Conditions d'entropie et schema de Roe pour les lois de conservation scalaires

Yann Brenier

IRIA
CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 423

CONDITIONS D'ENTROPIE ET SCHÉMA DE ROE POUR LES LOIS DE CONSERVATION SCALAIRES

Yann BRENIER

Juillet 1985

CONDITIONS D'ENTROPIE ET SCHEMA DE ROE POUR LES LOIS DE CONSERVATION SCALAIRES

Yann BRENIER

RESUME

Bien que le schéma de Roe ne soit pas consistant avec les conditions d'entropie, on montre que dans diverses situations il ne peut pas générer de solutions non physiques, en particulier lorsque le flux est convexe et la donnée initiale régulière.

ABSTRACT

Though Roe's scheme is not entropy consistent, it cannot generate non physical solutions in various situations, in particular when the flux function is convex and the initial value is smooth.

MOTS CLES

Lois de conservation scalaires - Schéma de Roe - Conditions d'entropie.

KEY-WORDS

Scalar conservation laws - Roe's scheme - Entropy Conditions -

I – SOLUTIONS ENTROPIQUES POUR UNE LOI DE CONSERVATION SCALAIRE CONVEXE.

Considérons une loi de conservation scalaire convexe :

(1.1) $$u_t + f(u)_x = 0, \ u=u(t,x) \quad \mathbb{R}, \quad t>0, \ x \in \mathbb{R},$$

ou f est une fonction convexe régulière donnée. Cette équation peut être considérée comme la limite de l'équation parabolique

(1.2) $$u_t + f(u)_x = \varepsilon u_{xx},$$

lorsque le coefficient de viscosité ε tend vers 0. Pour toute donnée initiale $u_0(x)$ régulière bornée, (1.2) admet une unique solution classique $u^\varepsilon(t,x)$ telle que $u^\varepsilon(0,x) = u_0(x)$. Il est bien connu [1] que u^ε converge presque partout quand ε tend vers 0 et que la limite $u(t,x)$ est une fonction mesurable bornée, en général discontinue, qui satisfait l'équation (1.1) au sens faible, à savoir :

(1.3) $$\int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \{ \phi_t(t,x)\, u(t,x) + \phi_x(t,x)\, f(u(t,x)) \} \, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(0,x)\, u_0(x)\, dx = 0,$$

pour toute fonction test $\phi(t,x)$ à support compact dans $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Cette solution faible est appelée solution entropique (ou physique) de l'équation (1.1). Ce n'est en général pas l'unique solution faible dans la classe des fonctions mesurables bornées. Il faut donc, pour la caractériser, définir un critère la distinguant des autres solutions faibles (dites non physiques). Dans le cas général où f n'est pas nécessairement convexe on utilise la condition d'entropie de Kruzhkov [2].

(1.4) $$|u-c|_t + (\mathrm{sgn}(u-c)(f(u)-f(c)))_x \leq 0$$

cette inégalité devant être vérifiée au sens des distributions pour tout réel c. Cette condition caractérise exactement l'unique solution physique du problème [2]. Dans le cas convexe, on peut utiliser une condition d'entropie plus simple. En effet, la solution u^ε de l'équation (1.2) vérifie l'inégalité

$$u^\varepsilon_x(t,x) \le K, \quad t>0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

où $K = \sup \{ u_0'(x) \ ; \ x \in \mathbb{R} \}$. Il en découle que la solution physique u de l'équation (1.1) doit vérifier

$$u_x(t,x) \le K, \tag{1.6}$$

au sens des distributions. En particulier aucune discontinuité croissante $u(t,x+0)-u(t,x-0) > 0$ n'est admissible. On peut montrer [1] que la condition (1.6) caractérise la solution physique. Plus précisément, on a

Proposition 1 [1]

Etant donné f convexe et régulière, et une donnée initiale u_0 régulière et bornée, il existe une unique solution faible mesurable bornée de (1.1) (au sens de (1.3)) satisfaisant la condition d'entropie (1.6).

Ce résultat peut être étendu au cas de données initiales non régulières.

Proposition 2 [1]

Pour une donnée initiale mesurable bornée, l'équation (1.1) admet une unique solution faible mesurable bornée satisfaisant la condition d'entropie suivante : il existe une fonction K(t) continue pour t>0 telle que

$$u_x(t,x) \le K(t) \tag{1.7}$$

soit vérifiée au sens des distributions.

II. LE SCHEMA DE ROE.

Dans le cas des lois de conservation scalaire, le schéma de Roe [3] coincide avec le schéma de Murman-Cole [4] et peut être décrit comme suit. On définit les pas d'espace et de temps h et k de la discrétisation et on les suppose constants pour simplifier. Comme d'habitude, on définit la solution approchée $u_{k,h}(t,x)$ de (1.1) par :

$$u_{k,h}(t,x) = u_i^n \quad \text{pour } nk \leq t < (n+1)k,\ (i-1/2)h \leq x < (i+1/2)h. \tag{2.1}$$

Le schéma est alors donné par :

$$u_i^0 = \int_0^1 u_0((i-1/2+s)h)ds, \tag{2.2a}$$

$$(u_i^{n+1}-u_i^n)\, h + (f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n)\, k = 0 \tag{2.2b}$$

$$f_{i+1/2}^n = \begin{cases} f(u_i^n) & \text{si } r_{i+1/2}^n = \dfrac{f(u_{i+1}^n)-f(u_i^n)}{u_{i+1}^n-u_i^n} \cdot \dfrac{k}{h} \geq 0, \\ f(u_{i+1}^n) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.2c}$$

Ce schéma est une simple généralisation du schéma décentré classique, avec lequel il coincide lorsque f est monotone. On peut le réecrire sous la forme :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + (r_{i-1/2}^n)_+ (u_{i-1}^n - u_i^n) + (-r_{i+1/2}^n)_+ (u_{i+1}^n - u_i^n) \tag{2.3}$$

Dans la suite on appelera nombres de Courant locaux les coefficients $r_{i+1/2}^n$.

Rappelons quelques propriétés déja connues du schéma de Roe.

Proposition 3

Supposons que $a \leq u_0(x) \leq b$ et $Ck \leq h$, où $C = \sup \{|f'(w)|; a \leq w \leq b\}$.
Alors le schéma de Roe vérifie le principe du maximum et diminue la variation totale :

$$a \leq u_i^n \leq b \; ; \; \sum_i |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n|$$

Il s'ensuit [4] que pour une donnée initiale fixée il existe une suite $(h_n, k_n) \to 0$, telle que $u_{k_n,h_n}(t,x)$ converge presque partout vers une solution faible de (1.1). Malheureusement, cette solution faible n'est pas nécessairement physique comme le montre l'exemple de l'équation de Burgers

(2.5) $$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0,$$

On voit aisément que

(2.6) $$u_i^n = -1 \quad \text{pour } i < 0, \quad +1 \quad \text{pour } i \geq 0,$$

est une solution du schéma de Roe, alors que pour la donnée initiale

(2.7) $$u(0,x) = -1 \quad \text{pour } x<0, \quad +1 \quad \text{pour } x \geq 0,$$

la solution entropique $u(t,x)$ de (2.5) est donnée par :

(2.8) $$u(t,x) = \min(1, \max(-1, x/t)).$$

Ainsi dans ce cas il n'y a aucun espoir de voir la solution approchée converger vers la solution physique.

III. UNE INEGALITE D'ENTROPIE DISCRETE.

Le schéma de Roe n'est a priori pas consistent avec la condition d'entropie de Kruzhkov (1.4). Néammoins, dans le cas convexe, il est, comme on va le montrer, consistent avec la condition d'entropie (1.6) ce qui implique la convergence vers les solutions physiques lorsque la donnée initiale vérifie :

(3.1) $$a \leq u_0(x) \leq b$$

(3.2) $$u'_0(x) \leq K,$$

au sens des distributions, et lorsque la condition de Courant

(3.3) $$Ck < h/2 \quad \text{avec} \quad C = \sup \{|f'(w)| \; ; \; a \leq w \leq b\}$$

est satisfaite. Plus précisément, on a :

Proposition 4

Supposons que (3.1,2,3) sont vérifiées. Alors, on a

(3.4) $$\sup_i (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) \leq \sup_i (u_{i+1}^n - u_i^n) \leq Kh$$

Il s'ensuit que

THEOREME 1 :

Si (3.1,2,3) sont vérifiées, alors la solution approchée converge presque partout vers la solution physique.

IV - PREUVE DE LA PROPOSITION 4.

De (2.3), on déduit pour les sauts :

(4.1) $$p^n_{i+1/2} = u^n_{i+1} - u^n_i$$

le schéma suivant :

(4.2) $$p^{n+1}_{i+1/2} = (1-a(r^n_{i+1/2})-b(r^n_{i+1/2}))p^n_{i+1/2} + a(r^n_{i+3/2})p^n_{i+3/2} + b(r^n_{i-1/2})p^n_{i-1/2}$$

avec $a(r) = (-r)_+ = \max(0,-r)$ et $b(r) = r_+ = \max(0,r)$.

Fixons i, notons les indices i-1/2, i+1/2 et i+3/2 respectivement par L,C et R. Omettons l'indice n et remplaçons n+1 par le signe ^. On peut alors réecrire :

(4.3) $$\hat{p}_C = (1-a(r_C)-b(r_C))p_C + a(r_R)p_R + b(r_L)p_L.$$

Notons qu'en raison de la condition de Courant (3.3), on a :

(4.4) $$0 \leq a(r_C),\ a(r_R),\ b(r_C)\ ,\ b(r_L) < 1/2$$

Pour prouver (3.4), il suffit maintenant de prouver :

(4.5) $$\hat{p}_C \leq \max\ (p_C,\ p_R,\ p_L).$$

La clé de la démonstration est le lemme suivant.

LEMME.

Parce que f est convexe, on a :

(4.6) $$(p^n_{j-1/2} + p^n_{j+1/2})(r^n_{j-1/2} - r^n_{j+1/2}) \leq 0.$$

Cette propriété découle directement de la convexité de f. Plus précisément, posons $u = u^n_{i-1}$, $v = u^n_i$ et $w = u^n_{i+1}$. Des définitions (2.2c) et (4.1), on tire

$p^n_{i-1/2} + p^n_{i+1/2} = w-u$, $r^n_{i-1/2} = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$, $r^n_{i+1/2} = \frac{f(v)-f(w)}{v-w}$ et donc (4.6) est une conséquence immédiate de la propriété de convexité :

$$(4.7) \qquad (w-u) \left\{ \frac{f(v)-f(u)}{v-u} - \frac{f(v)-f(w)}{v-w} \right\} \leq 0.$$

Il nous faut à présent démontrer (4.5). On peut ecrire indifféremment :

$$(4.8) \qquad -a(r_C)p_C + a(r_R)p_R = a(r_C)(p_R-p_C) + (a(r_R)-a(r_C))p_R$$

et

$$(4.9) \qquad -a(r_C)p_C + a(r_R)p_R = a(r_R)(p_R-p_C) + (a(r_R)-a(r_C))p_C.$$

De (4.6), en posant j=i+1, on déduit :

(4.10) $(p_C+p_R)\ (a(r_C)-a(r_R)) \geq 0$ (parce que $a(r)=(-r)_+$ est fonction décroissante de r).

Donc, il découle de (4.8) que

$$(4.11) \qquad -a(r_C)p_C + a(r_R)p_R \leq a(r_C)(p_R-p_C) + (-a(r_R)+a(r_C))p_C.$$

A présent, on tire de (4.9) et (4.11) que :

$$(4.12) \qquad -a(r_C)p_C + a(r_R)p_R \leq \max \left\{ a(r_R)(p_R-p_C),\ a(r_C)(p_R-p_C) \right\}.$$

De façon similaire, on déduit de (4.6) (avec j=i) :

(4.13) $(p_C+P_L)\ (b(r_L) - b(r_C)) \leq 0$ (puisque $b(r) = r_+$ est croissante), et

(4.14) $$-b(r_C)\, p_C + b(r_L)\, p_L \leq \max \{ b(r_L)(p_L - p_C) , b(r_C)(p_L - p_C) \}$$

Finalement, de (4.3),(4.12) et (4.14), on obtient :

(4.15) $$\hat{p}_C \leq p_C + (p_R - p_C)\, A + (p_L - p_C)\, B$$

avec $A = a(r_R)$ ou $a(r_C)$ et $B = b(r_L)$ ou $b(r_C)$,

Ainsi, compte tenu de (4.4), on déduit (4.5), ce qui termine la démonstration.

V - COMPARAISON DES SCHEMAS DE ROE ET GODOUNOV

Lorsque dans la loi de conservation scalaire (1.1), la fonction f est monotone, on sait que les schémas de Roe et de Godounov coincident avec le schéma décentré classique. Les solutions approchées convergent donc vers les solutions entropiques de l'équation. Lorsque la fonction f n'est plus monotone, mais convexe on a vu dans les sections précédentes que la convergence est assurée lorsque les données initiales sont régulières. Dans cette section, on va montrer dans le cas où f admet un changement de monotonie au plus (en particulier si f est convexe) que pour une large classe de données initiales, le schéma de Roe coincide en fait avec le schéma de Godunov. Plus précisément, on se place dans la situation suivante: on suppose que f est régulière et vérifie :

(5.1) $$f'(u) \leq 0 \text{ si } u \leq 0,\ f'(0) = 0,\ f'(u) \geq 0 \text{ si } u \geq 0$$

et que la donnée initiale u_0 vérifie (3.1). Alors on a:

THEOREME 2

On suppose que la condition de Courant (3.3) est remplie et que f vérifie (5.1). Soit u_i^n une solution du schéma de Roe (2.2). On suppose que :

(5.2) $$u_i^0 < 0 < u_{i+1}^0 \qquad \text{est impossible}$$

Alors, on a i)

(5.3) $$u_i^n < 0 < u_{i+1}^n \qquad \text{est impossible}$$

et ii) u_i^n est en fait la solution du schéma de Godounov.

a. **Démonstration de la première assertion**

Pour tout $n=0,1,2,\dots$, la propriété (5.3) signifie exactement qu'il existe une suite k_p d'indices telle que :

(5.4a) $k_{2p+2} \geq 1 + k_{2p+1}$; $k_{2p+1} \geq 2 + k_{2p}$

(5.4b) $u_i^n = 0$ si $i = k_{2p}$

(5.4c) $u_i^n \geq 0$ si $k_{2p} \leq i < k_{2p+1}$

(5.4d) $u_i^n \leq 0$ si $k_{2p+1} \leq i \leq k_{2p+2}$

Supposons que la propriété (5.3) est vraie pour n et montrons que $u_i^{n+1} < 0 < u_{i+1}^{n+1}$ est impossible.

a) si $i=k_{2p}$ pour un quelconque p, on a d'après (5.4) $u_i^n=0$, $u_{i+1}^n \geq 0$ et $u_{i-1}^n \leq 0$. Par définition des nombres de Courant locaux (2.2c), on déduit de l'hypothèse (5.1) que $r_{i+1/2}^n \geq 0$ et $r_{i-1/2}^n \leq 0$ et donc il découle de (2.3) que $u_i^{n+1} = u_i^n = 0$.

b) si $k_{2p}<i<k_{2p+1}-1$, on a :

$u_i \geq 0$, $u_{i-1}^n \geq 0$, $u_{i+1}^n \geq 0$ et donc $u_i^{n+1} \geq 0$, puisqu'il s'agit d'une combinaison convexe de u_i^n, u_{i-1}^n et u_{i+1}^n (d'après (2.3)) et compte tenu de ce que la condition de Courant (3.3) est remplie).

c) si $k_{2p+1}<i<k_{2p+2}$, on a : $u_i^n \leq 0$, $u_{i-1}^n \leq 0$, $u_{i+1}^n \leq 0$ et donc $u_n^{n+1} \leq 0$, pour la même raison que précédemment.

Dans tous les cas considérés jusqu'à présent, le signe de u_i^{n+1} est le même que celui de u_i^nw. Les seuls cas où le signe peut changer sont donc $i=k_{2p+1}-1$ et $i=k_{2p+1}$. Par conséquent, puisque $u_i^n<0<u_{i+1}^n$ est impossible, par hypothèse, $u_i^{n+1}< 0 <u_{i+1}^{n+1}$ ne peut se produire que pour $i=k_{2p+1}-1$.

Il en résulte qu'il suffit de prouver que $u_i^{n+1} < 0 < u_{i+1}^{n+1}$ est impossible dans le cas $i=k_{2p+1}-1$. Supposons donc pour cet i que $u_i^{n+1} < 0$. A cause de la condition de Courant (3.3), u_i^{n+1} est une combinaison convexe de u_i^n, u_{i-1}^n et u_{i+1}^n, définie par (2.3). Comme d'après (5.4), on a $u_i^n \leq 0$, $u_{i-1}^n \leq 0$, $u_{i+1}^n \leq 0$, $u_i^{n+1} < 0$ n'est possible que si $(-r_{i+1/2}^n)_+>0$ ce qui entraine $(r_{i+1/2}^n)_+=0$. Il en découle que u_{i+1}^{n+1} west donné via (2.3) par :

$$u_{i+1}^{n+1} = u_{i+1}^n + (-r_{i+3/2}^n)_+(u_{i+2}^n - u_{i+1}^n) \tag{5.5}$$

Or d'après (5.4) on a $u_{i+1}^n = u_{k_{2p+1}}^n \leq 0$ et $u_{i+2}^n = u_{k_{2p+1}+1}^n \leq 0$. Par conséquent u_{i+1}^n qui est une combinaison convexe de ces deux nombres par (5.5) est forcément négatif ou nul, ce qui montre bien que $u_{n+1}^{n+1}<0<u_{i+1}^{n+1}$ est impossible et achève la démonstration.

b. Démonstration de la seconde assertion.

Le schéma de Godounov peut être défini sous la forme (2.2b) où les flux numériques $f_{i+1/2}^n$ sont donnés par :

$$f_{i+1/2}^n = \text{sgn}(u_{i+1}^n - u_i^n) \min(\text{sgn}(u_{i+1}^n - u_i^n) f(u_i^n + s.(u_{i+1}^n - u_i^n)); 0<s<1) \tag{5.6}$$

alors que pour le schéma de Roe les flux numériques sont donnés par (2.2c). Pour montrer la deuxième assertion du théorème il suffit donc de prouver que (2.2c) et (5.6) coincident lorsque les hypothèses (5.1) et (5.3) sont remplies. Considérons les différents cas possibles :

i) u_i^n et u_{i+1}^n sont tous deux positifs ou nuls. Comme f'(u) est croissante pour les u positifs, on a forcément $\text{sgn}(u_{i+1}^n - u_i^n)(f(u_i^n + s.(u_{i+1}^n - u_i^n)) - f(u_i^n))$ positif ou nul pour s compris entre 0 et 1, ce qui entraine que le flux de Godounov est égal à $f(u_i^n)$ d'après (5.6). Il en est de même pour le flux de Roe d'apres (2.2c) puisque $\text{sgn}(u_{i+1}^n - u_i^n)(f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n))$ est positif ou nul.

ii) u_i^n et u_{i+1}^n sont négatifs ou nuls. Cette fois, on voit que les deux flux sont égaux à $f(u_{i+1}^n)$, par un argument analogue.

iii) $u_i^n>0>u_{i+1}^n$. En particulier on a $u_i^n-u_{i+1}^n>0$, donc par (2.2c), le flux de Roe est donné par $f(u_i^n)$ ou $f(u_{i+1}^n)$ selon que $f(u_{i+1}^n)-f(u_i^n)$ est positif ou négatif, et donc par $\max(f(u_i^n),f(u_{i+1}^n))$. D'autre part, le flux de Godounov est donné par : $\max(f(u_{i+s}^n.(u_{i+1}^n-u_i^n));0<s<1)$. Or f décroit entre u_{i+1}^n et 0, puis croit entre 0 et u^i. Donc le flux est forcément égal à $\max(f(u_i^n),f(u_{i+1}^n))$ et par conséquent au flux de Roe.

iv) $u_i^n<0<u_{i+1}^n$. C'est précisément le cas interdit par (5.3).

Ainsi dans tous les cas les deux flux coincident ce qui achève la démonstration.

[1] O.A.Oleinik, **Discontinuous solution of nonlinear differential equations**, Amer. Math. Soc. Transl. ser 2, 26 (1963), pp.95-172.

[2] S.N.Kruzkov, **First order quasilinear equations with several space variables**, Math. USSR Sb. 10 (1970), pp.217-243.

[3] P.L.Roe, **Approximate Riemann solvers, parameter vectore, and difference schemes**, J.Comp.Phys.,43(1981), pp.357-372.

[4] P.K.Sweby, M.J.Baines, **Convergence of Roe's scheme for the general non linear scalar wave equation**, Reading Univ. Numerical Analysis Report (1981).

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique