



HAL
open science

Éléments finis discontinus pour les lois de conservation

Jérôme Jaffré

► **To cite this version:**

Jérôme Jaffré. Éléments finis discontinus pour les lois de conservation. [Rapport de recherche] RR-0364, INRIA. 1985. inria-00076192

HAL Id: inria-00076192

<https://inria.hal.science/inria-00076192>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105

78153 Le Chesnay Cedex
France

Tel. (3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 364

**ÉLÉMENTS FINIS DISCONTINUS
POUR
LES LOIS DE CONSERVATION**

Jérôme JAFFRE

Février 1985

**ELEMENTS FINIS DISCONTINUS POUR
LES LOIS DE CONSERVATION**

Jérome JAFFRE



PAPIER RECUPER  ET RECYCLÉ

Resumé

On construit une famille de schémas pour les lois de conservation dans \mathbb{R}^d , en utilisant des éléments finis discontinus. Pour les schémas d'ordre supérieur à 1, on introduit un limiteur de pente qui supprime les oscillations et améliore leur stabilité.

Abstract

We derive a family of schemes for conservation laws in \mathbb{R}^d by using discontinuous finite elements. For higher order schemes, we introduce a slope limiter which suppresses oscillations and improves their stability.

Mots clés

Éléments finis, lois de conservation, équations hyperboliques non linéaires, décentrage.

Key words

Finite elements, conservation laws, nonlinear hyperbolic equations, upstream weighting.

I - INTRODUCTION

Le problème de la construction de schémas numériques pour la résolution d'équations hyperboliques non linéaires a avancé récemment de manière importante pour les méthodes de différences finies. On renvoie de façon non exhaustive à [14], [18], [21], [23], parmi les articles les plus récents parus et à la bibliographie de ces articles. Certaines de ces méthodes utilisent de façon plus ou moins explicite des approximations linéaires [24] ou paraboliques [9] par morceaux.

On se propose ici de systématiser cette approche en décrivant une méthode de construction simple et naturelle d'une famille de schémas aux éléments finis en dimensions 1, 2 ou 3. Dans cette famille, on retrouve les schémas aux différences finies ou aux volumes finis d'ordre 1, [12], [22], ainsi que les schémas d'ordre supérieur. Pour ces derniers, on montre comment étendre aux dimensions 2 et 3 la méthode de limitation des pentes décrites dans [24].

On considère l'équation scalaire

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{f}(u, t, x) = 0 \quad , x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in [0, T[$$

$$(1.2) \quad u(\cdot, 0) = u_0$$

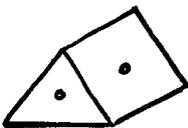
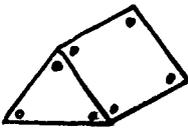
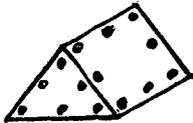
où u est une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R} avec $d=1, 2$ ou 3 et \vec{f} une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R}^d . On sait qu'une telle équation, en général, développe des solutions non régulières et qu'il est nécessaire de lui adjoindre la notion de solution faible et de solution entropique pour définir une solution unique physiquement admissible. C'est cette solution que nous voulons calculer numériquement.

II - FORMULATION DU PROBLEME APPROCHE

On discrétise l'espace \mathbb{R}^d à l'aide d'un ensemble de mailles $K \in \mathcal{T}_h$. Quand $d=1$, ces mailles sont des intervalles. Quand $d=2$, ce sont des triangles et des parallélogrammes. Quand $d=3$, ce sont des tétraèdres et des parallélépipèdes. Le diamètre de ces mailles sera inférieur ou égal à h .

On introduit l'espace d'approximation M^k des fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} qui sont discontinues d'un éléments à l'autre et telles que leur restriction à chaque élément K de \mathcal{T}_h est :

- un polynôme de degré k si $d=1$,
- un polynôme P^k (resp Q^k) suivant que K est un triangle ou un tétraèdre (resp. un parallélogramme ou un parallélépipède) si $d=2$ ou 3 .

$k=0$	 $V_K, K \in \mathcal{T}_h$
$k=1$	 $V_{K,i}, i=1, \dots, ns(K), K \in \mathcal{T}_h$
$k=2$	 $V_{K,i}, i=1, \dots, 2 \times ns(K), K \in \mathcal{T}_h$

($ns(K)$ = nombre de sommets de K)

Figure 1 : En dimension $d=2$, degrés de liberté des fonctions de M^0, M^1 et M^2

Pour construire un schéma approchant (1.1), on choisira pour fixer les idées un schéma explicite en temps à un pas. La discrétisation en espace est obtenue en multipliant l'équation (1.1) par des fonctions test de M^k et en intégrant par parties. Les termes sur les bords ∂K des éléments, provenant de cette intégration par parties, sont approchés à l'aide de flux numériques $f_{\partial K}^n$ pouvant être calculés de diverses façons, comme nous le verrons ci-dessous.

Le schéma calculant la solution $u_h^{n+1} \in M^k$ approchant la solution de u de (1.1), (1.2) à l'instant $(n+1)\Delta t$ s'écrit :

$$(2.1) \quad \int_K \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} v dx - \int_K f(u_h^n) \cdot \nabla v dx + \int_{\partial K} f_{\partial K}^n v d\gamma = 0,$$

$$v \in M^k, K \in \mathcal{T}_h,$$

$$(2.2) \quad u_h(\cdot, 0) = u_{0h},$$

où u_{0h} est une approximation de u_0 dans M^k .

Notons qu'en prenant pour fonction test v les fonctions caractéristiques des éléments K , on obtient

$$\int_K \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} dx + \int_{\partial K} f_{\partial K}^n = 0,$$

équation qui traduit la conservativité du schéma.

III - LE CALCUL DES FLUX

Nous allons maintenant décrire comment calculer les flux $f_{\partial K}^n(x)$ intervenant dans (2.1). Notons d'abord que, pour $x \in \partial K$, $f_{\partial K}^n(x)$ doit être une approximation du flux $\vec{f}(u(n\Delta t, x), n\Delta t, x) \cdot \vec{v}_K$ de \vec{f} à travers la frontière ∂K , où \vec{v}_K représente la normale extérieur à K . Il est donc logique de calculer $f_{\partial K}^n$ par des méthodes unidimensionnelles dans la direction orthogonale à ∂K . Cependant dans

cette direction, la fonction $x \rightarrow \vec{f}(u_h^n(x), n\Delta t, x) \cdot \vec{v}_K$ est discontinue au passage de la frontière ∂K puisque u_h^n l'est. On est donc amené à résoudre le problème de Riemann de façon exacte ou approchée.

Considérons une face $A = K^+ \cap K^-$. On note u^+ (resp. u^-) la trace sur A de la restriction u_h^n à K^+ (resp. K^-). Alors, en tout point x de A , le flux $f_{\partial K^+}$ sera une fonction de $u^+(x)$ et $u^-(x)$ possédant certaines propriétés de consistance et de régularité. Evidemment on aura aussi $f_{\partial K^-} = -f_{\partial K^+}$. Des exemples de tels calculs sont les méthodes de Godunov [12], Engquist-Osher [11]. On trouvera d'autres exemples dans [14].

Ainsi, si l'on utilise des flux de Godunov, pour $x \in \partial K$, on a :

$$\left. \begin{aligned} f_{\partial K^+}^n(x) &= \varepsilon(x) \operatorname{Min}_{k \in I(x)} \{ \varepsilon(x) \vec{f}(k, x, n\Delta t) \cdot \vec{v}_{K^+} \} \\ \varepsilon(x) &= \operatorname{signe}(u^{n+}(x) - u^{n-}(x)) \\ I(x) &= [\operatorname{Min}(u^{n+}(x), u^{n-}(x)), \operatorname{Max}(u^{n+}(x), u^{n-}(x))] \end{aligned} \right\} \text{ où}$$

Evidemment de tels calculs ne sont pas faits en tous points des arêtes, mais uniquement aux points d'intégration numériques utilisés dans le calcul de l'intégrale sur le bord ∂K intervenant dans (2.1) car on écrira, pour chaque arête A :

$$\int_A f_{\partial K} v \, d\gamma = \sum_{i=1}^{np} \theta_i(G_i) v(G_i)$$

où G_i sont les points d'intégration numériques, np leur nombre et θ_i les poids de la formule. Par exemple, pour $k=0$, u_h^n étant constant par

morceaux, un seul point d'intégration numérique suffit et on aura à faire un calcul de flux par arête. Pour $k=1$, $d=2$, u_h étant linéaire sur l'arête A , on prendra en général comme points d'intégration numérique, les deux points de Gauss de l'arête, et on sera amené à effectuer deux calculs du flux par arête.

IV - QUELQUES ELEMENTS BIBLIOGRAPHIQUES

Pour $k = 0$ et en dimension 1, si on utilise des flux de Godunov, le schéma (2.1), (2.2) se réduit au schéma de Godunov [12]. Toujours pour $k=0$ et en dimension $d=1,2,3$, avec des maillages du type de ceux utilisés dans les méthodes de différences finies et avec des flux monotones, la méthode est identique à celle analysée dans [10], [17], [22]. Dans ces travaux, la convergence de la solution approchée vers la solution entropique à l'ordre $h^{1/2}$ a été prouvée.

Dans le cas d'une équation linéaire, lorsque le flux $f_{\partial K}$ est la trace amont de u_h sur ∂K , comme c'est le cas pour le flux de Godunov, la discrétisation en espace a été introduite et analysée dans [19] pour les dimensions 1 et 2. Il y est montré que, pour une solution régulière, l'erreur en norme L^2 de la discrétisation en espace est $O(h^{k+1})$ en dimension 1 et en dimension 2 pour des maillages du type de ceux utilisés en différences finies. Toujours en dimension 2, mais pour des maillages généraux comportant triangles et quadrangles, (réguliers au sens de [8]), cette erreur est $O(h^{k+1/2})$ (cf. [20]).

Notons enfin, que la méthode décrite ci-dessus a été utilisée avec des flux de Godunov en dimension 1 avec $k=1$ (cf. [7]), et en dimension 2 avec $k=0$ (cf. [15]) et avec $k=1$ (cf. [4], [5]), pour des problèmes de simulation de réservoir.

V - LIMITATION DES PENTES

5.1 - En dimension d quelconque

On sait que si $k>0$, alors le schéma décrit ci-dessous est peu stable et la solution présente des oscillations [2]. Le limiteur de pente a pour but de remédier à ces défauts. Il a été introduit par Van Leer [24] en dimension 1 pour une approximation linéaire par morceaux ($k=1$). Nous allons étendre cette méthode au cas de la dimension

quelconque.

Pour $k=1$, une fonction v de M^k est entièrement déterminée par ses valeurs $v_{K,i}, i=1, \dots, ns(K)$ aux $ns(K)$ sommets des éléments K . On note u_h^* la fonction calculée par (2.1), (2.2). A partir de u_h^* , on va calculer une nouvelle fonction u_h^{n+1} de la façon suivante.

Introduisons d'abord les notations suivantes. On note \bar{v}_K la moyenne d'une fonction v_h de M^1 dans l'élément K :

$$\bar{v}_K = \frac{1}{ns(K)} \sum_{i=1}^{ns(K)} v_{K,i}.$$

Considérons un sommet M du maillage. On note $\mathcal{T}(M)$ l'ensemble des éléments dont M est un des sommets.

Nous limiterons les pentes de la façon suivante. Pour chaque sommet M du maillage, on calcule d'abord le minimum et le maximum des valeurs moyennes de u_h^* dans les éléments de $\mathcal{T}(M)$:

$$(5.1) \quad \text{UMIN}(M) = \min_{K \in \mathcal{T}(M)} \bar{u}_K^*, \quad \text{UMAX}(M) = \max_{K \in \mathcal{T}(M)} \bar{u}_K^*.$$

Puis, dans chaque élément $K \in \mathcal{T}_h$, le degré de liberté $v_{K,i}, i=1, \dots, ns(K)$ étant associé à un sommet M_i de K , on impose à u_h^{n+1} la condition

$$(5.2) \quad \text{UMIN}(M_i) \leq u_{K,i}^{n+1} \leq \text{UMAX}(M_i), \quad i=1, \dots, ns(K), K \in \mathcal{T}_h.$$

Pour que la méthode reste conservative, u_h^{n+1} et u_h^* doivent avoir les mêmes moyennes sur chaque élément $K \in \mathcal{T}_h$

$$(5.3) \quad \bar{u}_K^{n+1} = \bar{u}_K^*, \quad K \in \mathcal{T}_h.$$

Enfin, pour définir u_h^{n+1} de façon unique, on exige que u_h^{n+1} soit aussi proche que possible de u_h^* . Plus précisément, on exige que, dans chaque élément K , la distance dans $\mathbb{R}^{ns(K)}$ de $(u_{K,i}^{n+1}, i=1, \dots, ns(K))$ à $(u_{K,i}^*, i=1, \dots, ns(K))$ soit aussi petite que possible.

Ainsi le calcul de u_h^{n+1} à partir de u_h^* est un problème de minimisation dans $\mathbb{R}^{ns(K)}$ avec les contraintes (5.2), (5.3) dans chaque élément $K \in \mathcal{T}_h$. En dualisant la contrainte (5.3), il se ramène à un problème de maximisation d'une fonction d'une variable dérivable et quadratique par morceaux, toujours pour chaque élément $K \in \mathcal{T}_h$ [3]. C'est donc un calcul simple et peu coûteux, qui n'est effectif qu'au voisinage des chocs.

La limitation des pentes ainsi décrites, associée aux équations (2.1), (2.2) et à des flux de Godunov a été comparée à d'autres schémas numériques en dimension 1 dans [2]. Elle a été utilisée en dimension 2 dans des problèmes de simulations de réservoir [3], [6].

Remarque 5.1

Nous avons décrit la méthode de limitation des pentes pour $k=1$. On peut aisément étendre cette méthode pour $k=2$. Pour chaque face A du maillage, on note $\mathcal{T}(A)$ les deux éléments adjacents à la face A et on calcule.

$$UMIN(A) = \min_{K \in \mathcal{T}(A)} \bar{u}_K^*, \quad UMAX(A) = \max_{K \in \mathcal{T}(A)} \bar{u}_K^*.$$

On ajoute alors aux relations (5.2), la relation

$$(5.4) \quad UMIN(A_i) \leq u_{K,i}^{n+1} \leq UMAX(A_i),$$

pour les degrés de liberté $u_{K,i}$ qui se trouvent à l'intérieur de la face A_i . Pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$, on est alors amené à résoudre un problème de minimisation dans $\mathbb{R}^{2 \times ns(K)}$.

Il est à noter que cette remarque n'apporte rien au cas de la dimension 1, et n'a d'effet qu'en dimension $d > 1$.

5.2 - En dimension $d = 1$

En dimension 1, la méthode de limitation des pentes que nous avons décrite se réduit à celle décrite par Van Leer [24] pour une approximation linéaire par morceaux. En numérotant les éléments de \mathcal{T}_h

par l'indice i , comme c'est l'habitude en dimension 1, et en notant u_i la valeur moyenne dans l'intervalle K_i , et $u_{i+1/2}^-$ et $u_{i+1/2}^+$ les limites à droite et à gauche de u_h au point de discrétisation $x_{i+1/2} = K_i \cap K_{i+1}$, (5.2) se réduit à :

$$(5.5) \quad \text{Min}(u_i, u_{i+1}) \leq u_{i+1/2}^\varepsilon \leq \text{Max}(u_i, u_{i+1}), \quad \varepsilon = + \text{ ou } -.$$

En dimension 1, une autre méthode de limitation des pentes a été introduite dans [24], où on impose

$$(5.6) \quad 0 \leq \frac{u_{i+1/2}^+ - u_{i-1/2}^-}{u_{i+1} - u_i}, \quad \frac{u_{i+1/2}^+ - u_{i+1/2}^-}{u_i - u_{i-1}} \leq 1.$$

Cette relation est plus restrictive que (5.5), donc plus diffusive, et nous ne savons pas comment l'étendre au cas de la dimension $d > 1$.

En utilisant un argument de [13], et d'une façon analogue à l'étude du schéma MUSCL faite dans [20], on montre aisément que, quand les flux approchés correspondent à un "E-scheme" et avec (5.6), la fonction u_h est à variation totale décroissante au cours du temps, alors que, avec (5.5) et si les flux approchés sont monotones, alors les moyennes u_i de u_h sur les intervalles de discrétisation sont à variation totale décroissante. Ceci en tenant compte évidemment d'une condition de stabilité de Courant.

Pour $k \geq 2$, avec les mêmes arguments, on montre aisément que, en ajoutant à (5.5), la condition

$$(5.7) \quad u_{i+1/2}^+ = u_{i+1/2}^- = u_i \text{ si } u_i \notin]\text{Min}(u_{i-1}, u_{i+1}), \text{Max}(u_{i-1}, u_{i+1})[,$$

alors les moyennes u_i sont encore à variation totale décroissante. Noter que (5.7) est automatiquement vérifié quand $k=1$.

VI - CONCLUSION

On a ainsi construit de façon simple une famille de schémas pour les lois de conservation scalaires en utilisant des éléments finis discontinus. Les flux aux interfaces des éléments sont calculés en résolvant des problèmes de Riemann unidimensionnels de façon exacte ou approchée. Pour les schémas d'ordre supérieur, un limiteur de pentes est nécessaire et on en a présenté un qui est peu coûteux.

De nombreuses variations sont possibles à partir de la famille de schémas décrites ci-dessus : étude de divers calculs de flux aux interfaces, étude de divers schémas en temps (associés si nécessaire à des limiteurs de pentes), construction d'autres limiteurs de pentes. Des versions rapides peuvent être écrites pour le cas des maillages rectangulaires.

Notons que pour des maillages quelconques, l'introduction de termes de diffusion du second ordre peut être traitée à l'aide d'éléments finis mixtes [6], [5].

Enfin, la méthode s'étend ainsi au cas de systèmes hyperboliques non linéaires en l'appliquant composante scalaire par composante scalaire [1].

REFERENCES

- [1] **Y. BRENIER, J. JAFFRE,**
"High resolution schemes for conservation laws arising in reservoir", Rapport INRIA à paraître.
- [2] **G. CHAVENT, B. COCKBURN,**
"consistance, stabilité et convergence des schémas LRG", Rapport INRIA à paraître.
- [3] **G. CHAVENT, B. COCKBURN, G. COHEN, J. JAFFRE,**
"Une méthode d'éléments finis pour la simulation dans un réservoir de déplacements bidimensionnels par de l'eau", Rapport INRIA n°353 (déc. 1984).
- [4] **G. CHAVENT, G. COHEN, J. JAFFRE,**
"Discontinuous upwinding and mixed finite elements for two-phase flows in reservoir simulation", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, (1984), pp.
- [5] **G. CHAVENT, J. JAFFRE, G. COHEN, M. DUPUY, I. RIBERA,**
"Simulation of two-dimensional waterflooding by using mixed finite elements", Soc. Pet. Eng. J. 24 (1984), pp. 382-390.
- [6] **G. CHAVENT, J. JAFFRE,**
"Mathematical Methods And Finite Elements For Reservoir Simulation", (North Holland, Amsterdam, 1985).
- [7] **G. CHAVENT, G. SALZANO,**
"A finite element method for the 1-D water flooding problem with gravity", J. Comp. Phys., 45 (1982), pp. 307-344.
- [8] **P. G. CIARLET.**
"The Finite Element Method For Elliptic Problems, (North-Holland, Amsterdam, 1978).
- [9] **P. COLLELA, P. WOODWARD,**
"The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations", J. Comp. Phys. 54 (1984), pp. 174-201.
- [10] **M. G. CRANDALL, A. MAJDA,**
"Monotone difference approximations for scalar conservation laws", Math. Comp., 34 (1980), pp. 1-21.
- [11] **B. ENQUIST, S. OSHER,**
"One sided difference approximations for nonlinear conservation laws", Math. Comp. 36 (1981), pp. 321-351.

- [12] **S.K.GODUNOV,**
"Finite difference method for numerical computation of discontinuous solution of the equations of fluid dynamics", *Math. Sb.* 47 (1959), pp. 271-306.
- [13] **A.HARTEN,**
"High resolution schemes for hyperbolic conservation laws", *J. Comp. Phys.* 49 (1983), pp. 357-393.
- [14] **A.HARTEN, P.D.LAX, B.VAN LEER,**
"On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic laws", *SIAM Review* 25(1983), pp.35.60.
- [15] **J.JAFFRE**
"Formulation mixte d'écoulements diphasiques incompressibles en milieu poreux", *Rapport INRIA n°37* (1980).
- [16] **C.JOHNSON, J.PITKARANTA,**
"An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation", report-mat-a215, Helsinki University of Technology (1984).
- [17] **N.N.KUZNECOV, S.A.VOLOSIN,**
"On monotone difference approximations for a first-order quasi-linear equation," *Soviet Math. Dokl.* 17 (1976), pp. 1203-1206.
- [18] **A.Y. LE ROUX, P. QUEVESSEUR,**
"Convergence of an antidiffusion Lagrange-Euler scheme for quasi-linear equations", *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (1984), pp. 985-994.
- [19] **P. LESAIN, P.A. RAVIART,**
"On a finite element method for solving the neutron transport equation", *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, Carl de Boor ed., (Academic Press, New York, 1974).
- [20] **S.OSHER,**
"Convergence of generalized MUSCL schemes", NASA Langley Contractor Report 172309 (1984), Submitted to *SIAM J. Numer. Anal.*
- [21] **S.OSHER, S.CHAKRAVARTHY,**
"High resolution schemes and the entropy condition", *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (1984), pp.955-984.

- [22] **R.SANDERS,**
"On convergence of monotone finite difference schemes with variable spatial differencing", *Math. Comp.* 40 (1983), pp. 91-106.
- [23] **P.K.SWEBY,**
"High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws", *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (1984), pp. 995-1011.
- [24] **B.VAN LEER,**
"Towards the ultimate conservative scheme : IV. A new approach to numerical convection", *J. Comp. Phys.* 23 (1977), pp. 276-299.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

ψ

2

θ

21

•

2

21

e

•

21

•