX0

Y ppv Yc + DY0

Dxt ppv Dxt2

Xinc ppv +1

Yinc ppv -1

Sg ppv 1

TRACER-QUADRANT

/* 2ème quadrant */

X ppv Xc + DX0

Y ppv Yc - DY0

Yinc ppv + 1

Dxt ppv Dxt1

Sg ppv - 1

TRACER-QUADRANT

/* 3ème quadrant */

X ppv Xc + DX0

Y ppv Yc - DY0

Xinc ppv - 1

Dxt ppv Dxt2

Sg ppv1

TRACER-QUADRANT

/* 4ème quadrant */

X ppv Xc - DX0

Y ppv Yc + DY0

Yinc ppv - 1

Dxt ppv Dxt2

Sg ppv - 1

TRACER-QUADRANT

PROCEDURE TRACER-QUADRANT

D ppv D1

Dta ppv $-2*\alpha$

Dsa ppv $Sg*\gamma$

Dtd ppv $Sg*\gamma$

Dsd ppv $-2*\beta$

T ppv $T0*Sg$

S ppv S0

Si $D \geq 0$ alors Ys ppv $Y - Yinc$

sinon Ys ppv $Y + Yinc$

Cp ppv $ABS(D/S)$

Is ppv $Cp*Imax$

Ip ppv $Imax - Is$

Afficher(X,Y,Ip)

Afficher(X,Ys,Is)

Bt ppv $ABS(X - Xc - Xinc*Dxt)$

Pour I ppv 1 à Bt faire

début

X ppv $X + Xinc$

D ppv $D + T - \alpha$

Si $D \geq 0$

alors début

Ys ppv $Y - Yinc$

fin

sinon début

Si $D + S - \beta + Dsa > 0$

alors début

Si $2*D + S - \beta + Dsa \geq 0$

alors début

Ys ppv $Y + Yinc$

fin

sinon début

Ys ppv Y

Y ppv $Y + Yinc$

D ppv $D + S - \beta + Dtd$

T ppv $Dtd + T$

S ppv $Dsd + S$

fin

fin

sinon début

Y ppv $Y + Yinc$

Ys ppv $Y + Yinc$

D ppv $D + S - \beta + Dtd$

T ppv $Dtd + T$

S ppv $Dsd + S$

fin

```

S ppv S + Dsa
T ppv T + Dta

Cp ppv ABS(D/S)
Is ppv Cp*Imax
Ip ppv Imax - Is

Afficher (X,Y,Ip)
Afficher (X,Ys,Is)

fin

Dta ppv Sg*γ
Dsa ppv -2*β
Dtd ppv -2*α
Dsd ppv Sg*γ

Dyt ppv ABS(Y-Yc+Xinc*Dy∞)

Pour I ppv 1 à Dyt faire
début
    Y ppv Y+Yinc
    D ppv D+S-β
    Si D ≤ 0
        alors Xs ppv X-Xinc
        sinon début
            Si D+T-α+Dta<0
                alors début
                    Si 2*D+T-α+Dta≤0
                        alors début
                            Xs ppv X+Xinc
                        fin
                    sinon début
                        Xs ppv X
                        X ppv X+Xinc
                        D ppv D+T-α+Dta
                        T ppv T+Dtd
                        S ppv S+Dsd
                    fin
                fin
            sinon début
                X ppv X + Xinc
                Xs ppv X + Xinc
                D ppv D+T-α+Dta
                T ppv T+Dtd
                S ppv S+Dsd
            fin
        fin
    T ppv T+Dta
    S ppv S+Dsa
    Cp ppv ABS(D/T)
    Is ppv Cp*Imax
    Ip ppv Imax-Is
    Afficher(X,Y,Ip) ; Afficher(Xs,Y,Is)
fin

```

FIN TRACER-QUADRANT

Remarque : Cas d'une courbure très accentuée.

Ceci se produit lorsque Dxt1 ou Dxt2 sont très proches de Dxo ou Dx_{∞} ie lorsque $A \ll B$ ou $B \ll A$ ou encore lorsque A et B ont des valeurs numériques relativement faibles.

On constate dans ce cas que les intensités Ip et Is associées aux points où la courbure est très prononcée, ne sont pas correctes.

En fait, ces intensités sont inversées (ie Ip est associée à S et Is est associée à P).

Ceci provient du fait que dans ce cas la quantité T ou S diminue rapidement (jusqu'à devenir nulle dans certains cas).

Cette décroissance rapide n'a aucune incidence dans le cas de la version "escalier".

Il est possible de remédier à ce phénomène en modifiant le calcul de Ip et Is de la façon suivante :

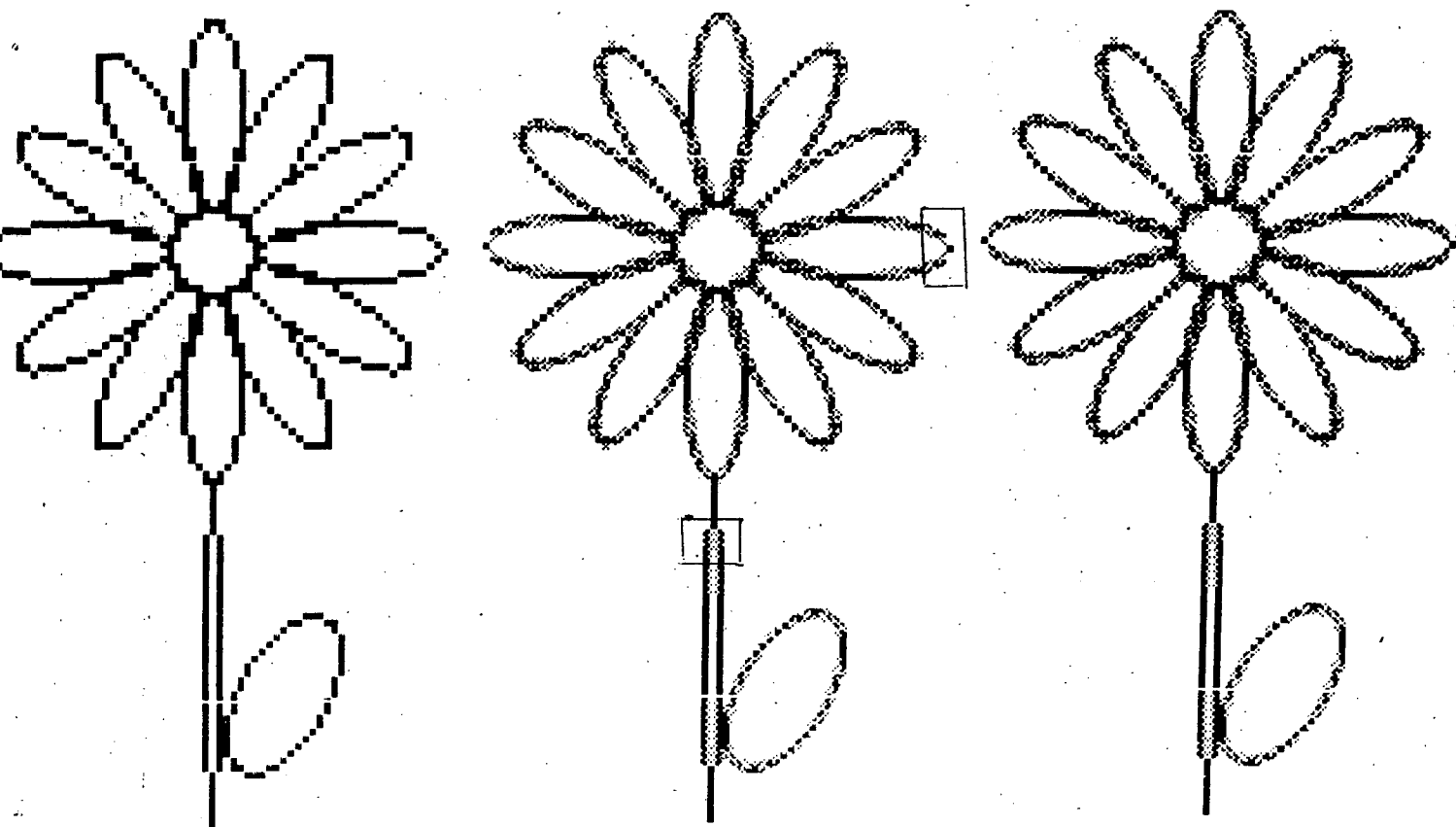
```

Si T=0 (resp. S=0)
  alors Cp ppv 0
  sinon début
      Cp ppv |D/T| (resp. |D/S|)
      Si Cp > 1/2 alors Cp ppv 1-Cp
  fin
Is ppv Cp*Imax
Ip ppv Imax-Is
  
```

Cette modification introduit deux tests supplémentaires au niveau des calculs de chacun des couples (P,S).

La figure 6 montre un exemple où l'introduction de cette modification est nécessaire.

Dans un premier temps, on se contente de remédier au fait que T ou S peuvent s'annuler et donc provoquer une interruption de programme en introduisant une division par 0. Dans une deuxième étape, on applique intégralement la modification exposée plus haut.



a) Version escalier

b) Elimination de l'effet d'escalier avec modification minimale

c) Elimination de l'effet d'escalier avec modification complète

N.B. Ce dessin est réalisé uniquement avec des ellipses

Figure 6 : Cas de courbures accentuées

III.2.3. Tracé des ellipses par la méthode de Pitteway

La méthode de Pitteway dérive directement de celle de Bresenham pour les vecteurs.

L'équation de la courbe est donnée par :

$$\alpha y^2 + \beta x^2 + 2\gamma xy + 2u y - 2v x = k$$

On a vu que le coefficient C_p permettant de déterminer l'intensité lumineuse attribuée aux points $P(r_p, q_p)$ et $S(r_s, q_s)$ est donné par :

$$C_p = |y_1 - q_p|$$

Mais dans la méthode de Pitteway cette quantité y_1-q est multipliée par le facteur :

$$u + \gamma r + \alpha q + ((u + \gamma r)^2 + \alpha(2vr + \beta r^2))^{1/2}$$

Or ce facteur ne peut être déduit simplement des quantités a et b utilisées dans l'algorithme et définies par : (dans le cas du 1er octant).

$$b = 2v - \beta(2r+1) - \gamma(2q+1)$$

$$a = 2(u + \gamma r + \alpha q) - b$$

Donc, nous ne pouvons appliquer la méthode de Bresenham pour estomper les "effets d'escalier".

III.2.4. Autres méthodes de génération des coniques

III.2.4.1. Méthode de Danielson [Dan 70]

Cette méthode est basée sur le développement de Taylor.

Cette méthode a les deux inconvénients majeurs suivants :

- elle ne permet pas les mouvements diagonaux
- elle ne conserve pas la symétrie des courbes.

Il n'y a donc aucun intérêt à vouloir lui appliquer une méthode d'élimination des effets d'escalier.

III.2.4.2. Méthode de Jordan-Lennon-Holm [J-L-H 73]

Cette méthode utilisant les dérivées partielles a l'avantage d'être très générale et applicable à toutes les courbes.

Mais elle nécessite à chaque étape des calculs un nombre important de mises à jour de variables et d'opérations arithmétiques, ainsi qu'un nombre élevé de tests.

D'autre part, il n'est pas possible de calculer le coefficient C_p utilisé dans le procédé de Bresenham à partir des variables utilisées.

Donc ces méthodes générales très "mathématiques" ne sont pas adaptées à l'application du procédé de Bresenham.

Pour pouvoir utiliser ce procédé, il est nécessaire que l'idée de base de l'algorithme soit "simple".

III.2.5. Conclusion

Nous constatons que le principe de base des algorithmes de Bresenham générant les segments et les cercles, se généralise bien à des courbes plus complexes telles que les ellipses.

Le procédé de Bresenham donné dans le cas des segments est encore applicable ici, pour élimination des effets d'escalier.

Mais si ce procédé s'adaptait bien à des algorithmes de génération de segments autres que celui de Bresenham (cf. II.3.), ici il n'est plus aussi facilement applicable.

Cela tient au fait que les méthodes de génération de courbes employées deviennent plus complexes et s'appuient beaucoup plus sur des procédés mathématiques tels que l'utilisation de dérivées partielles. Or, le procédé de Bresenham ne peut s'appliquer que si l'on est capable d'estimer la distance entre le point principal et le point de la courbe qu'il représente.

Dans ce cas de génération d'ellipses, le procédé de Bresenham donne de bons résultats quant à l'élimination des effets d'escalier.

La figure 7 donne un exemple des résultats obtenus.

L'algorithme utilisé est celui donné en IV.2.2.

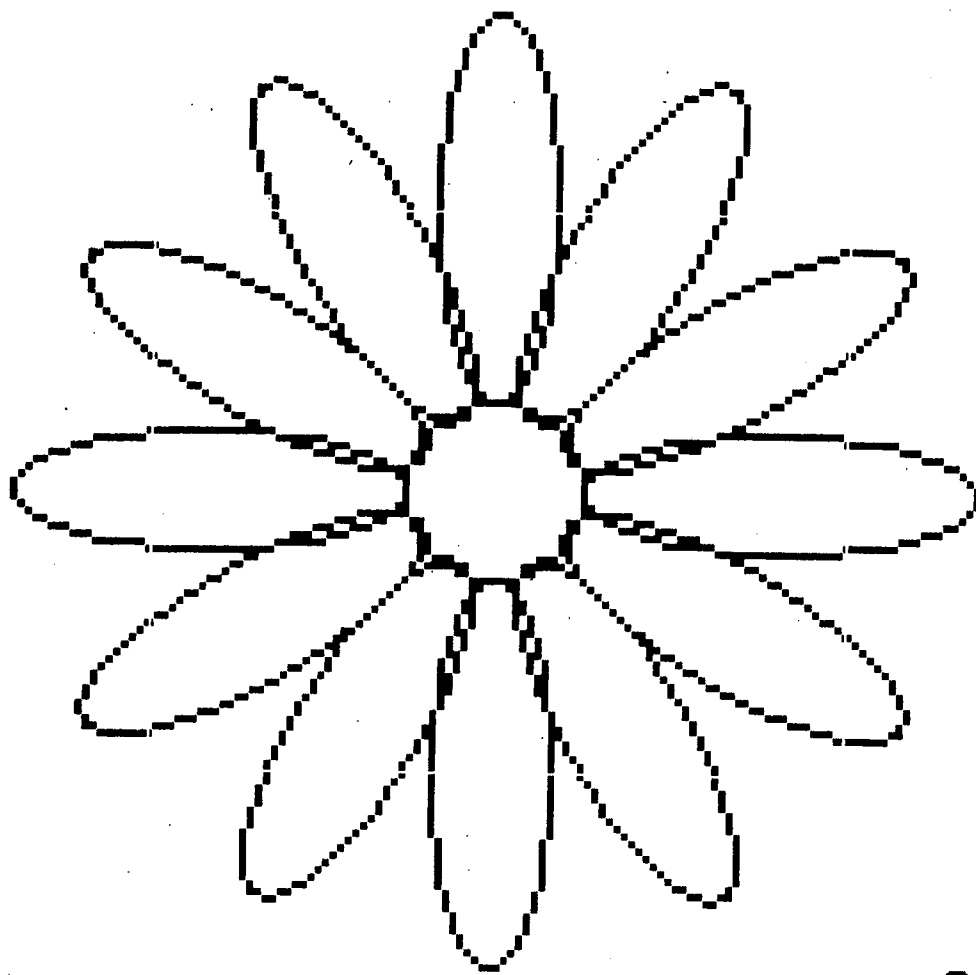
III.3. Arcs de paraboles admettant un axe de symétrie parallèle à l'axe du repère

III.3.1. Génération suivant le principe de Bresenham

Dans un premier temps, nous allons nous retreindre à l'étude des paraboles de la forme $y=ax^2+b$ ie admettant l'axe Oy comme axe de symétrie.

Cette étude sera limitée au demi plan d'équation $x \geq 0$ et au cas où $a > 0$, sachant que l'étude des autres cas est similaire.

(Nous donnerons l'algorithme de génération pour le cas général).



a) version
"escalier"

b) Elimination
des "effets
d'escalier"

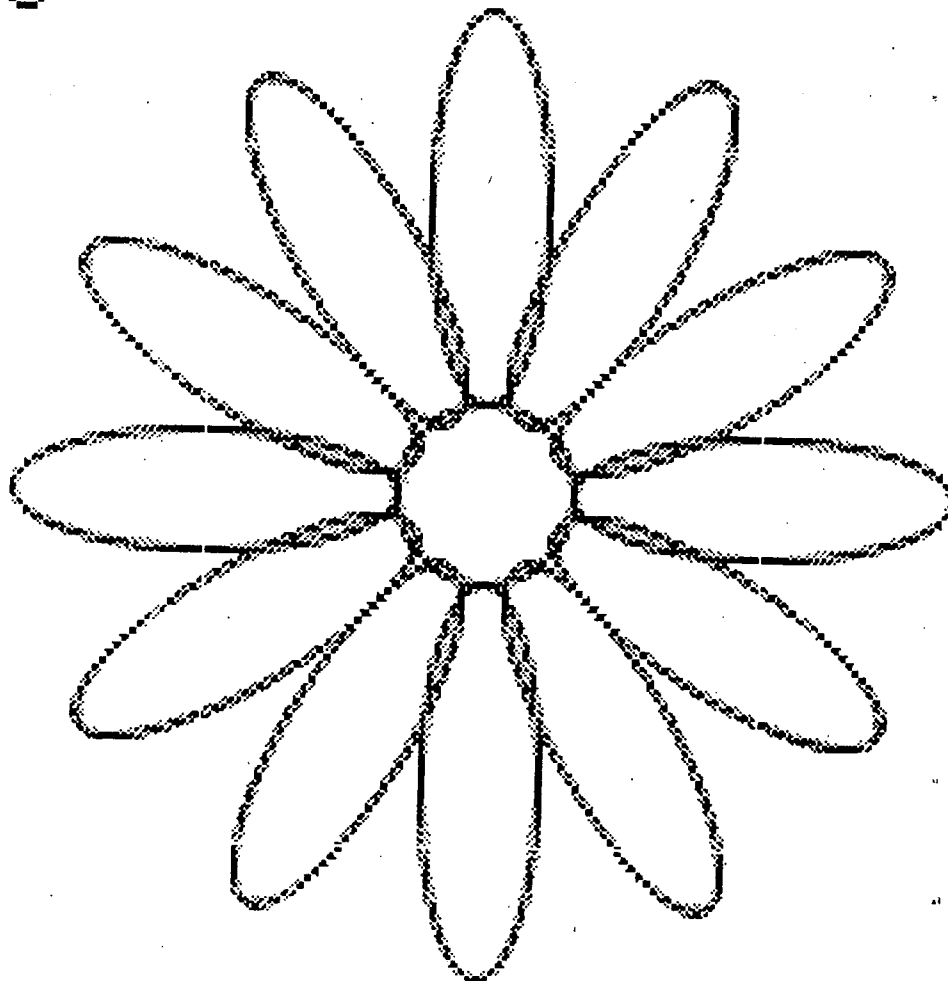


Figure 7 : Génération d'ellipses par le procédé de Bresenham

Notation : origine de l'arc (XD,YD)
 extrémité de l'arc (XF,YF)
 $sx = XF - XD$
 $sy = YF - YD$
 $SX = XF + XD$

Hypothèse : $sy > 0$
 $sx > 0$
 $SX > 0 \Rightarrow \underline{sx * sx > 0}$
 $XD \geq 0$
 XD, YD, XF, YF sont des entiers

Nous avons :

$$a = \frac{sy}{sx * SX} \quad \text{et} \quad b = \frac{XF^2 * YD - XD^2 * YF}{sx * SX} = \frac{cB}{sx * SX}$$

Le traitement de la portion de courbe s'effectuera donc en deux parties s'il y a lieu :

A) $X \leq \frac{1}{2a}$

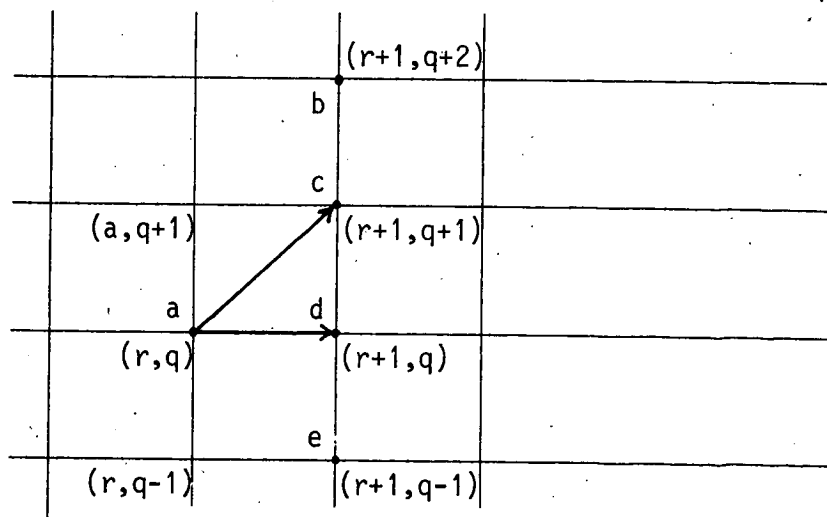
La progression se fera en X.

B) $X > \frac{1}{2a}$

La progression se fera en Y.

A) -Les pentes des tangentes ≤ 1 ie $X \leq \frac{1}{2a}$

On suppose être arrivé au point de coordonnées (r,q)



Soit $P_1(r, y_1)$ le point de la portion de courbe à afficher. Le point (r,q) étant le plus proche de la courbe et donc de P_1 on a :

$$q - 1/2 < y_1 \leq q + 1/2$$

On considère la "distance" du point $P_1(r,y_1)$ au point (r,q) :

$$\begin{aligned} y_1 - q &= ar^2 + b - q \\ &= \frac{sy}{sx \cdot SX} r^2 + \frac{cB}{sx \cdot SX} - q \end{aligned}$$

D'après les hypothèses, on sait que $\underline{sx \cdot SX > 0}$ donc $y_1 - q$ et $sx \cdot SX(y_1 - q)$ sont de même signe.

On pose alors : (pour manipuler une représentation de cette distance qui soit entière)

$$\begin{aligned} D(r,q) &= sx \cdot SX(y_1 - q) \\ &= sx \cdot r^2 - sx \cdot SX \cdot q + cB \end{aligned}$$

Nous rappelons que si (P,S) est le couple (point principal P et point secondaire S) avec I_p l'intensité lumineuse attribuée à P et I_s celle attribuée à S, nous avons :

$$\begin{aligned} C_p &= \min(|y_1 - q|, |y_1 - (q+1)|) \\ C_s &= \max(|y_1 - q|, |y_1 - (q+1)|) \\ I_s &= C_p \cdot I_{\max} \\ I_p &= C_s \cdot I_{\max} = I_{\max} - I_s \end{aligned}$$

Si $P(r,q_p)$ est le point principal nous avons $C_p = |y_1 - q_p|$

Nous avons posé : $D(r,q) = sx \cdot SX \cdot (y_1 - q)$, d'où nous en déduisons que :

$$C_p = \frac{|D(r,q_p)|}{sx \cdot SX}$$

Nous posons : $T(r) = \frac{dD(r,q)}{dr} = -2 \cdot sy \cdot r$ et nous considérons les points :

$$a(r,q) - b(r+1,q+2) - c(r+1,q+1) - d(r+1,q) - e(r+1,q-1)$$

Nous avons les relations récurrentes suivantes :

$$\begin{aligned} D(r+1, q) &= D(d) = D(r, q) + T(r) + s_y \\ &= D(a) + T(r) + s_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(r+1, q+1) &= D(c) = D(r, q) + T(r) + s_y - s_x * S_X \\ &= D(d) - s_x * S_X \end{aligned}$$

Le schéma de détermination du couple (P, S) sera le suivant :

```

Si  $D(d) \leq 0$ 
  alors P ppv  $\underline{d}$  ; S ppv  $\underline{e}$ 
  sinon Si  $D(d) - s_x * S_X < 0$ 
    alors si  $2 * D(d) - s_x * S_X \leq 0$ 
      alors P ppv  $\underline{d}$  ; S ppv  $\underline{c}$ 
      sinon /*  $2 * D(d) - s_x * S_X > 0$  */
        P ppv  $\underline{c}$  ; S ppv  $\underline{d}$ 
    sinon /*  $D(d) - s_x * S_X \geq 0$  */
      P ppv  $\underline{c}$  ; S ppv  $\underline{b}$ 
  
```

La mise à jour de D dépendra du choix du point principal.

B) -Les pentes des tangentes > 1 ie $X > \frac{1}{2a}$

On suppose être arrivé au point de coordonnées (r, q).

Soit $P_1(x_1, q)$ le point de la portion de courbes à afficher. Le point (r, q) étant le plus proche de la courbe, on a :

$$r - 1/2 < x_1 \leq r + 1/2$$

$$\text{On a : } q = a x_1^2 + b$$

$$\text{D'où : } \underline{a(x_1^2 - r^2) = q - ar^2 - b}$$

On a : $a > 0$ et x_1 et $r \geq 0$ par hypothèse. On en déduit que :

$$a(x_1^2 - r^2) > 0 \Leftrightarrow x_1 - r > 0$$

et $q(x_1^2 - r^2) < 0 \Leftrightarrow x_1 - r < 0$

Donc pour l'étude qui nous intéresse, la quantité $a(x_1^2 - r^2)$ est une bonne représentation de $x_1 - r$.

Et par hypothèse ayant $sx \cdot SX > 0$, les quantités $a(x_1^2 - r^2)$ et $sx \cdot SX \cdot a(x_1^2 - r^2)$ sont de même signe.

On pose alors : (pour manipuler des nombres entiers)

$$\begin{aligned} D(r, q) &= sx \cdot SX \cdot a(x_1^2 - r^2) \\ &= sx \cdot SX \cdot (q - ar^2 - b) \\ &= sx \cdot SX \cdot q - sy \cdot r^2 - cB \end{aligned}$$

Le point $P_1(x_1, q)$ appartient à la courbe.

Nous avons :

$$C_p = \min(|x_1 - r|, |x_1 - (r+1)|)$$

$$C_s = \max(|x_1 - r|, |x_1 - (r+1)|)$$

$$I_s = C_p \cdot I_{\max}$$

$$I_p = I_{\max} - I_s = C_s \cdot I_{\max}$$

Par définition, C_p représente la distance entre le point $P_1(x_1, q)$ et le point principal $P(rp, q)$.

$$\text{D'où : } C_p = |x_1 - rp|$$

$$\text{Mais nous avons posé : } D(r, q) = sy \cdot (x_1^2 - r^2).$$

Nous devons donc essayer d'évaluer $x_1 - rp$ en fonction de $D(r, qp)$:

$$D(rp, q) = sy \cdot (x_1 + rp) \cdot (x_1 - rp)$$

Ayant $|x_1 - rp| \leq 1/2$, nous effectuons l'approximation suivante :

$$\underline{x_1 + rp - 2rp}$$

$$\text{D'où : } D(r, qp) = sy \cdot 2r \cdot (x_1 - r)$$

$$\text{Et : } \boxed{C_p = \left| \frac{D(rp, q)}{sy \cdot 2r} \right| = \left| \frac{D(rp, q)}{T(r)} \right|}$$

Nous considérons les points :

$$a(r, q) - b(r+2, q+1) - c(r+1, q+1) - d(r, q+1) - e(r-1, q+1)$$

Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} D(r,q+1) &= D(d) = D(r,q) + s_x * S_X \\ &= D(a) + s_x * S_X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(r+1,q+1) &= D(c) \\ &= D(r,q) + T(r) + s_x * S_X - s_y \\ &= D(d) + T(r) - s_y \end{aligned}$$

Le schéma de détermination du couple (P,S) sera le suivant :

```

Si D(d) ≤ 0
  alors P ppv d ; S ppv e
  sinon Si D(d) + T(r) - s_y < 0
    alors Si 2*D(d) + T(r) - s_y ≤ 0
      alors P ppv d ; S ppv c
      sinon /* 2*D(d)+T(r)-s_y > 0 */
        P ppv c ; S ppv d
    sinon /* D(d) + T(r) - s_y ≥ 0 */
      P ppv c ; S ppv b
  
```

Initialisation

A - Cas des tangentes de pente ≤ 1

Le point (Xd,Yd) appartient à la portion de courbe à tracer, d'où :
D(Xd,Yd)=0.

Et on a : $T(Xd) = 2*s_y*Xd$

On aura donc les initialisations suivantes :

D ppv 0
T ppv 2*s_y*Xd

B - Cas des tangentes de pente > 1

L'étude effectuée dans [HeR 82] et [Roy 82] a montré que :

$$D_y(r,q) = - D_x(r,q) \text{ et } T_y(r) = - T_x(r)$$

On aura donc les initialisations suivantes :

D ppv - D

T ppv - T

On rappelle que l'intervalle $1/2a$ est donné par : DXT ppv la valeur entière la plus proche de la quantité : $(sx*SX)/(2*sy)$.

La démarche est la même pour les courbes d'équation :

$$Y = a(X-XC)^2 + b$$

D'où l'algorithme général :

Tracé d'arcs de paraboles (ENTIER XA,YA,XB,YB,XC)

Si (XA<XC et XC<XB) ou (XB<XC et XC<XA)

alors début

Si ABS(XA-XC) = ABS(XB-XC)

alors lire YC

sinon DSXD ppv (XB-XA)*(XB+XA-2*XC)

CBO ppv (XB-XC)²*YA-(XA*XC)²*YB

YC ppv ARRondi (CBO/DSX0)

TRACER(XC,YC,XA,YA)

TRACER(XC,YC,XB,YB)

fin

sinon début

Si (XC<XA et XA<XB) ou (XC>XA et XA>XB)

alors TRACER(XA,YA,XB,YB)

sinon TRACER(XB,YB,XA,YA)

fin

TRACER(XD,YD,XF,YF)

DX ppv XF-XD

DY ppv YF-YD

DELTAY ppv ABS(DY)

DT 'ppv 2*DELTAY

DSX , ppv DX*(XF+XD-2*XC)

DXT ppv ARRondi (DSX/DT)

Si DX>0

alors XINC ppv+1

sinon XINC ppv-1

Si DY>0

alors YINC ppv+1

sinon YINC ppv-1

X ppv XD

Y ppv YD

Afficher (X,Y,Imax)

T ppv DT*ABS(X-XC)

D ppv 0

```

Si ABS(X-XC) < DXT
  alors début /* cas des tangentes de pente E[0,1] */

```

```

    BT ppv MIN(ABS(DX), -ABS(X-XC)*DXT)
    Pour I ppv 1 par 1 jusqu'à BT faire
      début

```

```

        X ppv X+XINC
        D ppv D+T+DELTAY
        Si D<=0

```

```

            alors /* P:d ; S:e */

```

```

                YS ppv Y-YINC

```

```

            sinon début

```

```

                Si D-DSX<0

```

```

                    alors début

```

```

                        Si 2*D-DSX<=0

```

```

                            alors /* P:d ; S:c */

```

```

                                YS ppv Y+YINC

```

```

                            sinon /* P:c ; S:d */

```

```

                                début

```

```

                                    YS ppv Y

```

```

                                    Y ppv Y+YINC

```

```

                                    D ppv 0-DSX

```

```

                                fin

```

```

                    fin

```

```

                sinon début /* P:c ; S:b */

```

```

                    Y ppv Y+YINC

```

```

                    YS ppv Y+YINC

```

```

                    D ppv D - DSX

```

```

                fin

```

```

            fin

```

```

        T ppv T + DT

```

```

        Cp ppv ABS(D/DSX)

```

```

        Is ppv Cp*Imax

```

```

        Ip ppv Imax-Is

```

```

        Afficher(X,Y,Ip)

```

```

        Afficher(X,Ys,Is)

```

```

    fin

```

```

  fin

```

```

DYT ppv ABS(YF-Y)

```

```

Si DYT ≠ 0

```

```

  alors début /* cas des tangentes de pente E[1,+∞] */

```

```

    T ppv - T

```

```

    D ppv - D

```

```

Pour I ppv 1 par 1 jusqu'à DYT faire
début
    Y ppv Y + Yinc
    D ppv D + DSX
    Si D <= 0
        alors /* P:d ; S:e */
            Xs ppv X-XINC
        sinon début
            Si D+T-DELTAY<0
                alors début
                    Si 2*D+T-DELTAY<=0
                        alors /* P:d ; S:c */
                            Xs ppv X+XINC
                        sinon /* P:c ; S:d */
                            début
                                Xs ppv X
                                X ppv X+XINC
                                D ppv D+T-DELTAY
                                T ppv T-DT
                            fin
                        fin
                    sinon début /* P:c ; S:b */
                        X ppv X+XINC
                        XS ppv X+XINC
                        D ppv D+T-DELTAY
                        T ppv T-DT
                    fin
                fin
            fin
        Cp ppv ABS(D/T)
        Is ppv Cp*Imax
        Ip ppv Imax - Is
        Afficher(X,Y,Ip)
        Afficher(XS,Y,Is)
    fin
fin

```

III.3.2. Applications d'une rotation aux paraboles considérées

En III.3.1., l'équation de la courbe était donnée par :

$$Y_0 - Y_c = a(X_0 - X_c)^2 \quad (1)$$

Lorsque l'on effectue une rotation d'un angle θ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ nous avons :

$$X - X_c = (X_0 - X_c) \cos\theta - (Y_0 - Y_c) \sin\theta$$

$$Y - Y_c = (X_0 - X_c) \sin\theta + (Y_0 - Y_c) \cos\theta$$

d'où $X_0 - X_c = (X - X_c) \cos\theta + (Y - Y_c) \sin\theta$

$$Y_0 - Y_c = (Y - Y_c) \cos\theta - (X - X_c) \sin\theta$$

L'équation (1) devient alors :

$$(Y - Y_c) \cos\theta - (X - X_c) \sin\theta = a [(X - X_c) \cos\theta + (Y - Y_c) \sin\theta]^2$$

D'où l'équation (2) :

$$a \operatorname{tg}^2\theta (Y - Y_c)^2 + a (X - X_c)^2 + 2a \operatorname{tg}\theta (X - X_c)(Y - Y_c) - (Y - Y_c) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta} + (X - X_c) \operatorname{tg}\theta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta} = 0$$

Nous ne pouvons pas ici appliquer le même principe que pour les ellipses.

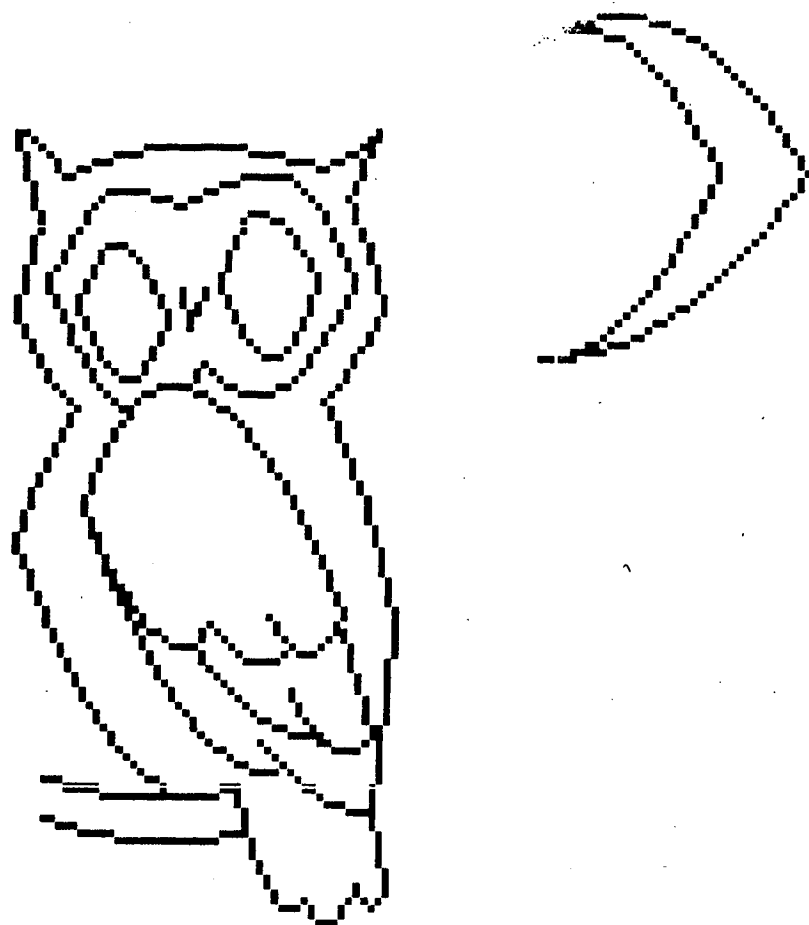
En effet, nous voyons apparaître les variables X et Y au degré 1 ailleurs que dans le double produit, ce qui introduit le coefficient $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}$.

La présence de ce coefficient nous empêche de nous ramener à une expression entière comme celle obtenue dans le cas des ellipses (cf. III.2.1.). De ce fait, les incrémentations effectuées à chaque étape des calculs ne seraient plus entières, ce qui provoquerait une accumulation des erreurs.

Or, l'intérêt de toutes les méthodes présentées jusqu'ici, est justement le fait qu'elles n'utilisent que des opérations entières.

III.3.3. Autres méthodes de génération

Il n'existe pas de méthode spécifique à la génération d'arcs de paraboles.



a) Version "escalier"

b) Elimination
de "l'effet
d'escalier"

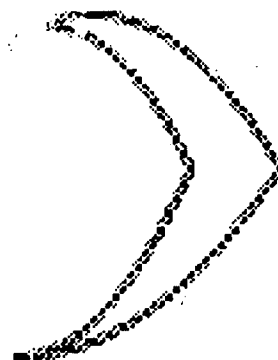


Figure 8 : Génération des arcs de paraboles par le procédé de Bresenham.

Les méthodes employées sont des méthodes générales telles que celle de [JLH 73] et nous avons vu en III.2.4. que ces méthodes n'étaient pas adaptées à l'utilisation du procédé de Bresenham.

III.3.4. Conclusion

Là encore l'application du procédé d'élimination des effets d'escalier de Bresenham donne de bons résultats.

Il est regrettable que l'on ne puisse l'appliquer dans le cas des paraboles subissant une rotation.

(Pour obtenir le cas où l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des abscisses, il suffit d'inverser les rôles de X et Y dans les études présentées en III.3.1.).

La figure 8 montre les résultats obtenus par utilisation des algorithmes donnés en III.3.1.

IV. GÉNÉRATION DES CARACTÈRES

IV.1. Introduction

La méthode de génération la mieux adaptée aux outils modernes de traitement de l'information est la représentation numérique du caractère :

la surface du caractère est discrétisée par échantillonnage sur une grille. On obtient ainsi une matrice de points blancs ou noirs à laquelle on fait correspondre une matrice binaire.

Cette méthode est utilisable lorsque la taille des matrices est faible et convient parfaitement aux imprimantes d'ordinateur, mais il en va autrement pour le traitement de texte ou l'impression classique.

En effet, les matrices de dimensions restreintes ne permettent d'engendrer qu'un nombre réduit de formes et ne permettent pas de représenter l'esthétique de la forme.

En particulier, l'application de transformations telles que les rotations donne des résultats très médiocres comme le montre la figure 9.

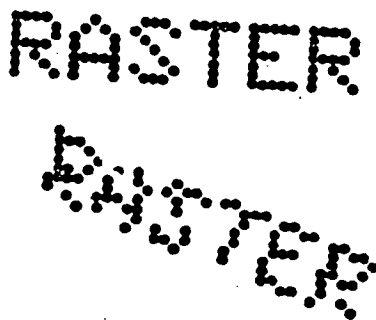


Figure 9 : Défauts suite à une rotation (tiré de [Cro 78])

Pour améliorer la qualité de représentation, nous disposons de 2 types de solutions qui sont directement dépendantes de la résolution du support de visualisation :

1. La résolution du support est faible

Un caractère est représenté par une matrice de taille relativement faible (jusqu'à 100x100). On réduit la taille de cette matrice jusqu'au seuil souhaité par différentes méthodes exposées au paragraphe IV.1.

Ces méthodes sont basées sur des techniques d'élimination de l'effet d'escalier. En effet, à chacun des points affichés est affectée une intensité de luminosité variable de manière à estomper les effets d'escalier qui ne manqueraient pas d'apparaître du fait d'une représentation trop sommaire du caractère.

2. La résolution du support est élevée (ie de l'ordre du pouvoir séparateur de l'oeil soit autour de 400 points par cm)

Dans ce cas, la résolution du support et la taille de la matrice définissant le caractère déterminent ensemble la taille du caractère sur le support. Par exemple, un caractère défini dans une grille de 2000 points par 2000 points aura une hauteur de 4 cm sur un support de résolution de 500 points/cm (cf. [Sic 82]).

On se heurte alors au problème de la mémorisation, il n'est pas possible de mémoriser les matrices dès que leur taille devient trop importante (le stockage d'un seul caractère de taille 2000x2000 exige 4×16^6 bits - cf. [Sic 82]).

On utilise alors d'autres codages (cf. paragraphe IV.2.) qui sont des représentations "raccourcies" du caractère et qui permettent néanmoins de recréer de manière satisfaisante les caractères lors de la génération.

IV.2. Génération de caractère sur un support de visualisation de faible résolution

(Les méthodes d'amélioration de représentation des caractères proposées ici utilisent les possibilités des écrans à luminosité variable ie ayant plusieurs niveaux de grisés).

IV.2.1. Méthode de Warnock [War 80]

Tout se passe comme si on "superposait" la matrice représentative du caractère à l'écran. L'intensité d'un pixel de l'écran sera proportionnelle au nombre de bits à l'état 1 "recouvrant" ce pixel.

Ici, le calcul de l'intensité utilise une fonction filtre. Warnock propose trois familles de fonctions filtres (qui font appel aux fonctions cosinus, racine carrée, élévation à une puissance réelle). Ces fonctions utilisent des paramètres dont les valeurs sont déterminées plus ou moins arbitrairement (ie suivant la perception visuelle de l'opérateur).

La figure 10 montre un exemple d'application.

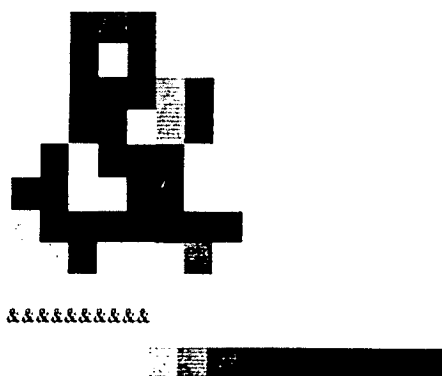


Figure 10 : Exemple de caractère obtenu par application de la méthode de Warnock (tiré de [War 80])

IV.2.2. Méthode de Wilkes et Wiseman [WiW 82]

La méthode est semblable à la précédente. La différence réside dans le calcul de l'intensité attribuée à un pixel donné.

Dans ce cas, la valeur de l'intensité est une fonction directe du nombre de bits à l'état 1 "recouvrant" ce pixel.

(ie si on suppose qu'un pixel correspond à une sous-matrice $m \times m$ de la matrice initiale et que sc est le nombre de bits de cette sous-matrice à l'état 1, l'intensité attribuée au pixel correspondant sera :

$$I = \frac{SC}{m^2} \times I_{max}. \text{ } I_{max} \text{ étant l'intensité maximale disponible).}$$

IV.2.3. Méthode de Crow [Cro 78]

Ici on utilise une méthode classique de réduction (cf. [JJN 76]) qui consiste à ne tenir compte que d'une partie des points donnés : on considère seulement 1 ligne sur n et pour chacune de ces lignes 1 point sur n (sur l'exemple donné ci-dessous n=4).

Simplement la matrice sera une juxtaposition de sous-matrices d'intensités, ces intensités étant les plus élevées au centre et allant en décroissant vers les bords. L'élément de la matrice choisi donne au pixel correspondant son intensité (cf. figure suivante).

0	X	1	1	1	X	0	0		X
0	1	2	2	2	2	1	0		
1	2	2	3	3	2	2	1		
1	2	3	4	4	3	2	1		
1	X	3	4	4	X	2	1		X
1	2	2	3	3	2	2	1		
0	1	2	2	2	2	1	0		
0	0	1	1	1	1	0	0		
	X				X				X

IV.2.4. Méthode de Kajiya et Ullner [KaU 81]

Cette méthode fait appel aux notions mathématiques telles que Gradient, Jacobien, transformation de Fourier, inversion de matrice de taille importante...

Elle est de l'avis des auteurs eux-mêmes, coûteuse, lente et difficile à implémenter bien que très efficace.

Pour ce type de génération, il n'y a aucune différence de traitement entre les caractères "droits" ou ayant subi une rotation, puisqu'on dispose en mémoire d'un "jeu" de matrices pour chacune des rotations possibles.

IV.3. Génération de caractères sur un support de visualisation de résolution élevée

Pour éviter d'avoir à stocker des matrices de taille très importante, trois types de codage sont utilisés :

IV.3.1. Codage de la surface

* Codage par plages (cf. [Cou 81]). Ce code est particulièrement adapté au balayage vidéo.

IV.3.2. Codages du contour

* Code interpolé du contour

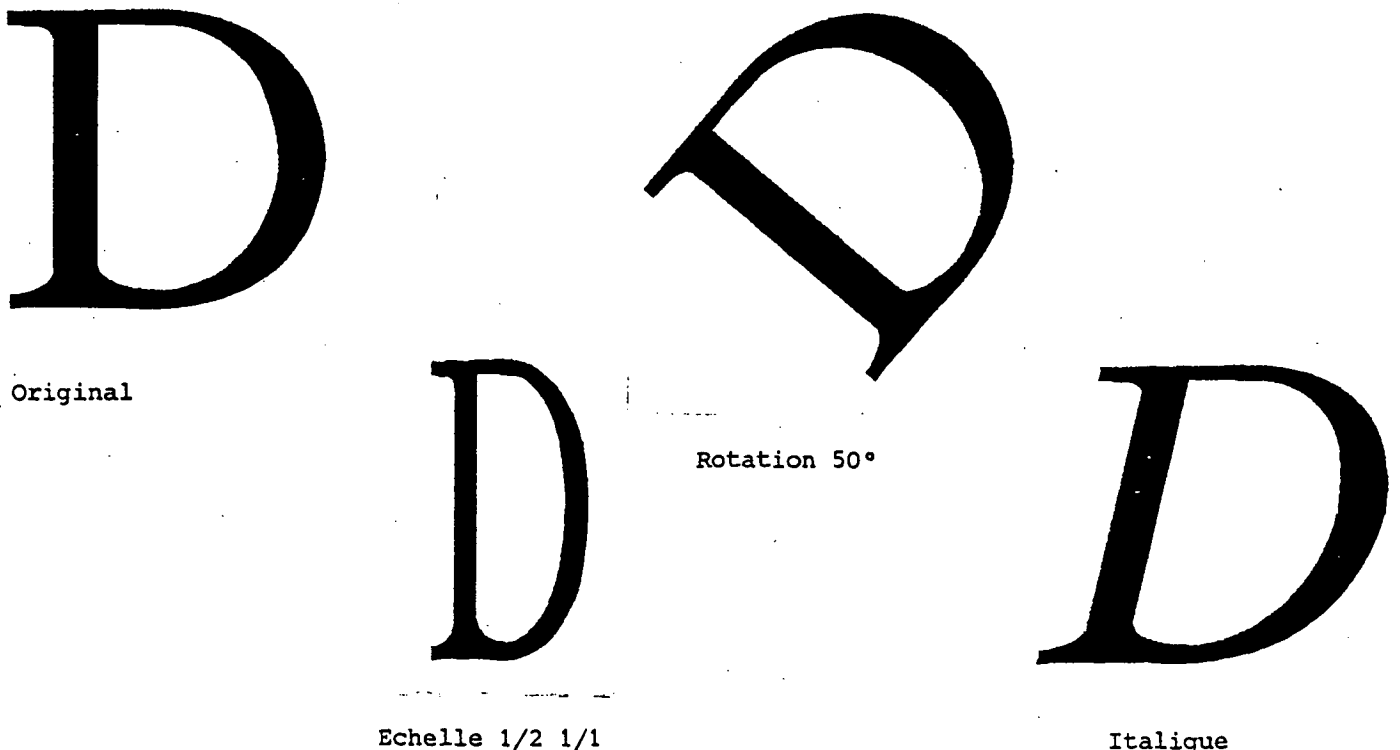
Le contour est considéré comme la concaténation de segments de droites et d'arc de coniques :

C'est à partir de ce codage que l'équipe communications visuelles de l'Ecole des Mines de Saint-Etienne a développé un générateur de caractères (cf. [Blo 81] et [Sic 82]).

Dans ce cas, les caractères sont représentés par la suite des coordonnées des extrémités des arcs de coniques et des segments de droite. Lors de la génération des caractères, les arcs de conique et les segments de droite sont engendrés par les algorithmes de Bresenham et de Horner ([Bre 77] et [Hor 77]).

Lorsque l'on désire appliquer une transformation telle que rotation ou changement d'échelle, les nouvelles coordonnées sont calculées à partir des coordonnées initiales.

La figure 11 donne des exemples des résultats obtenus tirés de [Sic 82].



Piller et Widner [PWi 80] dans leur étude de génération de courbes et vecteurs par utilisation de calculateurs parallèles, indiquent qu'il est possible de générer des caractères par ce type de codage et notamment de leur appliquer des rotations.

Mais ils passent sous silence la manière dont est précisément mis en oeuvre un tel système de génération.

IV.3.3. Codage de la structure

* Squelettes : le caractère est codé par son squelette et par une fonction qui en définit l'épaisseur en tout point.

Ce codage est utilisé par Knuth [Knu 79].

IV.4. Conclusion

Aujourd'hui la génération de caractères de haute qualité ne pose plus aucun problème, comme le montrent les exemples précédents.

Les méthodes de génération d'arcs de cercles et de segments de droites trouvent ici un domaine d'application intéressant, puisqu'elles permettent de diminuer la taille mémoire nécessaire au stockage des données et néanmoins d'engendrer de manière très satisfaisante du point de vue esthétique les caractères.

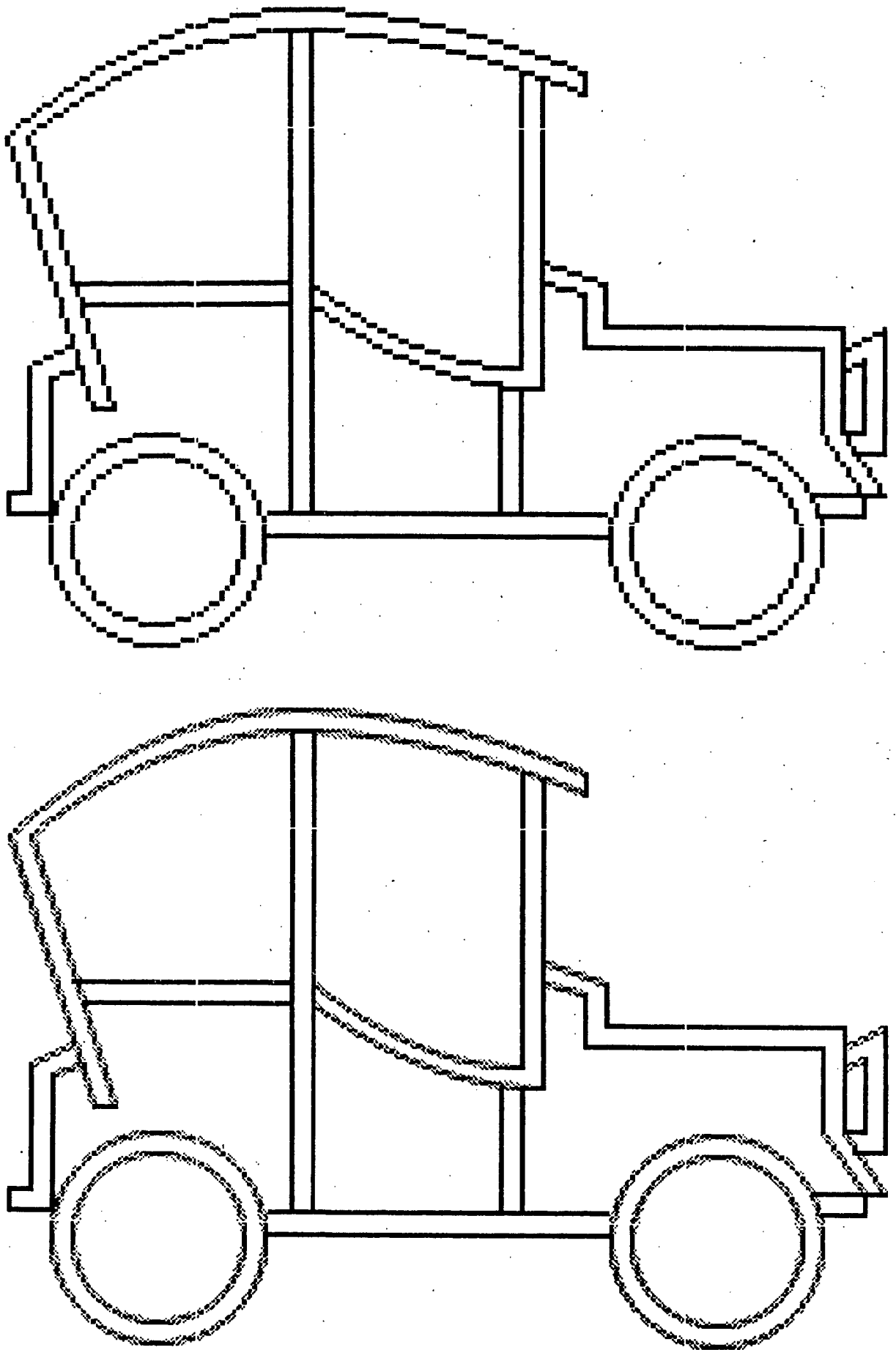


Figure 11 : Exemple d'élimination des effets d'escalier par le procédé de Bresenham pour le dessin au trait.

CONCLUSION

Le problème d'élimination des effets d'escalier dans le cas du dessin au trait est donc résolu.

Nous avons vu qu'il existe de nombreux procédés donnant des résultats très satisfaisants par utilisation des possibilités offertes par le matériel actuellement à notre disposition.

Nous avons montré qu'il était possible d'obtenir des dessins au trait corrects (cf. Figure 11) (puisque l'on peut toujours se ramener à des arcs de coniques ou à des segments de droite par approximation des courbes que l'on souhaite tracer), sans utiliser des techniques aussi sophistiquées que celles basées sur l'utilisation de fonctions filtres ; l'intérêt de la méthode étudiée étant justement qu'elle n'utilise, pour calculer les intensités, aucune variable extérieure à celles disponibles dans les algorithmes produisant des effets d'escalier.

Un prolongement logique de cette étude serait d'essayer d'appliquer cette technique aux contours de tâches lorsque ceux-ci sont simples ie pour des images de faible qualité.

Le procédé de Bresenham serait appliqué comme une technique locale d'amélioration de l'image, par opposition aux techniques globales qui traitent l'image dans son ensemble. Ici, seul le contour des objets serait traité.

Pour donner un aperçu de ce que donnerait l'emploi de cette technique nous l'avons testée sur un exemple.

Nous avons utilisé l'algorithme de remplissage de tâches de Smith [Smi 79].

Au départ, nous l'avons appliqué tel quel, après avoir déterminé le contour des tâches avec l'algorithme donné en III.3.3. Mais le résultat n'était pas satisfaisant comme le montre la figure 12.

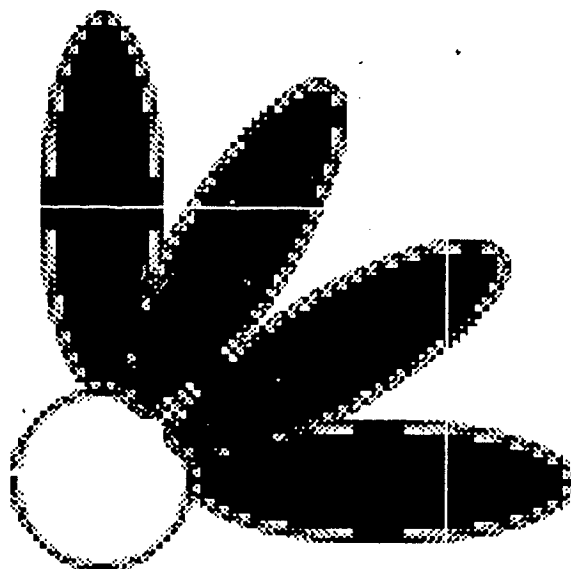


Figure 12 : Application du procédé de Bresenham aux contours des tâches.
L'algorithme de remplissage de tâches n'a pas été modifié.

Alors, nous avons tenu compte du fait que tous les points du contour étaient "ignorés" et donc que lors du remplissage de la tâche, les points du contour ayant une faible intensité donnent ces impressions de "trous".

Nous avons introduit une modification mineure dans le "balayage droite-gauche" de chaque ligne :

tant que le point du contour n'était un point extrême de la ligne (ie le plus à gauche ou le plus à droite) lui était attribuée la même intensité qu'à un point intérieur.

Si cette modification a donné une nette amélioration, elle a eu le défaut de faire réapparaître des effets d'escalier (cf. Figure 13) et de laisser subsister quelques impressions de "trous".

Nous avons alors pris en compte l'intensité attribuée aux points du contour :

lorsque l'intensité d'un point "extrême" était inférieure à un certain seuil, le point contigu appartenant à la même ligne conservait son intensité initiale.



Figure 13 : Application du procédé de Bresenham aux contours des tâches. Résultats obtenus après une 1ère modification de l'algorithme de remplissage de tâches.

Le résultat obtenu fut alors satisfaisant (cf. Figure 14).

On voit donc que ce procédé d'élimination des effets d'escalier est généralisable aux images de faible qualité esthétique, et que cette généralisation ne nécessite que des modifications mineures de l'algorithme de remplissage de tâches utilisées.

Pour des images de ce type, il est donc possible d'obtenir des résultats satisfaisants en utilisant un procédé très simple au niveau de la mise en oeuvre. (et donc sans avoir recours à des procédés d'amélioration globale de l'image)

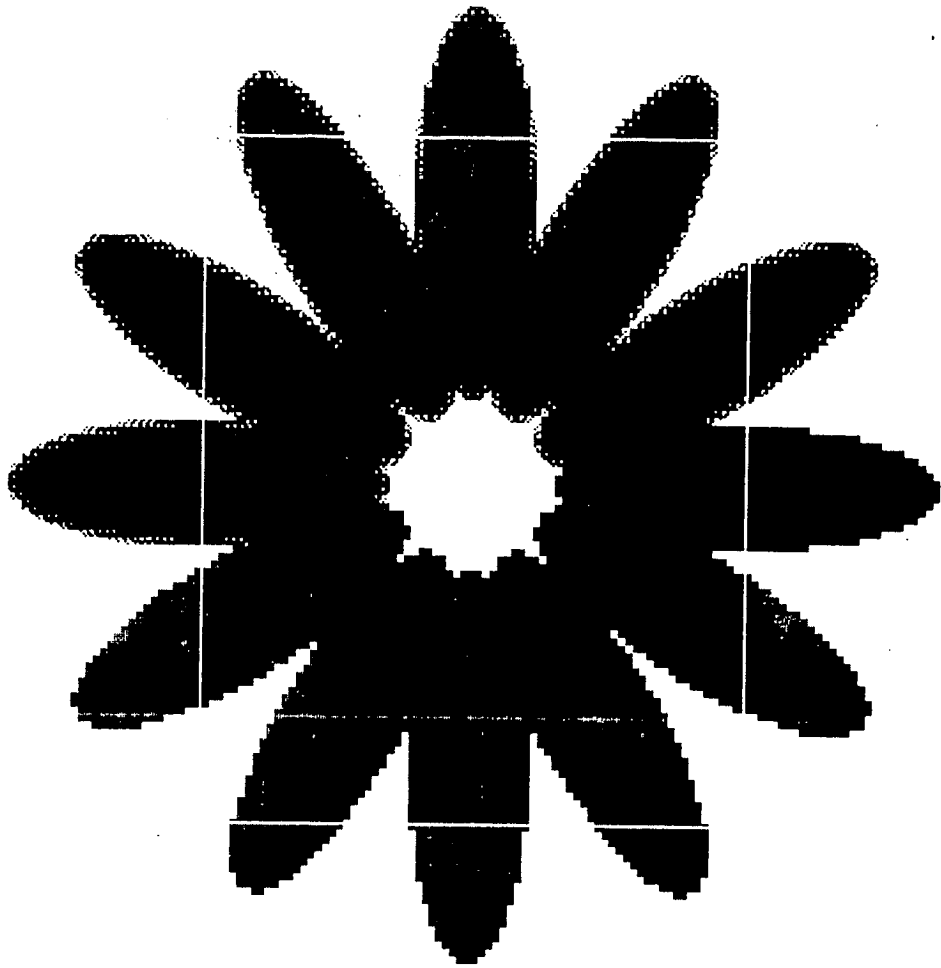


Figure 14 : Application du procédé de Bresenham pour l'élimination des effets d'escalier aux méthodes de remplissage de tâches.

ANNEXE - Simulation de grisés

0. Introduction

Les algorithmes traitant les effets d'escalier sont conçus pour être appliqués à des écrans à luminosité variable.

Ne disposant pas d'un tel matériel, nous avons eu recours à la simulation. Nous détaillons ici la technique utilisée.

1. Méthode utilisée

Parmi les différentes méthodes couramment utilisées (cf. [JJN 76]) nous avons retenu la méthode dite "ordered-dither", celle-ci étant la plus adaptée au cas du dessin au trait et la plus facile à mettre en oeuvre.

L'idée de base de cette méthode est de remplacer un point-écran par des points contigus formant une matrice carrée $n \times n$.

Ici, nous avons choisi $n=3$, ce qui nous donne 10 niveaux d'intensité.

Une conséquence non négligeable de ce procédé sera la diminution du pouvoir de résolution de l'écran. (dans ce cas, il sera divisé par $n^2=9$).

La technique de cette méthode est la suivante :

- à chaque point (r,q) que l'on désire afficher est associée une intensité de luminosité I_n .

- l'affichage des n^2 points-écran correspondants s'effectue par comparaison de l'intensité I_n avec la valeur donnée par la matrice de référence L_n :

Si $I_n > L_n(i,j)$

alors le point-écran $(3*r+i, 3*q+2-j)$
est allumé

sinon ce point-écran est éteint.

Dans les diverses publications présentant la méthode dite "ordered-dither", les matrices de référence L_n sont données pour $n=2P$.

Nous avons alors construit la matrice $L(3 \times 3)$ en essayant de nous conformer à l'allure générale des matrices $2p$. Nous avons obtenu la matrice suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Elimination des effets secondaires apparus

De l'emploi de cette unique matrice résultent des effets de torsade et des effets qui détériorent la symétrie des courbes (notamment dans le cas des ellipses). La Figure 1 montre les résultats peu concluants obtenus.

Nous avons donc été amenés à tenir compte de "l'orientation" des courbes tracées.

En conséquence, nous sommes passés de 1 à 4 matrices de référence, de telle sorte que chacune d'elles soit associée à une des 4 "orientations" possibles, à savoir :

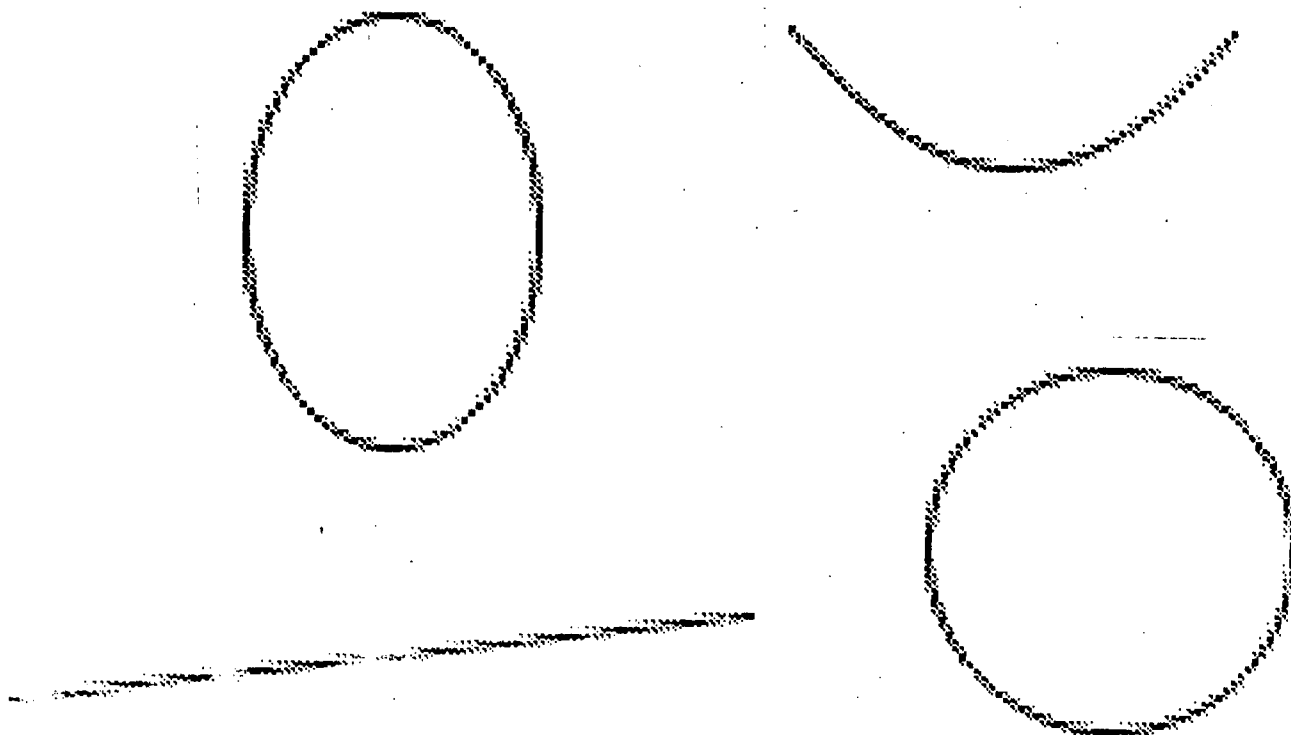


Figure 1 : Effets secondaires provenant de l'utilisation d'une unique matrice de référence.

$$L1 = L = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ associée aux 3ème et 4ème octants}$$

$$L2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ associée aux 7ème et 8ème octants}$$

$$L3 = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ associée aux 1er et 2ème octants}$$

$$L4 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ associée aux 5ème et 6ème octants}$$

Mais ceci ne suffirait pas à préserver la symétrie des courbes.

Aussi, nous avons utilisé le fait que les algorithmes de tracé utilisés nous donnaient la position des points secondaires relativement aux points principaux.

Nous avons alors adopté la "stratégie" suivante :

- au point principal P est associé l'indice de la matrice de référence correspondant à l'octant auquel il appartient (cet indice est noté Ilb)

- au point S est associé l'un des 4 indices des matrices de référence, ceci en fonction de la position de S par rapport à P ainsi que de l'indice Ilb.

Ces affectations s'effectueront de la manière suivante :

	3ème et 4ème octants	7ème et 8ème octants	1er et 2ème octants	5ème et 6ème octants
Ilb indice associé à P	1	2	3	4
Ilc S au-dessus de P	2	2	3	3
Ile S au-dessous de P	1	1	4	4
Ild S à droite de P	1	1	3	3
Ilg S à gauche de P	2	2	4	4

Les mises à jour de Ilb, Ilc, Ile, Ild et Ilg seront effectuées en même temps que celles des variables d'incrémentations des coordonnées Xinc et Yinc.

L'affichage des points suivra donc l'algorithme ci-dessous :

LUMINOSITE (ENTIER TAB(*,4),NBP,LI(3,3),L2(3,3),L3(3,3),L4(3,3))

début

ENTIER Xe,Ye,Xo,Yo

ENTIER Lx(3,3),In,I1

Pour I ppv 1 à NBP faire

début

Xo ppv TAB(I,1)*3

/* TAB contient les coordonnées,

Yo ppv TAB(I,2)*3+2

l'intensité et l'indice de la

In ppv TAB(I,3)

matrice de référence des points

I1 ppv TAB(I,4)

à afficher */

Suivant car faire

début

I1 = 1 : Lx ppv L1

I1 = 2 : Lx ppv L2

I1 = 3 : Lx ppv L3

I1 = 4 : Lx ppv L4

fin

Ye ppv Yo

Pour k ppv 1 à 3 faire

début

Xe ppv Xo

Pour J ppv 1 à 3 faire

début

Si In > Lx(K,J) alors afficher(Xe,Ye)

Xe ppv Xe + 1

fin

Ye ppv Ye-1

fin

fin

fin LUMINOSITE

3. Conclusion

Après élimination des effets secondaires, la simulation donne une représentation correcte de ce que serait l'image sur un écran à intensité variable.

La figure montre l'amélioration obtenue après utilisation de la solution proposée en -2-.

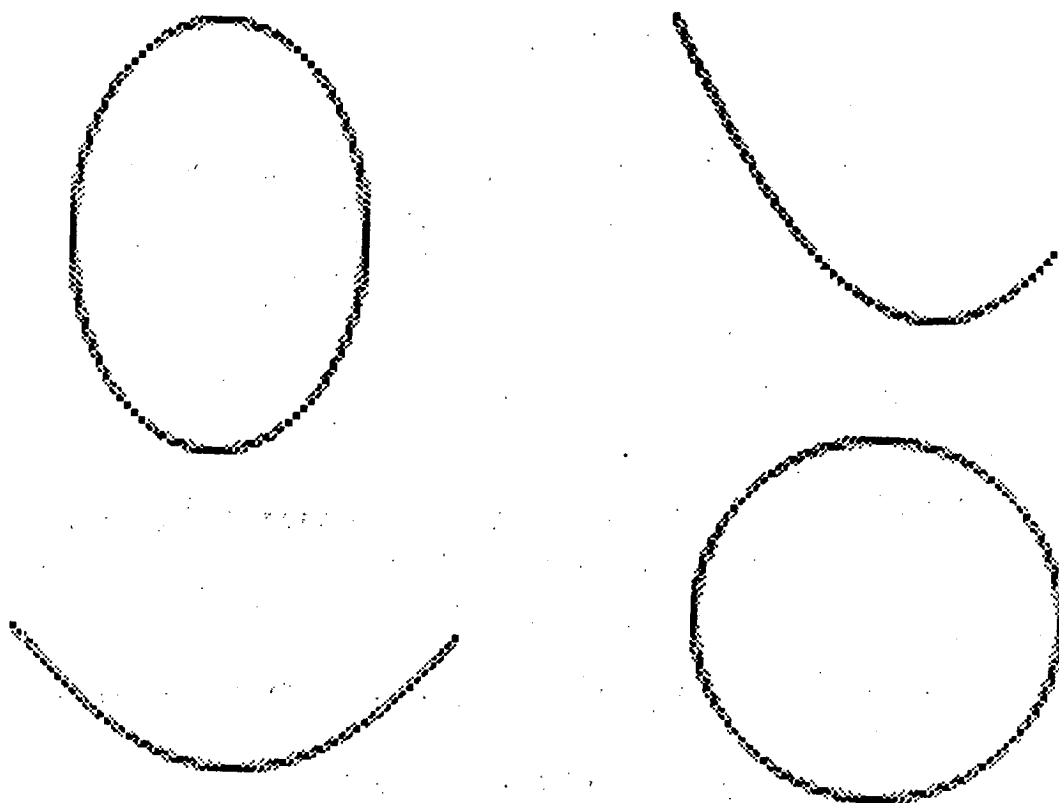


Figure 2 : Simulation des niveaux de grisée après élimination des effets secondaires.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Blo 81] M. BLOCH
Génération de taches bicolores - Application aux caractères d'imprimerie - Problèmes de nature ordinale.
Thèse Docteur-Ingénieur, St-Etienne, Juillet 1981.
- [Bre 77] J.E. BRESENHAM
A linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
CACM, vol. 20, n° 1, Janvier 1977.
- [Bre 65] J.E. BRESENHAM
Algorithm for Computer Control of a Digital Plotter.
IBM System Journal, vol. 4, n° 1, 1965.
- [Cou 81] P. COUEIGNOUX
Character generation by computer.
CGIP, 16, pp. 240-269, 1981.
- [Cro 77] F.C. CROW
The Aliasning Problem in Computer-Generated Shaded Images.
CACM, vol. 20, n° 11, Novembre 1977.
- [Cro 78] F.C. CROW
The Use of Grayscale for Improved Raster Display of Vectors and Characters.
Computer Graphics - SIGGRAPH ACM, 1978.
- [Dan 70] P. DANIELSSON
Incremental Curve Generation.
IEEE Trans. Comp. vol. C-19, n° 9, Septembre 1970.
- [Ear 77] R.A. EARNshaw
Line-Tracking for Incremental and Raster Devices.
Computer Graphics - SIGGRAPH ACM, vol. 11, n° 2, Summer 1977.

93
[Gra 80] M. GRAVE

Etude d'un noyau de système de synthèse d'images. Application à la visualisation de scènes tridimensionnelles.

Thèse de Docteur-Ingénieur, Lille, Décembre 1980.

[GSp 81] S. GUPTA - R.F. SPROULL

Filtering Edges for Gray-Scale Displays.

Computer Graphics - SIGGRAPH ACM vol. 15, n° 3, Août 1981.

[HeR 82] G. HEGRON - M.A. ROY

Techniques de Génération de courbes sur une surface à pointillage.

Convention P et T n° 82 35 068 - Rapport Recherche IMI-Info n° 4 - Nantes, Septembre 1982.

[Hor 77] B. HORN

Circle Generation for display devices.

CGIP, vol. 6, pp. 196-198, 1977.

[JJN 76] J.F. JARVIS - C.N. JUDICE - W.H. NINKE

A Survey of Techniques for the Display of Continuous Tone Pictures on Bilevel Displays.

Computer Graphics and Image Processing, vol. 5, 1976.

[JLH 73] B.W. JORDAN - W.J. LENNON - B.D. HOLM

An Improved Algorithm for Generation of non Parametric Curves.

IEEE Trans. Comp. vol. C-22, n° 12, Décembre 1973.

[KaU 81] J. KAJIYA - M. ULLNER

Filtering High Quality Text for Display on Raster Scan Devices.

Computer Graphics ACM vol. 15, n° 3, Août 1981.

[Knu 79] D. KNUTH

METAFONT, A System for Character Shaping.

Stanford Artificial Intelligence Laboratory. Report n° STAN-CS-79-000, 1979.

[Le1 80] W.J. LELER

Human vision, Anti-Aliasing and the Cheap 4000 Line Display.

Computer Graphics - SIGGRAPH ACM, 1980.

- 3
- [Luc 77b] M. LUCAS
Contribution à l'étude des techniques de communication graphique avec un ordinateur. Eléments de base des logiciels interactifs.
Thèse de Doctorat d'Etat, Grenoble, Décembre 1977.
- [Pit 78] M.L.V. PITTEWAY
On Filtering Edges for Grey-Scale Displays.
Computer Graphics SIGGRAPH-ACM, vol. 15, n° 4, Décembre 1981.
- [Pit 67] M.L.V. PITTEWAY
Algorithms for Drawing Ellipses or Hyperbolae with a digital Plotter.
The comptr. J.10, Novembre 1967.
- [PiW 80] M.L.V. PITTEWAY - D.J. WARTKINSON
Bresenham's Algorithm with Grey-Scale.
CACM, vol. 23, n° 11, Novembre 1980.
- [PWi 80] E. PILLER - H. WIDNER
Real-Time Raster Scan Unit with Improved Picture Quality.
Computer Graphics, vol. 14, n°s 1 et 2, Juillet 1980.
- [Roy 82] M.A. ROY
Etude comparative d'Algorithmes pour l'amélioration de dessins au trait sur surface point par point.
Rapport de D.E.A., Université de Rennes et de Nantes, Juin 1982.
- [Sic 82] C. SICO
Génération de taches bicolores - Applications aux caractères d'imprimerie - Problème de nature géométrique.
Thèse de Docteur-Ingénieur, St-Etienne, Mars 1982.
- [Smi 79] A.R. SMITH
Tint Fill.
CACM Prsc. SIGGRAPH, Août 1979.
- [War 80] J.E. WARNOCK
The Display of Characters Using Gray Level Sample Arrays.
Computer Graphics SIGGRAPH-ACM, 1980.
- [Wei 80] C.F.R. WEIMAN
Continuous Anti-Aliased Rotation and Zoom of Ractor Images.
Computer Graphics SIGGRAPH-ACM, 1980.

35
[WiW 82] A.J. WILKES et N.E. WISEMAN

A Soft-edged Character Set and its Derivation.

The Computer Journal, vol. 25, n° 1, 1982.

Liste des Publications Internes IRISA

- PI 150 **Construction automatique et évaluation d'un graphe d'«implication» issu de données binaires, dans le cadre de la didactique des mathématiques**
H. Rostam , 112 pages ; Juin 1981
- PI 151 **Réalisation d'un outil d'évaluation de mécanismes de détection de pannes]-Projet Pilote SURF**
B. Decouty, G. Michel, C. Wagner, Y. Crouzet , 59 pages ; Juillet 1981
- PI 152 **Règle maximale**
J. Pellaumail , 18 pages ; Septembre 1981
- PI 153 **Corrélation partielle dans le cas « qualitatif »**
I.C. Lerman , 125 pages ; Octobre 1981
- PI 154 **Stability analysis of adptively controlled not-necessarily minimum phase systems with disturbances**
Cl. Samson , 40 pages ; Octobre 1981
- PI 155 **Analyses d'opinions d'instituteurs à l'égard de l'appropriation des nombres naturels par les élèves de cycle préparatoire**
R. Gras , 37 pages ; Octobre 1981
- PI 156 **Récursion induction principe revisited**
G. Boudol, L. Kott , 49 pages ; Décembre 1981
- PI 157 **Loi d'une variable aléatoire à valeur R^+ réalisant le minimum des moments d'ordre supérieur à deux lorsque les deux premiers sont fixés**
M.Kowalowka, R. Marie , 8 pages ; Décembre 1981
- PI 158 **Réalisations stochastiques de signaux non stationnaires, et identification sur un seul échantillon**
A. Benveniste J.J. Fuchs , 33 pages ; Mars 1982
- PI 159 **Méthode d'interprétation d'une classification hiérarchique d'attributs-modalités pour l'«explication» d'une variable ; application à la recherche de seuil critique de la tension artérielle systolique et des indicateurs de risque cardiovasculaire**
B. Tallur , 34 pages ; Janvier 1982
- PI 160 **Probabilité stationnaire d'un réseau de files d'attente multiclasse à serveur central et à routages dépendant de l'état**
L.M. Le Ny , 18 pages ; Janvier 1982
- PI 161 **Détection séquentielle de changements brusques des caractéristiques spectrales d'un signal numérique**
M. Basseville, A. Benveniste , pages ; Mars 1982
- PI 162 **Actes regroupés des journées de Classification de Toulouse (Mai 1980), et de Nancy (Juin 1981)**
I.C. Lerman , 304 pages ;
- PI 163 **Modélisation et Identification des caractéristiques d'une structure vibratoire : un problème de réalisation stochastique d'un grand système non stationnaire**
M. Prévosto, A. Benveniste, B. Barnouin , 46 pages ; Mars 1982
- PI 164 **An enlarged definition and complete axiomatization of observational congruence of finite processes**
Ph. Darondeau , 45 pages ; Avril 1982
- PI 165 **Accès vidéotex à une banque de données médicales**
A. Chauffaut, M. Dragone, R. Rivoire, J.M. Roger , 25 pages ; Mai 1982
- PI 166 **Comparaison de groupes de variables définies sur le même ensemble d'individus**
B. Escofier, J. Pages , 115 pages ; Mai 1982
- PI 167 **Transport en circuits virtuels internes sur réseau local et connexion Transpac**
M. Tournois, R. Trépos , 90 pages ; Mai 1982
- PI 168 **Impact de l'intégration sur le traitement automatique de la parole**
P. Quinton , 14 pages ; Mai 1982
- PI 169 **A systolic algorithm for connected word recognition**
J.P. Banâtre, P. Frison, P. Quinton , 13 pages ; Mai 1982
- PI 170 **A network for the detection of words in continuous speech**
J.P. Banâtre, P. Frison, P. Quinton , 24 pages ; Mai 1982
- PI 171 **Le langage ADA : Etude bibliographique**
J. André, Y. Jégou, M. Raynal , 12 pages ; Juin 1982
- PI 172 **Comparaison de groupes de variables : 2ème partie : un exemple d'application**
B. Escofier, J. Pajès , 37 pages ; Juillet 1982
- PI 173 **Unfold-fold program transformations**
L. Kott , 29pages ; Juillet 1982
- PI 174 **Remarques sur les langages de parenthèses**
J.M. Autebert, J. Beauquier, L. Boasson, G. Senizergues , 20 pages ; Juillet 1982
- PI 175 **Langages de parenthèses, langages N.T.S. et homomorphismes inverses**
J.M. Autebert, L. Boasson, G. Senizergues , 26 pages ; Juillet 1982
- PI 176 **Tris pour machines synchrones ou Baudet Stevenson revisited**
R. Rannou , 26 pages ; Juillet 1982
- PI 177 **Un nouvel algorithme de classification hiérarchique des éléments constitutifs de tableau de contingence basé sur la corrélation**
B. Tallur , Juillet 1982 ;
- PI 178 **Programmes d'analyse des re'sultats d'une classification automatique**
I.C. Lerman et collaborateurs , 79 pages ; Septembre 1982
- PI 179 **Attitude à l'égard des mathématiques des élèves de sixième**
J.Degouys, R. Gras, M. Postic , 29 pages ; Septembre 1982
- PI 180 **Traitements de textes et manipulations de documents : bibliographie analytique**
J. André , 20 pages ; Septembre 1982

- PI 181 **Algorithme assurant l'insertion dynamique d'un processeur autour d'un réseau à diffusion et garantissant la cohérence d'un système de numérotation des paquets global et réparti**
Annick Le Coz, Hervé Le Goff, Michel Ollivier , 31 pages ; Octobre 1982
- PI 182 **Interprétation non linéaire d'un coefficient d'association entre modalités d'une juxtaposition de tables de contingence**
Israël César Lerman , 34 pages ; Novembre 1982
- PI 183 **L'IRISA vu à travers les stages effectués par ses étudiants de DEA (1^{ère} année de thèse)**
Daniel Herman , 41 pages ; Novembre 1982
- PI 184 **Commande non linéaire robuste des robots manipulateurs**
Claude Samson , 52 pages ; Janvier 1983
- PI 185 **Dialogue et représentation des informations dans un système de messagerie intelligent**
Philippe Besnard, René Quiniou, Patrice Quinton, Patrick Saint-Dizier, Jacques Siroux, Laurent Trilling , 45 pages ; Janvier 1983
- PI 186 **Analyse classificatoire d'une correspondance multiple ; typologie et régression**
I.C. Lerman , 54 pages ; Janvier 1983
- PI 187 **Estimation de mouvement dans une sequence d'images de télévision en vue d'un codage avec compensation de mouvement**
Claude Labit , 132 pages ; Janvier 1983
- PI 188 **Conception et réalisation d'un logiciel de saisie et restitution de cartes élémentaires**
Eric Sécher , 45 pages ; Janvier 1983
- PI 189 **Etude comparative d'algorithmes pour l'amélioration de dessins au trait sur surfaces point par point**
M.A. ROY , 96 pages ; Janvier 1983
- PI 190 **Généralisation de l'analyse des correspondances à la comparaison de tableaux de fréquence**
Brigitte Escofier , 35 pages ; Mars 1983
- PI 191 **Association entre variables qualitatives ordinales «nettes» ou «floues»**
Israël-César Lerman , 42 pages ; Mars 1983
- PI 192 **Un processeur intégré pour la reconnaissance de la parole**
Patrice Frison , 80 pages ; Mars 1983
- PI 193
- PI 194 **Régime stationnaire pour une file M/H/1 avec impatience**
Raymond Marie et Jean Pellaumail , 8 pages ; Mars 1983
- PI 195 **SIGNAL : un langage pour le traitement du signal**
Paul Le Guernic, Albert Benveniste, Thierry Gautier , 49 pages ; Mars 1983
- PI 196 **Algorithmes systoliques : de la théorie à la pratique**
Françoise André, Patrice Frison, Patrice Quinton , 19 pages ; Mars 1983

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

