



**HAL**  
open science

## Le schema G-k/2 pour les lois de conservation scalaires

B. Cockburn

► **To cite this version:**

B. Cockburn. Le schema G-k/2 pour les lois de conservation scalaires. RR-0354, INRIA. 1985. inria-00076203

**HAL Id: inria-00076203**

**<https://inria.hal.science/inria-00076203>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**IRIA**

**CENTRE DE ROCQUENCOURT**

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tél. (3) 954 90 20

*Collection*

Rapports de Recherche

N° 354

**LE SCHÉMA G-k/2  
POUR LES LOIS  
DE CONSERVATION SCALAIRES**

**Bernardo COCKBURN**

**Janvier 1985**

LE SCHEMA G-k/2 POUR LES LOIS DE  
CONSERVATION SCALAIRES

*Bernardo COCKBURN*

## RESUME

On construit la famille de schémas d'ordre supérieur  $G-k/2$  aux éléments finis discontinus pour les équations de conservation scalaires. Ces schémas se présentent comme des extensions des schémas de Godunov et LRG- $k$ . A chaque pas de temps, ils procèdent en deux étapes, une étape d'antidiffusion suivie d'une étape de projection. On démontre la convergence de la solution calculée par le schéma  $G-k/2$  vers la solution entropique et on présente des comparaisons numériques avec d'autres schémas.

## ABSTRACT

We derive the family of higher order schemes  $G-k/2$  using discontinuous finite elements for scalar conservation laws. These schemes are extensions of Godunov and LRG- $k$  schemes. Each time step consists in an antidiffusion step followed by a projection step. We prove convergence of the solution calculated by  $G-k/2$  towards the entropic solution and we present numerical comparisons with other schemes.

## MOTS CLES

Lois de conservation - Equations hyperboliques non linéaires - Elements finis.

## KEY WORDS

Conservation laws - Nonlinear hyperbolic equations - Finite elements.

## I - INTRODUCTION

### 1.1 - Un nouveau schéma numérique pour l'équation de conservation scalaire

Dans ce travail on propose et on analyse un nouveau schéma pour résoudre numériquement l'équation de conservation scalaire 1D.

$$(1.1) \quad \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad \text{dans } Q = ]0, L[ \times ]0, T[$$

qui doit être complétée par une condition initiale et des conditions aux bords adéquates.

Pour résoudre numériquement cette équation de nombreux schémas ont été proposés. Les plus populaires sont les *schémas aux différences finies, monotones* (explicites), dont la solution converge vers la solution entropique de (1.1), [6]. Dans [11] on remarque que cette popularité est due en partie à la possibilité d'atteindre une très bonne résolution des *discontinuités stationnaires*. Par contre, ces schémas, forcément d'ordre 1, diffusent beaucoup au niveau des *discontinuités qui se déplacent*, ce qui conduit à un étalement du choc. D'où la nécessité d'introduire des schémas d'ordre supérieur.

Boris, Book et Hain [1] d'une part et Van Leer [13, 14] d'autre part ont introduit des schémas d'ordre supérieur permettant de bien approcher les chocs.

Le Roux [18] en s'inspirant des travaux de Boris, Book et Hain montre comment modifier le schéma de Godunov par celui de Lax-Wendroff tout en gardant les propriétés de positivité, de monotonie et de non-croissance de la variation propriétés vérifiées par le schéma de Godunov. Il démontre que ce schéma, quasi d'ordre 2, génère une solution qui converge vers la solution entropique de (1.1).

Le Roux [18] utilise les *différences finies*. Dans le but d'appliquer ses idées aux *éléments finis* on a construit un schéma qui est une modification du schéma de Godunov et que l'on appelle schéma G-k/2. Ce schéma, d'ordre 1 en temps, coïncide avec le schéma de Godunov aux niveaux des chocs et avec le schéma LRG-k là où la solution est régulière. Le schéma LRG-k est un schéma obtenu à l'aide d'une méthode d'éléments finis non-conformes (de degré 0 en temps et de degré k en espace) qui généralise le schéma intro-

duit par Lesaint et Raviart [16] pour la résolution de l'équation de transport de neutrons, une équation hyperbolique linéaire. Ce schéma sera présenté au paragraphe II, voir aussi [2].

Le schéma G-k/2 possède deux étapes à chaque pas de temps,

- (i) l'étape d'*antidiffusion*, qui s'inspire du travail de Le Roux [18], dans laquelle on calcule seulement les *moyennes* de la solution sur chaque élément.
- (ii) l'étape de *projection*, qui présente des similitudes avec la projection de Van Leer [13], destinée à calculer le reste de degrés de liberté tout en gardant les propriétés de la solution obtenues à l'étape précédente.

La caractéristique principale de ce schéma est que les propriétés de monotonie et de non-croissance de la variation relatives au schéma de Godunov sont vérifiées par les *moyennes* de la solution (et non par la solution elle-même) pourvu que la condition suivante :

$$\text{CFL} \leq \frac{1}{2}$$

soit vérifiée (indépendamment de k). La solution donnée par G-k/2 converge vers la solution entropique de (1.1).

Dans ce travail on propose et on analyse le schéma G-k/2. Des comparaisons numériques du schéma G- $\frac{1}{2}$  avec le schéma de Godunov et le schéma LRG-1 sont présentées. Des comparaisons avec les schéma de Roe-modifié, [11] ou [15], le schéma MUSCL, [14] ou [19], et d'autres sont faites dans [2]. Signalons seulement que G- $\frac{1}{2}$  est moins diffusif que MUSCL, [19], étant donné qu'il se permet d'avoir des pentes deux fois plus fortes que celles admises pour MUSCL.

## 1.2.- Précisions sur le problème continu

Dans ce travail on va considérer que  $u$  est solution de l'équation (1.1), de la condition initiale,

$$(1.2) \quad u(x, t=0) = u^0(x) \quad \forall x \in ]0, T[$$

et des conditions aux bords suivantes :

$$(1.3) \quad \begin{cases} u(x=0, t) = u_0(t) & \forall t \in ]0, T[ \\ u(x=L, t) = u_L(t) & \forall t \in ]0, T[ \end{cases}$$

Plus précisément, on dira que  $u$  est (l'unique) solution entropique de (1.1) (1.2) et (1.3) si

- $u \in BV(Q)$
- $\forall \phi \in \mathcal{D}(Q), \phi \geq 0, \forall k \in \mathbb{R},$

$$(1.4) \quad \int_Q \left\{ |u-k| \partial_t \phi + \text{signe}(u-k) |f(u)-f(k)| \partial_x \phi \right\} dx dt \geq 0$$

- $u$  satisfait (1.2) pour  $x$  pp. dans  $]0, L[$
- $\forall t \in ]0, T[$

$$\text{signe}(u_0(t) - u(x=0^+, t)) \cdot (f(u(x=0^+, t)) - f(k)) \leq 0$$

$$k = \theta u(x=0^+, t) + (1-\theta) u_0(t) \quad \forall \theta \in [0, 1]$$

$$\text{signe}(u(x=L^-, t) - u_L(t)) \cdot (f(u(x=L^-, t)) - f(k)) \leq 0$$

$$k = \theta u(x=L^-, t) + (1-\theta) u_L(t) \quad \forall \theta \in [0, 1]$$

### 1.3 - Plan

Au paragraphe II, on décrit le schéma LRG- $k$  et on signale quelques unes de ses propriétés plus importantes pour le cas  $k=0$  et  $k=1$ .

Au paragraphe III, on construit et on analyse le schéma G- $k/2$ . Au paragraphe IV on montre quelques expériences numériques dont le but est de comparer les schémas de Godunov, G- $\frac{1}{2}$  et LRG-1. Les conclusions se trouvent au paragraphe V.

## II - LE SCHEMA LRG-k

### 2.1 - Orientation

Au paragraphe 2.2 on décrit le schéma LRG-k. Pour  $k=0$  ce schéma est le schéma de Godunov dont quelques propriétés sont rappelées au paragraphe 2.3. Finalement, au paragraphe 2.4 on considère le schéma LRG-1 : on indique quelques unes de ses propriétés les plus importantes et on signale les difficultés rencontrées dans son étude.

### 2.2 - Obtention du schéma

D'abord, on introduit quelques notations à utiliser par la suite :

Soient,  $\left\{ x_i \right\}_{i=0}^{N_x}$  et  $\left\{ t^n \right\}_{i=0}^{N_t}$  deux

partitions de  $[0,L]$  et  $[0,T]$  respectivement. On suppose évidemment que l'on a,

$$\begin{cases} 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_x-2} < x_{N_x-1} = L \\ 0 = t^0 < t_1 < \dots < t^{N_t-2} < t^{N_t-1} = T \end{cases}$$

et on pose,

$$\begin{cases} \Delta_{i+1/2} = (x_{i+1} - x_i) & 0 \leq i \leq N_x-1 \\ \Delta^{n+1/2} = (t^{n+1} - t^n) & 0 \leq n \leq N_t-1 \end{cases}$$

Ensuite, on pose

$$\begin{cases} K_i = ]x_i, x_{i+1}[ & 0 \leq i \leq N_x-1 \\ V_k = \{v \in L^2(0,L) : v|_{K_i} \in P^k \quad 0 \leq i \leq N_x-1\} \end{cases}$$

## TABLE DES MATIERES

	<i>Pages</i>
I - INTRODUCTION .....	1
1.1 - Un nouveau schéma numérique pour l'équation de conservation scalaire .....	1
1.2 - Précisions sur le problème continu .....	2
1.3 - Plan.....	3
II - LE SCHEMA LRG-k .....	4
2.1 - Orientation .....	4
2.2 - Obtention du schéma.....	4
2.3 - Quelques propriétés du schéma LRG-0 .....	6
2.4 - Quelques propriétés du schéma LRG-1 .....	8
III - LE SCHEMA G-k/2 .....	11
3.1 - Orientation .....	11
3.2 - Obtention du schéma . Première étape: calcul des moyennes .....	11
3.3 - Etude du schéma pour les moyennes .....	15
3.4 - Obtention du schéma. Deuxième étape : phase de projection .....	35
3.5 - Ecriture des schémas G-1/2 et G-1 .....	37
IV - EXPERIENCES NUMERIQUES (SCHEMA G-1/2) .....	44
4.1 - Introduction .....	44
4.2 - Approximation d'une discontinuité de contact .....	44
4.3 - Approximation d'un choc .....	51
4.4 - Le cas $u \rightarrow f(u)$ non-monotone .....	64
V - CONCLUSION .....	80
VI - BIBLIOGRAPHIE .....	81

De plus, il vérifie la propriété de non-croissance suivante,

$$(2.5) \left\{ \begin{aligned} \|u_h^{n+1/2}\|_{BV} &= \sum_{i=0}^{N_x} |u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^{n-1/2}| \\ &\leq \|u_h^{n-1/2}\|_{BV} + |u_{-1/2}^{n+1/2} - u_{-1/2}^{n-1/2}| + \\ &\quad + |u_{N_x+1/2}^{n+1/2} - u_{N_x+1/2}^{n-1/2}| \\ 0 \leq n &\leq N_t - 1 \end{aligned} \right.$$

En outre, quand  $h \rightarrow 0$  tout en vérifiant la condition (2.3) (de stabilité) le schéma est  $L^\infty(0,T;L^\infty(0,L))$ ,  $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$  et  $L^\infty(0,T;BV(0,L))$  - stable • (BV = espace des fonctions à variations bornées) et quand la condition initiale  $u_0$  appartient à  $L^\infty(0,L) \cap BV(0,L)$  ce que dorénavant on va supposer,  $u_h$  converge dans  $L^1(Q)$  vers la solution entropique de (1.1), voir [17].

Pour finir ce paragraphe on note que ce schéma diffuse beaucoup au niveau des chocs qui ne sont pas stationnaires, voir [11]. D'où l'intérêt de considérer des schémas d'ordre supérieur.

#### 2.4 - Quelques propriétés du schéma LRG-1

Quand  $k=1$ , les équations (2.1) peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$(2.6) \left\{ \begin{aligned} \forall n &= 0, 1, \dots, N_t - 1 \\ \forall i &= 0, 1, \dots, N_x - 1 \\ u_i^{+n+1/2} &= u_i^{+n-1/2} - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ 6 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u_h^{n-1/2}(x)) \cdot \frac{dx}{\Delta_{i+1/2}} - (2f(\xi_{i+1}^{n-1/2}) + 4f(\xi_i^{n-1/2})) \right\} \\ u_i^{-n+1/2} &= u_i^{-n-1/2} + \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ 6 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u_h^{n-1/2}(x)) \cdot \frac{dx}{\Delta_{i+1/2}} - (4f(\xi_{i+1}^{n-1/2}) + 2f(\xi_i^{n-1/2})) \right\} \end{aligned} \right.$$

Avant de les énoncer, on complète les équations (2.2) par la condition initiale et les conditions aux bords suivantes :

$$(2.2)' \quad \begin{cases} u_{i+1/2}^{-1/2} = u_h(x_{i+1/2}, t=0^+) & 0 \leq i \leq N_x-1 \\ u_{-1/2}^{n+1/2} = u_h(x=0^-, t^{n+1/2}) & -1 \leq n \leq N_t-1 \\ u_{N_x+1/2}^{n+1/2} = u_h(x=L^+, t^{n+1/2}) & -1 \leq n \leq N_t-1 \end{cases}$$

On remarque que les conditions aux bords données servent à calculer les valeurs de Godunov  $\xi_i$  pour  $i=0$  et  $i=N_x$  de la façon indiquée dans (2.2).

On a donc, que le schéma (2.2)-(2.2)' est conservatif,

$$\int_0^L u_h^{n+1/2}(x) dx = \int_0^L u_h^{n-1/2}(x) dx - \Delta^{n+1/2} \left\{ f(\xi_{N_x}^{n-1/2}) - f(\xi_0^{n-1/2}) \right\}$$

et que si la condition de Courant-Friedrichs-Levy,

$$(2.3) \quad \left. \begin{aligned} & \text{CFL} = \sup_{i,n,k} \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} |f'(k)| \leq 1 \\ & \text{où} \\ & k \in [\min \Theta_{i,n}, \max \Theta_{i,n}] \\ & \Theta_{i,n} = \left\{ u_{i+1/2}^{-1/2}, u_{-1/2}^{n+1/2}, u_{N_x+1/2}^{n+1/2} \right\} \\ & 0 \leq i \leq N_x-1 \\ & 0 \leq n \leq N_t-1 \end{aligned} \right\}$$

il est positif et monotone, car on a,

$$(2.4) \quad \left. \begin{aligned} & \min \Theta_{i+1/2}^{n-1/2} \leq u_{i+1/2}^{n+1/2} \leq \max \Theta_{i+1/2}^{n-1/2} \\ & \text{où} \\ & \Theta_{i+1/2}^{n-1/2} = \left\{ \xi_i^{n-1/2}, u_{i+1/2}^{n-1/2}, \xi_{i+1}^{n-1/2} \right\} \\ & 0 \leq i \leq N_x-1 \\ & 0 \leq n \leq N_t-1 \end{aligned} \right\}$$

et finalement,

$$\begin{cases} K^n = ]t^n, t^{n+1}[ \\ V^k = \{v \in L^2(0,T) : v|_{K^n} \in P^k \quad 0 \leq n \leq N_t-1\} \end{cases}$$

On note, comme d'habitude,

$$\begin{cases} g^{n+1/2} = g((t^{n+1} + t^n)/2) \\ g_i^- = \lim_{x \rightarrow x_i} g(x) \\ g_i^+ = \lim_{x \rightarrow x_i} g(x) \end{cases}$$

Alors, avec le schéma LRG-k on cherche une approximation  $u_h$  de la solution  $u$  de (1.1), dans l'espace  $V_h = V_k \times V^0$  solution de,

$$(2.1) \left\{ \begin{array}{l} \forall n = 0, 1, \dots, N_t-1 \\ \forall i = 0, 1, \dots, N_x-1 \\ \forall v \in P^k(K_i) \\ \int_{K_i} u_h^{n+1/2} v \, dx = \int_{K_i} u_h^{n-1/2} v \, dx + \\ \quad + \Delta^{n+1/2} \int_{K_i} f(u_h^{n-1/2}) \partial_x v \, dx - \\ \quad - \Delta^{n+1/2} \{ f(\xi_{i+1}^{n-1/2}) v_{i+1}^- - f(\xi_i^{n-1/2}) v_i^+ \} \\ \text{où la valeur de Godunov } \xi_i \text{ est définie par,} \\ \text{signe } (u_i^+ - u_i^-) (f(\xi_i) - f(k)) \leq 0 \\ k = \theta u_i^+ + (1-\theta) u_i^- \quad \forall \theta \in [0,1] \end{array} \right.$$

ces équations complétées par la condition initiale et les conditions aux bords suivantes,

$$(2.1)' \quad \begin{cases} u_h(t=0^+) = \text{projection-}L^2 \text{ de } u^\circ \text{ dans } V_k \\ u_h(x=0^-) = \text{projection-}L^2 \text{ de } u^\circ \text{ dans } V^\circ \\ u_h(x=L^+) = \text{projection-}L^2 \text{ de } u_L \text{ dans } V^\circ \end{cases}$$

donnent lieu à un schéma numérique que l'on appelle LRG-k.

On remarque que l'on va noter,

$$\begin{cases} u^{-1/2}(x) = u_h(x, t=0^+) & \forall x \in ]0, L[ \\ u_{-1/2}(t) = u_h(x=0^-, t) & \forall t \in ]0, T[ \\ u_{N_x+1/2}(t) = u_h(x=L^+, t) & \forall t \in ]0, T[ \end{cases}$$

Les travaux plus importants sur ce schéma, à la connaissance de l'auteur sont : Lesaint-Raviart [16], Chavent-Cockburn [2], Chavent-Cohen [3], Jaffré [9,10], Salzano [20], Chavent-Salzano [4], Cohen [5], Le Roux [17,18].

### 2.3 - Quelques propriétés du schéma LRG-0

Le schéma LRG-0 coïncide avec le schéma de Godunov. En effet, un calcul rapide montre que pour  $k=0$  les équations (2.1) s'écrivent de la façon suivante,

$$(2.2) \quad \begin{cases} \forall n = 0, 1, \dots, N_t-1 \\ \forall i = 0, 1, \dots, N_x-1 \\ u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_{i+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ f(\xi_{i+1}^{n-1/2}) - f(\xi_i^{n-1/2}) \right\} \\ \text{où} \\ \text{Signe } (u_{i+1/2} - u_{i-1/2}) (f(\xi_i) - f(k)) \leq 0 \\ k = \theta u_{i+1/2} + (1-\theta) u_{i-1/2} \quad \forall \theta \in [0,1] \end{cases}$$

Ce schéma a été étudié par Le Roux [17], et ici on va seulement indiquer quelques unes de ses propriétés plus importantes sans les démontrer.

Si dans les équations (2.1) du schéma LRG-k on prend,

$$v|_{K_i} = \frac{1}{\Delta_{i+1/2}}$$

on obtient,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n = 0, 1, \dots, N_t - 1 \\ \forall i = 0, 1, \dots, N_x - 1 \\ \underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} = \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}) - f(\underline{\xi}_i^{n-1/2}) \right\} \end{array} \right.$$

On introduit maintenant ce que l'on va appeler les valeurs de Godunov des moyennes,  $\underline{\xi}_i$ ,

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{signe} (\underline{u}_{i+1/2} - \underline{u}_{i-1/2}) \cdot (f(\underline{\xi}_i) - k) \leq 0 \\ k = \theta \underline{u}_{i+1/2} + (1-\theta) \underline{u}_{i-1/2} \quad \forall \theta \in [0, 1] \end{array} \right.$$

Alors, l'équation pour les moyennes peut s'écrire de la façon suivante,

$$\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} = \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}) - f(\underline{\xi}_i^{n-1/2}) \right\} - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ \underline{a}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{a}_i^{n-1/2} \right\}$$

où

$$\underline{a}_i = -f(\underline{\xi}_i) + f(\xi_i)$$

Finalement on modifie les  $\underline{a}_i$  de façon que les moyennes  $\underline{u}_{i+1/2}$  vérifient exactement le schéma de Godunov quand la monotonie et la positivité des moyennes risquent d'être perdues, et vérifient le schéma LRG-k quand ce risque n'existe pas.

### III - LE SCHEMA G-k/2

#### 3.1 - Orientation

G-k/2 est une modification du schéma LRG-k. A chaque pas de temps il possède deux étapes : dans la première, d'*antidiffusion* on calcule les moyennes de la solution sur chaque élément ; dans la deuxième, de *projection*, on calcule le reste de degrés de liberté.

Au paragraphe 3.2 on décrit la première étape. Pour avoir de bons critères pour construire la deuxième étape (paragraphe 3.4) on va d'abord étudier le schéma obtenu pour les moyennes en supposant que l'on sait calculer les degrés de liberté restant. Ceci sera fait au paragraphe 3.3.

Au paragraphe 3.5 on explicite les schémas G-1/2 et G-1 et enfin, au paragraphe 3.6 on fait un résumé.

#### 3.2 - Obtention du schéma. Première étape : calcul des moyennes

Pour obtenir le schéma G-k/1 on va procéder donc en deux étapes. On garde la notation de la section précédente.

La première étape est une *étape d'antidiffusion*. Elle consiste à écrire les équations du schéma LRG-k vérifiées par les moyennes de la solution sur chaque élément, c.a.d., par :

$$\bar{u}_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta_{i+1/2}} \int_{K_i} u_h(x) dx$$

et à les modifier de façon à obtenir les propriétés de positivité, de monotonie et de non-croissance de la variation du schéma de Godunov.

Une fois calculées les moyennes, dans une deuxième étape, dite de *projection*, on calcule le reste de degrés de liberté. La définition de cette étape sera établie après d'avoir étudié le schéma pour les moyennes, ce qui sera fait qu'au paragraphe suivant.

$$(2.6)' \left\{ \begin{array}{l} \text{où la valeur de Godunov } \xi_i \text{ est définie par,} \\ \text{signe } (u_i^+ - u_i^-) (f(\xi_i) - f(k)) \leq 0 \\ k = \theta u_i^+ + (1-\theta) u_i^- \quad \forall \theta \in [0,1] \end{array} \right.$$

Il est facile de vérifier que ce schéma est bien conservatif, mais qu'il n'est ni positif ni monotone. En effet, dans le cas où  $f(u) = u$  les équations (2.6) deviennent,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{+n+1/2} = (4\gamma) u_i^{-n-1/2} + (1-3\gamma) u_i^{+n-1/2} + (-\gamma) u_{i+1}^{-n-1/2} \\ u_{i+1}^{-n+1/2} = (-2\gamma) u_i^{-n-1/2} + (3\gamma) u_i^{+n-1/2} + (1-\gamma) u_{i+1}^{-n-1/2} \end{array} \right.$$

où pour simplifier on a pris  $\Delta_{i+1/2} = h$  et  $\Delta^{n+1/2} = t$ , et on a noté  $\gamma = \Delta t/h$ .

De plus, l'étude de la stabilité et de la convergence de ce schéma, s'avère très compliquée, et en fait jusqu'à présent on ne connaît pas de résultats dans ce domaine.

Essayer de montrer la stabilité dans  $L^\infty(L^\infty)$  ou dans  $L^\infty(BV)$  comme dans LeRoux [17,18], Osher [19] ou Crandall et Majda [6] est très difficile, car la propriété essentielle des schémas qu'ils considèrent, la monotonie, est perdue dans ce cas !

Il ne nous reste donc que la technique énergétique, ou des estimations a priori, et la technique de Fourier qui est applicable seulement au cas linéaire, c.a.d, au cas  $f(u) = \text{constante} \cdot u$ .

La technique énergétique fournit la condition de stabilité  $L^\infty(L^2)$  suffisante suivante,

$$CFL \leq \text{constante} \cdot h$$

par contre, la technique de Fourier donne la condition *nécessaire et suffisante*,

$$CFL \leq \text{constante} \cdot h^{1/2}$$

Voir [2].

De cette façon, si l'on fixe  $\Delta t/h$ , le schéma LRG-1 *explose toujours au bout d'un certain nombre de pas de temps*, pour le cas linéaire. Par contre, pour le cas non-linéaire la situation est totalement différente.

En effet, dans [2] on met en évidence le fait qu'à l'aide de modifications astucieuses de la fonction  $f$  le rapport,

$$\|u_h^{n+1/2}\|_{L^2(0,L)} / \|u(t=t^{n+1/2})\|_{L^2(0,L)}$$

se met à osciller autour d'un certain nombre, au bout d'un certain nombre de pas de temps. Ce phénomène ne se produit pas pour n'importe quelle valeur de CFL. Il semble une constante  $CFL_0$  telle que si

$$CFL \leq CFL_0$$

alors ce phénomène a lieu.

Malheureusement cette constante dépend beaucoup du cas traité. En plus les modifications de la fonction  $f$  ne sont pas uniques, dépendent du problème particulier considéré et sont difficilement généralisables. En outre, la constante  $CFL_0$  est *trop* petite dans les cas d'intérêt.

Pour finir ce paragraphe on résume les propriétés du schéma LRG-1 : il est conservatif, mais il n'est ni positif ni monotone. Il approche bien les chocs mais il présente des oscillations dans leur voisinage. Dans le cas linéaire il est  $L^\infty(L^2)$  stable si et seulement si la condition suivante est vérifiée ,

$$CFL \leq \text{constante} \cdot h^{1/2}$$

d'autre part, dans quelques cas non-linéaires des expériences numériques semblent indiquer que la condition de stabilité  $L^\infty(L^2)$  s'écrit de la façon suivante

$$CFL \leq \text{constante}$$

mais cette constante est souvent *trop* petite. D'où l'intérêt de modifier ce schéma pour éliminer les oscillations près des chocs et pour affaiblir la condition de stabilité.

Un choix convenable, voir [18], est le suivant

$$\begin{aligned}
 & \forall n = 0, 1, \dots, N_t - 1 \\
 & \forall i = 0, 1, \dots, N_x - 1 \\
 (3.2) \quad & \left. \begin{aligned}
 & \underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} = \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}) - f(\underline{\xi}_i^{n-1/2}) \right\} - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ a_{i+1}^{n-1/2} - a_i^{n-1/2} \right\} \\
 & \text{où, } a_1 = a_{N_x} = 0, \text{ et pour } 1 \leq i \leq N_x - 1, \\
 & a_i = \text{signe} \left( \underline{u}_{i+1/2} - \underline{u}_{i-1/2} \right) \max \left\{ 0, \theta_i \right\} \\
 & \theta_i = \min \left\{ \left| f(\underline{\xi}_i) - f(\underline{\xi}_i) \right|, \psi_{i+1/2}, \psi_{i-1/2} \right\} \\
 & \psi_{i+1/2} = C_0^2 \text{signe} \left( \left( \underline{u}_{i+3/2} - \underline{u}_{i+1/2} \right) \cdot \left( \underline{u}_{i+1/2} - \underline{u}_{i-1/2} \right) \right) \cdot \left| f(\underline{\xi}_{i+1}) - f(\underline{\xi}_i) \right|
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

On doit faire maintenant quelques remarques importantes ,

- Sur la dénomination : étape d'antidiffusion

On sait que le schéma de Godunov diffuse beaucoup au niveau des chocs, et que le schéma LRG-1 diffuse remarquablement moins.

D'après (3.2) il est clair que c'est le terme  $(a_{i+1} - a_i)$  qui fait passer d'un schéma à l'autre. Il est donc équivalent à un terme de viscosité qui enlève la diffusion contenue implicitement dans le schéma de Godunov. C'est pour ceci que cette première étape s'appelle d'antidiffusion.

- Sur la monotonie

Supposons qu'à l'instant  $n-1/2$  on a perdu la monotonie des moyennes au point  $x_{i+1/2}$ , c.a.d.,

$$\left( \underline{u}_{i+3/2}^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} \right) \left( \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2} \right) \leq 0$$

alors,  $a_i^{n-1/2} = 0$  et la contribution sur la frontière  $x=x_i$  devient simplement  $f(\underline{\xi}_i^{n-1/2})$ , comme dans le schéma de Godunov, au lieu d'être  $f(\underline{\xi}_i^{n-1/2})$ , comme dans le schéma LRG-1. Ceci se produit aussi au point  $x = x_{i+1}$ .

Par conséquent dans ce cas le schéma (3.1), (3.2) devient exactement le schéma de Godunov sur l'élément  $]x_i, x_{i+1}[$

- Sur le paramètre  $C_0$

Là où  $u$ , la solution du problème continu, est très régulier il est raisonnable que l'on ait :

$$\begin{aligned} |f(\underline{\xi}_i) - f(\xi_i)| &< C_0^2 |f(\underline{\xi}_{i+1}) - f(\underline{\xi}_i)| \\ |f(\underline{\xi}_i) - f(\xi_i)| &< C_0^2 |f(\underline{\xi}_i) - f(\underline{\xi}_{i-1})| \end{aligned}$$

et donc, que la contribution sur la frontière  $x-x_i$  devienne  $f(\xi_i)$  comme dans le schéma LRG-k. Le paramètre  $C_0$ , que l'on prendra plus petit que 1 (voir le théorème (3.1)), nous sert donc à contrôler le terme d'antidiffusion  $a_i$  : plus il est petit moins souvent on va tomber sur le schéma LRG-k.

- Sur la condition de compatibilité

Si l'on a dans (3.2),

$$\Theta_i = |f(\underline{\xi}_i) - f(\xi_i)| > 0$$

c'est-à-dire, si la monotonie des moyennes est conservé on doit avoir

$$a_i = -f(\underline{\xi}_i) + f(\xi_i) \neq 0$$

ce qui implique, pour être compatible avec la définition de  $a_i$ , que l'on doit avoir,

$$\text{signe}(-f(\underline{\xi}_i) + f(\xi_i)) = \text{signe}(u_{i+1/2} - u_{i-1/2})$$

Ceci est vérifié si l'on peut trouver  $\theta$  dans  $[0,1]$  tel que

$$(3.3) \quad \xi_i = \theta u_{i+1/2} + (1-\theta) u_{i-1/2}$$

car il suffit de prendre  $k = \xi_i$  dans (3.1).

Par conséquent, lors de la détermination de la deuxième étape il faut tenir compte de cette condition de compatibilité.  $\square$

Avant de continuer on va introduire quelques notations.

On va noter  $\tilde{P}^k(K_i)$  l'orthogonal (-norme  $L^2$ ) au sous-espace  $P^0(K_i)$  dans  $P^k(K_i)$

$$(3.4) \quad \begin{cases} P^k(K_i) = P^0(K_i) \oplus \tilde{P}^k(K_i) \\ \tilde{P}^k(K_i) = \left\{ v \in P^k(K_i) : \int_{K_i} v(x) dx = 0 \right\} \end{cases}$$

de même,  $\tilde{V}_k$  sera l'orthogonal à  $V_0$  dans  $V_k$ .

$$(3.4)' \quad \begin{cases} V_k = V_0 \oplus V_k \\ \tilde{V}_k = \left\{ v \in V_k : v|_{K_i} \in \tilde{P}^k(K_i) \quad 0 \leq i \leq N_x - 1 \right\} \end{cases}$$

De cette façon pour chaque  $u_h$  dans  $V_k$  on peut trouver  $\underline{u}_h$  dans  $V_0$  et  $\tilde{u}_h$ , uniques tels que,

$$(3.4)'' \quad u_h = \underline{u}_h + \tilde{u}_h$$

Ainsi,  $u_h^{n-1/2}$  étant connue, on détermine  $\underline{u}_h^{n+1/2}$  à l'aide du schéma (3.1), (3.2) que l'on appelle le schéma des moyennes. Dans la deuxième étape on va déterminer  $\tilde{u}_h^{n+1/2}$ . Mais pour avoir de bons critères pour le faire on va d'abord étudier le schéma des moyennes, tout en supposant que  $\underline{u}_h$  est connu et que  $u_h$  vérifie la condition de compatibilité (3.3). On va supposer aussi que l'on a défini des conditions aux bord et une condition initiale adéquates, comme on l'a fait pour le schéma de Godunov.

### 3.3 - Etude du schéma pour les moyennes

#### 3.3.1 - Orientation - Résultats préliminaires

Dans ce paragraphe on étudie le schéma (3.1) (3.2). On va montrer que sous une condition de stabilité adéquate ce schéma possède des propriétés très semblables à celles du schéma de Godunov, et ceci indépendamment de comment on calcule  $\underline{u}_h$ , pourvu que la condition de compatibilité (3.3) soit vérifiée.

Avant de procéder à l'étude des propriétés de positivité et monotonie, paragraphe 3.3.2, de non-croissance de la variation, paragraphe 3.3.3, et de convergence vers la solution entropique, paragraphe 3.3.4, il est très utile d'établir quelques résultats préliminaires :

Pour  $0 \leq i \leq N_x$  on définit les paramètres  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$  et  $\nu_i$ , voir [18] par :

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_i = \lambda_i (f(\underline{\xi}_{i+1}) - f(\underline{\xi}_i)) \\ \phantom{a_i} = \mu_i (f(\underline{\xi}_i) - f(\underline{\xi}_i)) \\ \phantom{a_i} = \nu_i (f(\underline{\xi}_i) - f(\underline{\xi}_{i-1})) \end{array} \right.$$

alors, on a le résultat suivant :

LEMME 3.1

On a, pour  $0 \leq i \leq N_x$ ,

$$|\lambda_i| \in [0, C_0^2]$$

$$\mu_i \in [0, 1]$$

$$|\nu_i| \in [0, C_0^2]$$

$$(1 - \lambda_i + \nu_{i+1}) \in [1 - C_0^2, 1 + C_0^2] \quad i \neq N_x$$

DEMONSTRATION :

① D'après (3.2) un des cas suivants est toujours vérifié,

(i)  $a_i = 0$

(ii)  $a_i = C_0^2 \text{ signe } (\underline{u}_{i+1/2} - \underline{u}_{i-1/2}) |f(\underline{\xi}_{i+1}) - f(\underline{\xi}_i)|$

(iii)  $a_i = f(\underline{\xi}_i) - f(\underline{\xi}_i)$

(iv)  $a_i = C_0^2 \text{ signe } (\underline{u}_{i+1/2} - \underline{u}_{i-1/2}) |f(\underline{\xi}_i) - f(\underline{\xi}_{i-1})|$

où en ometant les indices  $n-1/2$

$$a_{i+1/2} = \underline{u}_{i+1/2} + CFL \cdot (1-C_0^2) (\underline{\xi}_{i+1} - \underline{u}_{i+1/2}) + CFL \cdot (1+C_0^2) (\underline{\xi}_i - \underline{u}_{i+1/2})$$

$$b_{i+1/2} = \underline{u}_{i+1/2} + CFL \cdot (1+C_0^2) (\underline{\xi}_{i+1} - \underline{u}_{i+1/2}) + CFL \cdot (1-C_0^2) (\underline{\xi}_i - \underline{u}_{i+1/2})$$

ou encore,

$$a_{i+1/2} = (1 - 2 \cdot CFL) \underline{u}_{i+1/2} + CFL \cdot (1-C_0^2) \underline{\xi}_{i+1} + CFL \cdot (1+C_0^2) \underline{\xi}_i$$

$$b_{i+1/2} = (1 - 2 \cdot CFL) \underline{u}_{i+1/2} + CFL \cdot (1+C_0^2) \underline{\xi}_{i+1} + CFL \cdot (1-C_0^2) \underline{\xi}_i$$

Pour avoir,

$$a_{i+1/2} \geq \underline{\xi}_i \quad \text{et} \quad b_{i+1/2} \leq \underline{\xi}_{i+1}$$

il est nécessaire et suffisant d'avoir,

$$(3.7)' \quad \begin{cases} CFL \leq 1/2 \\ C_0^2 \leq 1 \end{cases}$$

En conséquence, si (3.7)' est vérifiée, ce que l'on va supposer dorénavant alors on a,

$$\underline{\xi}_i^{n-1/2} \leq \underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} \leq \underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}$$

- Le cas :  $\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} \leq \underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} \leq \underline{\xi}_i^{n-1/2}$

---

On démontre comme dans le cas précédent que l'on a,

$$\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} \leq \underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} \leq \underline{\xi}_i^{n-1/2}$$

### 3.3.2 - Positivité et monotonie

Le but de ce paragraphe est de montrer que sous certaines conditions sur  $C_0$  et CFL le schéma (3.1) (3.2) vérifie une propriété analogue à la propriété (2.4) du schéma de Godunov, à savoir ,

$$(2.4) \left\{ \begin{array}{l} \min \Theta_{i+1/2}^{n-1/2} \leq u_{n+1/2}^{n+1/2} \leq \max \Theta_{i+1/2}^{n-1/2} \\ \Theta_{i+1/2}^{n-1/2} = \{ \xi_i^{n+1/2}, u_{i+1/2}^{n-1/2}, \xi_{i+1}^{n-1/2} \} \\ 0 \leq i \leq N_x - 1 \\ 0 \leq n \leq N_t - 1 \end{array} \right.$$

Or d'après (3.2) on a,

$$\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} = \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}) - f(\underline{\xi}_i^{n-1/2}) \right\} - \left\{ \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} (a_{i+1}^{n-1/2} - a_i^{n-1/2}) \right\}$$

On va considérer plusieurs cas,

- Le cas :  $\underline{\xi}_i^{n-1/2} \leq \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} \leq \underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}$

---

D'après (3.5) on peut écrire,

$$\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} = \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ \left( 1 - \lambda_i^{n-1/2} + \nu_{i+1}^{n-1/2} \right) \left( f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}) - f(\underline{\xi}_i^{n-1/2}) \right) \right\}$$

or, d'après (3.6),

$$\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} = \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} + \theta_{i+3/4}^{n-1/2} (\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}) + \theta_{i+1/4}^{n-1/2} (\underline{\xi}_i^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2})$$

et d'après le lemme (3.2),

$$\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} \in [a_{i+1/2}, b_{i+1/2}]$$

On a ainsi démontré le résultat suivant,

THEOREME 3.1 (Positivité et monotonie du schéma (3.1), (3.2) des moyennes)

Si l'on suppose vérifiée la condition suivante :

$$(3.7) \left\{ \begin{array}{l} C_0^2 \leq 1 \\ \text{CFL} = \sup_{i,n,k} \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} |f'(k)| \leq 1/2 \\ \text{où, } 0 \leq i \leq N_x - 1 \\ 0 \leq n \leq N_t - 1 \\ k \in [\inf_{x,t} \Theta(x,t), \sup_{x,t} \Theta(x,t)] \\ \Theta(x,t) = \{u^0(x), u_0(t), u_L(t)\} \end{array} \right.$$

alors,

$$(3.8) \left\{ \begin{array}{l} \min \Theta_{i+1/2}^{n-1/2} \leq \underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} \leq \max \Theta_{i+1/2}^{n-1/2} \\ \Theta_{i+1/2}^{n-1/2} = \left\{ \underline{\xi}_i^{n-1/2}, \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}, \underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} \right\} \\ \text{pour,} \\ 0 \leq i \leq N_x - 1 \\ 0 \leq n \leq N_t - 1 \end{array} \right.$$

Le schéma (3.1), (3.2) pour les moyennes possède la même propriété de positivité et monotonie que le schéma de Godunov (comparer (3.8) avec (2.4)).

Une conséquence immédiate de ce résultat est le,

COROLLAIRE 3.2

(stabilité  $L^\infty(L^\infty)$ )

Sous les hypothèses du théorème (3.1), on a :

$$(3.8)' \left\{ \begin{array}{l} \|u_h\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(0,L))} \leq \max \Theta \\ \Theta = \left\{ \|u_0\|_{L^\infty(0,T)}, \|u_L\|_{L^\infty(0,T)}, \|u^0\|_{L^\infty(0,L)} \right\} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire le schéma (3.1), (3.2) est  $L^\infty(L^\infty)$  - stable

- Le cas :  $\underline{\xi}_i^{n-1/2} \leq \underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} \leq \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}$

Dans ce cas on a, en ometant l'indice  $n-1/2$ ,

$$(\underline{u}_{i+3/2} - \underline{u}_{i+1/2})(\underline{u}_{i+1/2} - \underline{u}_{i-1/2}) \leq 0$$

on a donc, d'après (3.2),

$$\begin{cases} a_{i+1}^{n-1/2} = 0 \\ a_{i+1/2}^{n-1/2} = 0 \end{cases}$$

et,

$$\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} = \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}) - f(\underline{\xi}_i^{n-1/2}) \right\}$$

c'est-à-dire, on retrouve le schéma de Godunov, et par (2.4),

$$\underline{\xi}_i^{n-1/2} \leq \underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} \leq \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}$$

- Pour les cas qui restent on démontre que l'on a toujours,

$$\min \Theta_{i+1/2}^{n-1/2} \leq \underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} \leq \max \Theta_{i+1/2}^{n-1/2}$$

où

$$\Theta_{i+1/2}^{n-1/2} = \left\{ \underline{\xi}_i^{n-1/2}, \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}, \underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} \right\}$$

Par le lemme (3.2) et la condition (3.7),  $\theta_{i+j/4}^{n-1/2} \in [0,1]$  pour  $j = 3, 1, -1, -3$ , et  $1 \leq i \leq N_x - 1$ , alors

$$\begin{aligned} |\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2}| &\leq \theta_{i+3/4}^{n-1/2} |\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}| + (1-\theta_{i+1/4}^{n-1/2}) |\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \underline{\xi}_i^{n-1/2}| \\ &+ (1-\theta_{i-1/4}^{n-1/2}) |\underline{\xi}_i^{n-1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2}| + \theta_{i-3/4}^{n-1/2} |\underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2} - \underline{\xi}_{i-1}^{n-1/2}| \end{aligned}$$

D'autre part, d'après (3.9), pour  $i = 0$ ,

$$\begin{aligned} \underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n+1/2} &= (\underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n+1/2}) + (\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2}) + \\ &+ \theta_{i+3/4}^{n-1/2} (\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}) + (1-\theta_{i+1/4}^{n-1/2}) (\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \underline{\xi}_i^{n-1/2}) \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} |\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n+1/2}| &\leq |\underline{u}_{i-1/2}^{n+1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2}| + |\underline{\xi}_i^{n-1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2}| + \\ &+ \theta_{i+3/4}^{n-1/2} |\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}| + (1-\theta_{i+1/4}^{n-1/2}) |\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \underline{\xi}_i^{n-1/2}| \end{aligned}$$

De façon analogue, pour  $i = N_x$ ,

$$\begin{aligned} |\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n+1/2}| &\leq |\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}| + |\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \underline{\xi}_i^{n-1/2}| + \\ &+ (1-\theta_{i-1/4}^{n-1/2}) |\underline{\xi}_i^{n-1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2}| + \theta_{i-3/4}^{n-1/2} |\underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2} - \underline{\xi}_{i-1}^{n-1/2}| \end{aligned}$$

Maintenant on est capable d'estimer  $\|\underline{u}_h^{n+1/2}\|_{BV}$ ,

$$\begin{aligned} \|\underline{u}_h^{n+1/2}\|_{BV} &= \sum_{i=0}^{N_x} |\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n+1/2}| \leq |\underline{u}_{-1/2}^{n+1/2} - \underline{u}_{-1/2}^{n-1/2}| + |\underline{\xi}_0^{n-1/2} - \underline{u}_{-1/2}^{n-1/2}| + \\ &+ \sum_{i=0}^{N_x-1} |\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \underline{\xi}_i^{n-1/2}| + \sum_{i=0}^{N_x-1} |\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}| + \\ &+ |\underline{u}_{N_x+1/2}^{n-1/2} - \underline{\xi}_{N_x}^{n-1/2}| + |\underline{u}_{N_x+1/2}^{n+1/2} - \underline{u}_{N_x+1/2}^{n-1/2}| \end{aligned}$$

Il est facile de voir que  $N$ , le nombre de points où la monotonie (en espace) de  $u_h(t)$  change, est au plus égal à la somme des nombres de points de changement de monotonie des conditions aux bords  $u_0$  et  $u_L$ , et de la condition initiale  $u^0$ . Et ceci pour tout  $t$  dans  $[0, T]$ .

Ceci implique que le schéma (3.1), (3.2) est  $L^\infty(BV)$ -stable car on a,

$$(3.10) \quad \|u_h\|_{L^\infty(0, T; BV(0, L))} \leq (N+1) \|u_h\|_{L^\infty(L^\infty)}$$

Au paragraphe suivant on raffine cette estimation.

### 3.3.3 - Non-croissance de la variation

Le but de ce paragraphe est d'estimer la variation de  $\underline{u}_h^{n+1/2}$ ,

$$\|\underline{u}_h^{n+1/2}\|_{BV} = \sum_{i=0}^{N_x} \left| \underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} \right|$$

en fonction de celle de  $\underline{u}_h^{n-1/2}$  et des valeurs des conditions aux bords, tout en supposant la condition (3.7) vérifiée.

Or, d'après (3.2), (3.5), et (3.6) on a, pour  $0 \leq i \leq N_x - 1$ ,

$$(3.9) \quad \underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} = \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} + \theta_{i+3/4}^{n-1/2} (\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}) + \theta_{i+1/4}^{n-1/2} (\underline{\xi}_i^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2})$$

et donc,

$$\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} = \underline{\xi}_i^{n-1/2} + \theta_{i+3/4}^{n-1/2} (\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}) + (1 - \theta_{i+1/4}^{n-1/2}) (\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \underline{\xi}_i^{n-1/2})$$

D'une façon analogue on obtient, pour  $1 \leq i \leq N_x$ ,

$$\underline{u}_i^{n+1/2} = \underline{\xi}_i^{n-1/2} - (1 - \theta_{i-1/4}^{n-1/2}) (\underline{\xi}_i^{n-1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2}) - \theta_{i-3/4}^{n-1/2} (\underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2} - \underline{\xi}_{i-1}^{n-1/2})$$

En soustrayant les deux égalités précédentes on obtient,

$$\begin{aligned} \underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n+1/2} &= \theta_{i+3/4}^{n-1/2} (\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}) + (1 - \theta_{i+1/4}^{n-1/2}) (\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \underline{\xi}_i^{n-1/2}) + \\ &+ (1 - \theta_{i-1/4}^{n-1/2}) (\underline{\xi}_i^{n-1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2}) + \theta_{i-3/4}^{n-1/2} (\underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2} - \underline{\xi}_{i-1}^{n-1/2}) \end{aligned}$$

② Si (ii) est vrai alors  $|\lambda_i| = C_0^2$  et

$$|a_i| \leq |f(\xi_i) - f(\underline{\xi}_i)|$$

$$|a_i| \leq C_0^2 |f(\xi_i) - f(\underline{\xi}_{i-1})|$$

de la première inégalité on déduit que  $|\mu_i| \leq 1$  et de la deuxième, que  $|v_i| \leq C_0^2$ . D'autre part, la condition de compatibilité étant vérifiée,  $\mu_i \geq 0$  et donc  $\mu_i \in [0,1]$ .

De façon analogue on montre que dans le cas (iii) on a  $\mu_i = 1$  et  $|\lambda_i|, |v_i| \leq C_0^2$ ; et que dans le cas (iv) on a  $|v_i| = C_0^2$ ,  $\mu_i \in [0,1]$  et  $|\lambda_i| \leq C_0^2$ .

③ Quelques secondes de réflexion nous montrent que l'on a ,

$$\text{signe } a_i = \text{signe } a_{i+1}$$

et par conséquent,

$$\text{signe } \lambda_i = \text{signe } v_{i+1}$$

donc, d'après l'étape précédente on a :

$$1 - \lambda_i + v_{i+1} \in [1 - C_0^2, 1 + C_0^2]$$

D'où le résultat

□

Maintenant on définit pour  $0 \leq n \leq N_t - 1$  et pour  $0 \leq i \leq N_x - 1$  les paramètres  $\theta_{i+1/4}^{n-1/2}$  et  $\theta_{i+3/4}^{n-1/2}$  par, (on omet les indices superflux),

$$\theta_{i+1/4} = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{\xi}_i = \underline{u}_{i+1/2} \\ \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} (1-\lambda_i + \nu_{i+1}) \frac{f(\underline{\xi}_i) - f(\underline{u}_{i+1/2})}{\underline{\xi}_i - \underline{u}_{i+1/2}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\theta_{i+3/4} = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{\xi}_{i+1} = \underline{u}_{i+1/2} \\ \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} (1-\lambda_i + \nu_{i+1}) \frac{f(\underline{u}_{i+1/2}) - f(\underline{\xi}_{i+1})}{\underline{u}_{i+1/2} - \underline{\xi}_{i+1}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors on a le résultat suivant ,

LEMME (3.2)

On a pour  $0 \leq i \leq N_x - 1$

$$\theta_{i+1/4}, \theta_{i+3/4} \in [CFL \cdot (1-C_0^2), CFL (1+C_0^2)] \quad \square$$

DEMONSTRATION

Etant donné que  $f \in \mathcal{C}^1$  il existe un  $\theta \in [0,1]$  tel que si  $k = \theta \underline{\xi}_i + (1-\theta) \underline{u}_{i+1/2}$  alors,

$$(\underline{\xi}_i - \underline{u}_{i+1/2}) f'(k) = f(\underline{\xi}_i) - f(\underline{u}_{i+1/2})$$

or d'après (3.1)  $f'(k) \geq 0$  et par conséquent, d'après (3.6), (2.3) et le lemme (3.1) on a,

$$\theta_{i+1/4} \in [CFL \cdot (1-C_0^2), CFL \cdot (1+C_0^2)]$$

De la même façon on démontre que  $\theta_{i+3/4}$  appartient à cet intervalle.  $\square$

et donc,

$$\| \underline{u}_h^{n+1/2} \|_{BV} \leq | \underline{u}_{-1/2}^{n+1/2} - \underline{u}_{-1/2}^{n-1/2} | + | \underline{u}_{N_x+1/2}^{n+1/2} - \underline{u}_{N_x+1/2}^{n-1/2} | + \| \underline{u}_h^{n-1/2} \|_{BV}$$

On a ainsi obtenu le résultat suivant,

THEOREME 3.3 (non-croissance de la variation)

Si les hypothèses du théorème (3.1) sont vérifiées, alors pour  $0 \leq n \leq N_t - 1$

$$(3.10) \quad \| \underline{u}_h^{n+1/2} \|_{BV(0,L)} \leq | \underline{u}_{-1/2}^{n+1/2} - \underline{u}_{-1/2}^{n-1/2} | + | \underline{u}_{N_x+1/2}^{n+1/2} - \underline{u}_{N_x+1/2}^{n-1/2} | + \| \underline{u}_h^{n-1/2} \|_{BV(0,L)}$$

□

Le schéma (3.1), (3.2) possède donc exactement la même propriété que le schéma de Godunov en ce qui concerne la variation (comparer (3.10) avec (2.5)).

Le résultat suivant est une conséquence directe de ce théorème,

COROLLAIRE 3.4 (stabilité  $L^\infty(BV)$ )

Si les hypothèses du théorème (3.1) sont vérifiées alors,

$$(3.10)' \quad \| \underline{u}_h \|_{L^\infty(0,T;BV(0,L))} \leq \| u_0 \|_{BV(0,T)} + \| u_L \|_{BV(0,T)} + \| u^0 \|_{BV(0,L)}$$

Autrement dit, le schéma (3.1), (3.2) est  $L^\infty(BV)$ -stable.

□

3.3.4 - Convergence vers la solution entropique.

Le but de ce paragraphe est de déterminer les conditions sous lesquelles la suite  $\{ \underline{u}_h \}_{h \rightarrow 0}$  où,

$$h = \sup_{0 \leq i \leq N_x - 1} \Delta_{i+1/2}$$

converge vers la solution entropique de (1.1).

On procède en plusieurs étapes :

• Première Etape :

Si les hypothèses du théorème (3.1) sont vérifiées on sait, grâce aux corollaires (3.2), (3.4) que la suite  $\{\underline{u}_h\}_{h \rightarrow 0}$  possède une sous-suite qui converge dans  $L^1(0,T;L^1(0,L))$  vers une limite que l'on va noter  $u^*$  (théorème de Helly). Il est clair que  $u^*$  appartient à l'intersection des espaces  $L^\infty(0,T;L^\infty(0,L))$  et  $L^\infty(0,T;BV(0,L))$ .

D'autre part, étant données la définition des conditions aux bords et de la condition initiale du problème discret, (2.1)'  $u^*$  vérifie automatiquement les conditions aux bords et la condition initiale du problème continu.

Finalement, si l'on démontre que  $u^*$  est la solution entropique de ce problème, grâce à l'unicité de cette solution on aura démontré qu'en fait toute la suite  $\{\underline{u}_h\}_{h \rightarrow 0}$  converge vers  $u^*$ . C'est ceci ce que l'on va démontrer à la suite.

• Deuxième Etape : Une première inégalité.

On a, d'après (3.2), et (3.5),

$$(\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - k) = (\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - k) - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ (1-\lambda_i)^{n-1/2} + \nu_{i+1}^{n-1/2} \cdot (f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}) - f(\underline{\xi}_i^{n-1/2})) \right\}$$

$\forall k \in \mathbb{R}$

Supposons que l'on a,

$$\underline{\xi}_i^{n-1/2} \leq k \leq \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} \leq \underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}$$

alors, si l'on pose,

$$\theta_{i+1/2}^{n-1/2} (\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - k) = - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} (1-\lambda_i)^{n-1/2} + \nu_{i+1}^{n-1/2} (f(\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}) - f(k))$$

d'après (3.2) on a :

$$a_{i+1}^{n-1/2} = a_i^{n-1/2} = 0$$

et dans le cas contraire,

$$(3.13) \quad a_{i+1}^{n-1/2} - a_i^{n-1/2} = \text{signe}(\xi_{i+1}^{n-1/2} - \xi_i^{n-1/2}) (|a_{i+1}^{n-1/2}| - |a_i^{n-1/2}|)$$

car,

$$\text{signe}(\xi_{i+1}^{n-1/2} - \xi_i^{n-1/2}) = \text{signe}(\underline{u}_{i+3/2}^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}) = \text{signe}(\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2})$$

Il est donc clair que (3.13) reste vraie dans tous les cas.

Maintenant, en revenant à l'expression de  $\Psi$  on peut la réécrire en utilisant les  $S_{i+1/2}^{n-1/2}$  de la façon suivante,

$$\begin{aligned} \Psi = & \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_t-1} \phi_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot (\nu_{i+1}^{n-1/2} - \lambda_i^{n-1/2}) \cdot \text{signe}(\xi_{i+1}^{n-1/2} - \xi_i^{n-1/2}) \cdot \\ & \cdot (f(\xi_{i+1}^{n-1/2}) - f(\xi_i^{n-1/2})) \cdot (1 - 2S_{i+1/2}^{n-1/2}) \Delta^{n+1/2} \end{aligned}$$

ou encore, en utilisant (3.5),

$$\Psi = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_t-1} \phi_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot (a_{i+1}^{n-1/2} - a_i^{n-1/2}) \cdot \text{signe}(\xi_{i+1}^{n-1/2} - \xi_i^{n-1/2}) \cdot (1 - 2S_{i+1/2}^{n-1/2}) \Delta^{n+1/2}$$

et finalement, par (3.13),

$$\Psi = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_t-1} \phi_{i+1/2}^{n+1/2} (|a_{i+1}^{n-1/2}| - |a_i^{n-1/2}|) \cdot (1 - 2S_{i+1/2}^{n-1/2}) \cdot \Delta^{n+1/2}$$

• Quatrième Etape : Introduction des  $S_{i+1/2}^{n-1/2}$

On définit maintenant les  $S_{i+1/2}^{n-1/2}$  par la relation suivante, si  $f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}) \neq f(\underline{\xi}_i^{n-1/2})$ ,

$$\begin{aligned} & \text{signe}(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - k) \cdot (f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}) - f(k)) - \text{signe}(\underline{\xi}_i^{n-1/2} - k) \cdot (f(\underline{\xi}_i^{n-1/2}) - f(k)) = \\ & = \text{signe}(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{\xi}_i^{n-1/2}) (f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}) - f(\underline{\xi}_i^{n-1/2})) (1 - 2S_{i+1/2}^{n-1/2}), \end{aligned}$$

et par  $S_{i+1/2}^{n-1/2} = 1/2$  sinon.

Si l'on pose, en omettant l'indice  $n-1/2$ ,

$$A_{i+1/2} = (f(\underline{\xi}_{i+1}) - f(\underline{\xi}_i)) S_{i+1/2}$$

de la première égalité on en déduit que l'on a,

$$A_{i+1/2} = \begin{cases} f(\underline{\xi}_{i+1}) - f(\underline{\xi}_i) & \text{si } k \geq \underline{\xi}_{i+1} \geq \underline{\xi}_i \\ 0 & \text{si } k \geq \underline{\xi}_i \geq \underline{\xi}_{i+1} \\ f(k) - f(\underline{\xi}_i) & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où,

$$|A_{i+1/2}| \leq |f'(X_{i+1/2}^*)| |\underline{\xi}_{i+1} - \underline{\xi}_i|$$

et par (3.7),

$$(3.12) \quad |A_{i+1/2}^{n-1/2}| \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta_{i+1/2}}{\Delta^{n+1/2}} |\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{\xi}_i^{n-1/2}|$$

D'autre part, si l'on a,

$$(\underline{u}_{i+3/2}^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2})(\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2}) \leq 0$$

et,

$$\theta_i^{n-1/2} (\underline{\xi}_i^{n-1/2} - k) = - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} (1 - \lambda_i^{n-1/2} + \nu_{i+1}^{n-1/2}) \cdot (f(k) - f(\underline{\xi}_i^{n-1/2}))$$

on peut écrire,

$$\begin{aligned} (\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - k) &= (\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - k) + \theta_{i+3/4}^{n-1/2} (\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}) + \theta_{i+1/2}^{n-1/2} (\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - k) + \\ &+ \theta_i^{n-1/2} (\underline{\xi}_i^{n-1/2} - k) \end{aligned}$$

où  $\theta_{i+3/4}^{n-1/2}$  est définie par (3.6).

Or, d'après la condition (3.7) et les lemmes (3.1), et (3.2)  $\theta_{i+3/4}^{n-1/2} \in [0,1]$ ,  $\theta_{i+1/2}^{n-1/2} \in [1,1]$  et  $\theta_i^{n-1/2} \in [0,1]$ , alors, en prenant valeur absolue,

$$\begin{aligned} |\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - k| &\leq (1 + \theta_{i+1/2}^{n-1/2}) |\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - k| + \theta_{i+3/4}^{n-1/2} (\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}) - \\ &- \theta_i^{n-1/2} (\underline{\xi}_i^{n-1/2} - k) \end{aligned}$$

encore,

$$\begin{aligned} |\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - k| &\leq |\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - k| - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} (1 - \lambda_i^{n-1/2} + \nu_{i+1}^{n-1/2}) \cdot \\ &\cdot \left\{ (f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}) - f(k)) + (f(\underline{\xi}_i^{n-1/2}) - f(k)) \right\} \end{aligned}$$

et finalement,

$$\begin{aligned} (3.11) \quad |\underline{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - k| &\leq |\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - k| - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ (1 - \lambda_i^{n-1/2} + \nu_{i+1}^{n-1/2}) \cdot \right. \\ &\cdot (\text{signe}(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - k)(f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}) - f(k)) - \\ &\left. - \text{signe}(\underline{\xi}_i^{n-1/2} - k)(f(\underline{\xi}_i^{n-1/2}) - f(k))) \right\} \end{aligned}$$

Cette inégalité reste vraie pour tous les autres cas. Une démonstration plus complète peut être trouvée dans Le Roux [18].

• Troisième Etape : Introduction de la fonction test  $\phi$

Soit  $\phi$  une fonction test non-négative de classe  $\mathcal{C}^2(Q)$  à support compact. Soit  $\underline{\phi}_h$  sa projection- $L^2$  dans  $V_h = V_0 \times V^0$ . Pour simplifier les calculs on supposera que l'on a,

$$\begin{cases} \underline{\phi}_{-1/2} = \underline{\phi}_{1/2} = \underline{\phi}_{N_x-1/2} = \underline{\phi}_{N_x+1/2} = 0 \\ \underline{\phi}_{-1/2} = \underline{\phi}_{1/2} = \underline{\phi}_{N_t-1/2} = \underline{\phi}_{N_t+1/2} = 0 \end{cases}$$

alors si l'on multiplie (3.11) par  $\underline{\phi}_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \Delta_{i+1/2}$  et on somme sur  $i$  et  $n$  on obtient,

$$\sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_t-1} |\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - k| (\underline{\phi}_{i+1/2}^{n+1/2} - \underline{\phi}_{i+1/2}^{n-1/2}) \cdot \Delta_{i+1/2} +$$

$$\sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_t-1} \text{signe}(\underline{\xi}_i^{n-1/2} - k) \cdot (f(\underline{\xi}_i^{n-1/2}) - f(k)) \cdot (\underline{\phi}_{i+1/2}^{n+1/2} - \underline{\phi}_{i-1/2}^{n+1/2}) \Delta^{n+1/2} \geq \Psi$$

où,

$$\Psi = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_t-1} \underline{\phi}_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot (\nu_{i+1}^{n-1/2} - \lambda_i^{n-1/2}) \cdot \left\{ \text{signe}(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - k) \cdot (f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}) - f(k)) - \text{signe}(\underline{\xi}_i^{n-1/2} - k) \cdot (f(\underline{\xi}_i^{n-1/2}) - f(k)) \right\} \Delta^{n+1/2}$$

Etant donné que lorsque  $h \rightarrow 0$  le premier membre de la dernière inégalité tend vers le premier membre de l'inégalité (1.4), pour démontrer que  $u^*$  est la solution entropique il faut et il suffit démontrer que  $\Psi$  tend vers une quantité non-négative.

on peut aussi écrire  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$  où,

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_t-1} \phi_{i+1/2}^{n+1/2} \left\{ |a_{i+1}^{n-1/2}| (1-2S_{i+1/2}^{n-1/2}) - |a_i^{n-1/2}| (1-2S_{i-1/2}^{n-1/2}) \right\} \cdot \Delta^{n+1/2} \\ &= \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_t-1} (\phi_{i+1/2}^{n+1/2} - \phi_{i+3/2}^{n+1/2}) \cdot |a_{i+1}^{n-1/2}| (1-2S_{i+1/2}^{n-1/2}) \Delta^{n+1/2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_t-1} \phi_{i+1/2}^{n+1/2} \left\{ |a_i^{n-1/2}| ((1-2S_{i+1/2}^{n-1/2}) - (1-2S_{i-1/2}^{n-1/2})) \right\} \cdot \Delta^{n+1/2} \\ &= 2 \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_t-1} \phi_{i+1/2}^{n+1/2} |a_i^{n-1/2}| (S_{i+1/2}^{n-1/2} - S_{i-1/2}^{n-1/2}) \cdot \Delta^{n+1/2} \end{aligned}$$

Or, d'après (3.2), (3.5) le lemme (3.1), (3.7) et (3.12),

$$|a_{i+1}^{n-1/2}| |1-2S_{i+1/2}^{n-1/2}| \leq |a_{i+1}^{n-1/2}| + 2 C_0^2 |A_{i+1/2}^{n-1/2}| \leq \left(\frac{3C_0^2}{2}\right) |\xi_{i+1}^{n-1/2} - \xi_i^{n-1/2}| \frac{\Delta_{i+1/2}}{\Delta^{n+1/2}}$$

et par conséquent,

$$|\Psi_1| \leq \left(\frac{3C_0^2}{2}\right) \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_t-1} |\phi_{i+3/2}^{n+1/2} - \phi_{i+1/2}^{n+1/2}| \cdot |\xi_{i+1}^{n-1/2} - \xi_i^{n-1/2}| \Delta_{i+1/2}$$

il est donc clair que lorsque  $h \rightarrow 0$  alors  $|\Psi_1|$  tend vers zéro, grâce à la non-croissance de la variation des moyennes (théorème (3.3)).

On considère maintenant  $\Psi_2$ . D'après (3.2), pour que  $a_i^{n-1/2}$  ne soit pas nul il est nécessaire que l'on ait :

$$\begin{cases} (\underline{u}_{i+3/2}^{n-1/2} - \underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}) (\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2}) \geq 0 \\ (\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2} - \underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2}) (\underline{u}_{i-1/2}^{n-1/2} - \underline{u}_{i-3/2}^{n-1/2}) \geq 0 \end{cases}$$

dans ce cas on a,

$$(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} - \underline{\xi}_i^{n-1/2}) (\underline{\xi}_i^{n-1/2} - \underline{\xi}_{i-1}^{n-1/2}) \geq 0$$

D'autre part, si,

$$k \leq \min \left\{ \underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}, \underline{\xi}_i^{n-1/2}, \underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2} \right\}$$

ou,

$$k \geq \max \left\{ \underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}, \underline{\xi}_i^{n-1/2}, \underline{\xi}_{i-1}^{n-1/2} \right\}$$

alors, d'après la définition des  $S_{i+1/2}^{n-1/2}$ ,

$$S_{i+1/2}^{n-1/2} - S_{i-1/2}^{n-1/2} = 0$$

Par conséquent le terme,

$$\eta_i^{n-1/2} = |a_i^{n-1/2}| (S_{i+1/2}^{n-1/2} - S_{i-1/2}^{n-1/2})$$

n'est pas nécessairement nul seulement dans un des deux cas suivants,

- (i)  $k$  est entre  $\underline{\xi}_i^{n-1/2}$  et  $\underline{\xi}_{i-1}^{n-1/2}$
- (ii)  $k$  est entre  $\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}$  et  $\underline{\xi}_i^{n-1/2}$

et donc, grâce au théorème (3.1),  $\eta_i^{n-1/2}$  n'est pas nul pour au plus  $2(N+1)$  valeurs de  $i$ ,  $N$  étant la somme des nombres de points de changement de monotonie de la condition initiale, et des deux conditions aux bords.

De cette façon on peut écrire,

$$\eta_i^{n-1/2} = \begin{cases} |\nu_i^{n-1/2}| \text{signe} (f(\underline{\xi}_i^{n-1/2}) - f(\underline{\xi}_{i-1}^{n-1/2})) \cdot (f(\underline{\xi}_{i-1}^{n-1/2}) - f(k)) & \text{dans le cas (i)} \\ |\lambda_i^{n-1/2}| \text{signe} (f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2}) - f(\underline{\xi}_i^{n-1/2})) \cdot (f(k) - f(\underline{\xi}_{i+1}^{n-1/2})) & \text{dans le cas (ii)} \end{cases}$$

il est maintenant facile de voir que si l'application  $u \rightarrow f(u)$  est monotone alors les  $\eta_{i+1/2}^{n-1/2}$  sont des quantités non-positives.

Par conséquent, il faut montrer que lorsque  $h \rightarrow 0$ ,  $\Psi_2$  tend précisément vers zéro.

D'après la dernière égalité, en utilisant le lemme (3.1) et la condition (3.7) on obtient la majoration suivante,

$$|\eta_i^{n-1/2}| \leq \frac{C_0^2}{2} (|\xi_{i+1}^{n-1/2} - \xi_i^{n-1/2}| + |\xi_i^{n-1/2} - \xi_{i-1}^{n-1/2}|) \cdot \frac{\Delta_{i+1/2}}{\Delta^{n+1/2}}$$

et donc,

$$\begin{aligned} |\Psi_2| &\leq 2 \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{\eta=0}^{N_t-1} |\eta_i^{n-1/2}| \phi_{i+1/2}^{n-1/2} \Delta^{n+1/2} \leq \\ &\leq C_0^2 \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{\eta=0}^{N_t-1} (|\xi_{i+1}^{n-1/2} - \xi_i^{n-1/2}| + |\xi_i^{n-1/2} - \xi_{i-1}^{n-1/2}|) \cdot \chi_i^{n-1/2} \end{aligned}$$

où  $\chi_i^{n-1/2} = 0$  si  $\eta_i^{n-1/2} = 0$  et  $\chi_i^{n-1/2} = 1$  sinon.

Encore,

$$|\Psi_2| \leq C_0^2 \sum_{\eta=0}^{N_t-1} \ell^{n-1/2}$$

où, en omettant l'indice  $n-1/2$ ,

$$\begin{aligned} \ell &= \left( \sum_{i=0}^{N_x-1} (|\xi_{i+1} - \xi_i| + |\xi_i - \xi_{i-1}|)^2 \chi_i \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=0}^{N_x-1} (\phi_{i+1/2})^2 \chi_i \Delta_{i+1/2}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sup_{0 \leq i \leq N_x-1} |\phi_{i+1/2}| \cdot 2(N+1) h \cdot \left( \sum_{i=0}^{N_x-1} (|\xi_{i+1} - \xi_i| + |\xi_i - \xi_{i-1}|)^2 \chi_i \right)^{1/2} \end{aligned}$$

et donc,

$$|\Psi_2| \leq 2C_0^2 \cdot \left\{ (N_t h) \cdot \|\phi\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(0,L))} \cdot \sup_{0 \leq \eta \leq N_t-1} \left\{ \sum_{i=0}^{N_x-1} (|\xi_{i+1}^{n-1/2} - \xi_i^{n-1/2}| + |\xi_i^{n-1/2} - \xi_{i-1}^{n-1/2}|)^2 \chi_i \right\}^{1/2} \right\}$$

et cette quantité ne tend forcément vers zéro lorsque  $h \rightarrow 0$  malgré la propriété de non-croissance de la variation, théorème (3.3).

- Cinquième Etape : Modification des  $a_i$  et convergence de  $\Psi$  vers zéro

On est donc obligés de changer la définition des  $a_i$  pour avoir la convergence désirée. On fait ceci en posant simplement,

$$(3.2)' \quad C_0^2 = \begin{cases} C (\leq 1) & \forall h \geq h_1 \\ C h_1^{-\alpha} h^\alpha & \forall h \geq h_1 \end{cases}$$

pour un certain  $\alpha > 0$ .

Avec cette modification il est clair que  $\psi_2$  et donc  $\psi$ , tend vers zéro lorsque  $h \rightarrow 0$ .

Par conséquent  $u^*$  est la solution entropique de (1.1) et donc toute la suite  $\{u_h\}_{h \rightarrow 0}$  converge vers elle fortement dans  $L^1(0,T;L^1(0,L))$ .

On peut prendre l'exposant  $\alpha$  très près de zéro, ce qui permet d'utiliser (3.2) au lieu de (3.2) (3.2)' dans la pratique. En effet, comme il est remarqué dans [18], pour passer de

$$C_0^2 = C h_1^{-\alpha} h^\alpha \quad \tilde{a} \quad C_0^2 = \frac{1}{2} C_0 h_1^{-\alpha} h^\alpha$$

il faut diviser  $h$  par  $2^{1/\alpha}$ , ce qui peut être énorme pour  $\alpha$  assez petit. ■  
On a ainsi démontré le résultat suivant,

THEOREME 3.5 (Convergence du schéma des moyennes).

On suppose que l'on utilise le schéma (3.1), (3.2), (3.2)' pour le calcul de la suite (de moyennes)  $\{u_h\}_{h \rightarrow 0}$  tout en supposant que la suite  $\{u_h\}_{h \rightarrow 0}$  est déterminée vérifiant la condition de compatibilité (3.3).

Alors si la condition (3.7) est vérifiée, la suite  $\{u_h\}_{h \rightarrow 0}$  converge vers la solution entropique du problème continu. ■

$$\left. \begin{aligned}
 & \forall i = 0, 1, \dots, N_x - 1 \\
 & \forall v \in \tilde{\mathcal{P}}^k(K_i) \\
 (3.12) \left\{ \int_{K_i} u_h^{n+1/2} v \, dx &= \int_{K_i} u_h^{n-1/2} v \, dx + \Delta^{n+1/2} \int_{K_i} f(u_h^{n-1/2}) \partial_x v \, dx - \right. \\
 & \left. - \Delta^{n+1/2} \left\{ f(\xi_{i+1}^{n-1/2}) v_{i+1}^- - f(\xi_i^{n-1/2}) v_i^+ \right\} \right.
 \end{aligned}$$

• Deuxième Etape : projection de  $\frac{n+1/2}{v_h}$

Si l'on suppose que l'application  $u \mapsto f(u)$  est monotone croissante on a  $\xi_i = u_i^-$ ,  $0 \leq i \leq N_x$ . Dans ce cas la condition (3.3) s'écrit :

$$(3.13) \quad \exists \theta \in [0, 1] : u_i^- = \theta u_{i+1/2}^+ + (1-\theta) u_{i-1/2}$$

Si maintenant,  $u \mapsto f(u)$  est monotone décroissante  $\xi_i = u_i^+$  et cette condition s'écrit de la façon suivante,

$$(3.13)' \quad \exists \theta \in [0, 1] : u_i^+ = \theta u_{i+1/2}^+ + (1-\theta) u_{i-1/2}$$

Dans le cas général, pour être sûrs que (3.3) soit vérifiée, on va exiger que (3.13) et (3.13)' soient simultanément satisfaites.

De cette façon  $u_h^{n+1/2}$  sera complètement déterminée. Plus précisément on a,

$$\left. \begin{aligned}
 & u_h^{n+1/2} = \text{projection-}L^2 \text{ de } u_h^{n+1/2} \text{ sur } \mathcal{C}_k \\
 (3.14) \left\{ \mathcal{C}_h = \mathcal{C}_k(u_h^{n+1/2}) &= \left\{ v \in \mathcal{V}_k : \forall i = 0, 1, \dots, N_x - 1 \right\} \theta_{1i}, \theta_{2i} \in [0, 1] \right. \\
 & \left. v_i^+ = -\theta_{1i} (u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}), v_{i+1}^- = \theta_{2i} (u_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^{n+1/2}) \right\}
 \end{aligned}$$

□

De cette façon on complète le schéma G-k/2. On doit remarquer, d'une part, que si dans la première étape on a  $a_i^{n-1/2} \equiv 0$  et dans la deuxième  $\mathcal{C}_h = \{0\}$  le schéma G-/2 devient simplement le schéma de Godunov. Par contre, si dans la première étape on a  $a_i^{n-1/2} = f(\xi_i^{n-1/2}) - f(\xi_{i-1}^{n-1/2})$  et dans la deuxième on a que  $u_h^{n+1/2}$  est dans  $\mathcal{C}_h$ , c'est-à-dire :  $u_h^{n+1/2} = u_h^{n+1/2}$ , alors G-k/2 est exactement le schéma LRG-k.

### 3.3.5 - Récapitulation

Le schéma (3.1), (3.2), (3.2)' à l'aide duquel on détermine les moyennes  $\underline{u}_h$  possède les mêmes propriétés de

- (i) monotonie et positivité
- (ii) non-croissance de la variation
- (iii) convergence vers la solution entropique.

que le schéma de Godunov.

*Et ceci indépendamment de,*

- (i) le degré de l'approximation en espace,  $k$ .
- (ii) la façon avec laquelle on calcule  $\underline{u}_h$  (la condition (3.3) mise à part).

En conséquence, une augmentation de  $k$  ( $k \geq 1$ ) n'introduit plus d'oscillations (... des moyennes) aux niveaux des chocs, ni oblige à une diminution du CFL !.

*En plus, on a une certaine souplesse dans la détermination de  $\underline{u}_h$  : seule la condition de compatibilité (3.3) doit être vérifiée.*

### 3.4 - Obtention du schéma. Deuxième étape : Phase de projection

Pour déterminer  $\underline{u}_i^{n+1/2}$ ,  $u_h^{n-1/2}$  et  $\underline{u}_h^{n+1/2}$  étant connues, on procède en deux étapes.

Dans la première on détermine un élément de  $\underline{V}_k$ , que l'on note  $\underline{u}_h^{n+1/2}$ , à l'aide du schéma LRG- $k$ . Dans la deuxième, on projette  $\underline{u}_h^{n+1/2}$  sur un sous-ensemble convexe de  $\underline{V}_k$ , que l'on note  $\mathcal{C}_k$ .

On prend alors  $\underline{u}_h^{n+1/2}$  égale à cette projection. L'ensemble  $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_k(\underline{u}_h^{n+1/2})$  est construit de façon telle que si  $\underline{u} \in \mathcal{C}_k$  alors  $\underline{u}_h^{n+1/2} + \underline{u}$  vérifie la condition de compatibilité (3.3).

- Première Etape : Calcul de  $\underline{u}_h^{n+1/2}$

On détermine  $\underline{u}_h^{n+1/2}$  dans  $\underline{V}_h$  à l'aide du schéma LRG- $k$  :

D'autre part, il est facile de vérifier que lorsque  $k = 1$  ou  $k = 2$   $u_h$  tend vers zéro dans  $L^1(0,T;L^1(0,L))$  fortement quand  $h \rightarrow 0$ . Ceci est vrai parce que  $u_h \in \mathcal{C}_k$  et parce que la variation de  $u_h$  est bornée. En effet, dans ces deux cas on a,

$$\|u_h\|_{L^1(L^1)} \leq \text{Constante} \cdot h \cdot \|u_h\|_{L^\infty(BV)}$$

Pour obtenir cette propriété pour  $k > 2$  il suffit de modifier  $\mathcal{C}_k$  de la façon suivante

$$(3.14)' \quad \mathcal{C}_k(C) = \left\{ v \in \mathcal{C}_k : \forall i = 0, 1, \dots, N_x - 1; \forall x \in K_i \right. \\ \left. |v(x)| \leq \max \left\{ |u_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^{n+1/2}|, |u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}| \right\} \right\}$$

### 3.5 - Ecriture des schémas G-1/2 et G - 1

#### 3.5.1 - Le schéma G-1/2

Si  $u_h \in V_1$  on peut écrire,

$$u_h = \underline{u}_h + \psi_h$$

où  $\forall x \in ]x_i, x_{i+1}[$  on a,

$$\underline{u}_h(x) = \underline{u}_{i+1/2} \\ \psi_h(x) = \frac{[-x_{i+1} + 2x - x_i]}{x_{i+1} - x_i} \underline{u}_{i+1/2}$$

Comme on avait dit, dans la pratique on va utiliser la définition (3.2) des  $a_i$  au lieu de prendre (3.2), (3.2)'.

Donc, pour  $k = 1$  le schéma  $G-k/2$  s'écrit de la façon suivante,

- on suppose connue la fonction  $u_h^{n-1/2}$

• Première Etape : Calcul de  $u_h^{n-1/2}$

$$\forall i = 0, 1, \dots, N_x - 1$$

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_{i+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} (f(\xi_{i+1}^{n-1/2}) - f(\xi_i^{n-1/2})) - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} (a_{i+1}^{n-1/2} - a_i^{n-1/2})$$

où

$$a_0^{n-1/2} = a_{N_x}^{n-1/2} = 0 \text{ et pour } i=1, \dots, N_x-1,$$

$$a_i^{n-1/2} = \text{signe} \left( \frac{u_{i+1/2}^{n-1/2} - u_{i-1/2}^{n-1/2}}{\Delta_{i+1/2} - \Delta_{i-1/2}} \right) \max \left\{ 0, \theta_i^{n-1/2} \right\}, \theta_i^{n-1/2} = \min \left\{ |f(\xi_{i+1}^{n-1/2}) - f(\xi_i^{n-1/2})|, \right.$$

$$C_0^2 \text{ signe} \left( \frac{u_{i+3/2}^{n-1/2} - u_{i+1/2}^{n-1/2}}{\Delta_{i+3/2} - \Delta_{i+1/2}} \right) \cdot |f(\xi_{i+1}^{n-1/2}) - f(\xi_i^{n-1/2})|,$$

$$\left. C_0^2 \text{ signe} \left( \frac{u_{i+1/2}^{n-1/2} - u_{i-1/2}^{n-1/2}}{\Delta_{i+1/2} - \Delta_{i-1/2}} \right) \cdot |f(\xi_i^{n-1/2}) - f(\xi_{i-1}^{n-1/2})| \right\}$$

• Deuxième Etape : Calcul de  $u_h^{n-1/2}$

$$\forall i = 0, 1, \dots, N_x - 1$$

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_{i+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ 3(f(\xi_{i+1}^{n-1/2}) + f(\xi_i^{n-1/2})) \right\} +$$

$$+ \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ f(u_{i+1}^{n-1/2}) + 4f(u_{i+1/2}^{n-1/2}) + f(u_{i+1}^{n-1/2}) \right\}$$

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = \text{signe} \left( \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \right) \max \left\{ 0, \psi_{i+1/2}^{n+1/2} \right\}$$

$$\psi_{i+1/2}^{n+1/2} = \min \left\{ |u_{i+1/2}^{n+1/2}|, |u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^{n+1/2}|, \text{signe} \left( \frac{u_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^{n+1/2}}{\Delta_{i+3/2} - \Delta_{i+1/2}} \right) \cdot \right.$$

$$\left. |u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}| \right\}$$

• Troisième Etape :

$$u_h^{n+1/2} = u_h^{n+1/2} + u_h^{n+1/2}$$

3.5.2 - Le schéma G-1

Si  $u_h \in V_2$  on peut écrire,

$$u_h = \underline{u}_h + \underline{\underline{u}}_h$$

où,  $\forall x \in ]x_i, x_{i+1}[$ ,

$$\underline{u}_h(x) = \underline{u}_{i+1/2}$$

$$\underline{\underline{u}}_h(x) = \phi_i^+(x) \underline{u}_i^+ + \phi_{i+1}^-(x) \underline{u}_{i+1}^-$$

où,

$$\phi_i^+(x) = \frac{(x_{i+1}-x)(x_{i+1/2}-x)}{(x_{i+1}-x)(x_{i+1/2}-x_i)} + \frac{1}{4} \frac{(x_{i+1}-x)(x_i-x)}{(x_{i+1}-x_{i+1/2})(x_{i+1/2}-x_i)}$$

$$\phi_{i+1}^-(x) = \frac{(x_{i+1/2}-x)(x_i-x)}{(x_{i+1/2}-x_{i+1})(x_i-x_{i+1})} + \frac{1}{4} \frac{(x_{i+1}-x)(x_i-x)}{(x_{i+1}-x_{i+1/2})(x_{i+1/2}-x_i)}$$

On remarque que l'on a,

$$\phi_i^+(x_i) = 1 \qquad \phi_{i+1}^-(x_i) = 0$$

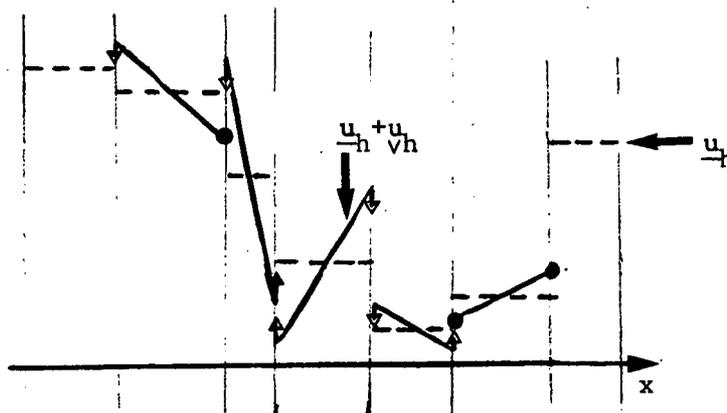
$$\phi_i^+(x_{i+1/2}) = -1/4 \qquad \phi_{i+1}^-(x_{i+1/2}) = -1/4$$

$$\phi_i^+(x_{i+1}) = 0 \qquad \phi_{i+1}^-(x_{i+1}) = 1$$

et par conséquent  $u_h(x_{i+1/2})$  ne coïncide pas forcément avec la valeur moyenne sur  $K_i$ ,  $\underline{u}_{i+1/2}$ . En effet, on a,

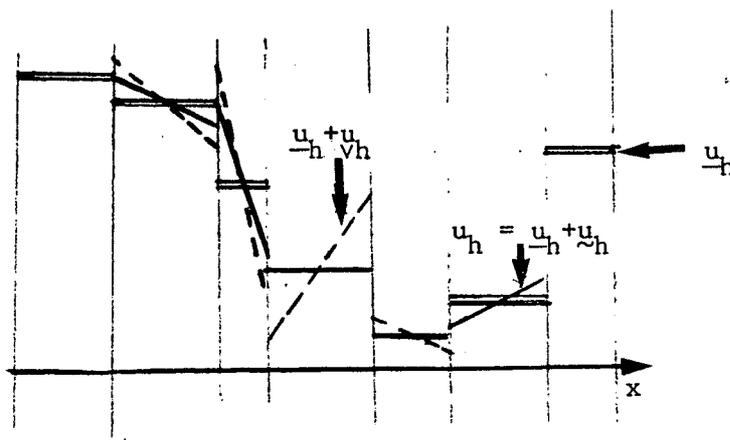
$$u_h(x_{i+1/2}) = \underline{u}_{i+1/2} - \frac{1}{4} (\underline{u}_i^+ + \underline{u}_{i+1}^-) = \underline{u}_{i+1/2}$$

Maintenant on va illustrer sur quelques figures l'étape de projection de ce cas. Supposons donc que les fonctions  $\underline{u}_h^{n+1/2}$  et  $\underline{v}_h^{n+1/2}$  ont été déjà calculées. Sur la figure suivante on a dessiné la fonction  $(\underline{u}_h^{n+1/2} + \underline{v}_h^{n+1/2})$  avec un trait continu et avec un trait discontinu la fonction  $\underline{u}_h^{n+1/2}$ ,



Pour obtenir  $\underline{u}_h^{n+1/2}$  on projette  $\underline{v}_h^{n+1/2}$  sur  $\mathcal{C}(\underline{u}_h^{n+1/2})$ , voir (3.14). Dans notre cas ceci revient à modifier la pente de  $(\underline{u}_h^{n+1/2} + \underline{v}_h^{n+1/2})$  à l'intérieur de chaque élément de façon à satisfaire (3.13) et (3.13)'. Les petites flèches indiquent le sens de la projection, tandis que les petits ronds indiquent qu'une des conditions (3.13), (3.13)' est satisfaite.

Sur la figure suivante on dessine en trait continu la fonction  $\underline{u}_h^{n+1/2} = \underline{u}_h^{n+1/2} + \underline{u}_h^{n+1/2}$  en trait discontinu la fonction  $(\underline{u}_h^{n+1/2} + \underline{v}_h^{n+1/2})$ , et en trait double  $\underline{u}_h^{n+1/2}$



Pour  $k=2$  le schéma  $G-k/2$  s'écrit donc de la façon suivante,

- On suppose connue  $u_h^{n-1/2}$

• Première Etape : Calcul de  $u_h^{n+1/2}$

$$\forall i = 0, 1, \dots, N_x - 1$$

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_{i+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} (f(\xi_{i+1}^{n-1/2}) - f(\xi_i^{n-1/2})) - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} (a_{i+1}^{n-1/2} - a_i^{n-1/2})$$

où les  $a_i^{n-1/2}$  sont calculés exactement comme dans le schéma  $G-1/2$ .

• Deuxième Etape : Calcul de  $u_h^{n+1/2}$

$$\forall i = 0, 1, \dots, N_x - 1$$

$$u_i^{+n+1/2} = u_i^{+n-1/2} - \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ f(\xi_{i+}^{n-1/2}) + 5 f(\xi_i^{n-1/2}) \right\} -$$

$$+ \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ -1 f(u_{i+1}^{-n-1/2}) + 4f(\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}) + 3 f(u_i^{+n-1/2}) \right\}$$

$$u_{i+1}^{-n+1/2} = u_{i+1}^{-n+1/2} + \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ 5 f(\xi_{i+1}^{n-1/2}) + f(\xi_i^{n-1/2}) \right\} -$$

$$- \frac{\Delta^{n+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ 3 f(u_{i+1}^{-n-1/2}) + 4f(\underline{u}_{i+1/2}^{n-1/2}) - f(u_i^{+n-1/2}) \right\}$$

et,

$$u_i^{+n+1/2} = \text{signe} (u_i^{+n+1/2}) \max \left\{ 0, \theta_i^{+n+1/2} \right\}$$

$$\theta_i^{+n+1/2} = \min \left\{ |u_i^{+n+1/2}|, |u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}| \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \text{signe} \left( (u_i^{+n+1/2}) \left( -u_{i+1/2}^{n+1/2} + u_{i-1/2}^{n+1/2} \right) \right) \right\}$$

$$u_{i+1}^{-n+1/2} = \text{signe}(u_{i+1}^{-n+1/2}) \max \left\{ 0, \theta_{i+1}^{-n+1/2} \right\}$$

$$\theta_{i+1}^{-n+1/2} = \min \left\{ |u_{i+1}^{-n+1/2}|, |u_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^{n+1/2}| \cdot \text{signe}((u_{i+1}^{-n+1/2})(u_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^{n+1/2})) \right\}$$

- Troisième Etape :

$$u_h^{n+1/2} = \underline{u}_h^{n+1/2} + \tilde{u}_h^{n+1/2}$$

### 3.6 - Résumé

On a donc construit le schéma G-k/2 à partir du schéma de Godunov et du schéma LRG-k.

Pour calculer  $u_h^{n+1/2}$ ,  $u_h^{n-1/2}$  étant connue, avec G-k/2, on procède en deux étapes :

- (i) dans la première, dite d'antidiffusion, on calcule les moyennes de la solution sur chaque élément,  $u_h^{n+1/2}$ .

Pour les calculer on écrit le schéma LRG-k et on le modifie, suivant [1] et [18], pour obtenir les propriétés de monotonie, positivité, non-croissance de la variation et de convergence vers la solution entropique du schéma de Godunov.

- (ii) dans la deuxième, dite de projection on calcule le reste de degrés de liberté,  $\underline{u}_h^{n+1/2}$ .

On calcule d'abord  $\underline{u}_h^{n+1/2}$  à l'aide du schéma LRG-k pour ensuite projeter sur un convexe dépendant de  $\underline{u}_h^{n+1/2}$ , choisi de façon telle à faire que tous ses éléments vérifient la condition de compatibilité (3.3). On prend  $\underline{u}_h^{n+1/2}$  égale à cette projection.

- (iii) On fait finalement,

$$u_h^{n+1/2} = \underline{u}_h^{n+1/2} + \tilde{u}_h^{n+1/2}$$

On résume l'étude mathématique de ce schéma dans le théorème suivant,

**THEOREME (3.6)**

(Sur le schéma G-k/2)

Soit  $\{u_h\}_{h \neq 0}$  la suite générée par le schéma G-k/2, c'est-à-dire, le schéma (3.1), (3.2), (3.2)', (3.12), (3.14), ((3.14)' si  $k \neq 2$ ). (Plus la condition initiale et les conditions aux bords, voir les paragraphes 1.2) et 2.2).).

Si l'on suppose la condition (3.7) vérifiée on a,

(i)  $\underline{u}_h$  vérifie la propriété de positivité (3.8) et la propriété de non-décroissance de la variation (3.10).

(ii) La suite  $\{u_h\}_{h \neq 0}$  converge vers la solution entropique du problème continu.

#### IV - EXPERIENCES NUMERIQUES - (SCHEMA G-1/2)

##### 4.1 - Introduction

Dans ce paragraphe on va réaliser quelques expériences numériques dans le but de tester le schéma G-1/2.

Au paragraphe 4.2 on considère le cas simple *discontinuité de contact* transportée à *vitesse constante*.

Au paragraphe 4.3, on considère une application  $u \rightarrow f(u)$  croissante dans le but d'étudier *la formation et le transport d'un choc*.

Au paragraphe 4.4 on considère une application  $u \rightarrow f(u)$  non-monotone dans trois cas différents, dans le but d'étudier le transport de *deux chocs*, qui se déplacent en deux sens différents, et d'une onde de rarefaction.

Dans tous ces trois paragraphes le schéma G-1/2 est comparé au schéma de Godunov et au schéma LRG-1.

##### 4.2 - Approximation d'une discontinuité de contact.

La discontinuité de contact la plus simple apparaît si l'on considère le cas suivant,

$$f(u) = \begin{cases} 0 & \forall u < 0 \\ u & \forall u \in [0,1] \\ 1+30(u-1) & \forall u > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 1 & \forall t \geq 0 \\ u_L(t) &= 0 & \forall t \geq 0 \\ u^0(x) &= 0 & \forall x \in [0,L] \end{aligned}$$

En effet, la solution de ce problème est la suivante,

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \forall x < t \\ 0 & \forall x > t \end{cases}$$

Si le schéma avec lequel on obtient des approximations numériques de  $u$  est *positif* de façon de prolonger la fonction  $f$  hors l'intervalle  $[0,1]$  n'a aucune influence. C'est le cas du schéma de Godunov pour  $CFL \leq 1$ , et le cas du schéma G-1/2 pour  $CFL \leq 1/2$ . Par contre, ceci n'est pas vrai pour LRG-1. On a choisi de prolonger  $f$  de cette façon parce que c'est une façon adéquate d'améliorer la stabilité du schéma. (Voir Chavent-Cockburn [ ])

Sur les figures que l'on montre à la suite on a pris pour le schéma G-1/2,

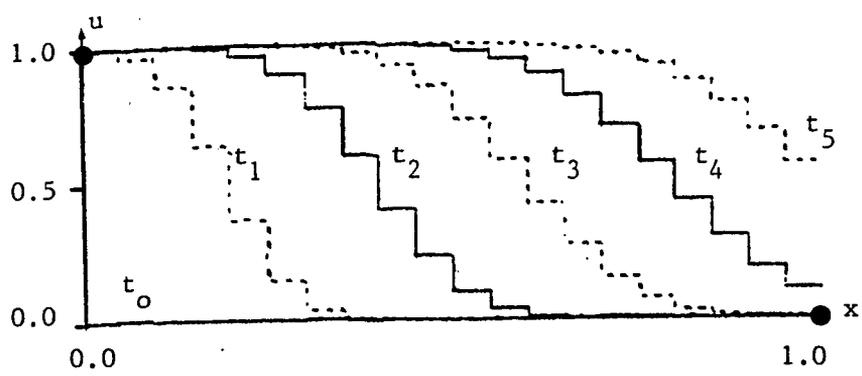
$\Delta x = 1/10$	$CFL = 1/2$
$\Delta x = 1/10$	$CFL = 1/4$
$\Delta x = 1/10$	$CFL = 1/8$
$\Delta x = 1/40$	$CFL = 1/2$
$\Delta x = 1/40$	$CFL = 1/8$

pour le schéma LRG-1 on a pris aussi le même jeu de paramètres, et pour le schéma de Godunov on a divisé par 2 le pas d'espace dans le but d'avoir le même nombre de degrés de liberté pour chacun des schémas.

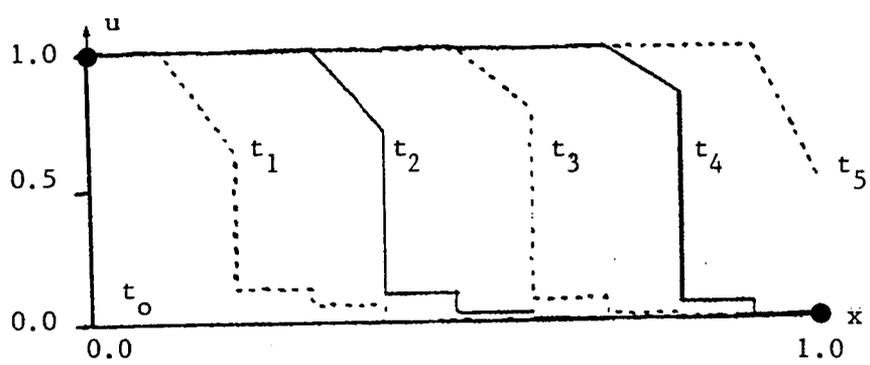
(On va garder ce jeu de paramètres pour toutes les expériences numériques que l'on va faire).

Sur les figures 1 à 5 on voit donc que la discontinuité est mieux approchée par le schéma G-1/2. Le schéma de Godunov diffuse beaucoup et le schéma LRG-1 possède des propriétés de stabilité très pauvres.

Comme on s'y attendait, les meilleurs résultats sont obtenus pour  $\Delta x = 1/40$  et  $CFL = 1/2$ . Il faut signaler aussi que pour  $CFL = 1$  le schéma G-1/2 donne toujours la solution exacte dans ce cas.



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/40$ )



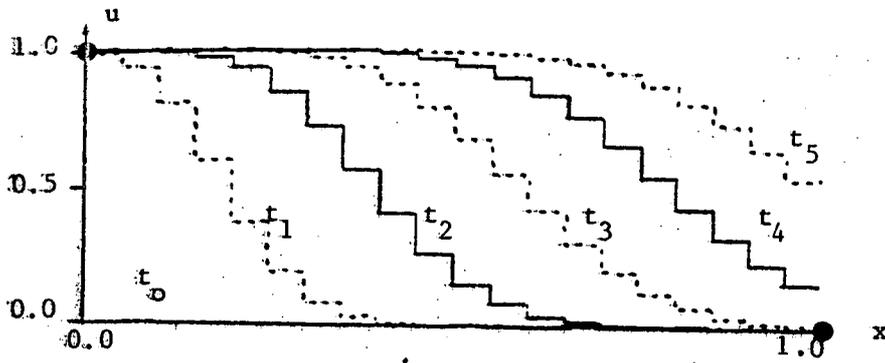
G-1/2  
( $\Delta t = 1/20$ )

LRG-1  
("instable")

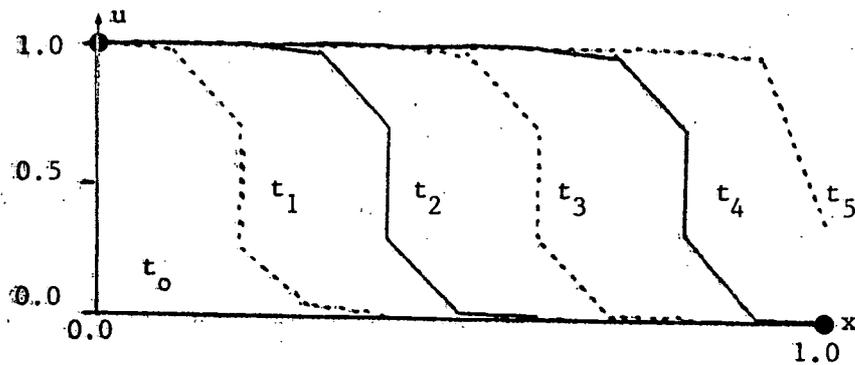
( $\Delta t = 1/20$ )

$$(t_i = (0.2)i, 0 \leq i \leq 5)$$

Figure 1 : Approximation d'une discontinuité de contact CFL = 1/2, maillage grossier.



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/80$ )



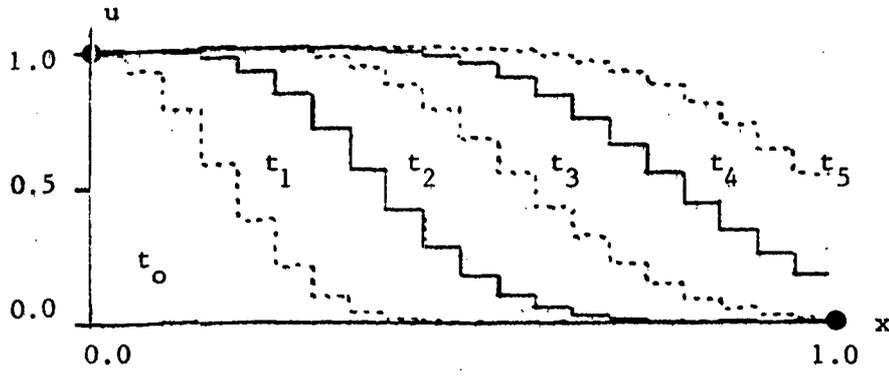
G-I/2  
( $\Delta t = 1/40$ )

LRG-1  
("instable")

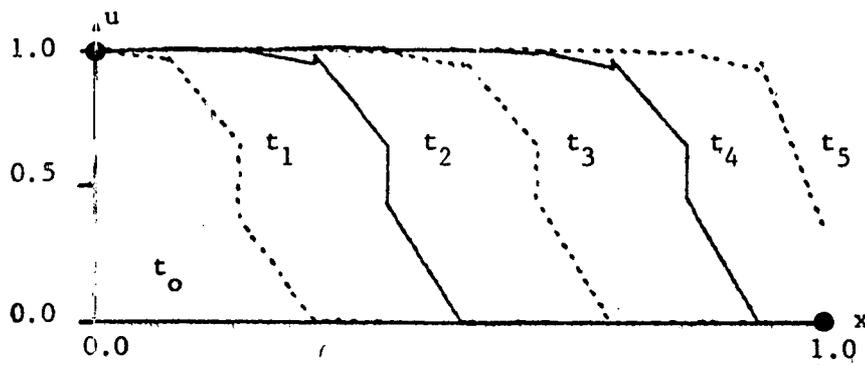
( $\Delta t = 1/40$ )

$$(t_i = (0.2)i, 0 \leq i \leq 5)$$

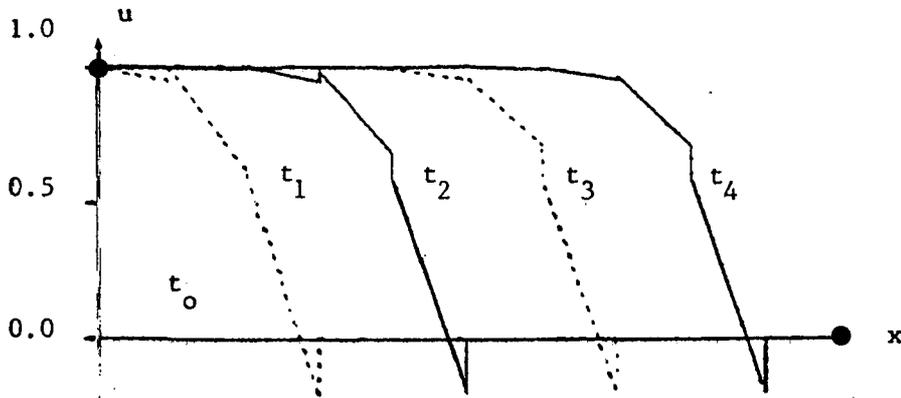
Figure 2 : Approximation d'une discontinuité de contact, CFL = 1/4, maillage grossier.



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/160$ )



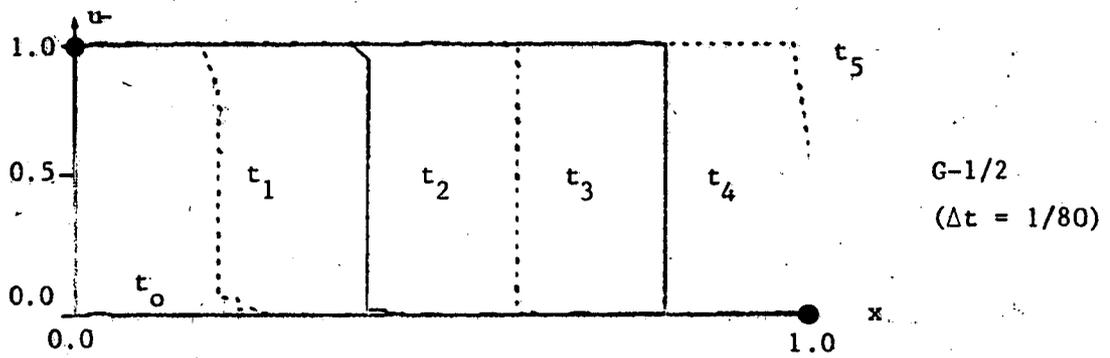
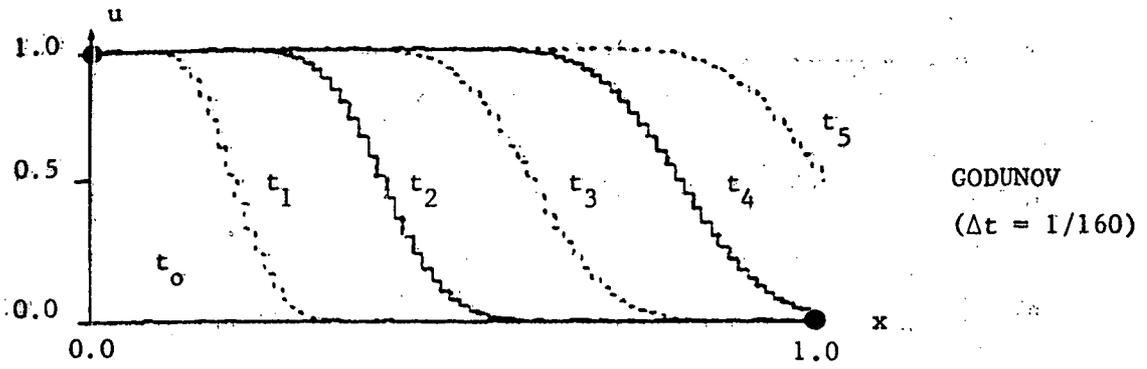
G-1/2  
( $\Delta t = 1/80$ )



LRG-1  
( $\Delta t = 1/80$ )

$$(t_i = (0.2)i, 0 \leq i \leq 5)$$

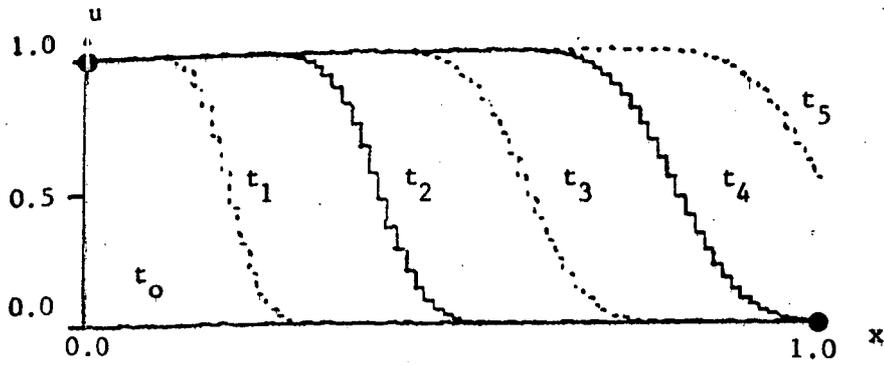
Figure 3 : Approximation d'une discontinuité de contact, CFL = 1/8,,  
maillage grossier.



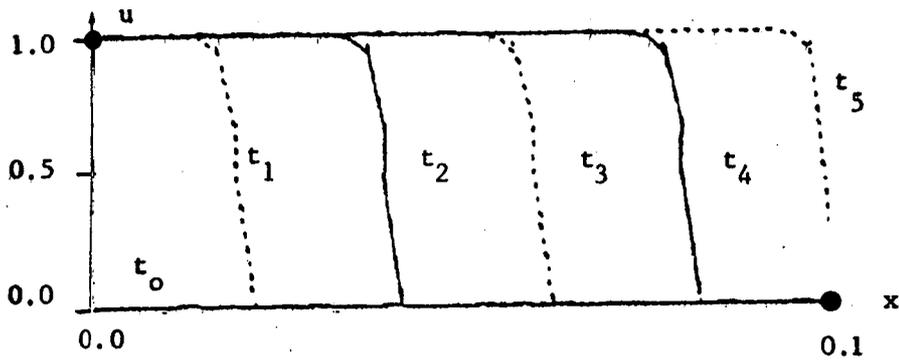
LRG-1  
("instable")

( $\Delta t = 1/80$ )

Figure 4 : Approximation d'une discontinuité de contact, CFL = 1/2, maillage raffiné.



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/640$ )



G-1/2  
( $\Delta t = 1/320$ )

LRG-1  
("instable")

( $\Delta t = 1/320$ )

$$(t_i = 0.2)i, 0 \leq i \leq 5$$

Figure 5 : Approximation d'une discontinuité de contact, CFL = 1/8.  
maillage raffiné.

### 4.3 - Approximation d'un choc

Maintenant considérons le cas suivant, [21],

$$f(u) = \begin{cases} 0 & \forall u < 0 \\ \frac{1}{2} u^2 (u^2 + (1-u)^2)^{-1} & \forall u \in [0,1] \\ \frac{1}{2} + 30(u-1) & \forall u > 1 \end{cases}$$

avec les conditions aux bords,

$$\begin{cases} u_0(t) = 1 & \forall t \geq 0 \\ u_1(t) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

et les conditions initiales suivantes,

- Cas de formation d'un choc

$$u^0(x) = 0.1 / (0.1 + x) \quad \forall x \in [0,1]$$

- Cas de transport d'un choc

$$u^0(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

Dans ces deux cas il est facile de vérifier que la solution exacte possède une seule discontinuité pour la valeur

$$u = 1/\sqrt{2} \cong 0.707$$

qui se propage à la vitesse,

$$\mathcal{U}_u = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cong 0.604$$

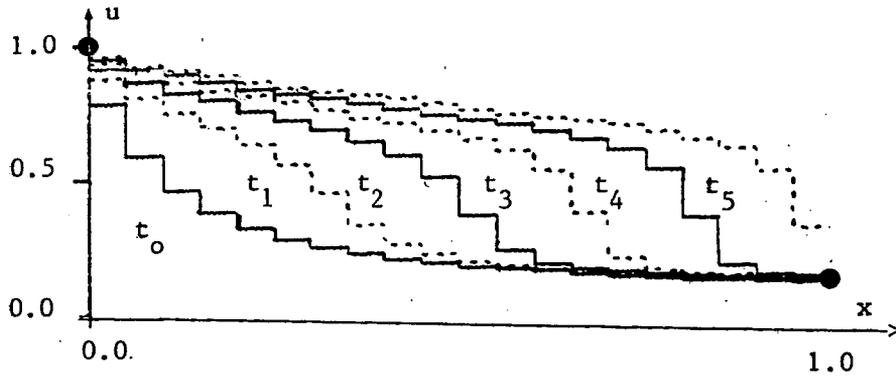
La fonction  $f$  que l'on a prise pour les expériences numériques est égale à la  $P^1$ -interpolée de la fonction que l'on vient de présenter. Sur  $[0,1]$  on a pris dix points d'interpolation. C'est pour cela que les fonctions  $u_h$

vont présenter des paliers, car maintenant les "valeurs" de  $u$  comprises dans l'intervalle générique  $] i/10, (i+1)/10 [$   $i = 0, 1, \dots, 9$  se déplacent à la même vitesse.

Cette approximation introduit certes une erreur, mais pour l'effet de faire des comparaisons entre les solutions de 3 schémas qui utilisent la même fonction, cette inexactitude n'a aucune importance.

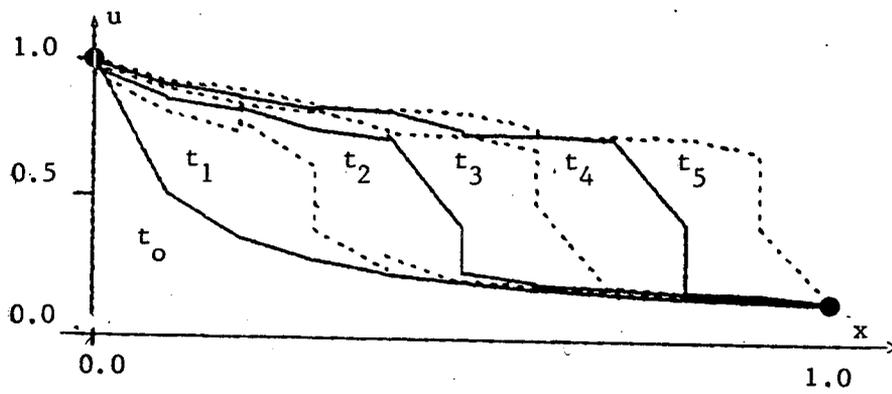
Sur les figures 6 à 10 on montre le cas de la formation d'un choc. On y voit que la diffusion numérique augmente avec la diminution du CFL, qui dans ce cas est égal à  $\Delta t/\Delta x$  !, phénomène qui se présente toujours pour ce genre de problème. On peut constater encore une fois que le schéma G-1/2 est plus stable que LRG-1, et, ce qui est le plus important dans ce cas, qu'il ne présente pas les (fortes) oscillations de ces schémas aux voisinages du choc. Voir surtout la figure 10.

Sur les figures 11 à 15 on montre le transport d'un choc. On y constate que le schéma G-1/2 approche bien le choc, en effet la discontinuité se situe à peu près vers  $u = 0.7$  et par conséquent elle est transportée à la vitesse correspondante. Pour  $t = 1$ , on devrait la trouver vers  $x = 0.6$ , et c'est exactement ceci ce qui se passe. Voir les figures 14 et 15. On remarque que G-1/2 diffuse légèrement plus que LRG-1, mais encore une fois il ne présente les oscillations près du choc de celui-ci.



GODUNOV

( $\Delta t = 1/40$ )



G-1/2

( $\Delta t = 1/20$ )

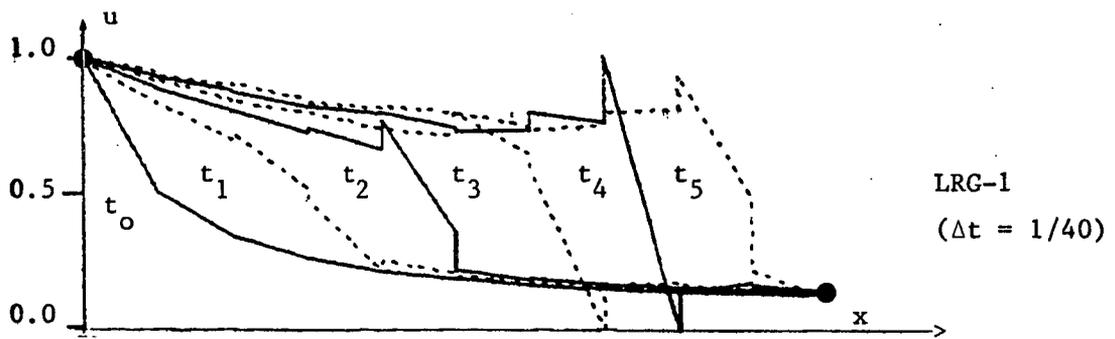
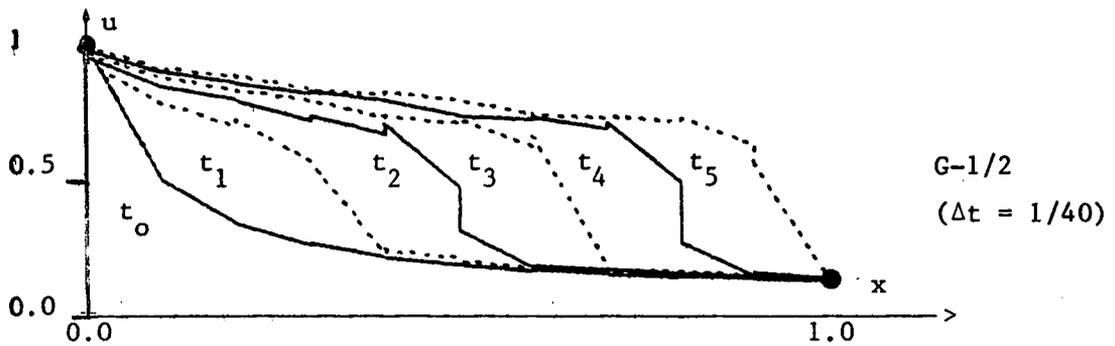
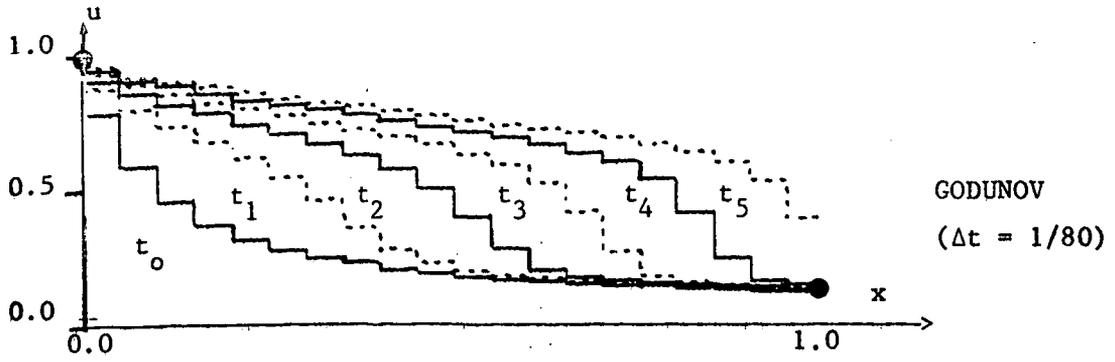
LRG-1

("instable")

( $\Delta t = 1/20$ )

$$(t_i = 0.2)i, \quad 0 \leq i \leq 5$$

Figure 6 : Formation d'un choc. CFL = 1/2, maillage grossier



$$(t_i = (0.2)i, 0 \leq i \leq 5)$$

Figure 7 ; Formation d'un choc. CFL = 1/4, maille grossier.

Dans ce cas, une situation d'équilibre est trouvée pour  $t \geq 1$  ; en effet on a,

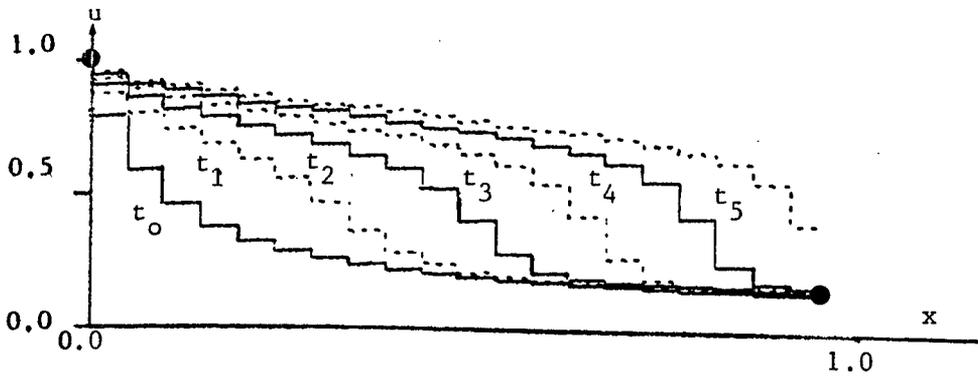
$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \forall x \leq 1/2 \\ 1 & \forall x > 1/2 \end{cases} \quad \forall t \geq 1.$$

La fonction  $f$  que l'on prend pour les expériences numériques est, encore une fois, la  $P^1$ -interpolée de celle que l'on vient de présenter. Le pas de l'interpolation est  $1/10$ .

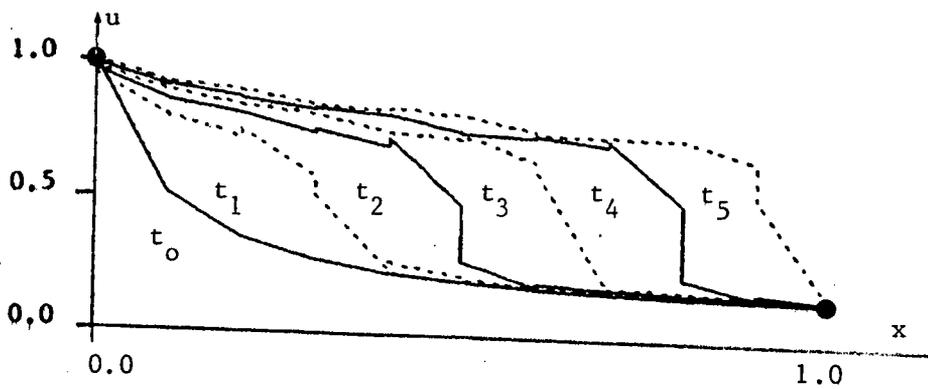
Sur les figures 16 à 20 on montre le premier cas, sur les figures 21 à 25 le deuxième et sur les figures 26 à 30 le dernier.

Sur les figures 16 à 20 on voit : d'une part, que le schéma G-1/2 élimine les oscillations provoquées par la discontinuité de la condition initiale qui apparaissent pour le schéma LRG-1. Celles-ci sont dues à la non-positivité de LRG-1. D'autre part, G-1/2 approche bien les chocs qui apparaissent au bout d'un certain temps : de déclenchement se fait en même temps que pour LRG-1 et les chocs sont approchés sur le même nombre de mailles. Il faut aussi remarquer que G-1/2 diffuse légèrement plus que LRG-1.

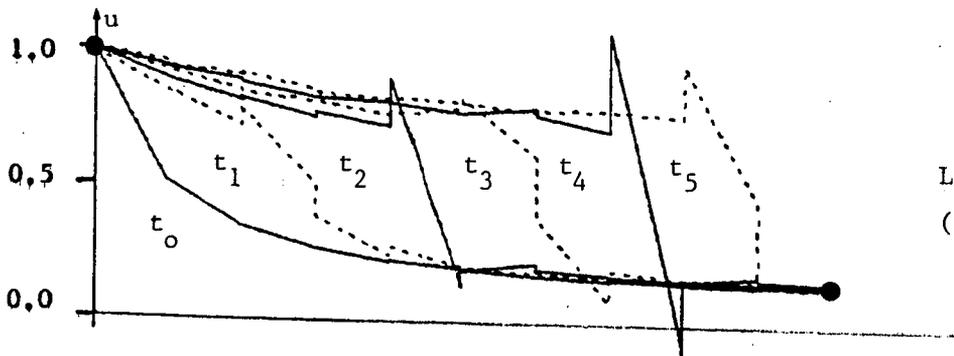
Sur les figures 21 à 25 et les figures 26 à 30 on observe le même comportement des chocs.



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/160$ )



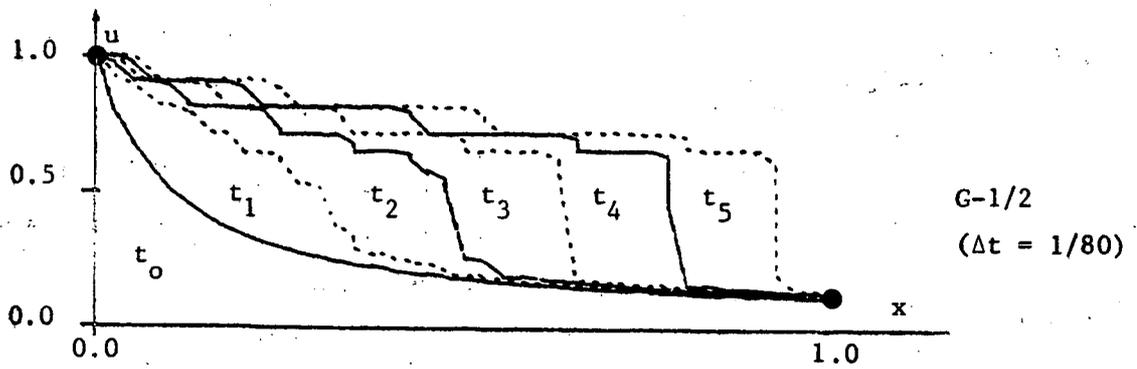
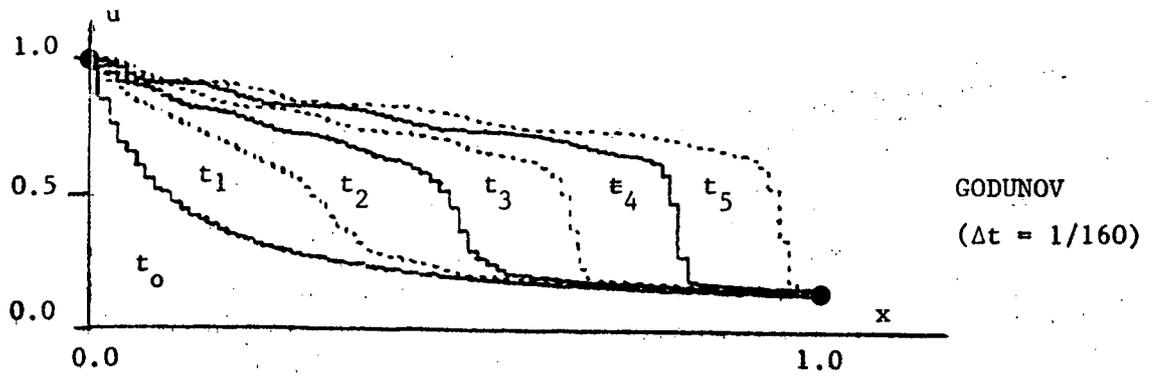
G-1/2  
( $\Delta t = 1/80$ )



LRG-1  
( $\Delta t = 1/80$ )

$$(t_i = (0.2)i, \quad 0 \leq i \leq 5)$$

Figure 8 : Formation d'un choc. CFL = 1/8, maillage grossier

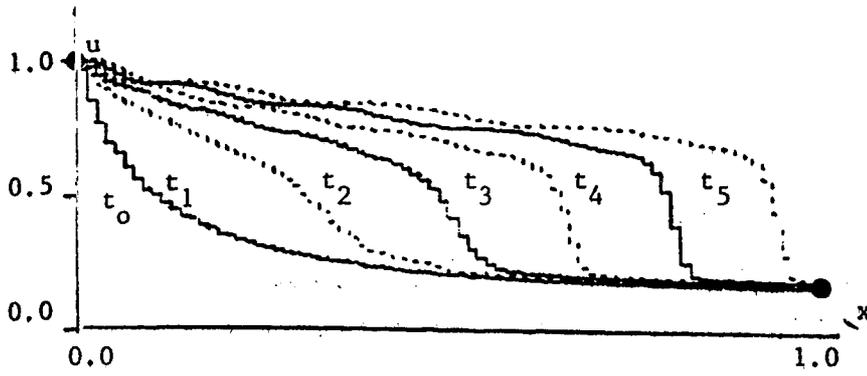


LRG-1  
("instable")

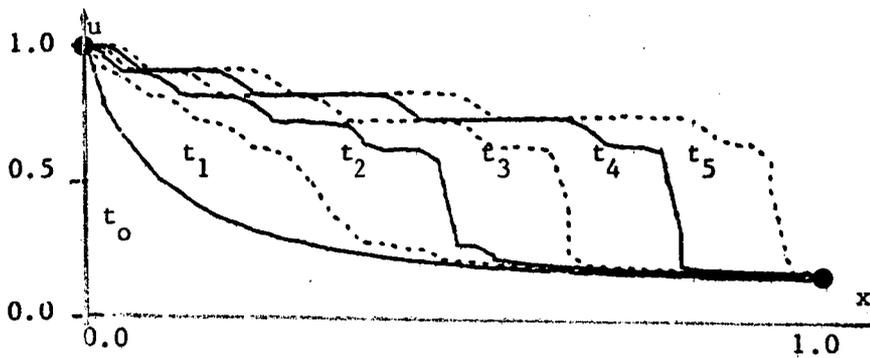
( $\Delta t = 1/80$ )

$$(t_i = 0.2)i, \quad 0 \leq i \leq 5$$

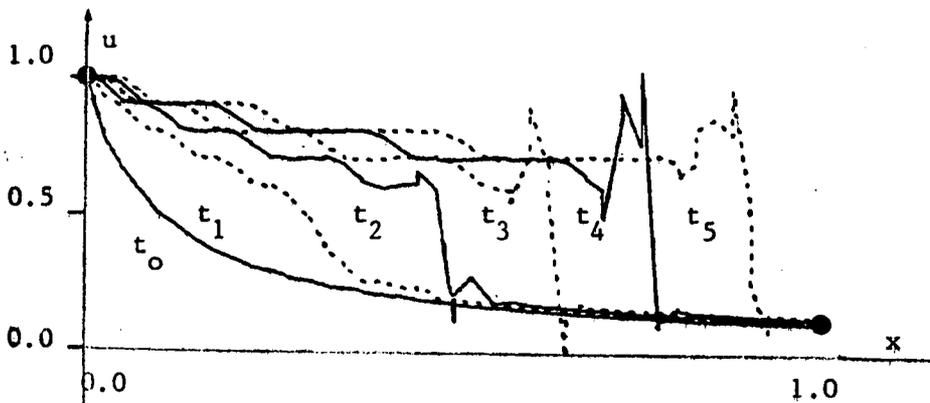
Figure 9 : Formation d'un choc. CFL = 1/2, maillage raffiné



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/640$ )



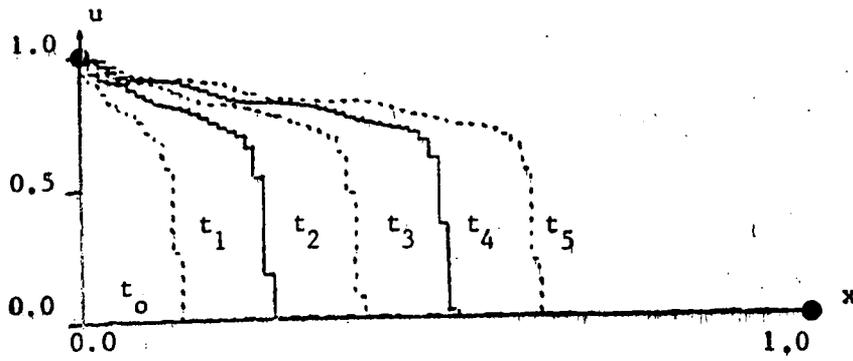
G-1/2  
( $\Delta t = 1/320$ )



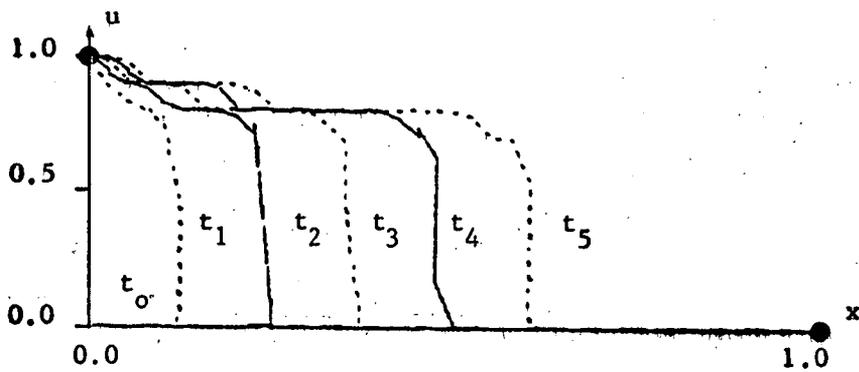
LRG-1  
( $\Delta t = 1/320$ )

$$(t_i = (0.2)i, 0 \leq i \leq 5)$$

Figure 10 : Formation d'un choc. CFL = 1/8, maillage raffiné.



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/160$ )



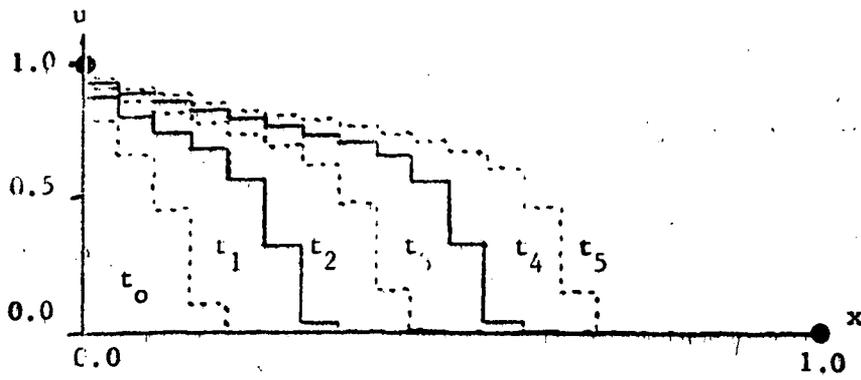
G-1/2  
( $\Delta t = 1/80$ )

LRG-1  
("instable")

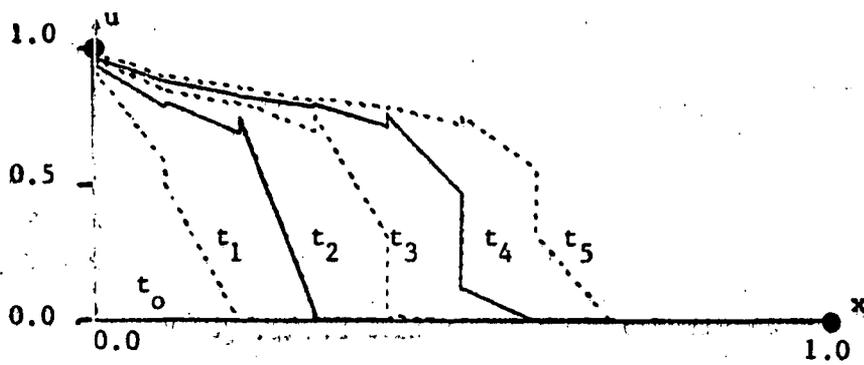
( $\Delta t = 1/80$ )

$$t_i = (0.2)i, \quad 0 \leq i \leq 5$$

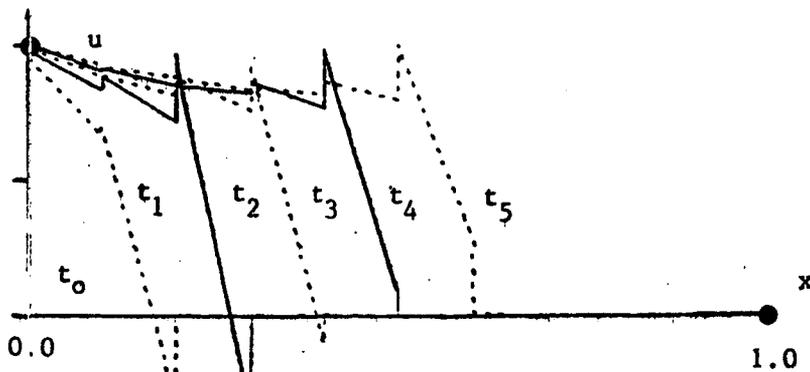
Figure 14 : Transport d'un choc CFL = 1/2, maillage raffiné.



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/160$ )



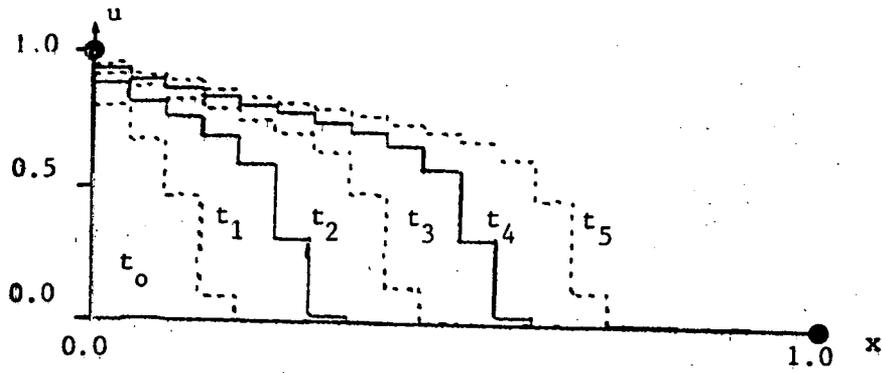
G-1/2  
( $\Delta t = 1/80$ )



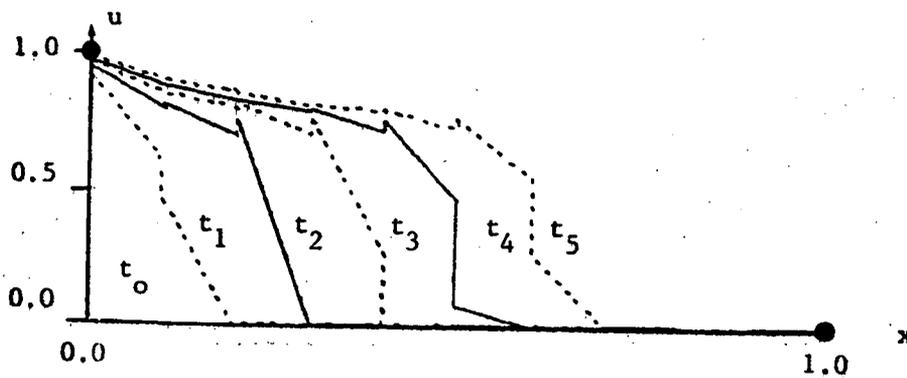
LRG-1  
( $\Delta t = 1/80$ )

$$(t_i = (0.2)i, \quad 0 \leq i \leq 5)$$

Figure 13 : Transport d'un choc, LFL = 1/8 , maillage grossier.



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/40$ )



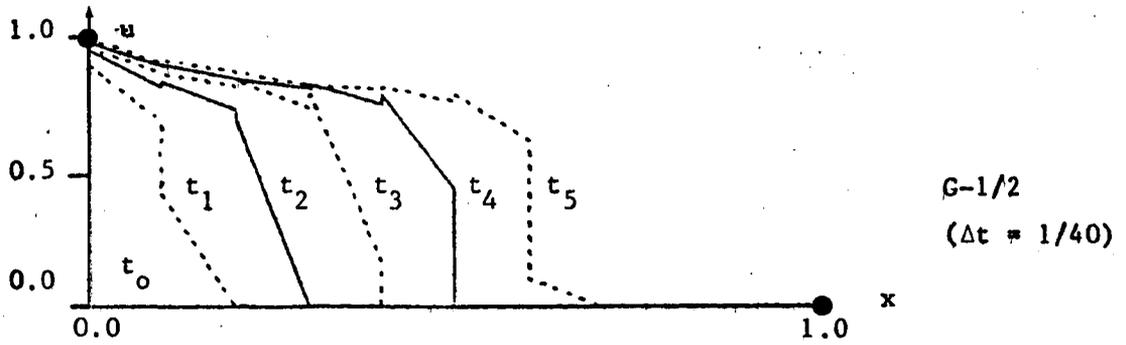
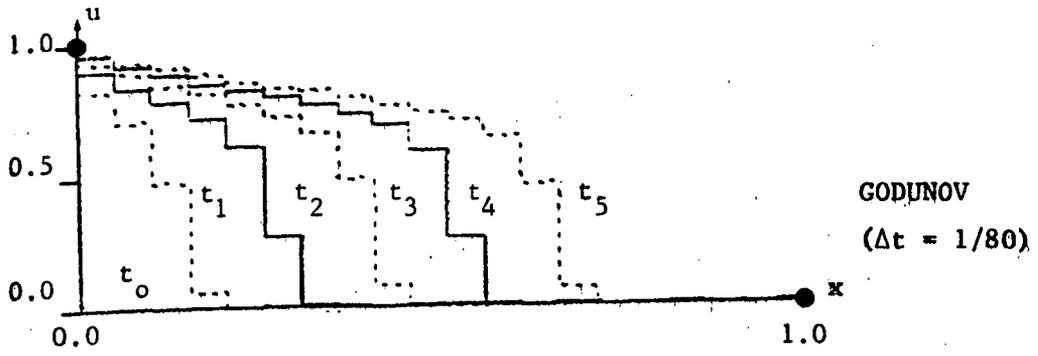
G-1/2  
( $\Delta t = 1/20$ )

LRG-1  
("instable")

( $\Delta t = 1/20$ )

$$(t_i = (0.2)i, 0 \leq i \leq 5)$$

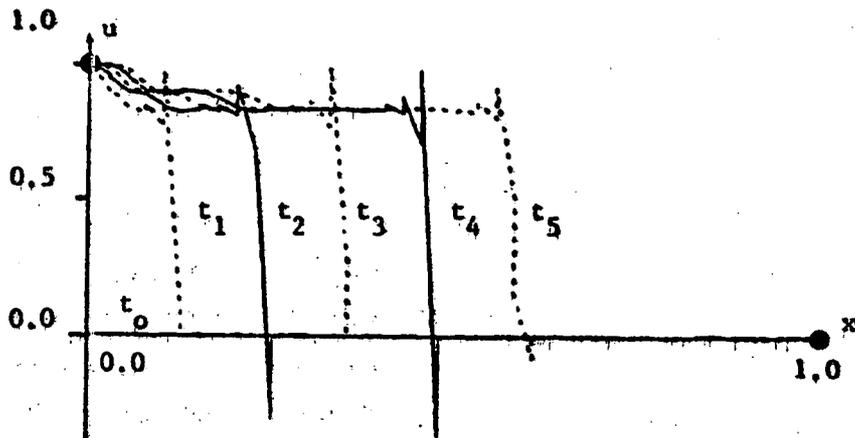
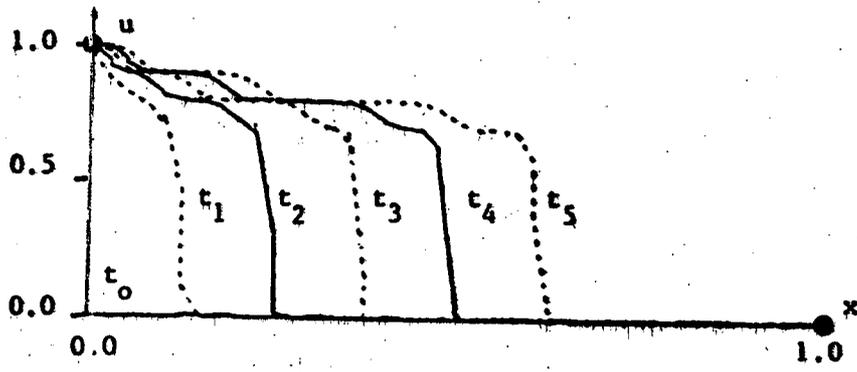
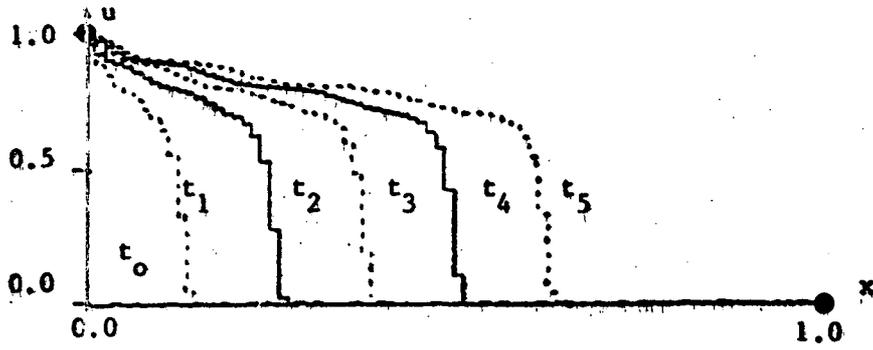
Figure 11 : Transport d'un choc. CFL = 1/2, maillage grossier



LRG  
("instable")

$(\Delta t = 1/40)$

Figure 12 : Transport d'un choc. CFL = 1/4, maillage grossier.



$$(t_i = (0.2)i, \quad 0 \leq i \leq 5)$$

Figure 15 : Transport d'un choc CFL = 1/8, maillage raffiné.

4.4 - Le cas  $u \rightarrow f(u)$  non-monotone

On considère maintenant,

$$f(u) = u(1-u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{cases} u_0(t) = 0 & \forall t \geq 0 \\ u_1(t) = 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

et les *trois* conditions initiales,

- Le Cas : onde de raréfaction et deux chocs. I

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \forall x < 1/2 \\ 0 & \forall x > 1/2 \end{cases}$$

- Le Cas : onde de raréfaction et deux chocs. II

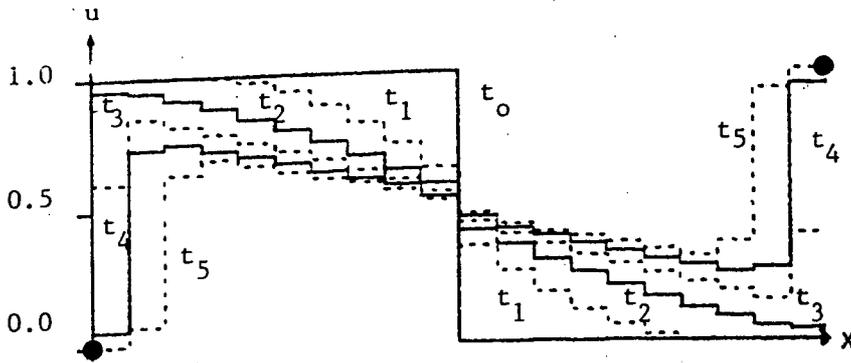
$$u_0(x) = (1-x) \quad \forall x \in ]0,1[$$

- Le Cas : deux chocs

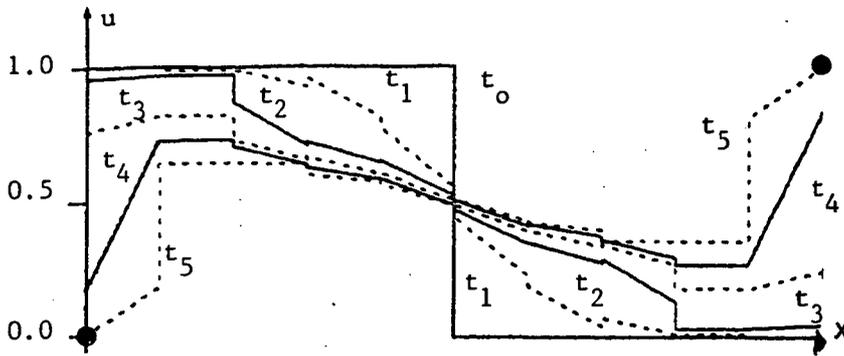
$$u_0(x) = 1/2 \quad \forall x \in ]0,1[$$

Dans le premier cas, la discontinuité de la condition initiale au point  $x = 0.5$  produit une onde de raréfaction. Cette onde se propage jusqu'à faire que  $u(0^+) = 1$ , à ce moment il apparaît un choc qui se propage maintenant vers la droite. Un phénomène similaire se produit, *en même temps*, à l'extrémité  $x = L$ , et il apparaît donc un deuxième choc se propageant vers la gauche.

Le deuxième cas est simplement une prolongation du premier. Dans le troisième cas on élimine l'onde de rarefaction pour obtenir simplement deux chocs qui se propagent d'une façon symétrique par rapport au point  $x = 0.5$ .



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/40$ )



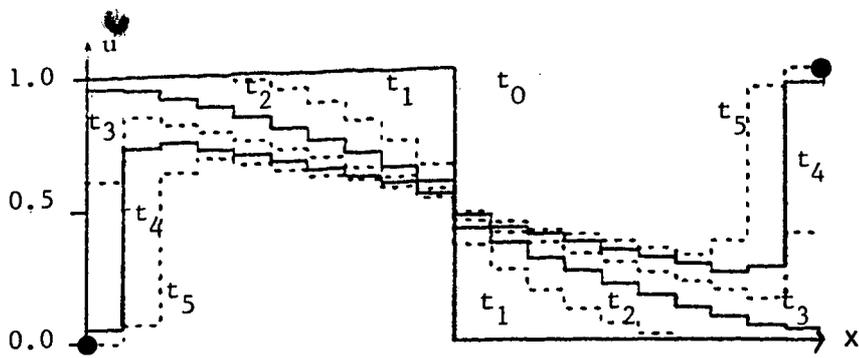
G-1/2  
( $\Delta t = 1/20$ )

LRG-1  
("instable")

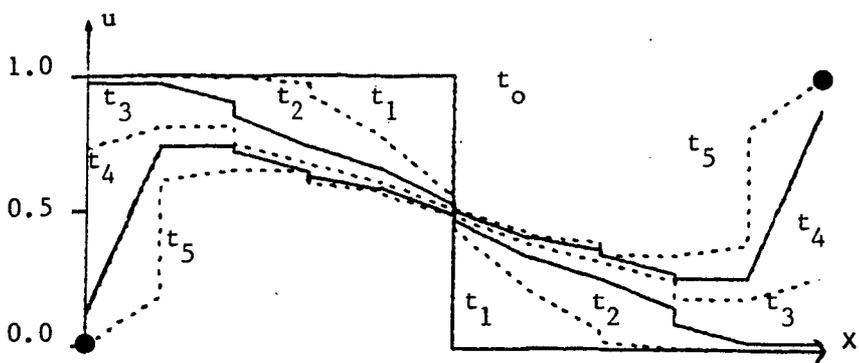
( $\Delta t = 1/20$ )

$$(t_i = (0.2)i, \quad 0 \leq i \leq 5)$$

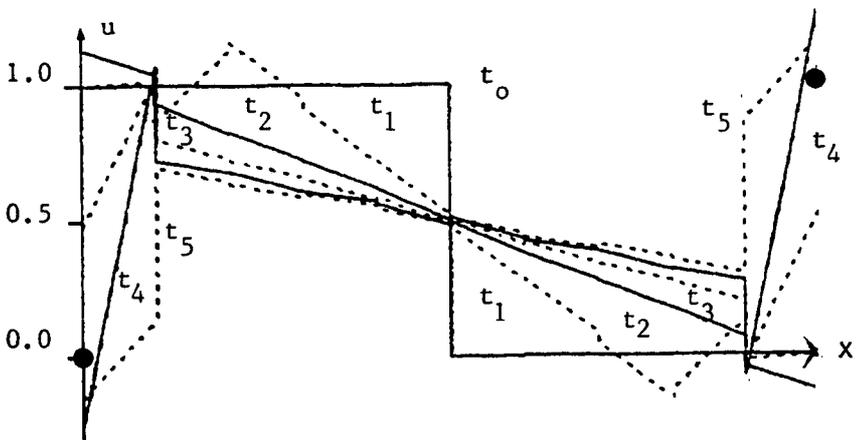
Figure 16 : Approximation d'une onde de raréfaction CFL-1/2, maillage grossier



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/80$ )



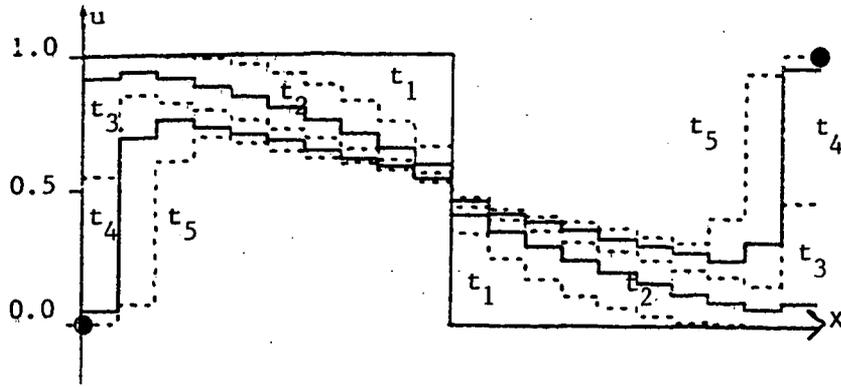
G-1/2  
( $\Delta t = 1/40$ )



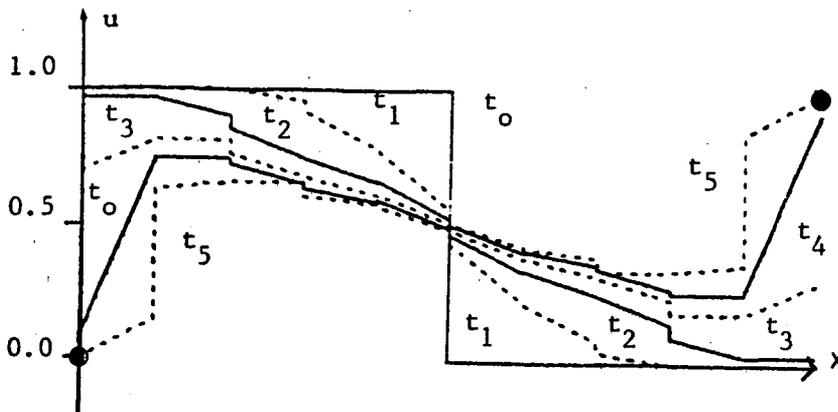
LRG-1  
( $\Delta t = 1/40$ )

$$(t_i = (0.2)i, \quad 0 \leq i \leq 5)$$

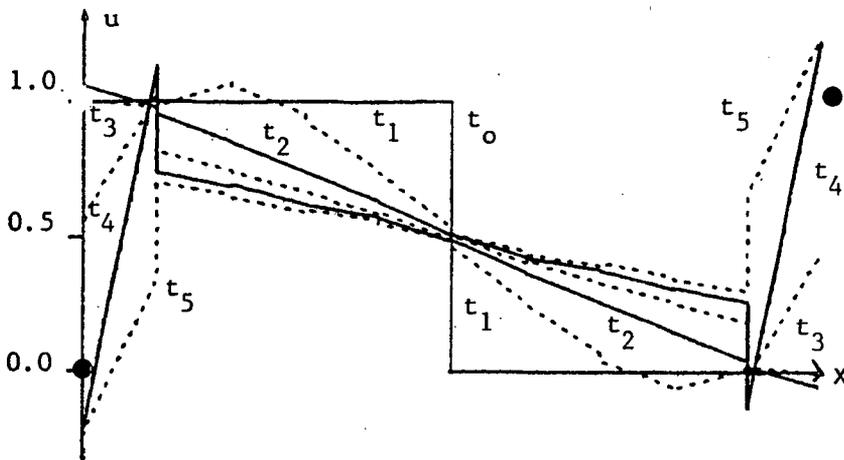
Figure 17 : Approximation d'une onde de raréfaction CFL = 1/4, maillage grossier



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/160$ )



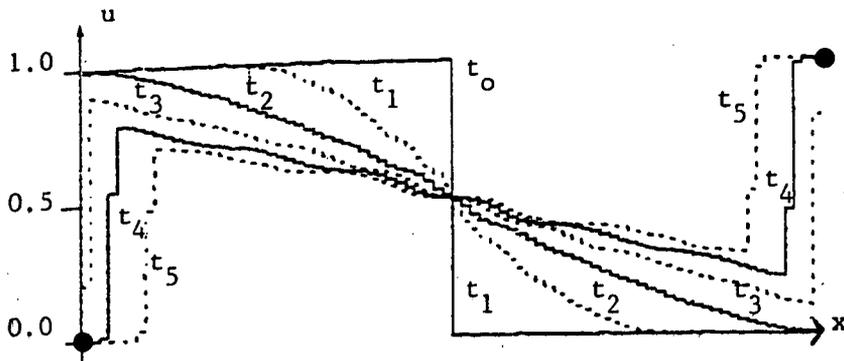
G-1/2  
( $\Delta t = 1/80$ )



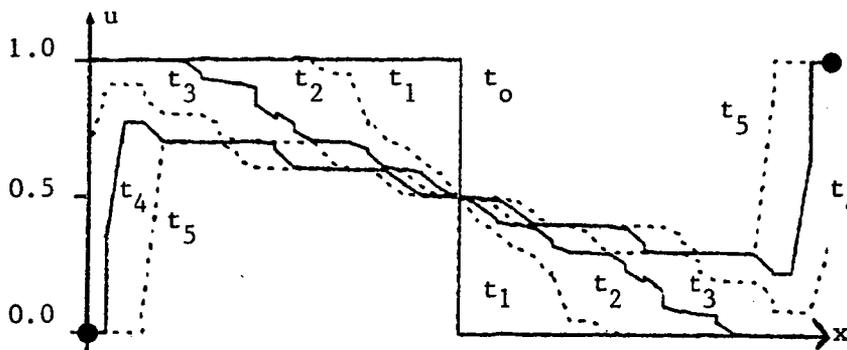
LRG-1  
( $\Delta t = 1/80$ )

$$(t_i = (0.2)i, 0 \leq i \leq 5)$$

Figure 18 : Approximation d'une onde de raréfaction CFL = 1/8, maillage grossier.



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/160$ )



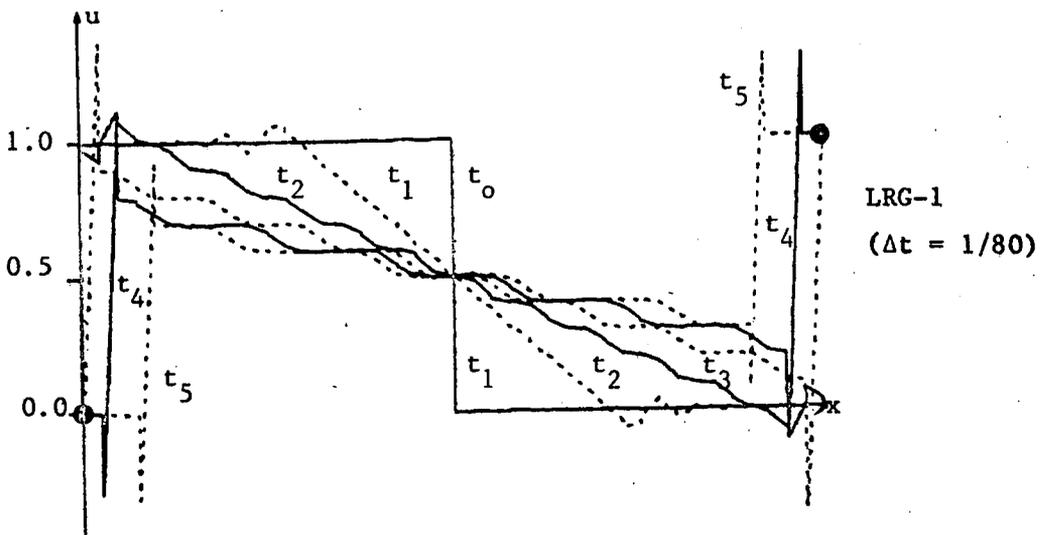
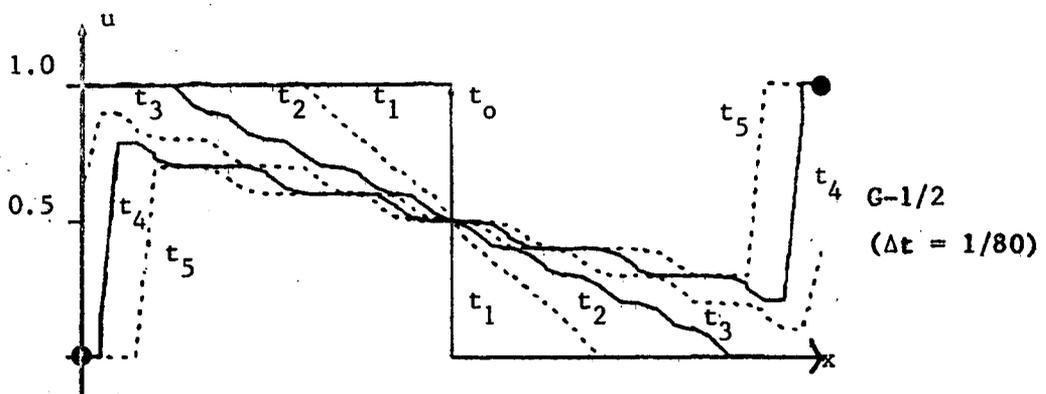
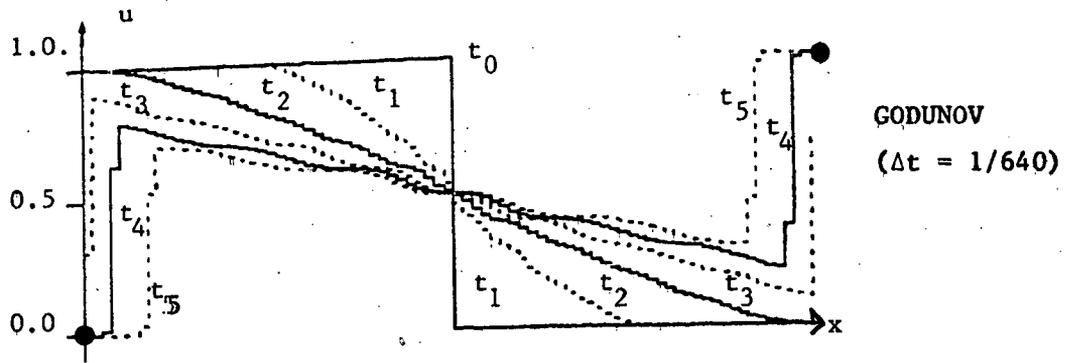
G-1/2  
( $\Delta t = 1/80$ )

LRG-1  
("instable")

( $\Delta t = 1/80$ )

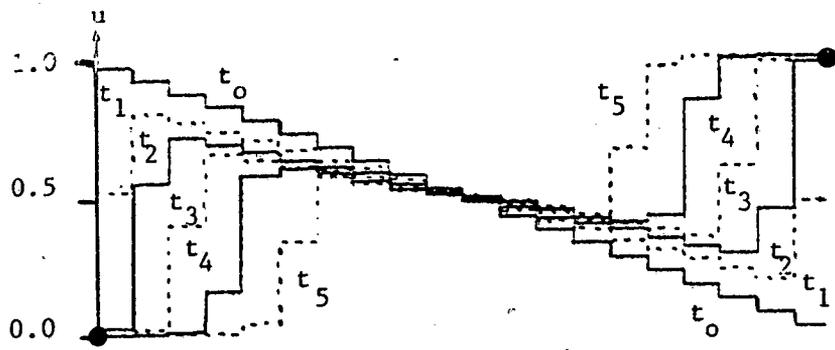
$$(t_i = (0.2)i, \quad 0 \leq i \leq 5)$$

Figure 19 : Approximation d'une onde de raréfaction. CFL = 1/2, maillage raffiné.

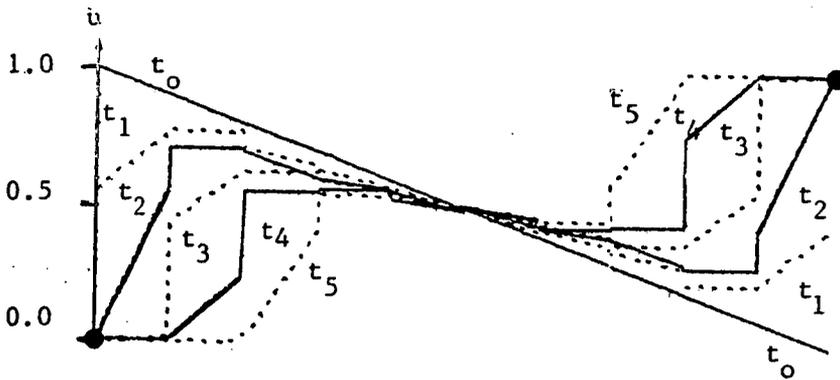


$$(t_i = (0.2)i, \quad 0 \leq i \leq 5)$$

Figure 20 : Approximation d'une onde de raréfaction CFL = 1/8, maillage raffiné.



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/40$ )



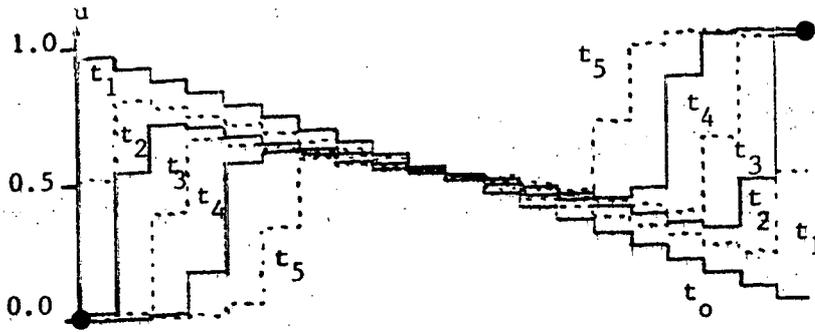
G-1/2  
( $\Delta t = 1/20$ )

LRG-1  
("instable")

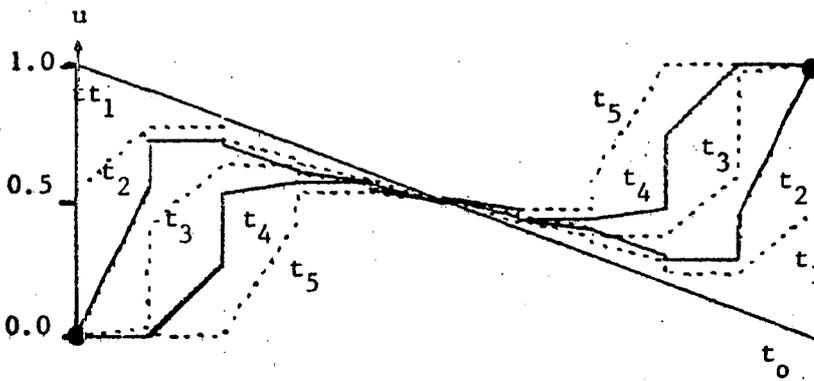
( $\Delta t = 1/20$ )

$$(t_i = (0.2)i, 0 \leq i \leq 5)$$

Figure 21 : Onde de raréfaction et deux chocs CFL = 1/2, maillage grossier



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/80$ )



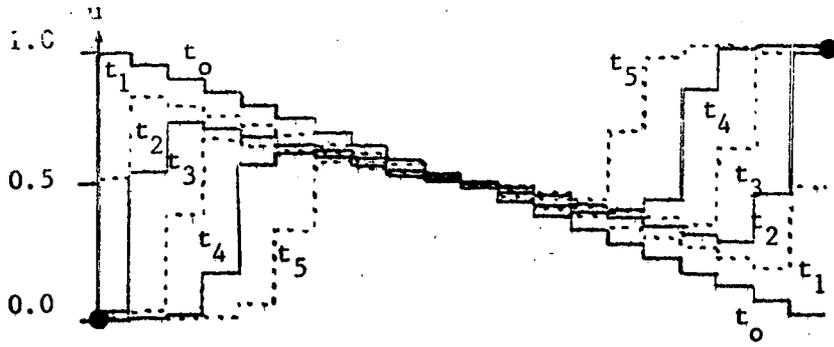
G-1/2  
( $\Delta t = 1/40$ )

LRG-1  
("instable")

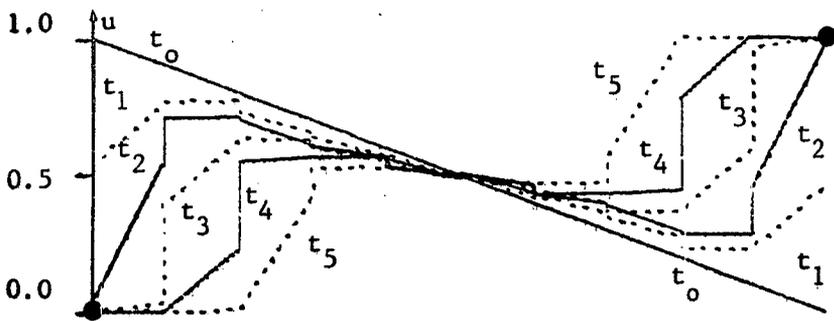
( $\Delta t = 1/40$ )

$$(t_i = (0.2)i, \quad 0 \leq i \leq 5)$$

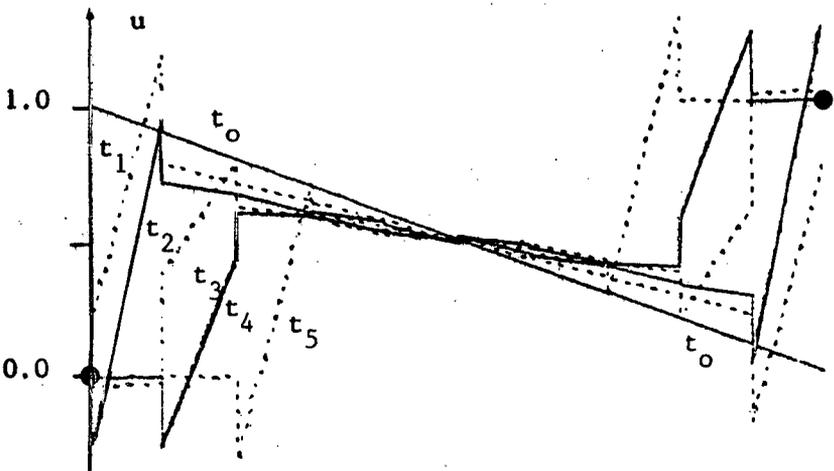
Figure 22 : Onde de raréfaction et deux chocs CFL = 1/4, maillage grossier



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/160$ )



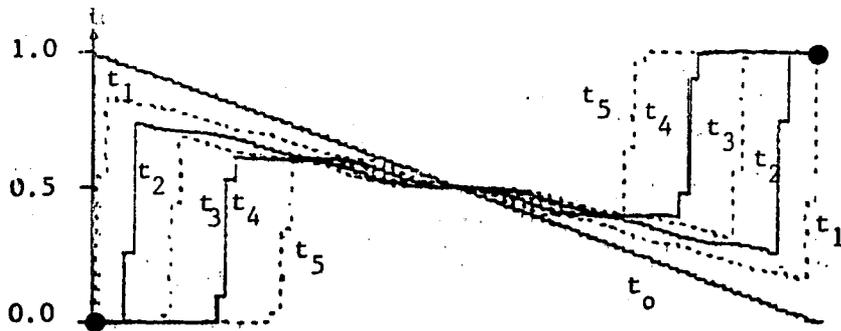
G-1/2  
( $\Delta t = 1/80$ )



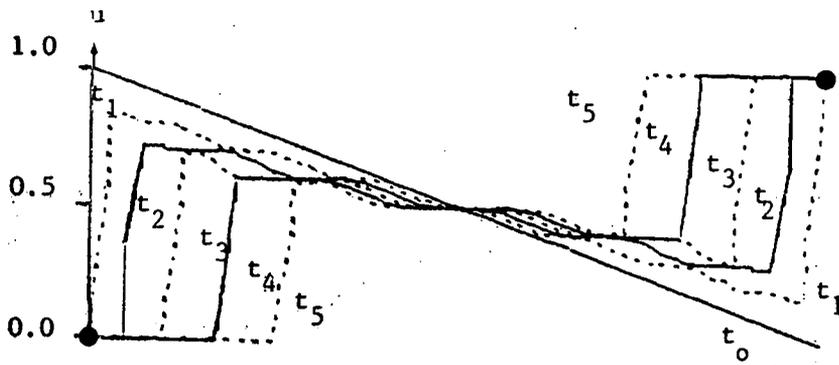
LRG-1  
( $\Delta t = 1/80$ )

$$t_i = (0.2)i, 0 \leq i \leq 5$$

Figure 23 : Onde de raréfaction et deux chocs CFL = 1/8, maillage grossier



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/160$ )



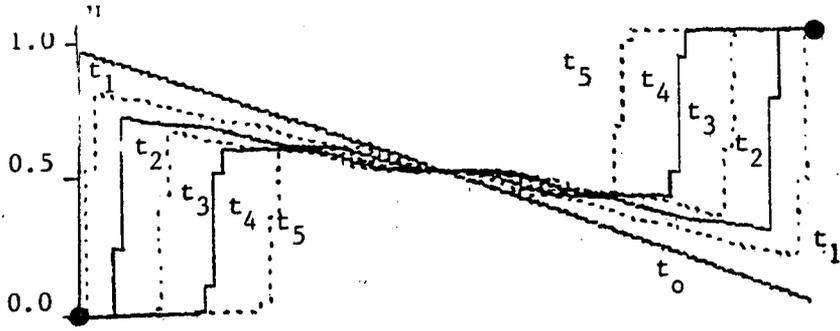
G-1/2  
( $\Delta t = 1/80$ )

LRG-1  
("instable")

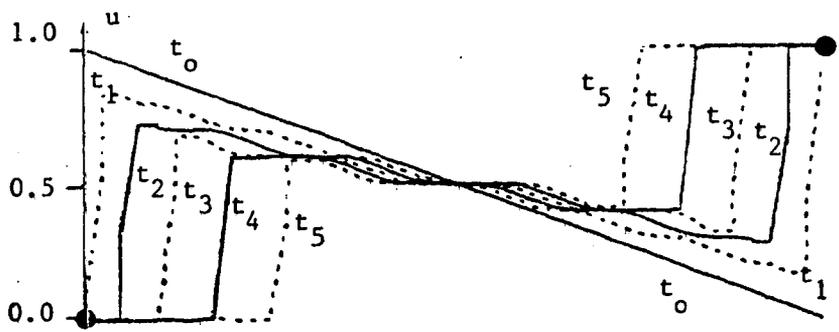
( $\Delta t = 1/80$ )

$$(t_i = (0.2)i, \quad 0 \leq i \leq 5)$$

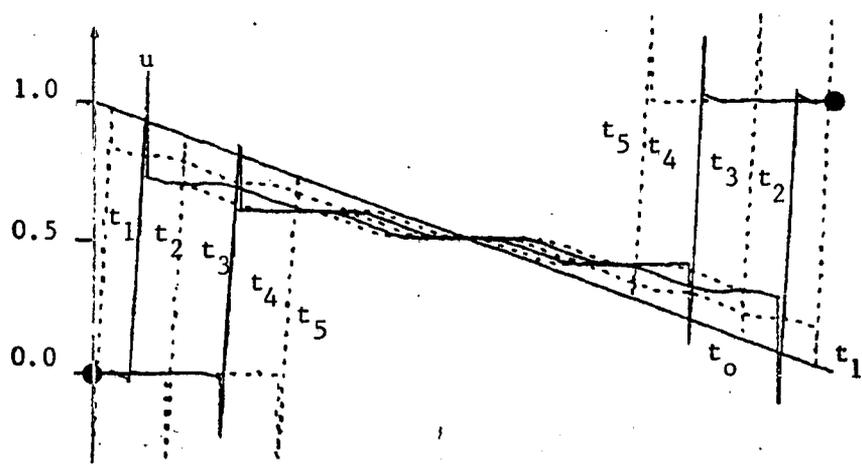
Figure 24 : Onde de raréfaction et deux chocs. CFL = 1/2, maillage raffiné



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/160$ )



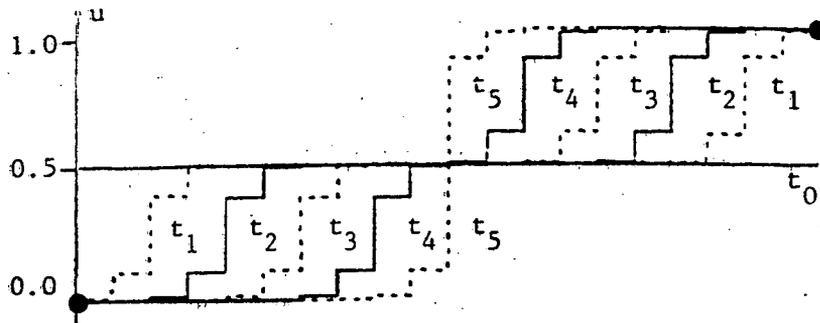
G-1/2  
( $\Delta t = 1/320$ )



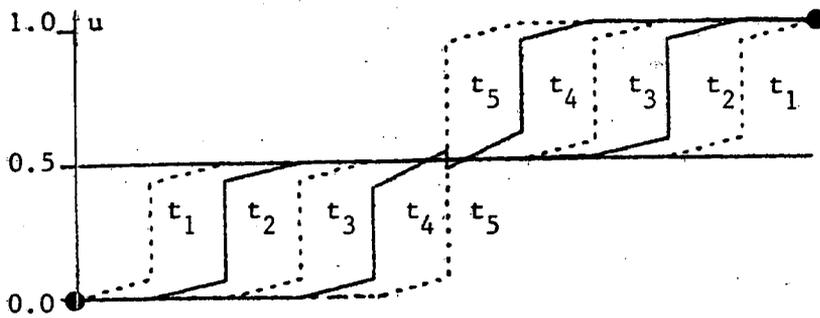
LRG-1  
( $\Delta t = 1/320$ )

$$(t_i = (0.2)i, \text{ à } 0 \leq i \leq 5)$$

Figure 25 : Onde de raréfaction et deux chocs CFL = 1/8, maillage raffiné



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/40$ )



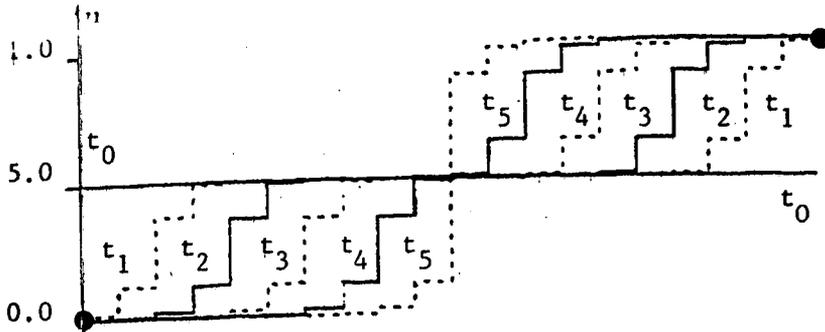
G-1/2  
( $\Delta t = 1/20$ )

LRG-1  
("instable")

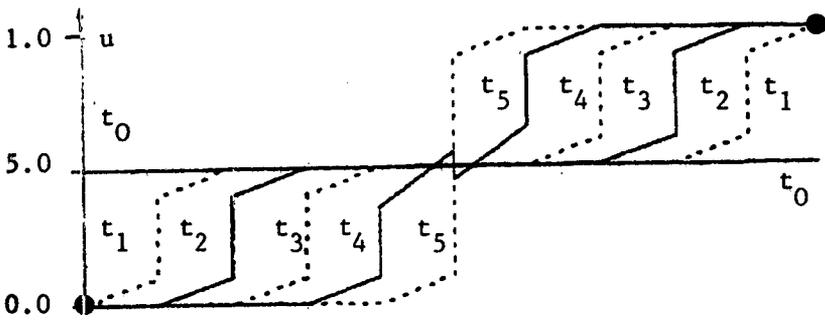
( $\Delta t = 1/20$ )

$$(t_i = (0.2)i, 0 \leq i \leq 5)$$

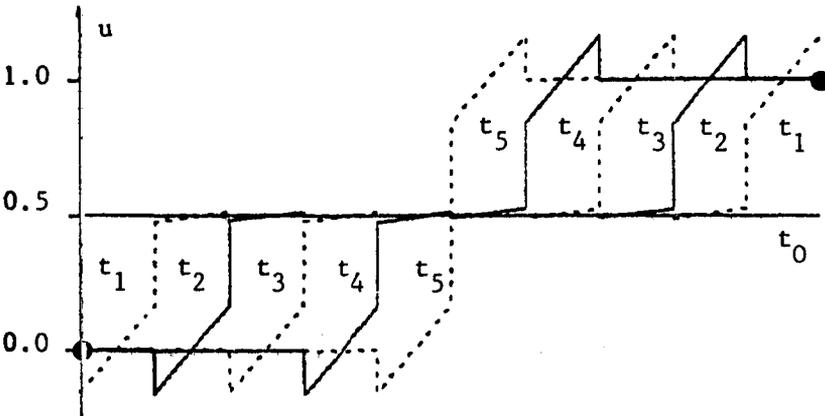
Figure 26 : Approximation de deux chocs qui se rencontrent CFL = 1/2, maillage grossier.



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/80$ )



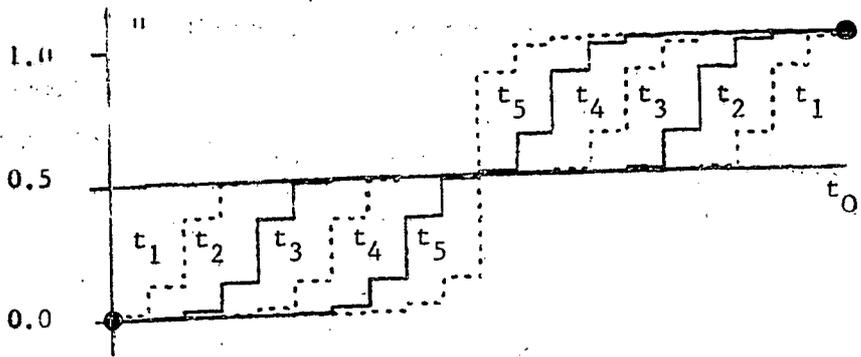
G-1/2  
( $\Delta t = 1/40$ )



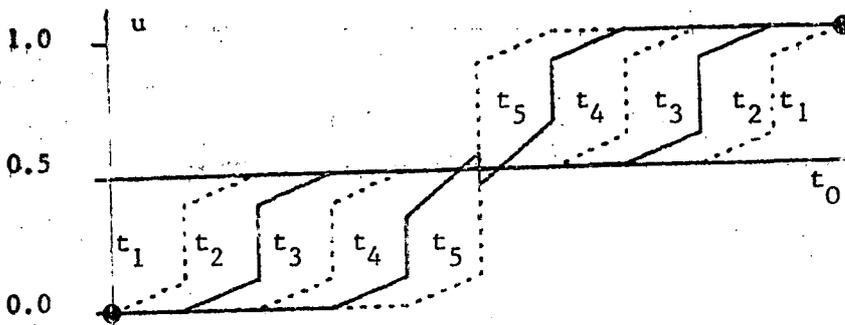
LRG-1  
( $\Delta t = 1/40$ )

$$(t_i = (0.2)i, \text{ à } 0 \leq i \leq 5)$$

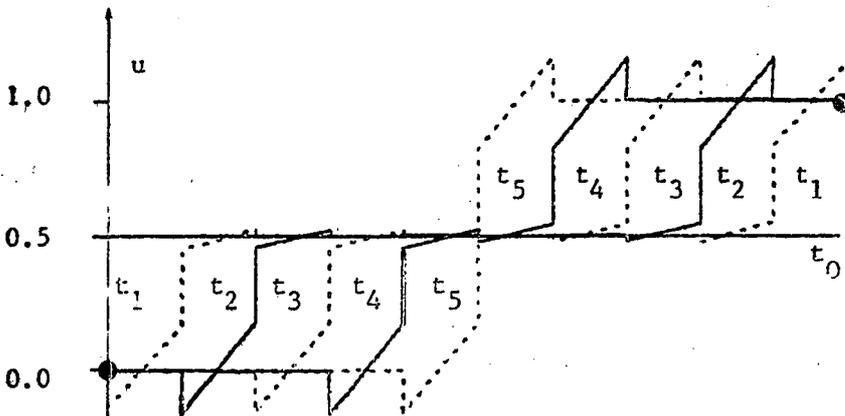
Figure 27 : Approximation de deux chocs qui se rencontrent CFL = 1/4, maillage grossier.



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/160$ )

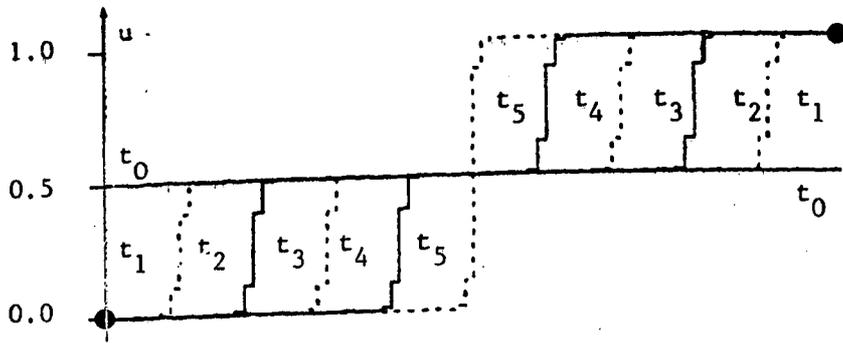


G - 1/2  
( $\Delta t = 1/80$ )

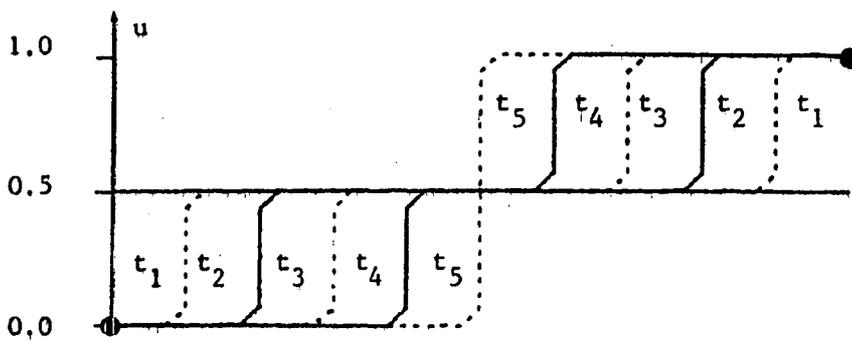


LRG-1  
( $\Delta t = 1/80$ )

Figure 28 : Approximation de deux chocs qui se rencontrent. CFL = 1/8, maillage grossier.



GODUNOV  
( $\Delta t = 1/160$ )



G-1/2  
( $\Delta t = 1/80$ )

LRG-1  
("instable")

( $\Delta t = 1/80$ )

$$(t_i = (0.2)i, \quad 0 \leq i \leq 5)$$

Figure 29 : Approximation de deux chocs qui se rencontrent CFL = 1/2, maillage raffiné.

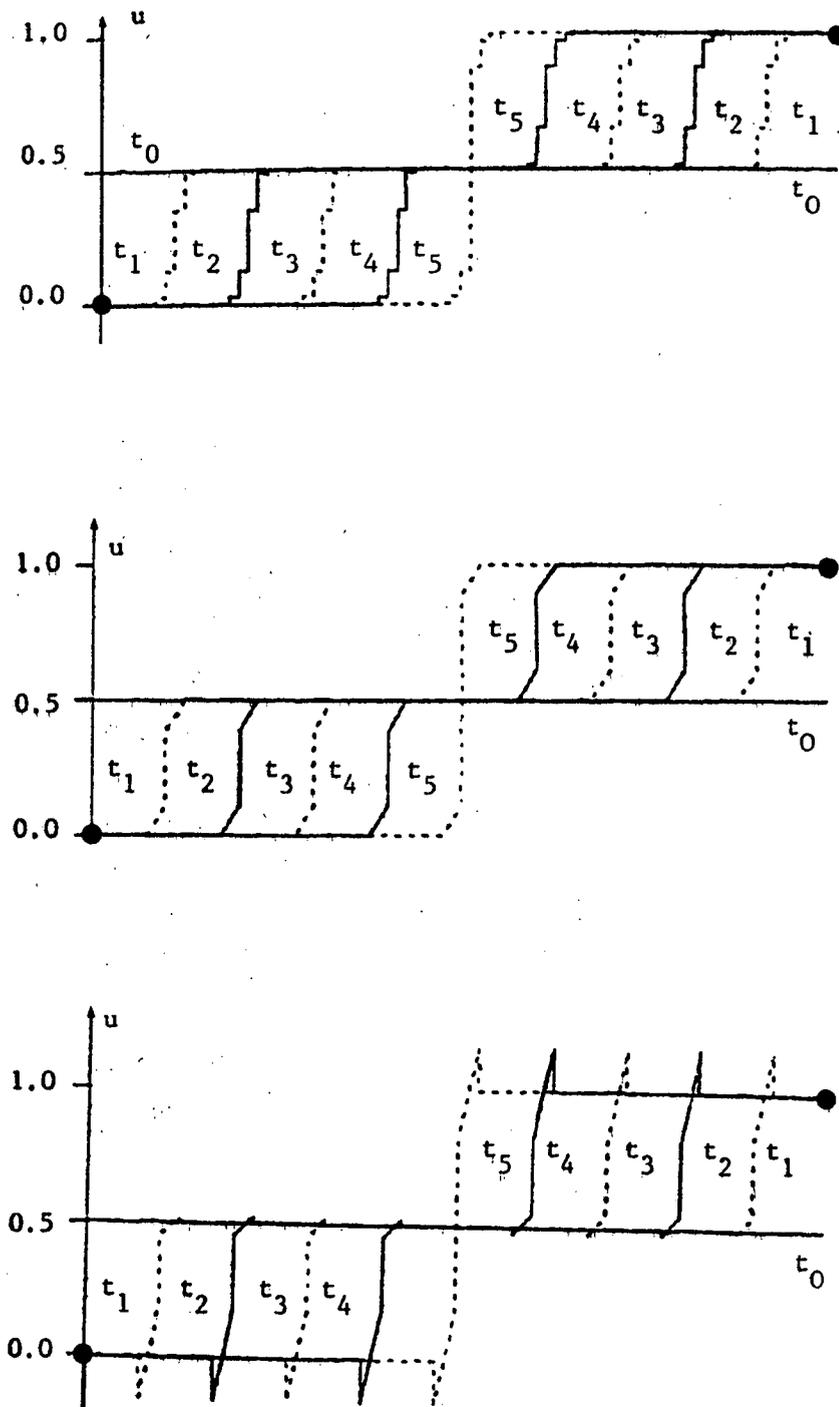


Figure 30 : Approximation de deux chocs qui se rencontrent. CFL = 1/8, maillage grossier.

#### IV - CONCLUSION

Dans ce travail on a donc proposé et analysé un nouveau schéma pour résoudre numériquement la loi de conservation scalaire 1D, (1.1).

Ce schéma, que l'on appelle G-k/2, se veut à mi-chemin entre le schéma de Godunov et le schéma LRG-k. En effet, là où la solution du problème continu et régulière G-k/2 coïncide avec LRG-k, et au niveau des chocs G-k/2 coïncide avec le schéma de Godunov, quand la monotonie et la positivité sont en danger.

La caractéristique principale de ce schéma est que les moyennes de sa solution possède exactement les mêmes propriétés (de positivité, monotonie, non-croissance de la variation et de convergence vers la solution entropique), que la solution du schéma de Godunov. Et ceci, indépendamment du degré de l'approximation en espace, k.

Les essais numériques faites pour comparer les schémas de Godunov, G-1/2 et LRG-1 montrent qu'avec le schéma G-1/2 on obtient des résultats très satisfaisants.

Dans ce travail on s'est borné à présenter ce schéma, et à le comparer numériquement aux schémas à partir desquels il a été construit, pour le cas  $k = 0$ .

Des comparaisons avec le schéma MUSCL, le schéma de Roe et d'autres, peuvent être trouvés dans [2].

Des travaux destinés à alléger l'étape d'antidiffusion, voir [2], qui coûte une bonne partie du temps de calcul, et à généraliser ce schéma à 2D sont en cours.

VI - BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.L. BOOK, J.P. BORIS., K. HAIN.,  
J. Comp. Physics 18(1975), pp. 248-283.
- [2] G. CHAVENT, B. COCKBURN.,  
Rapport INRIA à paraître.
- [3] G. CHAVENT., G. COHEN.,  
*"Numerical approximation and identification in a 1D parabolic degenerated non-linear diffusion and transport equation"*.  
Rapport INRIA n° 270, décembre 1977.
- [4] G. CHAVENT., G. SALZANO.,  
*"A finite element method for the 1D water flooding problem with gravity"*.  
J. Comp. Physics, vol 45, n°3, mars 1982.
- [5] G. COHEN.,  
*"Éléments finis mixtes appliqués à un problème d'écoulement diphasique incompressible bidimensionnel en milieu poreux en présence de gravité"*.  
Rapport INRIA n° 138, Juin 1982.
- [6] M.G. CRANDALL, A. MAJDA.,  
*"Monotone difference approximations for scalar conservation laws"*.  
Math. Comp., 34(1980). pp. 1-21.
- [7] A. DOUGLIS.,  
*"Lecture on discontinuous solution of first order non-linear partial differential equations in several space variables"*,  
North British Symposium on PDE, 1972.
- [8] S. GODUNOV., V. RIABENKI.,  
*"Schémas aux Différences"*,  
Traduction Française Ed. Mir, 1977.
- [9] J. JAFFRE.,  
*"Formulation mixte d'écoulements diphasiques incompressibles dans un milieu poreux"*.  
Rapport INRIA N°37, Septembre 1980.

- [10] J. JAFFRE.,  
"Approximation of a diffusion-convection equation by a mixed finite method : application to the water flooding problem".  
Comp. and Fluids, vol 8, pp. 177-188, Pergamon Press Ltd? 1980.
- [11] A. HARTEN., P. LAX., B. VAN LEER.,  
"On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws".  
SIAM Review, vol. 25, N°1, Janvier 1983.
- [12] S.N. KRUKOV.,  
"First order quasilinear equations with several independent variables",  
Mat. Sb. (N.S), v.81, 1970, pp. 228-255.
- [13] B. VAN LEER.,  
"Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection".  
J. Comp. Physics, 23, pp. 276-299 (1977).
- [14] B. VAN LEER.,  
"Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method".  
J. Comp. Physics, 32, pp. 101-136 (1979).
- [15] B. VAN LEER.,  
"On the relation between the upwind-difference schemes of Godunov Engquist-Osher and Roe".  
SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol 5, N°1, Mars 1984.
- [16] P. LESAIN., P.A. RAVIART.,  
"On a finite element method for solving the neutron transport equation",  
Symposium on Mathematical aspects of finite elements in P.D.E.  
Edited by Car de Boor. Academic Press, New York, 1974.
- [17] A.Y. LE ROUX.,  
"A numerical conception of entropy for quasi-linear equations".  
Math. of Comp., vol 31, n° 140, pp. 148-172, octobre 1977.
- [18] A.Y. LE ROUX.,  
"Convergence of an accurate scheme for first order quasi linear equations",  
RAIRO, Numerical Analysis, vol 15, n°2, pp. 151-170, 1980.

- [19] S. OSHER.,  
"Convergence of generalised MUSCL schemes",  
ICASE, février 1984.
  
- [20] G. SALZANO.,  
"Résolution numérique d'un déplacement diphasique en milieu poreux  
en présence de gravité et de forces capillaires",  
Rapport INRIA n°2, Janvier 1980.
  
- [21] P. CONCUS, W. PROSKOROWSKI,  
"Numerical solution of a nonlinear hyperbolic equation by the  
random choice method".  
J. Comp. Phys. 30(1979), n°2, 153-166.

Imprimé en France

par

**l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique**

