



HAL
open science

Conditions aux limites pseudo-absorbantes pour l'équation de diffusion

Patrick Joly

► **To cite this version:**

Patrick Joly. Conditions aux limites pseudo-absorbantes pour l'équation de diffusion. RR-0505, INRIA. 1986. inria-00076049

HAL Id: inria-00076049

<https://inria.hal.science/inria-00076049>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tél (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 505

CONDITIONS AUX LIMITES PSEUDO - ABSORBANTES POUR L'ÉQUATION DE DIFFUSION

Patrick JOLY

Mars 1986

CONDITIONS AUX LIMITES PSEUDO-ABSORBANTES

POUR L'EQUATION DE DIFFUSION

Patrick JOLY

RESUME

Dans ce rapport nous développons et étudions une famille de conditions aux limites artificielles pour l'équation de diffusion. Ces conditions ont la propriété d'être locales en temps et non locales en espace. Nous décrivons le principe d'approximation, montrons que les problèmes approchés obtenus sont mathématiquement bien posés et donnons des résultats de convergence, ainsi que des estimations d'erreur, de la solution approchée vers la solution exacte.

ABSTRACT

In this report, we introduce and study a family of artificial boundary conditions for the diffusion equation. These conditions are local in time and non local in space. We describe the principle of the approximation, show that the corresponding approximate problems are mathematically well-posed and give convergence results, as well as error estimates, of the approximate solution to the exact one.

MOTS-CLES

Conditions aux limites artificielles - Equation de diffusion - Opérateurs non locaux - Approximation par fractions rationnelles - Estimations d'erreur.

KEY WORDS

Artificial boundary conditions - Diffusion equation - Non local operators - Approximation by rational fractions - Error estimates.

TABLE DES MATIERES

	Pages
I - <u>POSITION DU PROBLEME - PRINCIPE HEURISTIQUE DE LA METHODE</u>	
<u>ET CADRE FONCTIONNEL</u>	01
I.1 - PRESENTATION DU PROBLEME	01
I.2 - CONSTRUCTION HEURISTIQUE DE LA CONDITION APPROCHEE	06
I.3 - LE CADRE FONCTIONNEL	15
II - <u>LA CONDITION TRANSPARENTE EXACTE</u>	23
II.1 - L'OPERATEUR \tilde{T} , DEFINITION ET PROPRIETES	23
II.2 - L'OPERATEUR T - DEFINITION, PROPRIETES	29
II.3 - EXPRESSION DE LA CONDITION TRANSPARENTE EXACTE A L'AIDE DE L'OPERATEUR T	37bis
III - <u>LA CONDITION TRANSPARENTE "APPROCHEE" - ANALYSE ET FORMULATION</u>	
<u>DU PROBLEME APPROCHE - APPROXIMATION NUMERIQUE DU PROBLEME</u>	40
III.1 - L'OPERATEUR \tilde{T}_n	40
III.2 - L'OPERATEUR T_n - DEFINITION ET PROPRIETES	41
III.3 - ETUDE DU PROBLEME APPROCHE	51
III.4 - FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME APPROCHEE	57
IV - <u>CONVERGENCE DE LA SOLUTION APPROCHEE - CONSTRUCTION D'UNE</u>	
<u>BONNE SUITE SUITE f_n</u>	59
IV.1 - UN RESULTAT DE CONVERGENCE GENERAL	59
IV.2 - JUSTIFICATION THEORIQUE DU PROCEDE D'APPROXIMATION - UN EXEMPLE CONSTRUCTIF D'UNE SUITE f_n SATISFAISANT LES HYPOTHESES (4.2)	65
IV.3 - ESTIMATIONS D'ERREUR POUR LA SUITE f_n CONSTRUITE AU PARAGRAPHE 4.2	82
IV.4 - QUELQUES REMARQUES SUR LA DETERMINATION DES PARAMETRES α_n^k et β_n^k	95
V - <u>GENERALISATION ET PROBLEMES OUVERTS</u>	98
V.1 - UN DEUXIEME PRINCIPE D'APPROXIMATION	98
V.2 - QUELQUES PROBLEMES OUVERTS	100

I - POSITION DU PROBLEME - PRINCIPE HEURISTIQUE DE LA

METHODE ET CADRE FONCTIONNEL

Dans ce paragraphe nous situons le problème que nous proposons d'étudier dans son contexte le plus général. Nous décrivons de façon plus précise son application au domaine de la prospection géophysique par méthodes électromagnétiques ce qui permet de situer cette étude dans la continuité de précédents travaux sur ce sujet ([2], [5], [6]).

Nous décrivons ensuite le principe heuristique de construction de la condition aux limites "pseudo-transparente". Il s'agit essentiellement de résumer en quelques pages les idées qui sont à la base du choix adopté.

La dernière partie de ce paragraphe est une introduction à l'analyse mathématique rigoureuse de la méthode proposée. On introduit le cadre théorique adapté et l'on donne les quelques résultats d'analyse fonctionnelle qui sont utiles pour la suite.

I.1 - PRESENTATION DU PROBLEME

Le problème des conditions aux limites "transparentes" ou "absorbantes" se pose inévitablement dès que l'on s'intéresse à la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles dans un domaine infini, par exemple d'équations d'évolution posées dans l'espace entier. On est amené, pour la résolution numérique à ne s'intéresser qu'à la restriction de la solution recherchée dans un domaine borné de l'espace Ω qui délimite la région d'intérêt du problème, ce qui impose l'introduction de conditions aux limites artificielles sur le bord Γ du domaine de calcul, ces conditions aux limites étant censées simuler la réponse de l'extérieur du domaine Ω .

Ce problème se pose de façon essentielle lorsqu'on s'intéresse aux équations hyperboliques qui représentent en général des phénomènes de propagation. Un choix non judicieux des conditions aux limites artificielles provoque alors des réflexions parasites non négligeables par le bord artificiel (Γ) ce qui induit de fortes perturbations de la solution à l'intérieur du domaine Ω .

Pour les équations paraboliques qui modélisent essentiellement les phénomènes de diffusion, le problème des conditions transparentes se pose de façon moins cruciale, l'influence de la condition artificielle sur la solution étant beaucoup moins importante que dans le cas des équations hyperboliques. Néanmoins plus on s'intéresse à des temps d'intégration longs (par rapport aux constantes de temps caractéristiques du problème), moins la perturbation due aux bords devient négligeable. C'est le cas notamment lorsque l'on s'intéresse à la simulation numérique de la propagation d'un champ électromagnétique dans un sous sol conducteur, champ produit par l'injection d'un courant électrique à la surface du sol. Une telle expérience intervient par exemple en prospection pétrolière par méthodes électromagnétiques où l'on cherche à retrouver les caractéristiques du comportement électromagnétique des hétérogénéités du sous sol. En dimension 2, le problème se ramène au calcul de la seule composante non nulle du champ électrique qui est solution de :

$$(1.1) \quad \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad t \geq 0$$

où la conductivité $\sigma(x,y)$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \quad \sigma(x,y) = 0 \quad \text{pour } y > 0 \quad (\text{dans l'air}) \\ \cdot \quad \sigma(x,y) > 0 \quad \text{pour } y < 0 \quad (\text{dans le sous-sol}) \end{array} \right.$$

Les mesures du champ électromagnétique étant effectuées en surface, l'effet des hétérogénéités profondes du sous-sol n'est sensible qu'aux temps longs. Cet effet est en outre infinitesimal vis-à-vis du champ primaire (champ qui existerait en l'absence de telles hétérogénéités). Il est donc indispensable pour un tel problème de minimiser l'effet des bords absorbants.

L'idéal consisterait à mettre sur le bord artificiel une condition aux limites telle que la solution du problème alors défini dans le domaine Ω soit la restriction à Ω de la solution du problème initial : une telle condition est une condition transparente.

Dans le cas de l'équation de la chaleur que nous étudierons ici, il est toujours possible de construire, au moins d'un point de vue théorique, une telle condition. En outre dans certains cas de géométrie simple (lorsque Ω

est un demi-espace par exemple) on sait construire une représentation analytique explicite de cette condition dès que l'on fait les hypothèses adéquates sur les coefficients de l'équation à l'extérieur de Ω . Dans tous les cas, cette condition aux limites est non locale en temps et en espace et fait intervenir un opérateur intégral sur le bord espace-temps $\Gamma \times [0, T]$, ce qui la rend pratiquement impossible à traiter numériquement.

Le principe des conditions aux limites absorbantes consiste, dans de nombreux cas, à approcher cette condition par une condition transparente approchée dont le traitement numérique est plus facile, en pratique une condition de type local comme c'est le cas pour l'équation des ondes (cf. [3], [4], [8]).

Dans le cas de l'équation de la chaleur (1.1), dont le caractère "propagation à vitesse infinie" est bien connu, il paraît illusoire de pouvoir construire une condition pseudo-transparente qui soit à la fois locale en espace et en temps, surtout si l'on s'intéresse aux petites valeurs de σ ou encore, ce qui revient au même, à la solution aux temps longs. En revanche, il est possible de construire une condition approchée, locale en temps dont on conserverait le caractère non local en espace. C'est ce que nous nous proposons de faire ici en nous intéressant au problème, apparemment académique, de la réduction au demi-espace du problème de la chaleur posé dans tout l'espace lorsque l'autre demi-espace (dans lequel on ne calculera pas la solution) est supposé homogène. L'intérêt de cette étude est d'abord d'ordre théorique; il réside dans le principe de base qui régit la construction de la condition approchée, dans la forme de cette condition et dans le type de résultat d'approximation que l'on peut obtenir.

Cette étude présente également un intérêt pratique dans la mesure où nous nous sommes attachés à montrer que le problème approché était "facile" à résoudre numériquement en en donnant une formulation variationnelle en espace sur laquelle on peut appliquer une méthode standard d'éléments finis. Nous donnerons de plus amples détails sur une méthode de résolution numérique dans prochain rapport [7].

Si on s'intéresse en revanche aux grandes valeurs de la conductivité σ (ou, ce qui revient au même, aux temps courts) le caractère non local en espace de la condition transparente est moins marqué et on peut donc espérer approcher cette condition par une nouvelle condition qui soit locale à la fois en temps et en espace. C'est ce que nous décrivons dans un prochain travail.

Il semble en outre que, dans ce dernier cas, la généralisation de l'approche au cas d'une frontière non plane soit plus accessible que pour l'approche que nous traitons ici.

Décrivons brièvement une application de notre méthode qui semble particulièrement intéressante. Elle concerne la propagation du champ électrique dans un sous-sol conducteur bidimensionnel : il est courant de supposer le sous-sol stratifié ou même homogène à partir d'une certaine profondeur ce qui revient à faire sur la fonction $\sigma(x,y)$ les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma(x,y) = 0 & \text{pour } y > 0 \\ \sigma(x,y) = 0 & \text{pour } -L \leq y \leq 0 \\ \sigma(x,y) = \sigma > 0 & \text{pour } y < -L \end{array} \right.$$

Il est alors naturel de chercher à réduire le domaine des calculs numériques à la bande du plan :

$$0 \leq y \leq L$$

L'interface air-sous-sol ($y=0$) peut se traiter en utilisant la condition transparente exacte qui fait simplement appel à un opérateur de convolution en espace. Ce problème a été résolu dans [6].

Le traitement de l'interface $y=L$ nous ramène bien entendu à notre problème modèle du demi-espace. L'idée consistera à approcher la condition transparente par une condition locale en temps, non locale en espace qui coïncidera avec la condition exacte (c'est-à-dire avec celle utilisée pour l'interface air-sous-sol) lorsque $\sigma=0$.

C'est cette idée que nous allons développer maintenant après avoir introduit quelques notations.

NOTATIONS

Nous travaillerons dans l'espace à N+1 dimensions :

$$\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

• $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_N, y)$ désignera le point courant de \mathbb{R}^{N+1} .

• t désignera la variable temps

• $\mathbb{R}_+^{N+1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{N+1}, y > 0\}$

• $\mathbb{R}_-^{N+1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{N+1}, y < 0\}$

Nous allons nous intéresser à l'équation de la chaleur :

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \\ \Delta u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right.$$

où $u(x, y, t)$ est la fonction inconnue et où $\sigma(x, y)$ sera supposée vérifiée :

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \sigma(x, y) \in L^\infty(\mathbb{R}^{N+1}) \\ \cdot \sigma(x, y) \geq \sigma_* > 0 \quad \text{p.p. } (x, y) \in \mathbb{R}_-^{N+1} \\ \cdot \sigma(x, y) = \sigma \quad \text{p.p. } (x, y) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \end{array} \right.$$

(le demi espace \mathbb{R}_+^{N+1} est donc supposé homogène).

Pour simplifier l'exposé nous nous intéresserons au problème de Cauchy pur :

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x, y, t) : \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad (x, y, t) \in \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{N+1} \end{array} \right.$$

où l'on fait sur la donnée initiale u_0 , l'hypothèse :

$$(1.5) \quad \text{supp } u_0 \subset \mathbb{R}_-^{N+1}$$

Bien sur tous les résultats que nous énoncerons resteront vrais pour le cas de l'équation avec second membre, pourvu que celui-ci soit à support dans le demi-espace \mathbb{R}_-^{N+1} .

Nous poserons en outre :

$$(1.6) \quad \Gamma = \partial\mathbb{R}_-^{N+1} = \partial\mathbb{R}_+^{N+1} = \{(x,0), x \in \mathbb{R}^N\}.$$

En pratique Γ sera souvent identifié à \mathbb{R}^N . Le problème modèle que nous proposons donc de résoudre consiste à se ramener à la résolution d'un problème dans le seul demi-espace hétérogène \mathbb{R}_-^{N+1} ce qui amène à construire une condition transparente approchée sur le bord (Γ) .

I.2 - CONSTRUCTION HEURISTIQUE DE LA CONDITION APPROCHÉE

Rappelons tout d'abord le traitement de la condition transparente lors que $\sigma=0$

Rappel sur le cas $\sigma=0$ (Voir [5], [6] pour les détails).

La condition transparente s'écrit alors :

$$(1.7) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} + T_0(u \Big|_{\Gamma}) = 0$$

où T_0 est l'opérateur pseudo-différentiel défini par :

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_0 : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \phi(x) \longrightarrow (T_0 \phi)(x) \quad \text{telle que} \\ (\widehat{T_0 \phi})(k) = |k| \hat{\phi}(k) \end{array} \right.$$

($\hat{f}(k)$ désignant la transformée de Fourier dans \mathbb{R}^N de $f(x)$, $x \in \Gamma \equiv \mathbb{R}^N$)

On montre alors que la forme bilinéaire $b_0(\cdot, \cdot)$ définie sur $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^2$ par :

$$b_0(\phi, \psi) = \langle T_0 \phi, \psi \rangle_{\Gamma} \quad \forall (\phi, \psi) \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^2$$

(où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ désigne la dualité $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) - H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$)

est symétrique et positive, et a pour expression, lorsque ϕ et ψ sont suffisamment régulières, à savoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\phi, \psi) \in H_c^1(\Gamma) \times H_c^1(\Gamma) \\ H_c^1(\Gamma) = \{ \phi \in H^1(\Gamma) / \text{supp} \phi \text{ compact} \} \end{array} \right.$$

$$N=1 \quad b_0(\phi, \psi) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Gamma \Gamma} \text{Log} \left| \frac{1}{x-y} \right| \frac{d\phi}{dx}(x) \frac{d\psi}{dx}(y) dx dy$$

$$N \geq 2 \quad b_0(\phi, \psi) = \frac{2}{S_N} \iint_{\Gamma \Gamma} \frac{\nabla \phi(x) \cdot \nabla \psi(y)}{|x-y|^{N-1}} d\sigma(x) d\sigma(y)$$

($d\sigma$ désigne la mesure superficielle sur Γ).

où S_N est l'aire de la sphère unité dans \mathbb{R}^{N+1} ([5], [6]). En particulier, en dimension 3 ($N=2$) nous avons :

$$b_0(\phi, \psi) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma\Gamma} \frac{\nabla\phi(x) \cdot \nabla\phi(y)}{|x-y|} d\sigma(x) d\sigma(y)$$

La formulation variationnelle du problème à résoudre s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (\rho(u(t), v)) + a(u(t), v) + b_0(\gamma_0 u(t), \gamma_0 v) = 0 \\ \forall v \in H^1(\mathbb{R}_-^{N+1}) \end{array} \right.$$

où l'on a posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (u, v) \in H^1(\mathbb{R}_-^{N+1}) \quad \rho(u, v) = \int_{\mathbb{R}_-^{N+1}} \sigma uv \, dx dy \\ \forall (u, v) \in H^1(\mathbb{R}_-^{N+1}) \quad a(u, v) = \int_{\mathbb{R}_-^{N+1}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy \end{array} \right.$$

Traitement du cas $\sigma > 0$

Nous revenons maintenant au cas où $\sigma > 0$. Nous introduisons, u désignant la solution du problème dans tout l'espace (1.4), les fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^+ = u|_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \\ u^- = u|_{\mathbb{R}_-^{N+1}} \end{array} \right.$$

Rappelons que nous désirons caractériser le problème dont u^- est solution. Au moins formellement on a l'équivalence

$$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ est solution du problème (1.4)} \\ \iff \\ (u^+, u^-) \text{ est solution du problème de transmission (1.19)} \end{array} \right.$$

$$(1.19) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma \frac{\partial u^+}{\partial t} - \Delta u^+ = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \\ \sigma \frac{\partial u^-}{\partial t} - \Delta u^- = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_-^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \\ u^+(x, y, 0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^{N+1} \\ u^-(x, y, 0) = u_0(x, y) & \text{dans } \mathbb{R}_-^{N+1} \\ u^+|_{\Gamma} = u^-|_{\Gamma} & \text{dans } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u^+}{\partial y}|_{\Gamma} = \frac{\partial u^-}{\partial y}|_{\Gamma} & \text{dans } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

Nous introduisons alors l'opérateur défini formellement sur le bord Γ (ou plus exactement sur un certain espace $H_1(\Gamma)$ de fonctions définies sur le bord Γ à valeurs dans un espace $H_2(\Gamma)$ de même nature, H_1 et H_2 restant à préciser).

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} T : H_1(\Gamma) \longrightarrow H_2(\Gamma) \\ \phi(x, t) \longrightarrow \psi(x, t) = T \phi(x, t) \end{array} \right.$$

où $\psi(x, t)$ est définie par

$$(1.10) \quad \psi(x, t) = - \frac{\partial v}{\partial y}(x, 0, t)$$

où $v(x, y, t)$ est l'unique solution de

$$(1.11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \\ v(x, y, 0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^{N+1} \\ v|_{\Gamma} = \phi(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

Il est alors clair que les traces de u^+ et $\frac{\partial u^+}{\partial y}$ sur Γ sont reliés par :

$$\left(\frac{\partial u^+}{\partial y}\right)\Big|_{\Gamma} = -T_0(u^+\Big|_{\Gamma})$$

Par conséquent, utilisant les conditions de transmission, il vient immédiatement :

$$(1.12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma \frac{\partial u^-}{\partial t} - \Delta u^- = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_-^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u^-}{\partial y}\Big|_{\Gamma} + T_0(u^-\Big|_{\Gamma}) = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ u^-(x, y, 0) = u_0(x, y) & \text{dans } \mathbb{R}_-^{N+1} \end{array} \right.$$

La condition transparente exacte pour l'équation (1.4) s'écrit donc :

$$(1.13) \quad \frac{\partial u^-}{\partial y}\Big|_{\Gamma} + T_0(u^-\Big|_{\Gamma}) = 0$$

L'opérateur T_0 est un opérateur non local en temps et en espace dont on peut très facilement calculer le symbole en utilisant la transformation de Fourier dans l'espace (x, t) :

$$f(x, t) \longrightarrow (\mathcal{F}f)(k, \omega) = \hat{f}(k, \omega)$$

définie pour toute fonction régulière par

$$\forall (k, \omega) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad \hat{f}(k, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{N+1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, t) e^{-i(k \cdot x + \omega t)} dx dt$$

Utilisons cette transformation pour résoudre le problème (1.11). Nous désignons par $\hat{v}(k, z, \omega)$ la transformée de Fourier de la fonction $(x, t) \rightarrow v(x, z, t)$. Pour chaque (k, ω) , la fonction $z \rightarrow \hat{v}(k, z, \omega)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$(1.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \frac{d^2 \hat{v}}{dz^2} + (|k|^2 + i\omega\sigma) \hat{v} = 0 \\ \hat{v}(k, 0, \omega) = \hat{\phi}(k, \omega) \end{array} \right.$$

où $\hat{\phi}$ est la transformée de Fourier de ϕ . L'unique solution physiquement acceptable de (1.14) est celle qui décroît exponentiellement à l'infini. Elle est donnée par :

$$(1.15) \quad \hat{v}(k, z, \omega) = \hat{\phi}(k, \omega) e^{-(|k|^2 + i\omega\sigma)^{1/2} z}$$

où la racine $(|k|^2 + i\omega\sigma)^{1/2}$ est déterminée par :

$$(1.16) \quad \Re((|k|^2 + i\omega\sigma)^{1/2}) > 0$$

Par suite nous avons, par définition :

$$T\phi(k, \omega) = - \frac{d\hat{v}}{dy}(k, 0, \omega) = (|k|^2 + i\omega\sigma)^{1/2} \hat{\phi}(k, \omega)$$

Le symbole de l'opérateur "pseudo-différentiel" T est donc donné par :

$$(1.17) \quad \hat{T}(k, \omega) = (|k|^2 + i\omega\sigma)^{1/2}$$

Comme il ne s'agit pas d'une fraction rationnelle en (k, ω) , ce symbole ne correspond pas à un opérateur différentiel. Notre but est maintenant d'approcher le symbole $\hat{T}(k, \omega)$ par un symbole correspondant à un opérateur local en temps, en pratique une fraction rationnelle par rapport à ω .

Pour cela nous écrivons que \hat{T} est une perturbation du symbole $\hat{T}_0(k, \omega) = |k|$ correspondant à l'opérateur T_0 apparaissant pour $\sigma=0$.

$$\hat{T}(k, \omega) = |k| \left(1 + i \frac{\omega\sigma}{|k|^2} \right)^{1/2}$$

(Cela équivaut à écrire que T est le composé de l'opérateur T_0 et de l'opérateur $P(\sigma)$ dont le symbole est la fonction $(1+i \frac{\omega\sigma}{|k|^2})^{1/2}$)

Nous approchons maintenant la fonction

$$(1.18) \quad P(\sigma)(k, \omega) = (1+i \frac{\omega\sigma}{|k|^2})^{1/2}$$

par une fonction s'écrivant sous la forme

$$(1.19) \quad P_n(\sigma)(k, \omega) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_n^k(i\omega\sigma)}{(i\omega\sigma)^k + |k|^2}$$

ou les coefficients β_n^k et α_n^k sont réels et positifs. Cela revient à approcher dans le plan complexe la fonction :

$$(1.20) \quad f(z) = (1+z)^{1/2}$$

par la fonction

$$(1.21) \quad f_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_n^k z}{1+\alpha_n^k z}$$

L'indice n représentant l'ordre de l'approximation. Ce type d'approximation a déjà été appliqué sur des problèmes de nature différente (voir [2], [8]).

Remarquons que par construction nous avons choisi :

$$(1.22) \quad f_n(0) = f(0) = 1 \quad \forall n.$$

Cette approximation étant réalisée nous remplaçons le symbole $\hat{T}(k, \omega)$ par :

$$(1.23) \quad \left| \begin{aligned} \hat{T}_n(k, \omega) &= |k| P_n(\sigma)(k, \omega) \\ &= |k| \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_n^k(i\omega\sigma)}{\alpha_n^k[i\omega\sigma] + |k|^2} \right) \end{aligned} \right.$$

Remarquons que, lorsque $\sigma=0$, $\hat{T}_n(k, \omega)$ coïncide avec $\hat{T}_0(k)$. L'opérateur T_n associé est alors l'opérateur exact T_0 .

Soit alors T_n l'opérateur formel dont le symbole est donné par \hat{T}_n , nous remplaçons la condition transparente (1.13) par la condition approchée

$$(1.24) \quad \frac{\partial u^-}{\partial y} \Big|_{\Gamma} + T_n(u^- \Big|_{\Gamma}) = 0$$

Par transformation de Fourier en (x, t) , cette condition s'écrit :

$$(1.25) \quad \frac{d\hat{u}^-}{dy}(k, 0, \omega) + |k| \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_n^k(i\omega\sigma)}{|k|^2 + i\alpha_n^k \omega\sigma} \right) \hat{u}^-(k, 0, \omega) = 0$$

Nous pouvons la réinterpréter différemment en introduisant n fonctions auxiliaires, $f_n^k(x, t)$ définies sur le bord Γ par leur transformations de Fourier en posant :

$$\hat{f}_n^k(k, \omega) = \frac{\hat{u}^-(k, 0, \omega)}{|k|^2 + i\alpha_n^k \omega\sigma}$$

auquel cas l'équation (1.25) est équivalente au système :

$$(1.26) \quad \begin{cases} \frac{d\hat{u}^-}{dy}(k, 0, \omega) + |k| \hat{u}^-(k, 0, \omega) + |k| \sum_{k=1}^N (i\omega\sigma) \hat{f}_n^k(k, \omega) = 0 \\ (i\alpha_n^k \omega\sigma + |k|^2) \hat{f}_n^k(k, \omega) = \hat{u}^-(k, 0, \omega) \end{cases}$$

système que l'on peut réinterpréter dans le domaine (x, t) par :

$$(1.27) \quad \begin{cases} \frac{\partial u^-}{\partial y}(x, 0, t) + T_0 \left(u^-(x, 0, t) + \sum_{k=1}^n \beta_n^k \sigma \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(x, t) \right) = 0 \\ \sigma \alpha_n^k \frac{\partial f_n^k}{\partial t} - \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j^2}(x, t) = u^-(x, 0, t) \\ f_n^k(x, 0) = 0 \end{cases}$$

système de type intégro-différentiel (la partie intégrale étant contenue dans l'opérateur T_0 et portant uniquement sur la variable x) qui est rigoureusement

équivalent à la condition approchée (1.24). Cette condition apparaît donc comme une condition non locale en espace du type de celle apparaissant dans le cas $\sigma=0$ couplée, par l'intermédiaire du terme $\sum_{k=1}^n \beta_n^k \sigma \frac{\partial f_n^k}{\partial t}$, à n équations de la chaleur en dimension N sur le bord Γ . L'approximation numérique d'une telle condition aux limites est donc (assez) simple.

Finalement l'idée consiste à approcher la solution exacte u^- du problème (1.12) par la solution u_n^- du nouveau problème.

$$(1.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma \frac{\partial u_n^-}{\partial t} - \Delta u_n^- = 0 \\ \frac{\partial u_n^-}{\partial y} \Big|_{\Gamma} + T_n(u_n^- \Big|_{\Gamma}) = 0 \\ u_n^-(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{array} \right.$$

dont la résolution est équivalente à

$$(1.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver : } u_n^-(x, y, t) : \mathbb{R}_-^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ f_n^k(x, t) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad 1 \leq k \leq n \\ \sigma \frac{\partial u_n^-}{\partial t} - \Delta u_n^- = 0 \quad (x, y, t) \in \mathbb{R}_-^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u_n^-}{\partial y}(x, 0, t) + T_0 \left(u_n^-(x, 0, t) + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_n^k \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(x, t) \right) = 0 \\ \left(\alpha_n^k \sigma \frac{\partial f_n^k}{\partial t} - \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j^2} \right) (x, t) = u_n^-(x, 0, t) \quad 1 \leq k \leq n. \\ u_n^-(x, y, 0) = u_0(x, y) \\ f_n^k(x, 0) = 0 \quad 1 \leq k \leq n. \end{array} \right.$$

Nous nous proposons maintenant d'étudier mathématiquement en détails la méthode ci-dessus proposée. Notre étude va comporter essentiellement 3 phases qui valideront à nos yeux, au moins sur le plan théorique, cette méthode.

- Nous montrons que le problème approché (1.29) est mathématiquement bien posé.

- Nous donnons une formulation variationnelle en espace de ce problème. Cette formulation sera la base pour une approximation du problème approché par la méthode des éléments finis.

- Nous terminerons en énonçant un résultat de convergence en démontrant qu'il est possible de construire une suite f_n (c'est-à-dire une suite de n-uplets (α_n^k, β_n^k)) telle que la solution u_n^- du problème approché (1.29) converge, quand $n \rightarrow +\infty$ vers la solution u^- du problème "exact" (1.12)

L'analyse mathématique rigoureuse du problème nécessite un cadre fonctionnel bien adapté que nous nous proposons de décrire maintenant.

I.3 - LE CADRE FONCTIONNEL

Nous reprenons ici certaines définitions et quelques résultats exposés en détails dans LIONS-MAGENES (Tome II) ([9]).

Lorsque (r,s) désignent deux réels quelconques, I un intervalle de \mathbb{R} , Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^{N+1} (en pratique Ω sera soit l'espace entier soit un demi espace pour le propos qui nous intéresse), on pose :

$$H^{r,s}(\Omega \times I) = H^s(I; L^2(\Omega)) \cap L^2(I; H^r(\Omega))$$

espace de Hilbert pour la norme

$$\|u\|_{r,s,\Omega}^2 = \|u\|_{H^s(I; L^2(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^2(I; H^r(\Omega))}^2$$

On montre ([9]) que $H^s(\Omega \times I)$ est l'espace des restrictions à $\Omega \times]0, T[$ de

l'espace :

$$H^{r,s}(\mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}) = H^s(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{N+1})) \cap L^2(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^{N+1}))$$

dont la norme se définit de façon très simple par transformation de Fourier :

$$\|u\|_{r,s,\Omega}^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} \{ (1+\omega^2)^s + (1+|k|^2+\xi^2)^r \} |\hat{u}(k,\xi,\omega)|^2 dk d\xi d\omega$$

où $\hat{u}(k,\xi,\omega)$ désigne la transformée de Fourier en (x,y,t) de la fonction $u(x,y,t)$.

En outre on montre que la norme $\|\cdot\|_{r,s,\Omega}$ est équivalente à la norme définie par :

$$u \longrightarrow \inf_{\tilde{u} \in \mathcal{P}(u)} (\|\tilde{u}\|_{r,s})$$

où $\mathcal{P}(u)$ désigne l'ensemble des prolongements \tilde{u} de u à \mathbb{R}^{N+1} qui sont dans $H^{r,s}(\mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R})$.

Rappelons maintenant un théorème de traces dans le cas où Ω désigne un demi-espace (la frontière Γ de Ω est alors identifiable à \mathbb{R}^N et les espaces $H^{\rho,\sigma}(\Gamma \times I)$ ont bien un sens):

- γ_0 désigne l'application "trace" usuelle $u \longrightarrow u|_{\Gamma}$

- γ_1 désigne l'application "trace de la dérivée normale" $u \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma}$
(ν désigne la normale extérieure à Γ).

Nous avons alors les résultats :

$$\forall r > \frac{1}{2} \quad \gamma_0 \in \mathcal{L}(H^{r,s}(\Omega \times]0, T[); H^{r-\frac{1}{2}, s/r(r-\frac{1}{2})}(\Gamma \times I))$$

$$\text{En particulier : } \begin{cases} \gamma_0 \in \mathcal{L}(H^{2,1}(\Omega \times I); H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(\Gamma \times I)) \\ \gamma_0 \in \mathcal{L}(H^{1,1}(\Omega \times I); H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times I)) \end{cases}$$

$$\forall r > \frac{3}{2} \quad \gamma_1 \in \mathcal{L}(H^{r,s}(\Omega \times I); H^{r-\frac{3}{2}, s/r(r-\frac{3}{2})}(\Gamma \times I))$$

$$\text{En particulier : } \gamma_1 \in \mathcal{L}(H^{2,1}(\Omega \times I); H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Gamma \times I))$$

Rappelons que si nous posons :

$$H^1(\Delta; \Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) / \Delta u \in L^2(\Omega) \}$$

espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Delta; \Omega)}^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Alors on a :

$$\gamma_1 \in \mathcal{L}(L^2(0, T; H^1(\Delta; \Omega)) ; L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)))$$

Les espaces $H^{\rho, \sigma}(\Gamma \times I)$ ne seront pas suffisants pour mener notre analyse qui nous conduira à introduire un espace particulier pour le cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sigma = \frac{1}{2} \\ I =]0, T[\end{array} \right.$$

Nous définissons donc l'espace :

$$H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times]0, T[) = H_{00}^{\frac{1}{2}}([0, T[; L^2(\Gamma)) \cap L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

où l'espace $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma \times]0, T[)$ est défini par :

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma \times]0, T[) = \left\{ \phi \in H^{\frac{1}{2}}(0, T; L^2(\Gamma)) / \int_0^T \frac{\|\phi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2}{t} dt < +\infty \right\}$$

(Cet espace peut encore se définir par interpolation).

Remarquons que nous faisons jouer ici un rôle privilégié à la borne $\{0\}$ de l'intervalle $]0, T[$ (ce qui justifie la notation $]0, T[$).

Bien entendu $H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times]0, T[)$ est un espace de Hilbert dès qu'on le munit de la norme :

$${}_0 \|\phi\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma}^2 = \int_0^T \|\phi(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 dt + \int_0^T \frac{\|\phi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2}{t} dt + \|\phi\|_{H^{1/2}(0, T; L^2(\Gamma))}^2$$

On a bien entendu la stricte inclusion avec injection continue :

$$H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times]0, T[) \subset H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times]0, T[)$$

La propriété fondamentale de $H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times]0, T[)$ est la suivante :

Nous désignons par \tilde{P} l'opérateur de prolongement par 0 défini par exemple sur $L^2(\Gamma \times]0, T[)$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P}: L^2(\Gamma \times]0, T[) &\rightarrow L^2(\Gamma \times]-\infty, T[) \\ u &\rightarrow \tilde{u} = \tilde{P}u \\ \tilde{u}(x, t) &= u(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times]0, T[\\ \tilde{u}(x, t) &= 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times]-\infty, 0[\end{aligned} \right\}$$

(\tilde{P} est une isométrie de $L^2(\Gamma \times]0, T[)$ dans $L^2(\Gamma \times]-\infty, T[)$).

Nous avons alors le résultat suivant (qui est une variante légère du théorème 11.7 de LIONS-MAGENES (Tome I)).

THEOREME 1.1

L'application \tilde{P} applique continument l'espace $H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times]0, T[)$ dans $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times]-\infty, T[)$. Plus précisément une fonction u de $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times]0, T[)$ est dans l'espace $H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times]0, T[)$ si et seulement si son prolongement $\tilde{P}u$ est dans $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(]-\infty, T[\times \Gamma)$.

Ce théorème fournit donc une caractérisation "pratique" de l'espace $H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times]0, T[)$. On en déduit en particulier le :

COROLLAIRE 1.1

Soit u une fonction de $H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T[)$ et soit $\mathcal{P}(u)$ l'espace des fonctions v de $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times \mathbb{R})$ qui prolongent u et sont nulles sur $\Gamma \times]-\infty, 0[$, alors il existe une constante C (indépendante de u) telle que :

$$\|u\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} \leq C \left(\inf_{v \in \mathcal{P}(u)} \|v\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} \right)$$

Pour terminer donnons deux résultats, un théorème de densité et un théorème de traces, qui nous seront utiles pour la suite de l'étude.

Pour le premier résultat introduisons l'espace :

$$V = \left\{ \phi \in H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) / \phi(0) = 0 \right\}$$

(V est un sous espace fermé de $H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$) :

Nous avons alors le :

THEOREME 1.2

L'espace V est dense dans $H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T[)$ et l'injection canonique de V dans $H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T[)$ est continue.

Démonstration du théorème :

(i) Montrons que $V \subset H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T])$

Il suffit en fait de montrer que si $\phi \in V$ alors la fonction $\frac{\phi(t)}{\sqrt{t}}$ est dans $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ et que :

$$\int_0^T \frac{1}{t} \|\phi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \leq C \|\phi\|_{H^1(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}^2$$

or comme $\phi(0) = 0$ nous avons

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{d\phi}{dt}(s) ds$$

Par conséquent,

$$\|\phi(t)\|_{L^2(\Gamma)} = \left\| \int_0^t \frac{d\phi}{dt}(s) ds \right\|_{L^2(\Gamma)} \leq \sqrt{t} \left(\int_0^t \left\| \frac{d\phi}{dt}(s) \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc,

$$\frac{\|\phi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2}{t} \leq \int_0^t \left\| \frac{d\phi}{dt}(s) \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds$$

Donc après intégration en temps :

$$\int_0^T \frac{\|\phi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2}{t} dt \leq T \int_0^T \left\| \frac{d\phi}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds$$

(ii) Le résultat de densité s'établit de façon tout à fait classique en procédant par troncature et régularisation.

□

Introduisons maintenant, Ω désignant toujours un demi-espace, l'espace :

$$H_{0,\Gamma}^{1,1}(\Omega \times]0, T[) = \{ v \in H^{1,1}(\Omega \times]0, T[) / v(0) \in H_0^1(\Omega) \}$$

($v(0)$ désignant la fonction $(x,y) \longrightarrow v(x,y,0)$)

Nous avons alors le théorème de traces :

THEOREME 1.3

L'opérateur γ_0 applique continuellement l'espace $H_{0,\Gamma}^{1,1}(\Omega \times]0, T[)$ dans $H_{00}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Gamma \times]0, T[)$

Démonstration du théorème

On peut toujours se ramener au cas où $v(0)=0$. En effet si \tilde{v} désigne la fonction définie par :

$$\tilde{v}(t) = v(t) - v(0) \quad \forall t \in [0, T]$$

On alors, comme $v(0)$ est dans $H^1_0(\Omega)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v} \in H^{1,1}(\Omega \times]0, T[) \\ \|\tilde{v}\|_{1,1,\Omega} \leq C(T) \|v\|_{1,1,\Omega} \\ \gamma_0 \tilde{v} = \gamma_0 v \end{array} \right.$$

Supposons donc que $v(0)=0$. Nous savons déjà que $\gamma_0 v$ est dans $H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Gamma \times]0, T[)$ d'après le théorème de traces usuel.

Soit alors \tilde{v} la fonction définie sur $]-\infty, T[\times \Omega$ par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{v}(x, t) = v(x, y, t) & \text{pour } t \geq 0 \\ \tilde{v}(x, y, t) = 0 & \text{pour } t < 0 \end{array} \right.$$

Comme $v(x, y, 0) = 0$, il vient immédiatement :

$$(1.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \tilde{v} \in H^{1,1}([-\infty, T] \times \Omega) \quad \|\tilde{v}\|_{1,1,\Omega} = \|v\|_{1,1,\Omega} \\ \cdot \gamma_0 \tilde{v} = \tilde{P}(\gamma_0 v) \end{array} \right.$$

Mais, grâce au théorème de traces classique :

$$\gamma_0 \tilde{v} \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}([-\infty, T] \times \Gamma)$$

Donc,

$$\tilde{P}(\gamma_0 v) \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}([-\infty, T] \times \Gamma)$$

ce qui prouve, d'après la caractérisation de $H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T[)$ fournie par le théorème 1.1, que :

$$\gamma_0 v \in H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T[)$$

En outre on a la succession d'inégalités :

$$\begin{aligned} \|\gamma_0 v\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} &\leq C \|\tilde{P}(\gamma_0 v)\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} && \text{(théorème 1.1)} \\ &\leq C \|\gamma_0 \tilde{v}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} && ((1.30)) \\ &\leq C \|\tilde{v}\|_{1,1,\Omega} \\ &\leq C \|v\|_{1,1,\Omega} && ((1.30)) \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème □

Les notations qui seront utilisées dans toute la suite

- $\|\cdot\|$ désignera toujours une norme L^2 . Cette norme L^2 ne sera précisée que lorsqu'il y aura ambiguïté.
- γ_0 γ_0 désignera toujours l'opérateur de trace usuel sur le bord Γ d'un demi espace $\Omega = \mathbb{R}_+^{N+1}$ ou \mathbb{R}_-^{N+1} . On pourra utiliser indépendamment les deux notations $\gamma_0 u = u|_{\Gamma}$
- γ_1 désignera l'opérateur : $u \longrightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\Gamma}$ (qui est la dérivée normale sortante lorsque $\Omega = \mathbb{R}_-^{N+1}$).

II - LA CONDITION TRANSPARENTE EXACTE

Dans ce chapitre nous définissons et étudions deux opérateurs pseudo-différentiels T et \tilde{T} et montrons que la condition transparente exacte pour le problème dans le demi espace \mathbb{R}_-^{N+1} , s'écrit :

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} + T(u|_{\Gamma}) = 0 \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Nous montrons que le problème dans le demi espace \mathbb{R}_-^{N+1} consistant à résoudre l'équation de la chaleur dans \mathbb{R}_-^{N+1} avec (2.1) comme condition aux limites sur $\Gamma = \partial \mathbb{R}_-^{N+1}$ est bien posé et caractérise la restriction au demi espace \mathbb{R}_-^{N+1} de la solution du problème dans tout l'espace.

Nous avons mis l'accent sur :

- les espaces fonctionnels sur lesquels opèrent les applications T et \tilde{T} et le lien entre T et \tilde{T}

- les propriétés de positivité de l'opérateur T (dont on établira les propriétés analogues pour le problème approché T_n) qui permettent d'assurer que le problème dans le demi-espace \mathbb{R}_-^{n+1} avec la condition (2.1) est bien posé (théorèmes 2.7 et 2.8).

II.1 - L'OPERATEUR \tilde{T} . DEFINITION ET PROPRIETES

Nous pouvons définir \hat{T} comme opérateur non borné sur l'espace $((r,s) \in \mathbb{R}^2)$:

$$L^2_{r,s}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = \{ \hat{u}(k, \omega) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} ; ((1+\omega^2)^{s/2} \hat{u}, (1+|k|^2)^{1/2} \hat{u}) \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^2 \}$$

par :

$$D(\hat{T}) = \{ \hat{u} \in L^2_{r,s}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) / (|k|^2 + i\omega\sigma)^{1/2} \hat{u} \in L^2_{r,s}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \}$$

$$\forall \hat{u} \in D(\hat{T}) \quad (\hat{T}\hat{u})(k, \omega) = \hat{T}(k, \omega) \hat{u}(k, \omega)$$

$$\hat{T}(k, \omega) = (|k|^2 + i\omega\sigma)^{1/2}$$

Par transformation de Fourier $\mathcal{F}_{x,t}$ on peut alors définir l'opérateur \tilde{T} comme opérateur non borné sur $H^{r,s}(\Gamma \times \mathbb{R})$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\tilde{T}) = \{ \tilde{u}(x,t) \in H^{r,s}(\Gamma \times \mathbb{R}) / \mathcal{F}_{x,t} \tilde{u} \in D(\hat{T}) \} \\ \forall \tilde{u} \in D(\tilde{T}) \quad \tilde{T} \tilde{u} = \mathcal{F}_{x,t}^{-1} \circ \hat{T} \circ \mathcal{F}_{x,t} \tilde{u} \end{array} \right.$$

ce qui correspond au diagramme :

$$\begin{array}{ccc} D(\tilde{T}) \subset H^{r,s}(\Gamma \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{\tilde{T}} & H^{r,s}(\Gamma \times \mathbb{R}) \\ \mathcal{F}_{x,t} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}_{x,t} \\ D(\hat{T}) \subset L^2_{r,s}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{\hat{T}} & L^2_{r,s}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \end{array}$$

Utilisant les inégalités

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (|k|^2 + |\omega| \sigma) \leq |(|k|^2 + i\omega\sigma)| \leq |k|^2 + |\omega| \quad \times \mathbb{R}$$

Il est facile de remarquer que l'on a la propriété suivante (qui est celle que nous utiliserons dans la suite).

$$(2.2) \quad \tilde{T} \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}); L^2(\mathbb{R}; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)))$$

Remarque :

On notera en fait que si l'on considère \tilde{T} comme opérateur non borné sur $L^2(\mathbb{R}; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$ alors son domaine $D(\tilde{T})$ est en fait un peu plus grand que $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$. Plus précisément on vérifie que

$$D(\tilde{T}) = L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \cap H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

auquel cas il suffit de remarquer que

$$H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times \mathbb{R}) \subset D(\tilde{T})$$

(avec injection continue lorsque, de façon classique, on munit $D(\tilde{T})$ de la norme du graphe).

De façon heuristique, (2.2) exprime que \tilde{T} fait perdre un cran de régularité en espace et un demi cran de régularité en temps. \tilde{T} est un opérateur pseudo différentiel non local en espace et en temps. Il s'agit d'un opérateur de convolution :

THEOREME 2.3

L'opérateur \tilde{T} est défini par :

$$(\tilde{T}u)(x,t) = \iint G(x-\xi, t-\tau) u(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

où la fonction $G(x,t)$ est définie par :

$$(2.3) \quad \begin{cases} G(x,t) = 0 & \forall t > 0 \\ G(x,t) = \frac{1}{t} \left(\frac{\sigma}{4\pi t}\right)^{\frac{N+1}{2}} e^{-\sigma \frac{|x|^2}{4t}} \end{cases}$$

Démonstration du théorème

Il suffit en fait de calculer le noyau de convolution G qui n'est autre que la transformée de Fourier inverse de la fonction \hat{T} .

Pour cela, soit E la solution élémentaire, nulle pour $t < 0$, de l'équation de la chaleur dans \mathbb{R}^{N+1} :

$$E(x,y,t) = \frac{1}{\sigma(4\pi \frac{t}{\sigma})^{\frac{N+1}{2}}} e^{-\sigma \frac{|x|^2+y^2}{4t}}$$

qui satisfait donc

$$\sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \Delta E = \delta(x,y,t)$$

Soit $\hat{E}(k,y,\omega)$ la transformée de Fourier partielle de $E(x,y,t)$ dans les directions x et t nous avons

$$-\frac{d^2 \hat{E}}{dy^2} + (|k|^2 + i\omega\sigma) \hat{E} = \delta(y)$$

Nous avons choisi, pour la démonstration de ce théorème la transformée de Fourier définie pour les fonctions régulières par :

$$(\mathcal{F}\phi)(k, \omega) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}} \phi(x, t) e^{-i(k \cdot x + \omega t)} dx dt$$

pour laquelle on a :

$$\mathcal{F}\phi \cdot \mathcal{F}\psi = \mathcal{F}(\phi * \psi) \text{ et } \mathcal{F}\delta = 1.$$

L'unique solution de cette équation différentielle est :

$$(2.4) \quad \hat{E}(k, y, \omega) = \frac{1}{2(|k|^2 + i\omega\sigma)^{1/2}} e^{-(|k|^2 + i\omega\sigma)^{1/2} y}$$

D'où l'on déduit aisément l'identité

$$(2.5) \quad G(x, t) = -2 \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}(x, 0, t)$$

Or,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial y}(x, y, t) = -\frac{y\sigma}{2t} E(x, y, t) \\ \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}(x, y, t) = \frac{y^2\sigma^2}{4t^2} E(x, y, t) - \frac{\sigma}{2t} E(x, y, t) \end{array} \right.$$

Donc
$$-2 \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}(x, 0, t) = \frac{\sigma}{t} E(x, 0, t)$$

Soit

$$G(x, t) = \frac{1}{t} \left(\frac{\sigma}{4\pi t} \right)^{\frac{N+1}{2}} e^{-\sigma \frac{|x|^2}{4t}}$$

ce qui démontre le théorème □

Remarquons que \tilde{T} est un opérateur causal; on a :

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 \text{ pour } t \leq T \implies \tilde{T}\tilde{u}_1 = \tilde{T}\tilde{u}_2 \text{ pour } t \leq T$$

Lorsque \tilde{u} est une fonction à support dans $[0, T] \times \Gamma$ on a la formule, pour tout t dans $[0, T]$

$$(\tilde{T}\tilde{u})(x, t) = \int_0^T \int_{\Gamma} G(x-\xi, t-\tau) \tilde{u}(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

Remarques :

• Contrairement à ce qui se passe lorsque l'on s'intéresse à l'équation des ondes le noyau de convolution est une fonction régulière de l'espace et du temps. L'expression de \tilde{T} ne fait donc pas apparaître de termes en parties finies.

• On peut se demander comment, sur la formule (2.3) on peut retrouver le fait que \tilde{T} redonne l'opérateur T_0 lorsque σ tend vers 0. Pour répondre à cette question il suffit d'écrire la forme bilinéaire (pour ϕ et ψ fonctions régulières).

$$b_\sigma(\phi, \psi; t) = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{T}\phi(y, t) \psi(y, t) dy$$

Soit encore en posant $G = G_\sigma$

$$b_\sigma(\phi, \psi, t) = \int \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} G_\sigma(x-y, t-\tau) \phi(x, \tau) \psi(y, \tau) d\tau \right) dx dy$$

ce que nous pouvons aussi écrire :

$$b_\sigma(\phi, \psi, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \int_{|x-y| > \delta} \left(\int G_\sigma(x-y, t-\tau) \phi(x, \tau) \psi(y, \tau) d\tau \right) dx dy$$

Or, (x, y) étant fixés, nous pouvons remarquer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \forall \tau \neq t \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} G_\sigma(x-y, t-\tau) = 0 \\ \cdot \int G_\sigma(x-y, t-\tau) d\tau = \sigma \cdot \left(\frac{\sigma}{4\pi} \right)^{\frac{N+1}{2}} \int \frac{e^{-\sigma \frac{|x-y|^2}{4t}}}{t^{\frac{N+3}{2}}} dt \end{array} \right.$$

Soit en faisant le changement de variable

$$t = \sigma |x-y|^2 \theta \implies dt = \sigma |x-y|^2 d\theta$$

$$\int G_\sigma(x-y, t-\tau) d\tau = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{N+1}{2}} \left(\int \frac{e^{-\frac{1}{4\theta}} d\theta}{\theta^{\frac{N+3}{2}}} \right) \frac{1}{|x-y|^{N+1}}$$

Par conséquent en posant :

$$a_N = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{N+1}{2}} \left(\int \frac{e^{-\frac{1}{4\theta}} d\theta}{\theta^{\frac{N+3}{2}}} \right)$$

Nous avons démontré que, (x,y) étant fixés

$$\{\tau \rightarrow G_\sigma(x-y, t-\tau)\} \longrightarrow a_N \frac{\delta(t-\tau)}{|x-y|^{N+1}} \quad \text{dans } \mathcal{D}'$$

Donc :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int G_\sigma(x-y, t-\tau) \phi(x,\tau) \psi(y,\tau) d\tau = a_N \frac{\phi(x,t) \psi(y,t)}{|x-y|^{N+1}}$$

Par suite, après avoir vérifié que l'inversion des limites est licite, nous obtenons :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} b_\sigma(\phi, \psi, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \int_{|x-y| \leq \delta} \frac{a_N \phi(x,t) \psi(x,y)}{|x-y|^{N+1}} dx dy$$

On peut alors traiter de façon classique la partie finie intervenant au membre de droite de cette égalité (cf. [1] par exemple) et ainsi obtenir

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} b_\sigma(\phi, \psi, t) = b_0(\phi(\cdot, t), \psi(\cdot, t))$$

On retrouve bien la forme bilinéaire associée à l'opérateur T_0 .

II.2 - L'OPERATEUR T - DEFINITION, PROPRIETES

Nous rappelons tout d'abord un résultat classique

THEOREME 2.3

Soit σ une constante positive et ϕ une fonction de $H^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma))$ satisfaisant $\phi(0) = 0$ (soit $\phi \in V$), alors le problème :

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^{N+1} \times [0,T] \\ v|_{\Gamma} = \phi & \text{sur } \Gamma \times [0,T] \\ v(x,y,0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^{N+1} \end{array} \right.$$

admet une solution et une seule

- $v \in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}_+^{N+1})) \cap H^1(0,T;L^2(\mathbb{R}_+^{N+1}))$
- $\Delta v \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}_+^{N+1}))$

et on a les estimations :

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}_+^{N+1}))} \leq C(T) \|\phi\|_{H^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma))}$$

$$\|\Delta v\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}_+^{N+1}))} \leq C(T) \|\phi\|_{H^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma))}$$

Démonstration du théorème

Rappelons le principe d'obtention des estimations a priori (les calculs sont formels).

- ① On multiplie l'équation par v et on intègre en espace :

$$\frac{\sigma}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2 = \langle \frac{\partial v}{\partial t}(t), \phi(t) \rangle_{\Gamma}$$

② On multiplie l'équation par $\frac{\partial v}{\partial t}$ et on intègre en espace :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\| \nabla v(t) \|^2) + \| \Delta v(t) \|^2 = \langle \frac{\partial v}{\partial t}(t), \sigma \frac{\partial \phi}{\partial t}(t) \rangle_{\Gamma}$$

Nous utilisons alors l'inégalité classique dans l'espace

$$H^1(\Delta; \mathbb{R}_+^{N+1}) = \{ v \in H^1(\mathbb{R}_+^{N+1}) / \Delta v \in L^2(\mathbb{R}_+^{N+1}) \}$$

$$\| \gamma_1 v(t) \|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C (\| v(t) \|_{H^1(\mathbb{R}_+^{N+1})} + \| \Delta v(t) \|)$$

D'où nous déduisons

$$\frac{\sigma}{2} \frac{d}{dt} [\| v(t) \|_{H^1(\mathbb{R}_+^{N+1})}^2] + \| \Delta v(t) \|^2 \leq C \| \phi \|_{H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} (\| v(t) \|_{H^1(\mathbb{R}_+^{N+1})} + \| \Delta v(t) \|)$$

Il suffit alors d'utiliser l'inégalité de Young et un lemme de Gronwall pour obtenir les estimations. □

Remarquons que, v désignant la solution du problème (2.6), alors la fonction $\psi = \gamma_1 v = \frac{\partial v}{\partial \nu} |_{\Gamma}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \psi \in L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \\ \cdot \| \psi \|_{L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))} \leq C(T) \| \phi \|_{H^1(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))} \end{array} \right.$$

Soit alors T l'opérateur linéaire défini par

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} T : V \longrightarrow L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \\ \quad \phi \longrightarrow \psi = T\phi \\ \text{où } \psi = \gamma_1 v \\ \text{v étant l'unique solution du problème (2.6)} \end{array} \right.$$

Nous pouvons énoncer le

THEOREME 2.4

$$| \quad T \in \mathcal{L}(V; L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))).$$

Remarque

En toute rigueur l'opérateur T dépend de l'intervalle de temps $[0, T]$ considéré il devrait donc être noté $T(0, T)$. Nous omettrons cette notation qui se justifie par la propriété suivante :

• Soit $T_2 > T_1$ et ϕ une fonction de $V(0, T_2)$ (où $V(0, T) = \{v \in H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) / v(0) = 0\}$) alors on a bien entendu

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi|_{[0, T_1]} \in V(0, T_1) \\ \{T(0, T_2)\phi\}|_{[0, T_1]} = T(0, T_1)\{\phi|_{[0, T_1]}\} \end{array} \right.$$

Cette propriété exprime en fait la causalité de l'opérateur T : les valeurs de $T\phi$ dans l'intervalle $[0, \tau]$ ne dépendent que des valeurs de ϕ dans ce même intervalle :

$$\phi_1 = \phi_2 \text{ pour } t \in [0, \tau] \implies T\phi_1 \equiv T\phi_2 \text{ pour } t \in [0, \tau]$$

L'opérateur T est relié à l'opérateur \tilde{T} par le :

THEOREME 2.5

Soit ϕ une fonction de V et $\tilde{\phi}$ un prolongement de ϕ sur $\Gamma \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \tilde{\phi}(x, t) = 0 \quad \forall t \leq 0 \\ \cdot \tilde{\phi}(x, t) = \phi(x, t) \quad \forall t \in [0, T] \\ \cdot \tilde{\phi} \in H^{1/2}(\mathbb{R}; H^{1/2}(\Gamma)) \end{array} \right.$$

Alors on a l'identité

$$T\phi = \tilde{T}\tilde{\phi}|_{[0, T]}$$

Démonstration du théorème

Le résultat est une conséquence immédiate de la définition de l'opérateur \tilde{T} et des propriétés de causalité des opérateurs T et \tilde{T} . Soit en effet \tilde{v} la solution de :

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \Delta \tilde{v} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \\ \tilde{v}|_{\Gamma} = \tilde{\phi} & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ \tilde{v}(x,t) = 0 & \text{pour } t \leq 0 \end{array} \right.$$

On a bien entendu

$$v = \tilde{v}|_{[0,T]}$$

où v désigne la solution du problème (2.6).

La résolution du problème (2.8) par transformation de Fourier en x et t fournit :

$$\forall y \geq 0 \quad \hat{v}(k,y,\omega) = \hat{\phi}(k,\omega) e^{-(k^2+i\omega\sigma)^{1/2}y}$$

où $\hat{v}(k,z,\omega)$ (resp. $\hat{\phi}(k,\omega)$) désigne la transformée de Fourier en x et t de $\tilde{v}(x,z,t)$ (resp. $\tilde{\phi}(x,t)$).

Par conséquent si $\tilde{\psi} = \gamma_1 \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n}|_{\Gamma}$ et si $\hat{\psi}$ désigne sa transformée de Fourier (x,t) nous avons :

$$\hat{\psi}(k,\omega) = (k^2+i\omega\sigma)^{1/2} \hat{\phi}(k,\omega)$$

Soit, en d'autres termes :

$$\tilde{\psi} = \tilde{T} \tilde{\phi}$$

Mais d'autre part

$$v = \tilde{v}|_{[0,T]} \implies T\phi = \psi = \tilde{\psi}|_{[0,T]}$$

ce qui achève la démonstration □

Grace au théorème nous obtenons (pour tout ϕ dans V)

$$\begin{aligned} \|T\phi\|_{L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma))} &\leq \| \tilde{T} \tilde{\phi} \|_{0, -\frac{1}{2}} \\ &\leq C \| \tilde{\phi} \|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \quad (\text{car } \tilde{T} \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times \Gamma); L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout prolongement $\tilde{\phi}$ nous en déduisons l'estimation

$$\forall \phi \in V \quad \|T\phi\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))} \leq C_0 \|\phi\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma}$$

Du théorème 2.5, découle donc le :

THEOREME 2.6

L'opérateur T défini de V dans $L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$ se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu, toujours noté T , vérifiant :

$$T \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Gamma \times [0,T[); L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)))$$

Remarque

- On notera que la norme de T en tant qu'élément de $\mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Gamma \times [0,T[); L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)))$ est uniformément bornée par rapport à T .

- Par densité, il est facile d'établir la propriété suivante l'opérateur T :

- Soit $\phi \in H_{00}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Gamma \times [0,T[)$ et soit $\tilde{\phi}$ un prolongement de ϕ tel que :

$$\bullet \tilde{\phi} \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Gamma \times \mathbb{R})$$

$$\bullet \tilde{\phi}(x,t) = 0 \quad \forall t \leq 0$$

$$\bullet \tilde{\phi}(x,t) = \phi(x,t) \quad \forall t \in [0,T]$$

(de tels prolongements existent en vertu du théorème 2.1). Alors

$$T\phi = \tilde{T} \tilde{\phi} \Big|_{[0,T]}$$

Pour terminer, énonçons une propriété de positivité de l'opérateur T .

THEOREME 2.7

L'opérateur T est positif sur $H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T[)$ au sens suivant :

$$\forall \phi \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times]0, T[) \quad \int_0^T \langle T\phi(t), \phi(t) \rangle_{\Gamma} dt \geq 0$$

Démonstration du théorème

Il suffit de montrer la positivité pour ϕ dans V puis raisonner par densité et continuité.

Introduisons v la solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^{N+1} \times [0, T] \\ \gamma_0 v = \phi & \text{dans } \Gamma \times [0, T] \\ v(x, y, 0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^{N+1} \end{array} \right.$$

Multiplions l'équation par v et intégrons sur \mathbb{R}_+^{N+1} (ce qui est justifié car $v \in H^{2,1}(\Omega \times]0, T[)$)

$$\frac{\sigma}{2} \frac{d}{dt} (\|v(t)\|^2) + \|\nabla v(t)\|^2 = \langle \gamma_1 v(t), \gamma_0 v(t) \rangle_{\Gamma}$$

Intégrons maintenant entre 0 et T

$$\int_0^T \langle T\phi(t), \phi(t) \rangle_{\Gamma} dt = \frac{\sigma}{2} \|v(t)\|^2 + \int_0^T \|\nabla v(t)\|^2 dt$$

d'où l'on déduit le résultat annoncé. □

Etablissons également le

THEOREME 2.8

Pour tout ϕ dans l'espace V, on a l'inégalité :

$$\int_0^T \langle T\phi(t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(t) \rangle_{\Gamma} dt \geq 0$$

Démonstration du théorème

Nous considérons toujours la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^{N+1} \times [0, T] \\ \gamma_0 v = \phi & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \\ v(x, y, 0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^{N+1} \end{array} \right.$$

Nous multiplions l'équation par $\frac{\partial v}{\partial t}$ et intégrons sur \mathbb{R}_+^{N+1} .

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v(t)\|^2 + \sigma \left\| \frac{\partial v}{\partial t}(t) \right\|^2 = \langle \gamma_1 v(t), \frac{\partial}{\partial t} (\gamma_0 v)(t) \rangle_\Gamma$$

Intégrons sur $[0, T]$, nous obtenons :

$$\int_0^T \langle \mathbf{T}\phi(t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(t) \rangle_\Gamma dt = \frac{1}{2} \|\nabla v(t)\|^2 + \sigma \int_0^T \left\| \frac{\partial v}{\partial t}(t) \right\|^2 dt$$

d'où l'on déduit le résultat annoncé □

Comme conséquence de ces deux propriétés nous pouvons énoncer un résultat d'existence et d'unicité relatif au problème suivant dans le demi espace \mathbb{R}_-^{N+1} qui caractérisera, comme on le verra plus loin, la restriction à \mathbb{R}_-^{N+1} du problème dans tout l'espace :

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u(x, y, t) : \mathbb{R}_-^{N+1} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_-^{N+1} \times [0, T] \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) & \text{dans } \mathbb{R}_-^{N+1} \times [0, T] \\ \gamma_1 u + \mathbf{T}(\gamma_0 u) = 0 & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \end{array} \right.$$

Nous appellerons solution faible de ce problème toute fonction u satisfaisant :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} & \bullet u \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)) \\ & \bullet \Delta u \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \gamma_0 u \in H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T[) \end{aligned}$$

auquel cas on peut donner un sens aux trois égalités de (2.9). Nous avons alors le :

THEOREME 2.9

Avec les hypothèses

- $u_0 \in H^1(\mathbb{R}_-^{N+1})$
- $\sigma(x, y) \geq \sigma_* > 0$ pp. $(x, y) \in \mathbb{R}_-^{N+1}$.

Le problème (2.9) admet une solution faible et une seule telle que :

$$\begin{aligned} - u & \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)) \\ - \Delta u & \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

et on a les estimations a priori

$$\begin{aligned} & \bullet \|u\|_{L^\infty(0, T; L^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(0, T; L^2)} \leq C \|u_0\| \\ & \bullet \|\nabla u\|_{L^\infty(0, T; L^2)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^2)} \leq C \|\nabla u_0\| \end{aligned}$$

□

Remarque

Par solution faible nous entendons toute solution possédant la régularité (2.10) et satisfaisant :

$$\begin{aligned} \forall v \in H^1(\mathbb{R}_-^{N+1}) \quad & \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}_-^{N+1}} \sigma(x, y) u(x, y, t) v(x, y) dx dy \right) \\ & + \int_{\mathbb{R}_-^{N+1}} \nabla u(x, y, t) \cdot \nabla v(x, y) dx dy \\ & + \langle T(\gamma_0 u)(t), \gamma_0 v \rangle_\Gamma = 0 \end{aligned}$$

l'égalité ayant lieu dans $\mathcal{D}'(0, T)$

On voit alors que la notion de solution faible peut donc se généraliser à des solutions moins régulières : il suffit d'avoir $\gamma_0 u \in H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}([0, T[\times \Gamma))$.

Démonstration du théorème

(i) **Existence d'une solution**

Cette partie sera en fait une conséquence du théorème 2.1. L'existence s'obtient simplement en tronquant au demi espace \mathbb{R}_-^{N+1} la solution d'un problème posé dans tout l'espace !

(ii) **Estimation a priori et unicité**

L'unicité est bien entendu, en raison de la linéarité du problème, une conséquence des estimations a priori.

Ces estimations a priori sont elles des conséquences des théorèmes 2.7 et 2.8. Elles s'obtiennent en multipliant l'équation d'une part par u d'autre part par $\frac{\partial u}{\partial t}$ puis en intégrant les égalités obtenues sur \mathbb{R}_-^{N+1} en espace et entre 0 et T en temps. Les calculs sont justifiés par la régularité (suffisante) de la solution faible. Les deux égalités obtenues sont :

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{\sigma}^2 + \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2 dt + \int_0^T \langle T(\gamma_0 u)(t), \gamma_0 u(t) \rangle_{\Gamma} dt = \|u_0\|_{\sigma}^2$$

$$\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|^2 + \int_0^T \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{\sigma}^2 dt + \int_0^T \langle T(\gamma_0 u)(t), (\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial t})(t) \rangle_{\Gamma} dt = \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2$$

ou l'on a noté, pour tout v dans L^2 :

$$\|v\|_{\sigma}^2 = \int_{\mathbb{R}_-^{N+1}} \sigma(x,y) |v(x,y)|^2 dx dy \quad \square$$

II.3 - EXPRESSION DE LA CONDITION TRANSPARENTE EXACTE A L'AIDE DE L'OPERATEUR T

Nous revenons maintenant au problème modèle :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 && \text{dans } \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,y,0) &= u_0(x,y) && (x,y) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \end{aligned}$$

pour lequel nous faisons les hypothèses suivantes :

$$(2.11) \quad \left| \begin{aligned} &\bullet u_0 \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}) \\ &\bullet \text{supp } u_0 \subset \mathbb{R}^{N+1} \\ &\bullet \sigma(x,y) \geq \sigma_* > 0 && \text{p.p. } (x,y) \in \mathbb{R}^{N+1} \\ &\bullet \sigma(x,y) = \sigma > 0 && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{N+1} \end{aligned} \right.$$

auquel cas on a le résultat classique :

THEOREME 2.10

Avec les hypothèses (2.11), le problème (2.10) admet une unique solution faible :

$$u \in H^1(0,T; L^2(\mathbb{R}^{N+1})) \cap L^2(0,T; H^2(\mathbb{R}^{N+1})) = H^{2,1}(\mathbb{R}_-^{N+1} \times]0,T[)$$

En particulier la solution u de (2.10) vérifie :

$$u \in H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times]0,T[) \times L^2(0,T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

d'où nous déduisons, grâce notamment au théorème 1.3 :

$$(\gamma_0 u, \gamma_1 u) \in H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times]0,T[) \times L^2(0,T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

Remarque :

On peut noter que l'on a en fait :

- $\gamma_0 u \in H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(\Gamma \times]0,T[)$ et $\gamma_0 u(x,0) = 0$
- $\gamma_1 u \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Gamma \times]0,T[)$

(2.13)	Trouver	$u^+(x, y, t):$	$\mathbb{R}_+^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
		$u^-(x, y, t):$	$\mathbb{R}_-^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
		$\sigma \frac{\partial u^+}{\partial t} - \Delta u^+ = 0$	$(x, y, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \times \mathbb{R}^+$
		$\sigma \frac{\partial u^-}{\partial t} - \Delta u^- = 0$	$(x, y, t) \in \mathbb{R}_-^{N+1} \times \mathbb{R}^+$
		$u^+(x, y, 0) = 0$	$(x, y) \in \mathbb{R}_-^{N+1}$
		$\gamma_0 u^+ = \gamma_0 u^-$	sur $\Gamma \times \mathbb{R}^+$
		$\gamma_1 u^+ = \gamma_1 u^-$	sur $\Gamma \times \mathbb{R}^+$

En procédant comme dans [6] par exemple, il est très facile d'établir un résultat d'équivalence entre les problèmes (2.10) et (2.13).

THEOREME 2.11

Avec les hypothèses (2.11) :

(i) Le problème de transmission (2.13) admet une solution unique :

$$(u^+, u^-) \in H^{2,1}(\mathbb{R}_+^{N+1} \times]0, T[) \times H^{2,1}(\mathbb{R}_-^{N+1} \times]0, T[)$$

(ii) $u \in H^{2,1} \times]0, T[$ est solution de (2.11) si et seulement si le couple $(u^+ = u|_{\mathbb{R}_+^{N+1}}, u^- = u|_{\mathbb{R}_-^{N+1}})$ est solution du problème de transmission (2.13).

Remarquons maintenant que, avec l'hypothèse supplémentaire

$$u_0 \in H^2(\mathbb{R}^{N+1})$$

on a en particulier le résultat de régularité :

$$(u^+, u^-) \in H^1(0, T; \mathbb{R}_+^{N+1}) \times H^1(0, T; \mathbb{R}_-^{N+1})$$

Par conséquent il est facile de voir que

$$\gamma_0 u^+ = \gamma_0 u^- \quad \text{dans } V$$

Donc, en utilisant la définition même de T dans V :

$$\gamma_1 u^- = -T(\gamma_0 u^-)$$

En raisonnant par densité et continuité sur la donnée initiale u_0 nous établissons aisément le :

THEOREME 2.12

La solution $u \in H^{2,1}(\mathbb{R}_-^{N+1} \times]0, T[)$ du problème dans tout l'espace (2.11) est caractérisée par :

(i) $u^- = u|_{\mathbb{R}_-^2}$ est l'unique solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & (x, y, t) \in \mathbb{R}_-^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \\ v(x, y, 0) = u_0(x, y) & (x, y) \in \mathbb{R}_-^{N+1} \\ \gamma_1 v + T(\gamma_0 v) = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

(ii) $u^+ = u|_{\mathbb{R}_+^2}$ est l'unique solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & (x, y, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \\ v(x, y, 0) = 0 & (x, y) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \\ \gamma_0 v = \gamma_0 u^- & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

III - LA CONDITION TRANSPARENTE "APPROCHEE" - ANALYSE

ET FORMULATION DU PROBLEME APPROCHE - APPROXIMATION

NUMERIQUE DU PROBLEME

Dans ce chapitre nous introduisons, suivant la démarche heuristique exposée au chapitre 1, les deux opérateurs approchés T_n et \tilde{T}_n dont nous mettons en évidence les propriétés de continuité.

Nous établissons sur l'opérateur T_n des propriétés de positivité (Théorèmes 3.1 et 3.2) qui sont les équivalentes des propriétés de l'opérateur T données aux théorèmes 2.7 et 2.8.

Nous introduisons le problème approché dans le demi espace en remplaçant la condition transparente exacte (2.1) par la condition :

$$(3.1) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} + T_n (u \Big|_{\Gamma}) = 0$$

Utilisant les propriétés de l'opérateur T_n , nous montrons que le problème approché ainsi défini est bien posé.

Finalement nous donnons, en vue d'une discrétisation par éléments finis, une formulation variationnelle en espace de ce problème.

III.1 - L'OPERATEUR \tilde{T}_n

Nous désignons par \tilde{T}_n l'opérateur linéaire défini sur $H^{r,s}(\Gamma \times \mathbb{R})$ par :

$$\begin{array}{ccc}
 H^{r,s}(\Gamma \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{\tilde{T}_n} & H^{r-1,s}(\Gamma \times \mathbb{R}) \\
 \mathcal{F}_{x,t} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}_{x,t} \\
 L^2_{r,s}(\Gamma \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{\hat{T}_n} & L^2_{r-1,s}(\Gamma \times \mathbb{R})
 \end{array}$$

où \hat{T}_n désigne l'opérateur défini par :

$$\forall \hat{u}(k, \omega) \in L^2_{r,s}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}) \quad (\hat{T}_n \hat{u})(k, \omega) = \hat{T}_n(k, \omega) \hat{u}(k, \omega)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{T}_n(k, \omega) = |k| f_n \left(i \frac{\omega \sigma}{|k|^2} \right) \\ f_n \left(i \frac{\omega \sigma}{|k|^2} \right) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_n^k(i\omega\sigma)}{\alpha_n^k(i\omega\sigma) + |k|^2} \end{array} \right.$$

On vérifie aisément que

$$\tilde{T}_n \in \mathcal{L}(H^{r,s}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}); H^{r-1,s}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}))$$

\tilde{T}_n fait perdre un cran de régularité en espace et conserve la régularité en temps. \tilde{T}_n est donc "régularisant en temps" par rapport à \tilde{T} . En particulier

$$\tilde{T}_n \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^N)), L^2(\mathbb{R}; H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^N)))$$

En fait \tilde{T}_n apparaît comme la composition de l'opérateur pseudo différentiel \tilde{T}_0 dont le symbole est égal à $|k|$, par l'opérateur local \tilde{S}_n dont le symbole est égal à $f_n \left(i \frac{\omega \sigma}{|k|^2} \right)$. \tilde{T}_n est donc un opérateur local en temps.

III.2 - L'OPERATEUR T_n - DEFINITION ET PROPRIETES

Nous utiliserons le résultat préliminaire classique suivant :

Lemme 3.1

Soit α un nombre positif et ϕ une fonction de l'espace $L^2(0, T; H^s(\Gamma))$, alors le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \sigma \frac{\partial f}{\partial t} - \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \phi \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times [0, T] \\ f(x, 0) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \end{array} \right.$$

admet une solution unique vérifiant :

$$f \in C^0(0, T; H^{s+1}(\Gamma)) \cap L^2(0, T; H^{s+2}(\Gamma))$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0, T; H^s(\Gamma))$$

L'application $\phi \longrightarrow f$ est linéaire continue et on a les estimations a priori :

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; H^s)}^2 \leq \frac{T}{2\alpha\sigma} \|\phi\|_{L^\infty(0, T; H^s)}^2$$

$$\|\nabla f\|_{L^\infty(0, T; H^s)}^2 \leq \frac{2}{\alpha\sigma} \|\phi\|_{L^\infty(0, T; H^s)}^2$$

$$\|\Delta f\|_{L^2(0, T; H^s)}^2 \leq \|\phi\|_{L^2(0, T; H^s)}^2$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^s)}^2 \leq \frac{1}{\alpha^2\sigma^2} \|\phi\|_{L^2(0, T; H^s)}^2$$

Démonstration du lemme

Etablissons simplement les estimations a priori. Nous utilisons la transformation de Fourier en espace. Il vient :

$$\alpha\sigma \frac{d}{dt} \hat{f}(k, t) + |k|^2 \hat{f}(k, t) = \hat{\phi}(k, t)$$

Nous multiplions par $\overline{\hat{f}(k, t)}$ et prenons la partie réelle du résultat :

$$\frac{\alpha\sigma}{2} \frac{d}{dt} |\hat{f}(k, t)|^2 + |k|^2 |\hat{f}(k, t)|^2 = \operatorname{Re}(\hat{\phi}(k, t) \overline{\hat{f}(k, t)})$$

Après intégration en temps nous obtenons

$$\frac{\alpha\sigma}{2} |\hat{f}(k, t)|^2 + |k|^2 \int_0^t |\hat{f}(k, s)|^2 ds \leq \left| \int_0^t |\hat{\phi}(k, s)| |\hat{f}(k, s)| ds \right|$$

Nous obtenons déjà en particulier :

$$(3.1) \quad |k|^2 \left(\int_0^t |\hat{f}(k,s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^t |\hat{\phi}(k,s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

De même, nous avons :

$$(3.2) \quad |\hat{f}(k,t)|^2 \leq \frac{2}{\alpha\sigma} \int_0^t |\hat{\phi}(k,s)| |\hat{f}(k,s)| ds$$

En utilisant une version généralisée du lemme de Gronwall, nous obtenons

$$(3.3) \quad |\hat{f}(k,t)|^2 \leq \frac{1}{2\alpha\sigma} \left(\int_0^t |\hat{\phi}(k,s)| ds \right)^2 \leq \frac{t}{2\alpha\sigma} \int_0^t |\hat{\phi}(k,s)|^2 ds$$

Mais de (3.2) nous tirons également :

$$|k|^2 |\hat{f}(k,t)|^2 \leq \frac{2}{\alpha\sigma} \left(\int_0^t |\hat{\phi}(k,s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t |k|^4 |\hat{f}(k,s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

D'où finalement

$$(3.4) \quad |k| |\hat{f}(k,t)| \leq \left(\frac{2}{\alpha\sigma} \right)^{1/2} \left(\int_0^t |\hat{\phi}(k,s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

Nous multiplions maintenant par $\overline{\frac{d\hat{f}}{dt}(k,t)}$ et prenons la partie réelle du résultat il vient, après intégration en temps entre 0 et t :

$$\frac{|k|^2}{2} |\hat{f}(k,t)|^2 + \alpha\sigma \int_0^t \left| \frac{d\hat{f}}{dt}(k,s) \right|^2 ds \leq \int_0^t |\hat{\phi}(k,s)| \left| \frac{d\hat{f}}{dt}(k,s) \right| ds$$

D'où nous tirons

$$(3.5) \quad \left(\int_0^t \left| \frac{d\hat{f}}{dt}(k,s) \right|^2 ds \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\alpha\sigma} \left(\int_0^t |\hat{\phi}(k,s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

Nous réécrivons maintenant les estimations (3.1), (3.2), (3.3) et (3.5) sous la forme :

$$\begin{aligned}
 (1+|k|^2)^{s/2} |\hat{f}(k,t)|^2 &\leq \frac{t}{2\alpha\sigma} \left(\int_0^t (1+|k|^2)^{s/2} |\hat{\phi}(k,s)|^2 ds \right) \\
 (1+|k|^2)^{s/2} ||k|\hat{f}(k,t)|^2 &\leq \left(\frac{2}{\alpha\sigma} \right) \left(\int_0^t (1+|k|^2)^{s/2} |\hat{\phi}(k,s)|^2 ds \right) \\
 \int_0^t ||k|^2 |\hat{f}(k,s)|^2 (1+|k|^2)^{s/2} ds &\leq \left(\int_0^t (1+|k|^2)^{s/2} |\hat{\phi}(k,s)|^2 ds \right) \\
 \int_0^t (1+|k|^2)^{s/2} \left| \frac{d\hat{f}}{dt}(k,s) \right|^2 ds &\leq \frac{1}{\alpha^2\sigma^2} \left(\int_0^t (1+|k|^2)^{s/2} |\hat{\phi}(k,s)|^2 ds \right)
 \end{aligned}$$

Il ne reste plus alors qu'à intégrer ces inégalités par rapport à k dans \mathbb{R}^N pour obtenir les estimations annoncées dans l'énoncé du lemme.

□

- Application à la définition de l'opérateur T_n

Etant donné ϕ dans $L^2(0,T;H^s(\Gamma))$, pour chaque k , la fonction f_n^k solution unique (cf. lemme précédent) de :

$$\begin{cases} \alpha_n^k \sigma \frac{\partial f_n^k}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j^2} = \phi \\ f_n^k(x,0) = 0 \end{cases}$$

vérifie en particulier :

$$\frac{\partial f_n^k}{\partial t} \in L^2(0,T;H^s(\Gamma))$$

Rappelons que l'opérateur T_0 applique $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s-1}(\Gamma)$ donc $L^2(0,T;H^s(\Gamma))$ dans $L^2(0,T;H^{s-1}(\Gamma))$

Donc $\psi_n = T_0 \left(\phi + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_n^k \frac{\partial f_n^k}{\partial t} \right)$ est dans $L^2(0,T;H^{s-1}(\Gamma))$

Par conséquent, l'opérateur :

$$\begin{aligned}
 T_n: L^2(0, T; H^S(\Gamma)) &\longrightarrow L^2(0, T; H^{S-1}(\Gamma)) \\
 \phi &\longrightarrow \psi_n \\
 \psi_n = T_n \left(\phi + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_n^k \frac{\partial f_n^k}{\partial t} \right) &\text{ où} \\
 \alpha_n^k \sigma \frac{\partial f_n^k}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j^2} &= \phi \\
 f_n^k(x, 0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

est linéaire et continu et

$$\| T_n \phi \|_{L^2(0, T; H^{S-1}(\Gamma))} \leq \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_n^k}{\alpha_n^k} \right) \| \phi \|_{L^2(0, T; H^S(\Gamma))}$$

En particulier

$$T_n \in \mathcal{L}(L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)); L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)))$$

et

$$\| T_n \|_{\mathcal{L}(L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)); L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)))} \leq \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_n^k}{\alpha_n^k} \right)$$

- Propriétés de l'opérateur T_n

THEOREME 3.1

L'opérateur T_n est un opérateur positif de $L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ dans $L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$. Plus précisément la forme bilinéaire $b_n(\phi, \psi)$ définie sur $L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ par :

$$b_n(\phi, \psi) = \int_0^T \langle T_n \phi(t), \psi(t) \rangle_{\Gamma} dt$$

(où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ désigne la dualité $H^{\frac{1}{2}} - H^{-\frac{1}{2}}$) est une forme bilinéaire symétrique et positive.

Démonstration du théorème

Soit ϕ une fonction très régulière. Calculons $b_n(\phi, \phi)$. $\psi_n = T_n \phi$ étant régulière on a simplement :

$$(4.7) \quad \langle T_n \phi(t), \phi(t) \rangle_\Gamma = \langle T_0 \phi(t), \phi(t) \rangle_\Gamma + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_n^k \langle T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t), \phi(t) \rangle_\Gamma$$

Or nous avons :

$$\alpha_n^k \sigma \frac{\partial f_n^k}{\partial t} - \sum_j \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j^2} = \phi$$

Nous multiplions alors par $T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}$ (à gauche)

$$\alpha_n^k \sigma \langle T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}, \frac{\partial f_n^k}{\partial t} \rangle_\Gamma - \sum_j \langle T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}, \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j^2} \rangle_\Gamma = \langle T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}, \phi \rangle_\Gamma$$

Or nous avons :

$$-\langle T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}, \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j^2} \rangle_\Gamma = \langle \frac{\partial}{\partial x_j} (T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}), \frac{\partial f_n^k}{\partial x_j} \rangle_\Gamma$$

Nous utilisons alors le fait que l'opérateur T_0 commute avec l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_j}$

Donc,

$$-\langle T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}, \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j^2} \rangle_\Gamma = \langle T_0 \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j \partial t}, \frac{\partial f_n^k}{\partial x_j} \rangle_\Gamma$$

Soit, par définition de $b(\phi, \psi) = \langle T_0 \phi, \psi \rangle_\Gamma$

$$-\langle T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}, \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j^2} \rangle_\Gamma = b \left(\frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j \partial t}, \frac{\partial f_n^k}{\partial x_j} \right)$$

La forme bilinéaire $b(\phi, \psi)$ étant symétrique, on a

$$(3.8) \quad - \langle T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}, \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j^2} \rangle_{\Gamma} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ b \left(\frac{\partial f_n^k}{\partial x_j}, \frac{\partial f_n^k}{\partial x_j} \right) \right\}$$

Donc finalement,

$$\langle T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}, \phi \rangle_{\Gamma} dt = \frac{1}{2} b \left(\frac{\partial f_n^k}{\partial x_j}(T), \frac{\partial f_n^k}{\partial x_j}(T) \right) + \alpha_n^k \sigma \int_0^T \langle T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t), \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t) \rangle_{\Gamma} dt$$

Or,

$$b_n(\phi, \psi) = \int_0^T \langle T_0 \phi(t), \psi(t) \rangle_{\Gamma} dt + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_n^k \int_0^T \langle T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t), \psi(t) \rangle_{\Gamma} dt$$

Par conséquent :

$$b_n(\phi, \phi) = \int_0^T \langle T_0 \phi(t), \phi(t) \rangle_{\Gamma} dt + \sigma^2 \sum_{k=1}^n \alpha_n^k \beta_n^k \int_0^T \langle T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}, \frac{\partial f_n^k}{\partial t} \rangle_{\Gamma} dt$$

$$+ \frac{\sigma}{2} \sum_{k=1}^n \beta_n^k \left(\sum_{j=1}^n b \left(\frac{\partial f_n^k}{\partial x_j}(T), \frac{\partial f_n^k}{\partial x_j}(T) \right) \right)$$

Soit encore, pour toute fonction ϕ régulière, l'identité :

$$(3.9) \quad \left| \begin{aligned} b_n(\phi, \phi) &= \int_0^T b_0(\phi(t), \phi(t)) dt + \sigma^2 \sum_{k=1}^n \alpha_n^k \beta_n^k \int_0^T b \left(\frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t), \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t) \right) dt \\ &+ \frac{\sigma}{2} \sum_{k=1}^n \beta_n^k \left(\sum_{k=1}^n b \left(\frac{\partial f_n^k}{\partial x_j}(T), \frac{\partial f_n^k}{\partial x_j}(T) \right) \right) \end{aligned} \right.$$

En fait, par continuité, on vérifie que cette identité est valable pour toute fonction ϕ dans l'espace $L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$! La positivité de b_n est alors une conséquence directe de la positivité de b et des coefficients α_n^k et β_n^k !

Pour calculer $b(\phi, \psi)$ il faut introduire les fonctions g_n^k définies par :

$$\alpha_n^k \sigma \frac{\partial g_n^k}{\partial t} - \sum_j \frac{\partial^2 g_n^k}{\partial x_j^2} = \psi$$

On obtient alors l'égalité :

$$(3.10) \quad \left| \begin{aligned} b_n(\phi, \psi) &= \int_0^T b(\phi(t), \psi(t))_{\Gamma} dt + \sigma^2 \sum_{k=1}^n \alpha_n^k \beta_n^k \int_0^T b\left(\frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t), \frac{\partial g_n^k}{\partial t}(t)\right) dt \\ &+ \frac{\sigma}{2} \sum_{k=1}^n \beta_n^k \left(\sum_{j=1}^n b\left(\frac{\partial f_n^k}{\partial x_j}(T), \frac{\partial g_n^k}{\partial x_j}(T)\right) \right) \end{aligned} \right.$$

ce qui prouve la symétrie de b_n □

THEOREME 3.2

Soit $\phi \in H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ tq $\phi(0) = \phi_0$, on a alors l'identité

$$\begin{aligned} b_n\left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) &= \frac{1}{2} \left\{ b(\phi(T), \phi(T)) - b(\phi_0, \phi_0) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_n^k \beta_n^k \sigma^2 b\left(\frac{\partial f_n^k}{\partial t}(T), \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(T)\right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \beta_n^k \left(\sum_{j=1}^n \int_0^T b\left(\frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j \partial t}(t), \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j \partial t}(t)\right) dt \right) \end{aligned}$$

Démonstration

Lorsque ϕ est régulière on a :

$$\begin{aligned} \left\langle T_n \phi(t), \frac{\partial f}{\partial t}(t) \right\rangle_{\Gamma} &= b(\phi(t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(t)) + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_n^k \left\langle T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t), \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t) \right\rangle_{\Gamma} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (b(\phi(t), \phi(t))) + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_n^k \left\langle T_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t), \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t) \right\rangle_{\Gamma} \end{aligned}$$

Or on a :

$$\alpha_n^k \sigma \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial t^2} - \sum_j \frac{\partial^3 f_n^k}{\partial x_j^2 \partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Des calculs identiques à ceux menés pour le précédent théorème donnent donc

$$\left| \begin{aligned} \langle \mathbf{T}_0 \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t), \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t) \rangle_\Gamma &= \frac{\alpha_n^k \sigma}{2} \frac{d}{dt} \left(b \left(\frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t), \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t) \right) \right) \\ &+ \sum_{j=1}^n b \left(\frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j \partial t}(t), \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j \partial t}(t) \right) \end{aligned} \right.$$

Par conséquent

$$(3.12) \left| \begin{aligned} \langle \mathbf{T}_n \phi(t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(t) \rangle_\Gamma &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ b(\phi(t), \phi(t)) + \sum_{k=1}^n \alpha_n^k \beta_n^k \sigma^2 b \left(\frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t), \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(t) \right) \right\} \\ &+ \sigma \sum_{k=1}^n \beta_n^k \left(\sum_{j=1}^n b \left(\frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j \partial t}(t), \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j \partial t}(t) \right) \right) \end{aligned} \right.$$

Par conséquent comme

$$b_n(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t})_\Gamma = \int_0^T \langle \mathbf{T}_n \phi(t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(t) \rangle_\Gamma dt$$

par intégration de (4.12) entre 0 et T, il vient :

$$\left| \begin{aligned} b_n(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}) &= \frac{1}{2} \left\{ b(\phi(T), \phi(T)) - b(\phi(0), \phi(0)) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_n^k \beta_n^k \sigma^2 b \left(\frac{\partial f_n^k}{\partial t}(T), \frac{\partial f_n^k}{\partial t}(T) \right) \\ &+ \sigma \sum_{k=1}^n \beta_n^k \left(\sum_{j=1}^n \int_0^T b \left(\frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j \partial t}(t), \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j \partial t}(t) \right) dt \right) \end{aligned} \right.$$

l'expression reste vraie pour ϕ dans $H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ en raisonnant par continuité □

Corollaire 3.1

Pour toute fonction ϕ dans $H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ avec $\phi(0) = \phi_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on peut écrire :

$$b_n(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}) = -\frac{1}{2} b(\phi_0, \phi_0) + \tilde{b}_n(\phi, \phi)$$

avec

$$\tilde{b}_n(\phi, \phi) \geq 0 \quad \forall \phi \in H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

L'opérateur T_n est relié à l'opérateur \tilde{T}_n par le

THEOREME 3.3

Soit ϕ un élément de $L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ et soit $\tilde{\phi}$ un prolongement de ϕ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi} \in L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \\ \tilde{\phi}(x, t) = 0 \quad \text{pour } t < 0 \end{array} \right.$$

Alors on a l'égalité

$$T_n \phi = \tilde{T}_n \tilde{\phi} \Big|_{[0, T]}$$

Démonstration du théorème

Soit \tilde{f}_n^k la fonction, nulle pour $t < 0$, définie pour $t > 0$ par :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n^k \sigma \frac{\partial \tilde{f}_n^k}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{f}_n^k}{\partial x_j^2} = \tilde{\phi} \\ \tilde{f}_n^k(0) = 0 \end{array} \right.$$

Il est bien clair que :

$$f_n^k = \tilde{f}_n^k \Big|_{[0, T]}$$

Si nous résolvons (P) par transformation de Fourier en x et t nous obtenons aisément.

$$\frac{\partial \hat{f}_n^k}{\partial t}(k, \omega) = \frac{i\omega}{\alpha_n^k(i\omega\sigma) + |k|^2} \hat{\phi}(k, \omega)$$

(Nous savons, d'après le lemme 3.1, que la fonction $\frac{\partial \hat{f}_n^k}{\partial t}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$.

Par suite en posant :

$$\tilde{\psi} = T_0 \left(\tilde{\phi} + \sigma \int \beta_n^k \frac{\partial \tilde{f}_n^k}{\partial t} \right)$$

Nous savons que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\psi} = \tilde{T}_n \tilde{\phi} \\ \tilde{\psi}|_{[0, T]} = T_n \phi \end{array} \right.$$

le théorème est donc démontré □

On a donc le même lien entre les opérateurs T_n et \tilde{T}_n qu'entre les opérateurs T et \tilde{T} .

III.3 - ETUDE DU PROBLEME APPROCHE

Nous pouvons maintenant, à l'aide de l'opérateur T_n , formuler le problème approché qui consiste à :

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_n(x, y, t) : \mathbb{R}_-^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tq} \\ \sigma \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n = 0 \quad (x, y, t) \in \mathbb{R}_-^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \\ \gamma_1 u_n + T_n(\gamma_0 u_n) = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ u_n(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}_-^{N+1} \end{array} \right.$$

Ce problème a effectivement un sens via une formulation faible. Plus précisément, nous appellerons solution faible de (3.13) toute fonction telle que :

(3.14)

- $u_n \in C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}_-^{N+1})) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}_-^{N+1}))$
- $\forall v \in H^1(\mathbb{R}_-^{N+1})$ on a dans $\mathcal{D}'(0, T)$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}_-^{N+1}} \sigma(x, y) u_n(x, y, t) v(x, y) dx dy \right)$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_-^{N+1}} \nabla u_n(x, y, t) \cdot \nabla v(x, y) dx dy$$

$$+ \langle T_n(\gamma_0 u_n)(t), \gamma_0 v \rangle_\Gamma = 0$$

- $u_n(x, y, 0) = u_0(x, y)$

Nous pouvons alors énoncer un théorème d'existence et d'unicité relatif au problème (3.13) :

THEOREME 3.4

Avec l'hypothèse :

$$u_0 \in L^2(\mathbb{R}_-^{N+1})$$

le problème (3.13) admet une solution et une seule

$$u_n \in C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}_-^{N+1})) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}_-^{N+1}))$$

satisfaisant l'estimation :

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\nabla u_n\|_{L^2(0,T;L^2)} \leq C \|u_0\|$$

Si l'on suppose en outre que :

$$u_0 \in H_0^1(\mathbb{R}_-^{N+1})$$

alors la solution u_n possède la régularité

$$u_n \in H^1(0,T;L^2(\mathbb{R}_-^{N+1})) \cap L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}_-^{N+1}))$$

$$\Delta u_n \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}_-^{N+1}))$$

et on a l'estimation a priori

$$\|\nabla u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \leq C \|\nabla u_0\|$$

Démonstration du théorème

Nous donnons simplement le principe des estimations a priori. La démonstration rigoureuse de l'existence peut se faire par exemple en utilisant une méthode de Galerkin en espace et en raisonnant de façon standard.

La première estimation a priori s'obtient en multipliant l'équation par u_n puis en intégrant en espace et en temps l'égalité obtenue. On aboutit ainsi à :

$$(3.15) \quad \frac{1}{2} \|u_n(T)\|_\sigma^2 + \int_0^T \|\nabla u_n(t)\|_\sigma^2 dt + b_n(\gamma_0 u_n, \gamma_0 u_n) = \frac{1}{2} \|u_0\|_\sigma^2$$

La première estimation se déduit alors de la positivité de la forme bilinéaire b_n .

Pour la seconde estimation nous multiplions cette fois l'équation par $\frac{\partial u_n}{\partial t}$. Après intégration en espace et en temps nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \|\nabla u_n(T)\|^2 + \int_0^T \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t}(t) \right\|^2 dt + \tilde{b}_n(\gamma_0 u_n, \gamma_0 u_n) = b(\gamma_0 u_0, \gamma_0 u_0) + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2$$

Soit encore, compte tenu du corolaire 4.1

$$(3.16) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\nabla u_n(T)\|^2 + \int_0^T \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t}(t) \right\|^2 dt + \tilde{b}_n(\gamma_0 u_n, \gamma_0 u_n) \\ & = b(\gamma_0 u_0, \gamma_0 u_0) + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2 \end{aligned}$$

Le fait que $\tilde{b}_n(\cdot, \cdot)$ soit positive nous fournit alors le résultat annoncé. Remarquons toutefois que l'intermédiaire (3.16) n'est pas rigoureusement justifié dans la mesure où u_n n'a pas, a priori, la régularité nécessaire. Toutefois cette phase est justifiable lorsque l'on raisonne par exemple sur la solution approchée dans la méthode de Galerkin. Dans tous les cas, l'estimation est vraie. \square

Remarque

On notera que les estimations obtenues sur la solution approchée u_n sont indépendantes de n . On a utilisé pour établir l'estimation n°2, l'inégalité classique :

$$b(\gamma_0 u_0, \gamma_0 u_0) \leq \|\nabla u_0\|^2$$

Si nous voulons résoudre le problème approché (3.13), il est bien clair, compte tenu de la définition de l'opérateur T_n , que ce problème est équivalent au problème suivant (que l'on résoudra en pratique) :

$$(3.17) \quad \left. \begin{aligned} & \text{Trouver : } u_n(x, y, t) : \mathbb{R}_-^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f_n^k(x, t) : \Gamma \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq k \leq n \\ & \text{satisfaisant les équations :} \\ & \sigma \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n = 0 \quad (x, y, t) \in \mathbb{R}_-^{N+1} \times \mathbb{R}^+ \\ & \gamma_1 u_n + T_0 \left\{ \gamma_0 u_n + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_k^n \frac{\partial f_n^k}{\partial t} \right\} = 0 \quad (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+ \end{aligned} \right\}$$

$$\alpha_n^k \sigma \frac{\partial f_n^k}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j^2} = \gamma_0 u \quad (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+ \quad 1 \leq k \leq n$$

$$u_n(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

$$f_n^k(x, 0) = 0$$

pour lequel on peut énoncer bien entendu le :

THEOREME 3.5

Avec l'hypothèse :

$$u_0 \in L^2(\mathbb{R}_-^{N+1})$$

Le problème (3.17) admet une solution unique vérifiant :

- $u_n \in C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}_-^{N+1})) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}_-^{N+1}))$
- $(f_n^k)_{k=1}^n \in \Pi \left((C^0(0, T; H^{3/2}(\Gamma))) \cap L^2(0, T; H^{5/2}(\Gamma)) \right)$
- $\frac{\partial u_n}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1})(\mathbb{R}_-^{N+1})$
- $\left(\frac{\partial f_n^k}{\partial t} \right)_{k=1}^n \in \Pi \left(L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \right)$

En outre on a les estimations a priori :

$$\|u_n\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq C \|u_0\|$$

$$\|u_n\|_{L^2(0, T; H^1)} \leq C (\|u_0\| + \|\nabla u_0\|)$$

$$\|f_n^k\|_{L^\infty(0, T; H^{\frac{1}{2}})} \leq \left(\frac{T}{2\alpha_n^k \sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \left(T + \frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \|u_0\| \quad 1 \leq k \leq n$$

$$\|\nabla f_n^k\|_{L^\infty(0, T; H^{\frac{1}{2}})} \leq \left(\frac{2}{\alpha_n^k \sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \left(T + \frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \|u_0\| \quad 1 \leq k \leq n$$

$$\|\Delta f_n^k\|_{L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}})} \leq \frac{1}{\alpha_n^k \sigma} \left(T + \frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \|u_0\| \quad 1 \leq k \leq n$$

Démonstration du théorème

Il suffit de joindre les résultats du lemme 3.1 à ceux du théorème 3.4

□

Remarque

• Si les estimations obtenues sur la solution u_n sont uniforme par rapport à n ; il n'en est pas de même a priori pour celles obtenues sur les inconnues auxiliaires f_n^k .

Pour terminer, énonçons un résultat d'existence d'unicité et de continuité dont la démonstration est quasiment identique à celle du théorème 3.5 (c'est la raison pour laquelle nous ne la donnerons pas) et nous servira de façon essentielle au paragraphe 4 pour établir le résultat d'approximation.

Ce résultat concerne le problème suivant :

(3.18) Trouver $u_n(x,y,t) : \mathbb{R}_+^{N+1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\sigma \frac{\partial u_n}{\partial t} - \nabla u_n = 0 \quad (x,y,t) \in \mathbb{R}_-^{N+1} \times \mathbb{R}$$

$$\gamma_1 u_n + T_n(\gamma_0 u_n) = \psi \quad (x,t) \in \Gamma \times \mathbb{R}$$

$$u_n(x,y,0) = 0$$

THEOREME 3.6

Avec l'hypothèse

$$\psi \in L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

Le problème (3.18) admet une solution et une seule :

$$u_n \in C^0(0,T;L^2(\mathbb{R}_-^{N+1})) \cap L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}_-^{N+1}))$$

L'application $\psi \longrightarrow u_n$ est linéaire continue de

$$L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \text{ dans } C^0(0,T;L^2(\mathbb{R}_-^{N+1})) \cap L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}_-^{N+1})).$$

Plus précisément on a l'estimation (independante de n)

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\nabla u_n\|_{L^2(0,T;L^2)} \leq C \|\psi\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))}$$

III.4 - FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME APPROCHE

Nous nous plaçons dans l'espace :

$$V = H^1(\mathbb{R}^{N+1}) \times \prod_{k=1}^n H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

Il est alors facile de montrer que le problème (3.18) est équivalent au problème variationnel :

(3.19) Trouver $(u_n(t), f_n^k(t)) \in L^2(0, T; V)$ tq

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}) \quad \frac{d}{dt} \left\{ (u_n(t), v)_\sigma + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_n^k b(f_n^k(t), \gamma_0 v) \right\}$$

$$+ (\nabla u_n(t), \nabla v) + b(\gamma_0 u(t), \gamma_0 v) = 0$$

$$\forall g_n^k \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \alpha_n^k \sigma \frac{d}{dt} (f_n^k(t), g_n^k)_\Gamma + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_n^k}{\partial x_j}(t), \frac{\partial g_n^k}{\partial x_j} \right)_\Gamma - (\gamma_0 u, g_n^k)_\Gamma = 0$$

$$(u_n(0), f_n^k(0)) = (u_0, 0)$$

où nous avons posé

$$\left\{ \begin{array}{l} (u, v)_\sigma = \int \sigma uv \, dx \, dy \\ (\nabla u, \nabla v) = \int \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy \\ (f, g)_\Gamma = \int fg \, dx \end{array} \right.$$

Remarquons que de façon abstraite, la formulation variationnelle du problème peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (v, g_n^k) \in V \quad \frac{d}{dt} \left(\rho((u_n(t), f_n^k(t)), (v, g_n^k)) \right) \\ \quad + \tilde{a}((u_n(t), f_n^k(t)), (v, g_n^k)) = 0 \end{array} \right.$$

où les formes bilinéaires ρ et \tilde{a} sont définies sur $V \times V$ par :

$$\rho((u, f_n^k), (v, g_n^k)) = (u, v)_\sigma + \sum_{k=1}^n \alpha_n^k \sigma(f_n^k, g_n^k)_\Gamma + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_n^k b(f_n^k(t), \gamma_0 v)$$

$$\tilde{a}((u, f_n^k), (v, g_n^k)) = (\nabla u_n, \nabla v) + b(\gamma_0 u, \gamma_0 v) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_n^k}{\partial x_j}, \frac{\partial g_n^k}{\partial x_j} \right)_\Gamma - (\gamma_0 u, g_n^k)_\Gamma$$

Pour la discrétisation en espace du problème, on peut bien entendu appliquer une méthode de Galerkin standard et pour la discrétisation en temps utiliser un θ -schéma implicite aux différences finies (cf. [6]). On construit ainsi une classe de schémas d'approximation du problème (3.13). Les difficultés de résolution viendront :

- de la présence de la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ qui donnera des blocs pleins dans les matrices.

- du fait que les formes bilinéaires ρ et \tilde{a} ne sont pas symétriques ce qui mènera à des matrices non symétriques.

On verra, dans un prochain travail, comment il est possible d'une part de symétriser le problème discret d'autre part de réduire au maximum la taille des blocs pleins des diverses matrices ([7]).

IV - CONVERGENCE DE LA SOLUTION APPROCHEE - CONSTRUCTION

D'UNE BONNE SUITE f_n

Nous consacrons ce paragraphe à l'étude de la convergence, quand $n \rightarrow +\infty$, de la solution approchée u_n vers la solution exacte u .

Nous établissons tout d'abord un résultat de convergence assez général. Ce résultat est basé sur un théorème d'approximation de l'opérateur T par l'opérateur T_n que l'on obtient moyennant des hypothèses raisonnables sur la suite de fonctions $f_n(z)$.

Nous justifions ensuite sur un plan théorique, la méthode utilisée, en exhibant, de façon constructive qui plus est, un exemple de suite $f_n(z)$ remplissant ces conditions. Pour ce choix particulier de f_n nous pouvons obtenir des estimations d'erreur sur la suite $u - u_n$.

Pour terminer nous discutons de la détermination, à n fixé, de la fonction $f_n(z)$ optimale.

IV.1 - UN RESULTAT DE CONVERGENCE GENERAL

Comme nous l'avons vu, les opérateurs T_n et T ne sont pas tout à fait de la même nature puisque :

$$T_n \in \mathcal{L}(L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)), L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)))$$

$$T \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}([0, T] \times \Gamma), L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)))$$

En particulier si on considère $L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ comme espace de travail, T apparaît comme un opérateur non borné de $L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ dans $L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$ dont le domaine serait :

$$D(T) = H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}([0, T] \times \Gamma)$$

Nous approchons donc un opérateur non borné T par une suite d'opérateurs bornés T_n . Il est donc normal d'avoir :

$$(4.1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n\| = +\infty$$

où $\|T_n\|$ désigne la norme de l'opérateur T_n en tant qu'élément de l'espace $\mathcal{L}(L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)); L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)))$.

Nous allons tout d'abord énoncer des conditions suffisantes sur la suite des fonctions $f_n(z)$ pour l'obtention d'un résultat d'approximation de T_n par T . Bien entendu le résultat maximal que l'on puisse espérer est :

$$\forall f \in H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T]) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n f - T f\|_{L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))} = 0$$

Pour cela nous faisons sur la suite f_n les hypothèses suivantes :

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \exists C > 0 / \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad |f_n(i\lambda) - f(i\lambda)| \leq C |f(i\lambda)| \\ \cdot \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(i\lambda) = f(i\lambda) \end{array} \right.$$

Nous verrons dans la suite que de telles suites existent, ce qui justifiera entièrement sur le plan théorique la démarche adoptée. Notons simplement que ces hypothèses sont raisonnables. En effet, le fait que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |f_n(i\lambda) - f(i\lambda)| = +\infty$$

empêche d'avoir, comme nous l'avons déjà signalé, un résultat de convergence uniforme de f_n vers f . En revanche, nous avons nécessairement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left| \frac{f_n(i\lambda) - f(i\lambda)}{f(i\lambda)} \right| = 1$$

ce qui rend l'hypothèse (4.2) raisonnable.

Avec les hypothèses (4.2) nous pouvons maintenant énoncer notre résultat :

THEOREME 4.1

On suppose que la suite $f_n(z)$ satisfait les hypothèses (4.2), on a alors les résultats suivants :

- (i) $\forall \phi \in H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T[) \quad \|\tilde{T}_n \phi - T\phi\|_{0, -\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C_0 \|\phi\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma}$
- (ii) $\forall \phi \in H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T[) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{T}_n \phi - T\phi\|_{0, -\frac{1}{2}, \Gamma} = 0$

Démonstration du théorème

Le théorème est une conséquence simple d'un résultat d'approximation de l'opérateur \tilde{T}_n , donné par le :

Lemme 4.1

Si les hypothèses du théorème sont satisfaites on a :

- (i) $\forall \tilde{\phi} \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times \mathbb{R}) \quad \|\tilde{T}_n \tilde{\phi} - \tilde{T} \tilde{\phi}\|_{-\frac{1}{2}, 0} \leq C \|\tilde{T} \tilde{\phi}\|_{-\frac{1}{2}, 0}$
- (ii) $\forall \tilde{\phi} \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times \mathbb{R}) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{T}_n \tilde{\phi} - \tilde{T} \tilde{\phi}\|_{-\frac{1}{2}, 0} = 0$

Démonstration du lemme

Il suffit d'écrire que :

$$\|\tilde{T}_n \tilde{\phi} - \tilde{T} \tilde{\phi}\|_{\frac{1}{2}, 0}^2 = \int_{\mathbb{R}_-^{N+1}} \int_{\mathbb{R}} (1+k^2)^{-\frac{1}{2}} |\hat{T}_n(k, \omega) - \hat{T}(k, \omega)|^2 |\hat{\phi}(k, \omega)|^2 d\omega dk$$

où, rappelons le :

- $\hat{T}_n(k, \omega) = |k| f_n(i \frac{\omega \sigma}{|k|^2})$
- $\hat{T}(k, \omega) = |k| f_n(i \frac{\omega \sigma}{|k|^2})$

$\hat{\phi}(k, \omega)$ désignant la transformée de Fourier de $\tilde{\phi}(x, t)$

Des hypothèses (4.2) on déduit immédiatement :

$$\bullet \quad |\hat{T}_n(k, \omega) - \hat{T}(k, \omega)| \leq C |\hat{T}(k, \omega)| \quad \forall (k, \omega) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

(d'où l'on tire l'estimation (i)) et :

$$\bullet \text{ p.p. } (k, \omega) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{T}_n(k, \omega) = \hat{T}(k, \omega)$$

Le résultat de convergence (ii) est alors une simple conséquence du théorème de Lebesgue. □

Pour démontrer le théorème il suffit alors de raisonner sur les prolongements et utiliser le lemme. En effet, si $\phi \in V$ on peut, (théorème 1.2), trouver un prolongement $\tilde{\phi}$ satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bullet \tilde{\phi} \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times \mathbb{R}) \\ \bullet \tilde{\phi}(x, t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ \bullet \tilde{\phi}(x, t) = \phi(x, t) & \text{p.p. dans } [0, T] \end{array} \right.$$

et nous savons que

$$\left\{ \begin{array}{l} T_n \phi = \tilde{T}_n \tilde{\phi} \Big|_{[0, T]} \\ T \phi = \tilde{T} \tilde{\phi} \Big|_{[0, T]} \end{array} \right.$$

Par suite

$$\|T_n \phi - T \phi\|_{0, -\frac{1}{2}, \Gamma} \leq \|\tilde{T}_n \tilde{\phi} - \tilde{T} \tilde{\phi}\|_{0, -\frac{1}{2}}$$

D'où l'on déduit, grâce au lemme 4.1, d'une part :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n \phi - T \phi\|_{0, -\frac{1}{2}, \Gamma} = 0$$

et d'autre part,

$$\|T_n \phi - T \phi\|_{0, -\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C \|T \phi\|_{0, -\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C \|\phi\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma}$$

□

THEOREME 4.2

On suppose que la suite f_n définissant T_n satisfait les hypothèses (4.2), et on suppose en outre que :

$$\bullet u_0 \in H^1_0(\mathbb{R}^{N+1}_-)$$

$$\bullet \sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_-) \quad \sigma(x,y) \geq \sigma_* > 0 \quad \text{p.p. } (x,y) \in \mathbb{R}^{N+1}_-$$

On a alors le résultat de convergence : (quand $n \rightarrow +\infty$)

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } C^0(0,T;L^2(\mathbb{R}^{N+1}_-)) \cap L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^{N+1}_-))$$

avec, de façon plus précise, les estimations d'erreur :

$$\|u_n - u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^{N+1}_-))} \leq C \| (T_n - T)(\gamma_0 u) \|_{0, -\frac{1}{2}, \Gamma}$$

$$\|u_n - u\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^{N+1}_-))} \leq C \| (T_n - T)(\gamma_0 u) \|_{0, -\frac{1}{2}, \Gamma}$$

Démonstration du théorème

Il suffit de former l'équation vérifiée par la différence $(u_n - u)$. Rappelons que, d'après le théorème de traces 1.3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_n, u) \in H^{1,1}(\mathbb{R}^{N+1}_- \times]0, T])^2 \\ (u_n(0), u(0)) \in H^1_0(\mathbb{R}^{N+1}_-)^2 \end{array} \right. \implies (\gamma_0 u_n, \gamma_0 u) \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}_{00}(\Gamma \times]0, T])^2$$

On vérifie alors aisément que l'on a, en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} w_n = u_n - u \\ \sigma \frac{\partial w_n}{\partial t} - \Delta w_n = 0 \\ w_n(x,y,0) = 0 \\ \gamma_1 w_n + T(\gamma_0 w_n) = (T_n - T)(\gamma_0 u) \end{array} \right.$$

où, bien entendu, $(T_n - T) \gamma_0 u$ est un élément de $L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$. Il suffit alors d'utiliser le théorème 3.5 pour conclure. □

IV.2 JUSTIFICATION THEORIQUE DU PROCEDE D'APPROXIMATION - UN
EXEMPLE CONSTRUCTIF D'UNE SUITE f_n SATISFAISANT LES
HYPOTHESES (4.2)

Notre propos est ici de montrer que l'on peut effectivement construire une suite $f_n(z)$ de fractions rationnelles de la forme (1.21) qui satisfait les hypothèses (4.2).

Nous utilisons en fait une approximation par fractions continues de la fonction $f(z) = \sqrt{1+z}$. La même idée avait déjà été utilisée dans [8] pour la construction de conditions aux limites absorbantes pour l'équation des ondes et également dans [2] où on s'intéressait à l'approximation d'un noyau de convolution.

Pour construire la suite $f_n(z)$ nous allons commencer par construire un suite $f_n^*(z)$ dont nous extrairons une sous suite qui constituera précisément notre suite $f_n(z)$.

Construction et étude d'une suite $f_n^*(z)$

Nous posons donc pour tout z non réel négatif :

$$(4.5) \quad f(z) = (1+z)^{1/2} \quad \text{Re}(f(z)) > 0$$

et nous caractérisons $f(z)$ comme l'unique point fixe d'une application homographique :

$$\begin{aligned} f(z)^2 &= 1+z \\ \iff z &= (f(z)-1)(f(z)+1) \\ \iff f(z) &= 1 + \frac{z}{1+f(z)} \end{aligned}$$

ce qui suggère de considérer la suite définie par la relation de récurrence :

$$(4.6) \quad f_{n+1}^*(z) = 1 + \frac{z}{1+f_n^*(z)}$$

ou l'on choisit par exemple :

$$f_0^*(z) = 0$$

Remarquons tout de suite que par construction même :

• On a pour tout $n \geq 1$ $f_n^*(0) = 1$

• La suite $f_n(z)$ est bien une suite de fractions rationnelles. Plus précisément on a :

$$\forall n \geq 0 \quad f_n^*(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$$

où $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ sont deux suites de polynômes déterminées par les relations de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{n+1}(z) = P_n(z) + (1+z) Q_n(z) \\ Q_{n+1}(z) = P_n(z) + Q_n(z) \end{array} \right.$$

à partir desquelles on établit aisément que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \cdot d^0 Q_{2n} = d^0 Q_{2n+1} = n & \forall n \geq 0 \\ \cdot d^0 P_{2n} = n d^0 P_{2n+1} = n+1 & \forall n \geq 0 \end{array} \right.$$

en conséquence de quoi la partie entière de la fraction rationnelle $f_n^*(z)$ est :

- une constante si n est pair
- un polynôme de degré 1 si n est impair

Pour calculer la suite $f_n^*(z)$ nous remarquons, par un calcul simple que :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{n+1}^*(z) - f(z) = (1-f(z))(f_n^*(z) - f(z))(1+f_n^*(z))^{-1} \\ f_{n+1}^*(z) + f(z) = (1+f(z))(f_n^*(z) + f(z))(1+f_n^*(z))^{-1} \end{array} \right.$$

à partir de quoi nous obtenons

$$\frac{f_{n+1}^*(z) - f(z)}{f_{n+1}^*(z) + f(z)} = \frac{1 - f(z)}{1 + f(z)} \frac{f_n^*(z) - f(z)}{f_n^*(z) + f(z)}$$

cette relation prouve que la suite $f_n^*(z)$ est parfaitement définie pour tout $z \in \mathbb{C} - \Delta$. Plus précisément nous avons le :

THEOREME 4.3

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta$, on a l'identité :

$$\frac{f_n^*(z) - f(z)}{f_n^*(z) + f(z)} = - \left(\frac{1 - f(z)}{1 + f(z)} \right)^n$$

La suite $f_n^*(z)$ est donc donnée par

$$(4.7) \quad f_n^*(z) = f(z) \frac{1 - \left(\frac{1 - f(z)}{1 + f(z)} \right)^n}{1 + \left(\frac{1 - f(z)}{1 + f(z)} \right)^n} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Delta$$

Il est bien connu que l'application : $z \rightarrow \frac{1-z}{1+z}$

applique le demi plan ouvert $P = \{z / \operatorname{Re}(z) > 0\}$ dans le disque unité ouvert $D = \{z / |z| < 1\}$ et l'axe imaginaire pur sur le cercle unité.

Or, par construction, nous savons que pour tout réel z n'appartenant pas à la demi-droite Δ , $\operatorname{Re}(f(z)) > 0$. Nous en déduisons le :

THEOREME 4.4

Pour tout z dans $\mathbb{C} - \Delta$; on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^*(z) = f(z)$$

En outre la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \Delta$. Plus précisément, pour tout compact K de $\mathbb{C} \setminus \Delta$ il existe une constante $\eta(K) \in]0, 1[$ et une constante $C(K) > 0$ telle que :

$$\forall z \in K \quad |f_n^*(z) - f(z)| \leq C(K) \cdot \eta(K)^n$$

Démonstration du théorème

Il suffit de remarquer que

$$f_n^*(z) - f(z) = 2f(z) \frac{\left(\frac{1-f(z)}{1+f(z)}\right)^n}{1 + \left(\frac{1-f(z)}{1+f(z)}\right)^n}$$

Or l'application $z \longrightarrow \left(\frac{1-f(z)}{1+f(z)}\right)^n$ est analytique (donc en particulier continue) sur $\mathbb{C} \setminus \Delta$ et applique $\mathbb{C} \setminus \Delta$ dans D . L'image de tout compact K de $\mathbb{C} \setminus \Delta$ est donc un compact de D et par suite.

$$\eta(K) = \sup_{z \in K} \left| \left(\frac{1-f(z)}{1+f(z)}\right)^n \right| \in]0, 1[$$

Posons alors

$$C(K) = 2 \left(\sup_{z \in K} |f(z)| \right) (1 - \eta(K))^{-1}$$

Nous en déduisons

$$|f_n^*(z) - f(z)| \leq C(K) \cdot \eta(K)^n$$

ce qu'il fallait démontrer □

Nous nous intéressons maintenant aux pôles de $f_n^*(z)$. Le théorème 4.3 prouve que la fonction $f_n^*(z)$ est analytique dans $\mathbb{C} \setminus \Delta$. Nous savons donc dorénavant et déjà que les pôles de la fraction rationnelle $f_n^*(z)$ sont situés sur la demi droite Δ . De façon plus précise nous avons le :

LEMME 4.2

Les pôles de $f_n^*(z)$ sont donnés par :

(i) Pour $f_{2n}^*(z)$

$$z = z_{2n}^k = - \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n} \right) = - \frac{1}{\cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n}}$$

$$k=0,1,\dots,n-1$$

(ii) Pour $f_{2n+1}^*(z)$

$$z = z_{2n+1}^k = - \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n+2} \right) = - \frac{1}{\cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n+2}}$$

$$k=0,1,\dots,n-1$$

(Dans chaque cas, il s'agit de pôles simples)

Démonstration du lemme

De la formule (4.7) nous déduisons que les pôles de $f_n^*(z)$ sont les racines de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1-f(z)}{1+f(z)} \right)^n = -1 \\ z \in \mathbb{C} \end{array} \right.$$

Dont les solutions sont données par

$$\frac{1-f(z)}{1+f(z)} = e^{i \frac{(2k+1)\pi}{n}} \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

ce qui nous donne

$$f(z) = \frac{1 - \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{n}\right] - i \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{n}\right]}{1 + \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{n}\right] + i \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{n}\right]}$$

Soit encore

$$f(z) = -i \operatorname{tg} \left[\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right]$$

Et par conséquent

$$z = -1 - \operatorname{tg}^2 \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

ce qui démontre le lemme en considérant les deux cas □

Calculons maintenant le résidu de f_n^* en chacun de ses pôles z_n^k

Lemme 4.3

Pour tout entier k entre 1 et n , on a la formule :

$$\operatorname{Res} (f_n^*; z_n^k) = -\frac{2}{n} z_n^k (1+z_n^k)$$

Démonstration du lemme

Chacun des pôles z_n^k étant simple, nous avons :

$$\operatorname{Res} (f_n^*; z_n^k) = \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{f_n^*(z)} \right) (z_n^k) \right\}^{-1}$$

Utilisons la formule (4.7) :

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{f_n^*(z)} &= \left\{ \frac{1}{f(z)} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1-f(z)}{1+f(z)} \right)^n} \right\} \times \left(1 + \left(\frac{1-f(z)}{1+f(z)} \right)^n \right) \\ &= h(z) \left\{ 1 + \left(\frac{1-f(z)}{1+f(z)} \right)^n \right\} \end{aligned} \right.$$

Par conséquent :

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{f_n^*(z)} \right) = \frac{dh}{dz}(z) \left\{ 1 + \left(\frac{1-f(z)}{1+f(z)} \right)^n \right\} + h(z) \frac{d}{dz} \left(\left(\frac{1-f(z)}{1+f(z)} \right)^n \right)$$

Or on a :

$$(4.8) \quad 1 + \left[\frac{1-f(z_n^k)}{1+f(z_n^k)} \right]^n = 0$$

Par suite

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{f_n^*(z)} \right) (z_n^k) = h(z_n^k) \cdot \frac{d}{dz} \left[\left[\frac{1-f(z)}{1+f(z)} \right]^n \right] (z_n^k)$$

Soit encore, toujours grâce à (4.8)

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{f_n^*(z)} \right) (z_n^k) = \frac{1}{2f(z_n^k)} \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{1-f(z)}{1+f(z)} \right)^n \right] (z_n^k)$$

Or nous avons également

$$\frac{d}{dz} \left\{ \left[\frac{1-f(z)}{1+f(z)} \right]^n \right\} = \frac{-2n}{(1+f(z))^2} \left\{ \frac{1-f(z)}{1+f(z)} \right\}^{n-1} f'(z)$$

Soit encore, au point $z=z_n^k$

$$\frac{d}{dz} \left\{ \left[\frac{1-f(z)}{1+f(z)} \right]^n \right\} (z_n^k) = - \frac{n}{z_n^k} f'(z_n^k)$$

Par conséquent, nous obtenons finalement :

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{f_n^*(z)} \right) (z_n^k) = - \frac{n}{z_n^k} \frac{f'(z_n^k)}{f(z_n^k)}$$

Or,

$$f'(z) = \frac{1}{2f(z)}$$

Donc,

$$\text{Res}(f_n^*, z_n^k) = - \frac{2}{n} z_n^k (1+z_n^k)$$

ce qu'il fallait démontrer

□

Nous pouvons maintenant donner la décomposition de la fraction rationnelle $f_n^*(z)$ sous sa forme (1.21)

THEOREME 4.5

Pour tout entier n , on a les développements :

$$(i) \quad f_{2n}^*(z) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n} z}{1 + z \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n}}$$

$$(ii) \quad f_{2n+1}^*(z) = 1 + \frac{z}{2n+1} + \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n+2}}{1 + z \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n+2}}$$

Démonstration du théorème

(i) Cas de $f_{2n}^*(z)$

Nous savons déjà que :

- Les poles de f_{2n}^* sont tous simples
- Sa partie entière est une constante
- $f_{2n}^*(0) = 1$

Nous en déduisons qu'il existe des coefficients b_n^k réels, tels que :

$$f_{2n}^*(z) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_n^k z}{z - z_{2n}^k}$$

Pour calculer b_n^j , nous écrivons :

$$\text{Res}(f_{2n}^*, z_{2n}^j) = \lim_{z \rightarrow z_{2n}^j} (z - z_{2n}^j) f_{2n}^*(z)$$

Comme d'après le lemme 4.3 on a

$$\text{Res}(f_{2n}^*, z_{2n}^j) = - \frac{2}{2n} z_{2n}^j (1 + z_{2n}^j)$$

Il vient immédiatement

$$b_n^j = -\frac{2}{2n} (1+z_{2n}^j) = +\frac{1}{n} \operatorname{tg}^2 \frac{(2j+1)\pi}{4n}$$

Par suite en remarquant que

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{(2j+1)\pi}{4n}}{z + (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{(2j+1)\pi}{4n})} = \frac{\sin^2 \frac{(2j+1)\pi}{4n}}{1 + z \cos^2 \frac{(2j+1)\pi}{4n}}$$

On aboutit aisément au développement annoncé.

(ii) Cas de $f_{2n+1}^*(z)$

Cette fois la partie entière de $f_{2n+1}^*(z)$ est un polynôme du premier degré. On a donc un développement du type :

$$f_{2n+1}^*(z) = 1 + \beta_n z + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_n^k z}{z - z_n^k}$$

Par un raisonnement identique à celui fait précédemment on détermine b_n^j . Pour calculer β_n nous remarquons que :

$$\beta_n = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{f_{2n+1}^*(z)}{z}$$

Introduisons alors également la quantité

$$\gamma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{2n}^*(z)$$

et utilisons la relation de récurrence

$$f_{p+1}(z) = 1 + \frac{z}{1 + f_p(z)}$$

en faisant successivement $p = 2n$ et $p = 2n-1$. Nous obtenons de cette façon :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_n = \frac{1}{1 + \gamma_n} \\ \gamma_n = 1 + \frac{1}{\beta_{n-1}} \end{array} \right.$$

Eliminant γ_n entre les deux égalités, nous obtenons :

$$\left| \begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{\beta_{n-1}}\right)} \\ &= \frac{\beta_{n-1}}{1 + 2\beta_{n-1}} \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons alors remarquer que :

$$\beta_0 = 1 \implies \beta_1 = \frac{1}{3}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{3} \implies \beta_2 = \frac{1}{5}$$

Supposons

$$\beta_n = \frac{1}{2n+1}$$

Alors

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)\left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)} = \frac{1}{2n+3}$$

ce qui établit le résultat par récurrence □

Construction de la suite f_n à partir de f_n^*

Il suffit de considérer la suite des termes pairs et donc de poser :

$$(4.9) \quad \cdot f_n(z) = f_{2n}^*(z)$$

Nous avons déjà démontré, au cours de l'étude de la suite f_n^* , que :

$$(4.10) \quad \left. \begin{aligned} & \bullet f_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_n^k z}{1 + \alpha_n^k z} \\ & \bullet \beta_n^k = \frac{1}{n} \operatorname{tg}^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n} \\ & \alpha_n^k = \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n} \\ & \bullet f_n(z) \longrightarrow f(z) \quad \text{pour tout } z \text{ dans } \mathbb{C} \setminus \Delta \\ & \bullet \text{La convergence de } f_n \text{ vers } f \text{ est uniforme et exponentielle} \\ & \quad \text{par rapport à } n \text{ sur tout compact de } \mathbb{C} \setminus \Delta \end{aligned} \right\}$$

Il s'agit maintenant de s'assurer que cette suite $f_n(z)$ vérifie les hypothèses (4.2). Pour cela, il nous suffit de démontrer le

THEOREME 4.6

Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad |f_n(i\lambda) - f(i\lambda)| \leq C |f(i\lambda)|$$

Démonstration du théorème

Introduisons, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(4.11) \quad \xi(\lambda) = (1 + i\lambda)^{1/2}$$

Nous pouvons écrire $\xi(\lambda) = a(\lambda) + ib(\lambda)$. Nous avons alors :

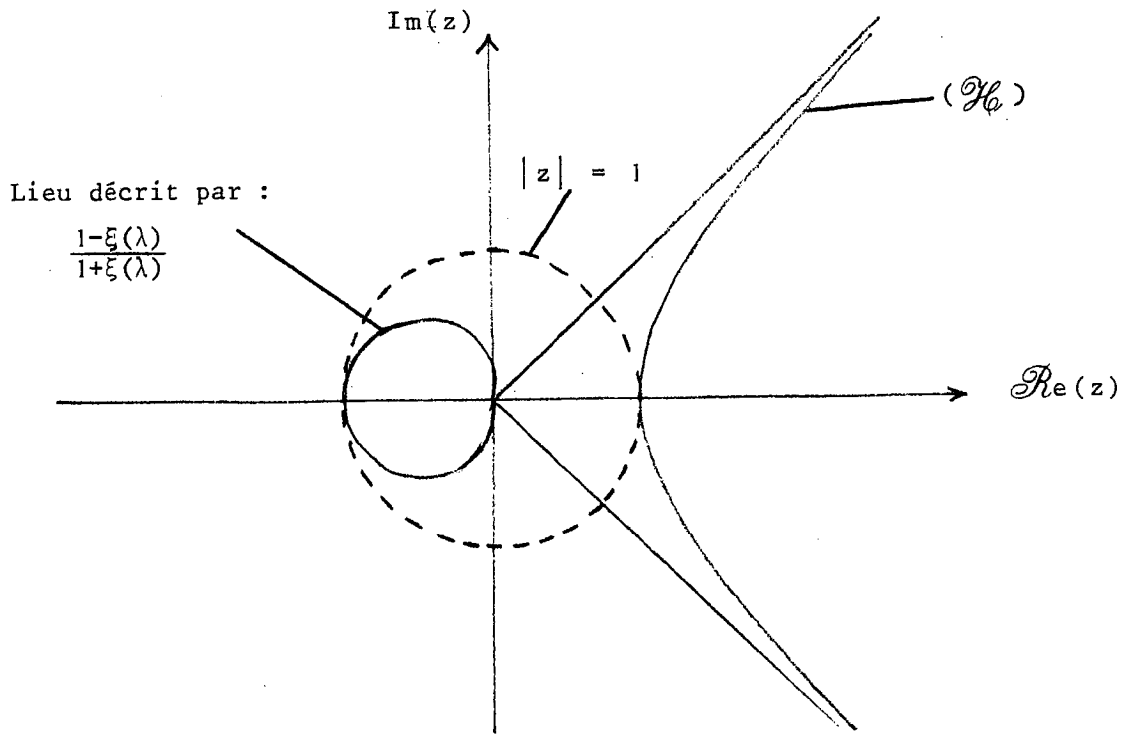
$$\begin{cases} a(\lambda)^2 - b(\lambda)^2 = 1 \\ 2a(\lambda) b(\lambda) = \lambda \end{cases}$$

Dans le plan complexe, $z=x+iy$, on en déduit que, lorsque λ décrit \mathbb{R} , $\xi(\lambda)$ décrit la branche d'hyperbole

$$(\mathcal{H}_e) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

branche que l'on peut paramétrer par

$$\begin{cases} x = \operatorname{cht} & t \in \mathbb{R} \\ y = \operatorname{sht} & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Nous pouvons donc poser

$$(4.12) \quad \xi = \operatorname{cht} + i \operatorname{sht} \quad t \in \mathbb{R}$$

auquel cas nous avons la formule

$$\frac{1-\xi}{1+\xi} = \frac{1+\operatorname{cht}-i\operatorname{sht}}{1+\operatorname{cht}+i\operatorname{sht}}$$

soit encore, après quelques manipulations

$$\frac{1-\xi}{1+\xi} = -\operatorname{th} \frac{t}{2} \{ \cos \theta(t) + i \sin \theta(t) \}$$

avec

$$\begin{cases} \cos \theta(t) = \text{th } t & 0 \leq \theta(t) \leq \pi \\ \sin \theta(t) = \frac{1}{\text{ch } t} \end{cases}$$

Par conséquent nous avons :

$$(4.13) \quad \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{2n} = \left| \text{th } \frac{t}{2} \right|^{2n} \{ \cos(2n\theta(t)) + i \sin(2n\theta(t)) \}$$

Intéressons nous tout d'abord aux valeurs positives du paramètre t (qui correspondent aux valeurs positives de λ). Lorsque t varie de 0 à $+\infty$, $\theta(t)$ décroît de $\frac{\pi}{2}$ à 0. Par conséquent :

$$\begin{cases} \left| \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{2n} \right| & \text{croît de 0 à 1} \\ \text{Arg} \left(\left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{2n} \right) = 2n\theta(t) & \text{décroît de } n\pi \text{ à 0.} \end{cases}$$

Par conséquent, lorsque t varie de 0 à $+\infty$, le nombre complexe $\left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{2n}$ décrit, à l'intérieur du disque unité une spirale en faisant n demi-tours autour de l'origine. Soit (Σ_n) cette spirale.

Notre but est de démontrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad \left| 1 + \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{2n} \right| \geq C$$

Nous savons que pour chaque valeur de \mathbb{N} , il existe une constante C_n telle que

$$\forall t \geq 0 \quad \left| 1 + \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{2n} \right| \geq C_n$$

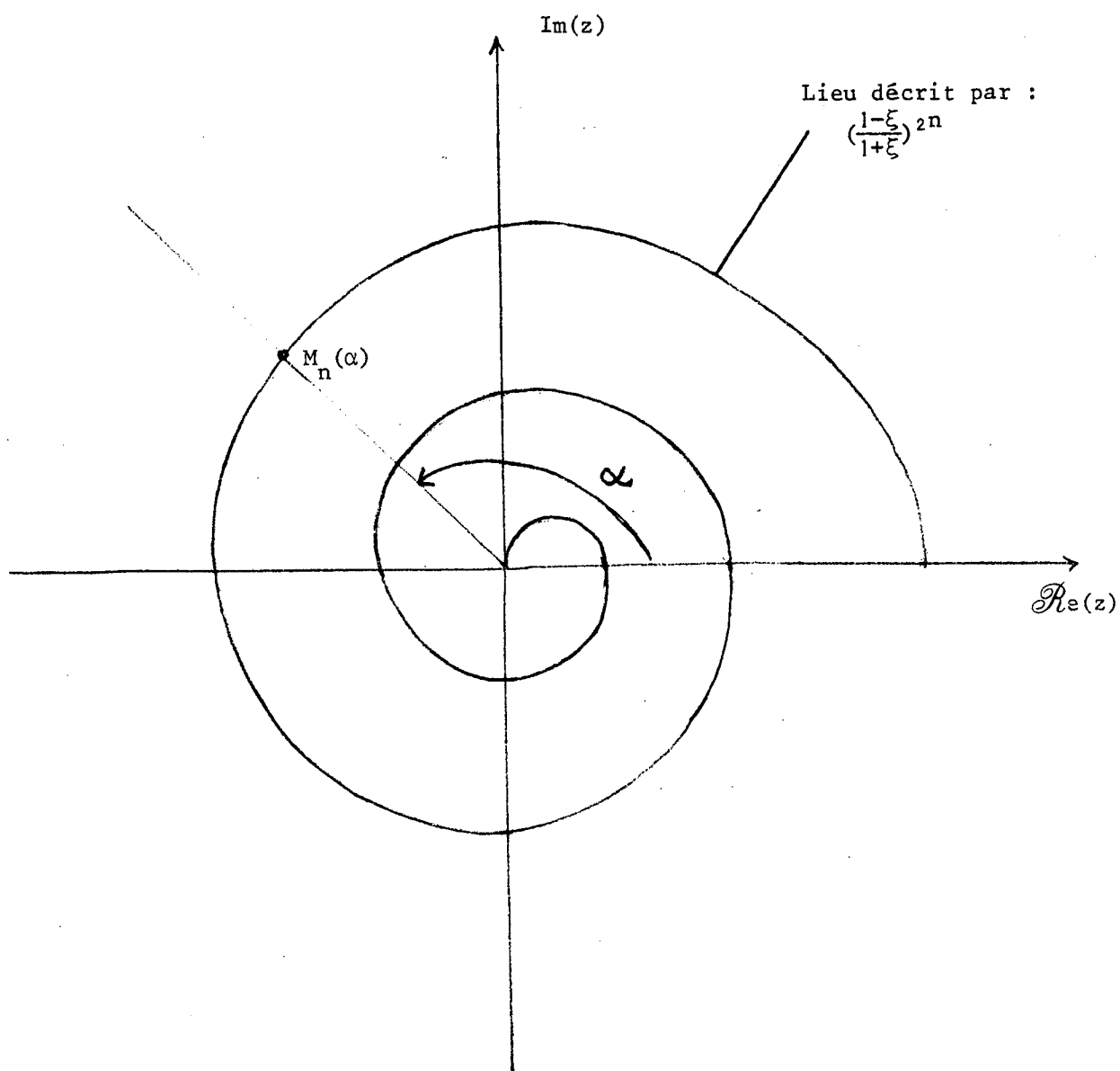
Il s'agit maintenant de montrer que, si l'on pose :

$$C_n = \inf_{t \in \mathbb{R}} \left| 1 + \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{2n} \right|$$

Alors C_n ne tend pas vers 0. Pour cela il nous faut étudier le comportement limite des spirales (Σ_n) lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pour tout α dans $[0, 2\pi[$, désignons par D_α la demi droite d'angle polaire α . Chaque droite D_α intersecte plusieurs fois la spirale Σ_n : nous désignons par $M_n(\alpha)$ celui de ces points

d'intersection qui est le plus éloigné de l'origine. Comme le module de $(\frac{1-\xi}{1+\xi})^{2n}$ est une fonction croissante du paramètre t et que $2n\theta(t)$ est une fonction décroissante de t , le point $M_n(\alpha)$ correspond à la plus grande valeur du paramètre t pour laquelle l'argument $2n\theta(t)$ vaut α (module 2π) ce qui nous donne :

$$\theta = \frac{\alpha}{2n}$$



Auquel cas t est donné par :

$$\begin{cases} t &= t_n(\alpha) & \text{solution de} \\ \text{th } t &= \cos \frac{\alpha}{2n} \\ (\text{cht})^{-1} &= \sin \frac{\alpha}{2n} \end{cases}$$

On a bien entendu :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} t_n(\alpha) = +\infty \\ n \rightarrow t_n(\alpha) \text{ est une suite croissante} \end{array} \right.$$

Par suite nous en déduisons que, pour $t = t_n(\alpha)$:

$$\left| \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{2n} \right| = \left| \text{th} \frac{t_n(\alpha)}{2} \right|^{2n}$$

Par ailleurs, lorsque $n \rightarrow +\infty$

$$\text{th} \left(\frac{t_n(\alpha)}{2} \right) = 1 - 2e^{-t_n(\alpha)} + o(e^{-2t_n(\alpha)})$$

Or de l'égalité

$$\text{ch}(t_n(\alpha)) \sin \frac{\alpha}{2n} = 1$$

Nous tirons

$$e^{-t_n(\alpha)} \sim \frac{\alpha}{2n} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

Et par suite :

$$\text{th} \left(\frac{t_n(\alpha)}{2} \right) = 1 - \frac{\alpha}{n} + o \left(\frac{\alpha^2}{n^2} \right)$$

Par conséquent,

$$\text{Log}\left(\text{th}\left(\frac{t_n(\alpha)}{2}\right)\right) = -\frac{\alpha}{n} \left(1 + o\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)$$

$$2n \text{Log}\left(\text{th}\left(\frac{t_n(\alpha)}{2}\right)\right) = -2\alpha \left(1 + o\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)$$

A partir de quoi nous déduisons :

$$(4.14) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |OM_n(\alpha)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \text{th} \frac{t_n(\alpha)}{2} \right|^{2n} = e^{-2\alpha}$$

En fait, en réitérant le raisonnement pour tout α réel, nous avons démontré que la famille de spirales (Σ_n) admet comme courbe limite la spirale logarithmique (Σ) d'équation polaire :

$$\rho = e^{-2\alpha}$$

(Σ) étant une courbe compacte ne passant pas par le point $z = -1$, nous avons :

$$\text{dist}(-1, (\Sigma)) > 0$$

D'où l'on déduit l'existence d'une constante strictement positive C telle que

$$\forall t \geq 0 \quad \left| 1 + \left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{2n} \right| \geq C$$

On peut faire exactement le même raisonnement pour les valeurs négatives du paramètre t et finalement montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \left| 1 + \left(\frac{1-\xi(\lambda)}{1+\xi(\lambda)}\right)^{2n} \right| \geq C$$

Or, en utilisant le théorème 4.2 nous avons

$$|f_n(i\lambda) - f(i\lambda)| = 2|f(i\lambda)| \frac{\left| \left(\frac{1-\xi(\lambda)}{1+\xi(\lambda)}\right)^{2n} \right|}{\left| 1 + \left(\frac{1-\xi(\lambda)}{1+\xi(\lambda)}\right)^{2n} \right|}$$

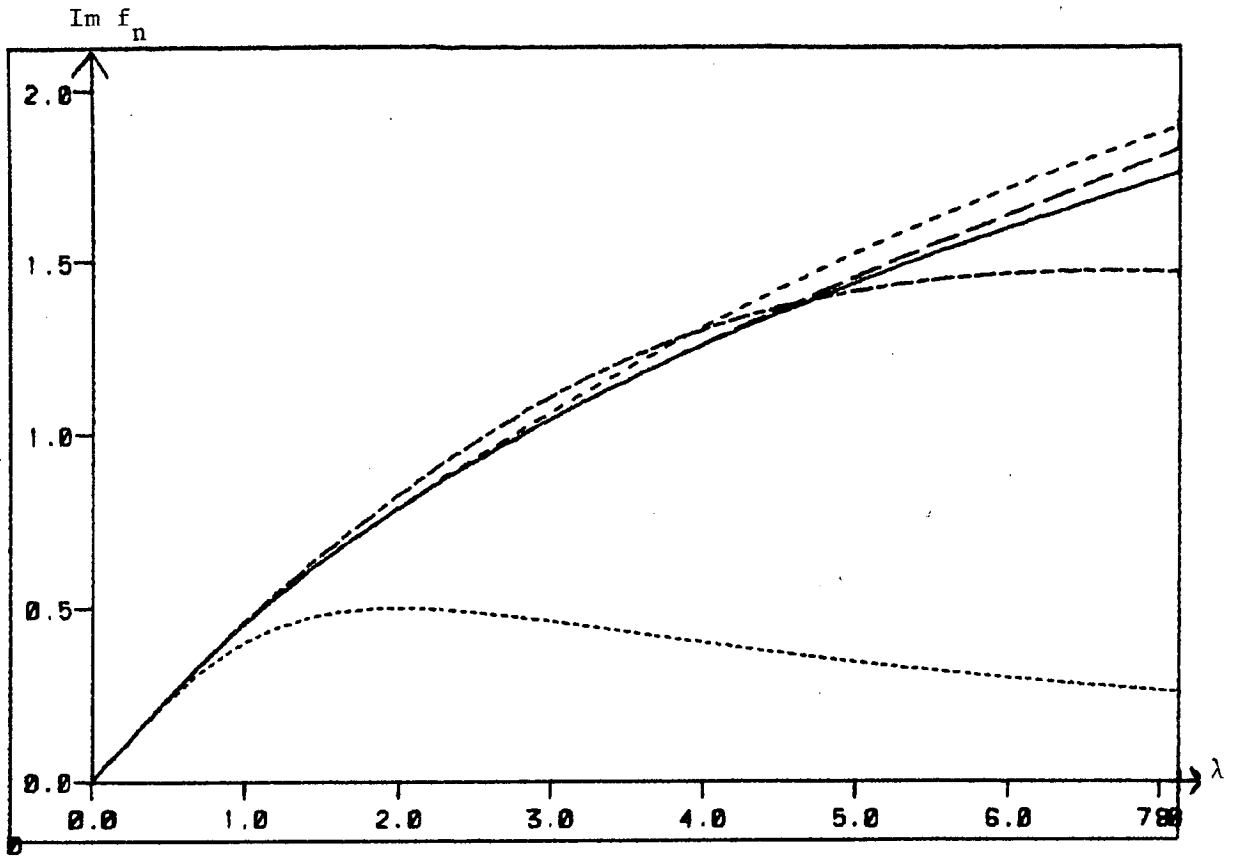
Et par conséquent :

$$|f_n(i\lambda) - f(i\lambda)| \leq 2C|f(i\lambda)|$$

ce qui démontre le théorème

□

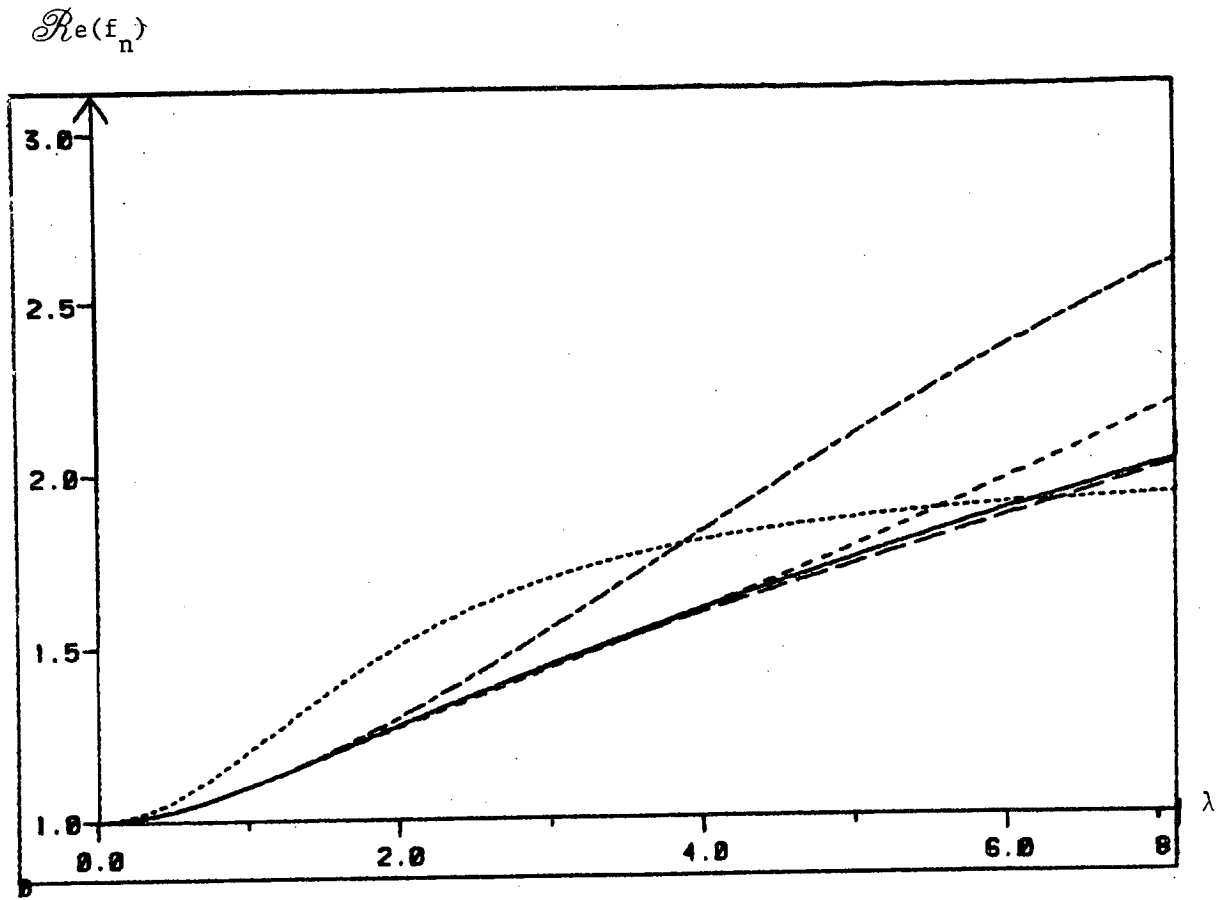
Sur les figures nous illustrons la convergence de la suite f_n vers la suite f



Convergence de $f_n(i\lambda)$ vers $f(i\lambda)$

Légende des traits

- $f(i\lambda)$
- $n=1$
- $n=2$
- $n=3$
- $n=4$



Convergence de $f_n(i\lambda)$ vers $f(i\lambda)$

Légende des traits :

- $f(i\lambda)$
- $n=1$
- $n=2$
- - - - - $n=3$
- . - . - $n=4$

IV.3 - ESTIMATIONS D'ERREUR POUR LA SUITE f_n CONSTRUITE AU PARAGRAPHE 4.2

Cette estimation d'erreur va être basée sur une estimation de la différence $(T_n - T)\phi$ lorsque l'on fait des hypothèses supplémentaires sur la fonction ϕ dans $H_{00}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T])$.

Cette estimation passe bien entendu par une estimation de $(\tilde{T}_n - \tilde{T})\tilde{\phi}$ lorsque $\tilde{\phi}$ est une fonction de $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times \mathbb{R})$ possédant certaines propriétés. Le résultat précis est le suivant :

THEOREME 4.7

Soit $\tilde{\phi}$ une fonction de $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times \mathbb{R})$ satisfaisant les hypothèses de régularité suivantes :

- $\forall s > 0 \quad \tilde{\phi} \in H^s(\mathbb{R}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$
- $\tilde{\phi} \in L^1(\mathbb{R} \times \Gamma)$

Alors pour tout nombre $n \in]0, 1[$, il existe une constante positive $C_n(\sigma, N, \tilde{\phi})$ telle que

$$\|(\tilde{T}_n - \tilde{T})\tilde{\phi}\|_{0, -1/2}^2 \leq \frac{C_n(\sigma, N, \tilde{\phi})}{n^{N(1-n)}}$$

Démonstration du théorème

Nous utilisons bien entendu la transformée de Fourier $\hat{\phi}(k, \omega)$ de $\tilde{\phi}(x, t)$:

$$\hat{\phi}(k, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\phi}(x, t) e^{-i(kx + \omega t)} dk d\omega$$

Etablissons tout d'abord un lemme purement technique qui nous servira dans la démonstration (ce lemme précise le théorème 4.4)

LEMME 4.4

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, on a la majoration :

$$\forall |\lambda| > \frac{1}{\varepsilon} \quad |f_n(i\lambda) - f(i\lambda)| \leq C(1-\sqrt{2\varepsilon})^n$$

où C est une constante positive indépendante de n et de ε

Démonstration du lemme

Rappelons (cf. (4.7)) que l'on a :

$$|f_n(i\lambda) - f(i\lambda)| = 2 \frac{\left| \frac{1-f(i\lambda)}{1+f(i\lambda)} \right|^{2n}}{\left| 1 + \left(\frac{1-f(i\lambda)}{1+f(i\lambda)} \right)^{2n} \right|}$$

$$\text{où } f(i\lambda) = (1+i\lambda)^{1/2}$$

grâce au théorème 4.6, nous savons déjà que

$$|f_n(i\lambda) - f(i\lambda)| \leq C \left| \frac{1-f(i\lambda)}{1+f(i\lambda)} \right|^{2n}$$

Il nous suffit donc d'étudier le comportement de la fonction $\lambda \rightarrow \frac{1-f(i\lambda)}{1+f(i\lambda)}$ lorsque $|\lambda| \rightarrow +\infty$.

Pour cela nous posons $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{1-f(i\lambda)}{1+f(i\lambda)} &= -\left((i+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\varepsilon}\right) \left((i+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\varepsilon}\right)^{-1} \\ &= i\left\{(i+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\varepsilon}\right\}^2 \\ &= i\left\{i+2\varepsilon-2\sqrt{\varepsilon}(i+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right\} \end{aligned}$$

Pour les petites valeurs de ε nous avons donc :

$$\begin{aligned} \frac{1-f(i\lambda)}{1+f(i\lambda)} &= -1 - 2i\sqrt{\varepsilon} \sqrt{i} + 0(\varepsilon) \\ &= -1 - 2i\sqrt{\varepsilon} \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 0(\varepsilon) \\ &= -1 + \sqrt{2\varepsilon} - i\sqrt{2\varepsilon} + 0(\varepsilon) \end{aligned}$$

Passons au module nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1-f(i\lambda)}{1+f(i\lambda)} \right|^2 &= (1-\sqrt{2\varepsilon})^2 + 2\varepsilon + 0(\varepsilon) \\ &= 1-2\sqrt{2\varepsilon} + 0(\varepsilon) \end{aligned}$$

Il est alors très simple de déduire le résultat annoncé □

Revenons à la démonstration du théorème. Par transformation de Fourier :

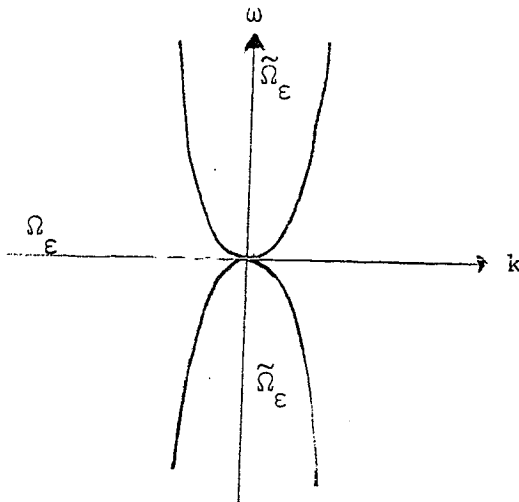
$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\phi}(x, t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} |k| f\left(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2}\right) \hat{\phi}(k, \omega) \\ \tilde{\mathbf{T}}_n \tilde{\phi}(x, t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} |k| f_n\left(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2}\right) \hat{\phi}(k, \omega) \end{aligned}$$

Formons maintenant la norme $L^2(\mathbb{R}; H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}))$ de la différence $(\tilde{\mathbf{T}}_n - \tilde{\mathbf{T}})\tilde{\phi}$, pour $\tilde{\phi}$ dans $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$:

$$\|(\tilde{\mathbf{T}}_n - \tilde{\mathbf{T}})\tilde{\phi}\|_{0, -\frac{1}{2}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} |k|^2 \left| f_n\left(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2}\right) - f\left(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2}\right) \right|^2 \frac{|\hat{\phi}(k, \omega)|^2}{(1 + |k|^2)^{1/2}} dk d\omega$$

Décomposons notre domaine d'intégration ($\varepsilon > 0$ donné)

$$\left| \begin{aligned} \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} &= \Omega_\varepsilon \cup \tilde{\Omega}_\varepsilon \\ \Omega_\varepsilon &= \{(k, \omega) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} / |k|^2 \geq \varepsilon |\omega\sigma|\} \\ \tilde{\Omega}_\varepsilon &= \{(k, \omega) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} : |k|^2 < \varepsilon |\omega\sigma|\} \end{aligned} \right.$$



Nous avons par conséquent :

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \| (\tilde{T}_n - \tilde{T}) \tilde{\phi} \|_{0, -\frac{1}{2}}^2 = I_n(\varepsilon, \tilde{\phi}) + J_n(\varepsilon, \tilde{\phi}) \\ I_n(\varepsilon, \tilde{\phi}) = \iint_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} |k|^2 \left| f_n \left(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2} \right) - f \left(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2} \right) \right|^2 \frac{|\hat{\phi}(k, \omega)|^2}{(1+|k|^2)^{1/2}} dk d\omega \\ J_n(\varepsilon, \tilde{\phi}) = \iint_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} |k|^2 \left| f_n \left(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2} \right) - f \left(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2} \right) \right|^2 \frac{|\hat{\phi}(k, \omega)|^2}{(1+|k|^2)^{1/2}} dk d\omega \end{array} \right.$$

Pour majorer $I_n(\varepsilon, \tilde{\phi})$, nous utilisons le lemme 4.4; il vient donc, pour ε assez petit :

$$I_n(\varepsilon, \tilde{\phi}) \leq C (1-2\sqrt{2\varepsilon})^n \iint_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} \frac{|k|^2 |\hat{\phi}(k, \omega)|^2}{(1+|k|^2)^{1/2}} dk d\omega$$

Donc,

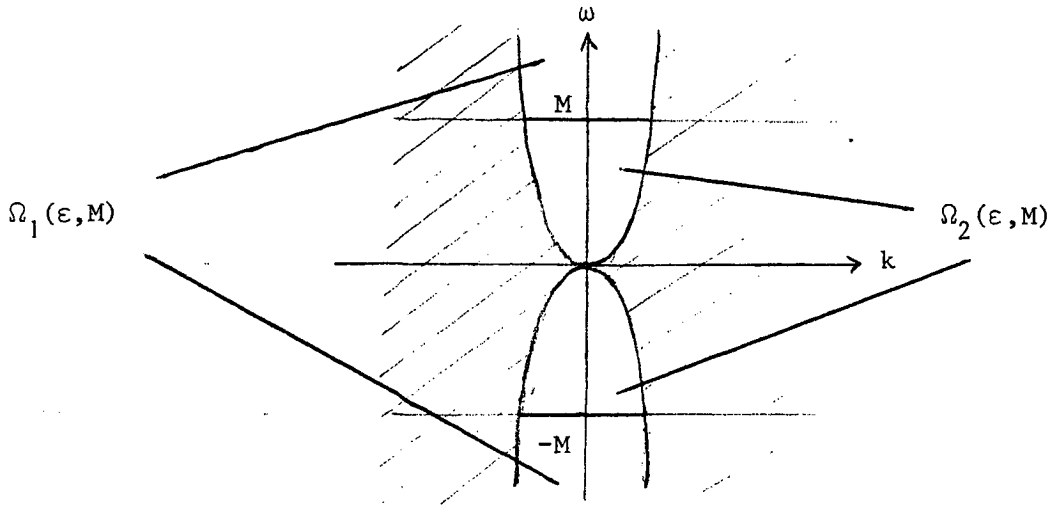
$$(4.16) \quad I_n(\varepsilon, \tilde{\phi}) \leq C (1-2\sqrt{2\varepsilon})^n \| \tilde{\phi} \|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2$$

Pour majorer $J_n(\varepsilon, \tilde{\phi})$ nous utilisons le théorème 4.6

$$(4.17) \quad J_n(\varepsilon, \tilde{\phi}) \leq C \iint_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} | |k|^2 + i\omega\sigma | \frac{|\hat{\phi}(k, \omega)|^2}{(1+|k|^2)^{1/2}} dk d\omega = C J(\varepsilon, \phi)$$

Nous écrivons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Omega}_\varepsilon = \Omega_1(\varepsilon, M) \cap \Omega_2(\varepsilon, M) \\ \Omega_1(\varepsilon, M) = \{ (k, \omega) \in \tilde{\Omega}_\varepsilon / |\omega| > M \} \\ \Omega_2(\varepsilon, M) = \{ (k, \omega) \in \tilde{\Omega}_\varepsilon / |\omega| > M \} \end{array} \right.$$



Nous avons donc :

$$(4.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} J(\varepsilon, \tilde{\phi}) = J_1(\varepsilon, M, \tilde{\phi}) + J_2(\varepsilon, M, \tilde{\phi}) \\ J_1(\varepsilon, M, \tilde{\phi}) = \iint_{\Omega_1(\varepsilon, M)} | |k|^2 + i\omega\sigma | \frac{|\hat{\phi}(k, \omega)|^2}{(1+|k|^2)^{1/2}} dk d\omega \\ J_2(\varepsilon, M, \tilde{\phi}) = \iint_{\Omega_2(\varepsilon, M)} | |k|^2 + i\omega\sigma | \frac{|\hat{\phi}(k, \omega)|^2}{(1+|k|^2)^{1/2}} dk d\omega \end{array} \right.$$

Majorons tout d'abord le terme $J_2(\varepsilon, M, \tilde{\phi})$

$$(4.19) \quad J_2(\varepsilon, M, \tilde{\phi}) \leq \frac{C}{(1+M^2)^S} (\|\tilde{\phi}\|_{S, \frac{1}{2}}^2 + \|\tilde{\phi}\|_{S+\frac{1}{2}, 0}^2)$$

Pour majorer $J_1(\varepsilon, M, \tilde{\phi})$, nous utilisons le fait que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi} \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}) \implies \hat{\phi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}) \\ \|\hat{\phi}\|_{L^\infty} \leq \|\tilde{\phi}\|_{L^1} \end{array} \right.$$

Nous en déduisons immédiatement :

$$J_1(\varepsilon, M, \phi) \leq \|\tilde{\phi}\|_{L^1}^2 \left\{ \iint_{\Omega_1(\varepsilon, M)} \frac{|k|^2}{(1+|k|^2)^{1/2}} dk d\omega + \iint_{\Omega_1(\varepsilon, M)} \frac{|\omega|\sigma}{(1+|k|^2)^{1/2}} dk d\omega \right\}$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega_1(\varepsilon, M)} \frac{|k|^2}{(1+|k|^2)^{1/2}} dk d\omega &\leq \iint_{\Omega_1(\varepsilon, M)} |k|^2 dk d\omega \\
 &= 4 \int_0^M \left(\int_0^{(\varepsilon\omega\sigma)^{1/2}} |k|^2 dk \right) d\omega \\
 &= 4 S_N \int_0^M \left(\int_0^{(\varepsilon\omega\sigma)^{1/2}} \rho^{N+1} d\rho \right) d\omega
 \end{aligned}$$

où S_N désigne l'aire de la sphère unité de \mathbb{R}^N .

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega_1(\varepsilon, M)} \frac{|k|^2}{(1+|k|^2)^{1/2}} dk d\omega &\leq \frac{4}{N+2} S_N (\varepsilon\sigma)^{\frac{N+2}{2}} \left(\int_0^M \omega^{\frac{N+2}{2}} d\omega \right) \\
 &\leq \frac{8S_N}{(N+4)} \frac{(\varepsilon\sigma)^{1+\frac{N}{2}}}{(N+2)} M^{2+\frac{N}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega_1(\varepsilon, M)} \frac{|\omega|}{(1+|k|^2)^{1/2}} dk d\omega &\leq \iint_{\Omega_1(\varepsilon, M)} |\omega| dk d\omega \\
 &= 4 \int_0^M \omega \left(\int_0^{(\varepsilon\omega\sigma)^{1/2}} dk \right) d\omega \\
 &= \frac{4S_N}{N} (\varepsilon\sigma)^{N/2} \int_0^M \omega^{1+N/2} d\omega \\
 &= \frac{8S_N}{N(N+4)} (\varepsilon\sigma)^{N/2} M^{2+N/2}
 \end{aligned}$$

Regroupant les résultats nous obtenons :

$$(4.20) \quad J_1(\varepsilon, M, \tilde{\phi}) \leq \frac{8S_N^\sigma}{N(N+4)} (\varepsilon\sigma)^{N/2} M^{2+N/2} \left(1 + \frac{N}{N+2} \varepsilon\right) \|\tilde{\phi}\|_{L^1}^2$$

Nous regroupons alors les quatre estimations (4.16), (4.17), (4.19) et (4.20) pour finalement obtenir une majoration globale de $\|(\tilde{T}_n - \tilde{T})\tilde{\phi}\|_{0, -1/2}^2$ en fonction des paramètres n, ε, M, s (que nous avons la latitude de choisir) :

$$\begin{aligned} \|(\tilde{T}_n - \tilde{T})\tilde{\phi}\|_{0, -1/2}^2 &\leq C(1-2\sqrt{2\varepsilon})^{2n} \|\tilde{\phi}\|^2 + \frac{C}{(1+M^2)^s} (\|\tilde{\phi}\|_{s, 1/2}^2 + \|\tilde{\phi}\|_{s+1/2, 0}^2) \\ &\quad + \frac{8S_N^\sigma}{N(N+4)} (\varepsilon\sigma)^{N/2} M^{2+N/2} \left(1 + \frac{N\varepsilon}{N+2}\right) \|\tilde{\phi}\|_{L^1}^2 \end{aligned}$$

ce que nous pouvons réécrire de manière plus synthétique :

$$(4.21) \quad \|(\tilde{T}_n - \tilde{T})\tilde{\phi}\|_{0, -1/2}^2 \leq C(\sigma, N, s, \tilde{\phi}) \left\{ (1-2\sqrt{2\varepsilon})^n + \frac{1}{(1+M^2)^s} + (\varepsilon\sigma)^{N/2} M^{2+N/2} \left(1 + \frac{N\varepsilon}{N+2}\right) \right\}$$

Choisissons alors maintenant :

$$\varepsilon = \frac{1}{n^\alpha} \quad 0 < \alpha < 2$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Log}\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}}\right) &= -\frac{2\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)\right) \\ n \text{Log}\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}}\right) &= -2\sqrt{2} n^{1-\alpha/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)\right) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$(4.22) \quad (1 - 2\sqrt{2\varepsilon})^{2n} \sim e^{-2\sqrt{2} n^{1-\alpha/2}} \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Choisissons ensuite :

$$M = n^\beta \quad \beta > 0$$

$$(4.23) \quad \left(\frac{\sigma}{n^\alpha}\right)^{N/2} \left(1 + \frac{N}{(N+2)n^\alpha}\right) n^{(2+N/2)\beta} - \frac{\sigma^{N/2}}{n^{N\alpha/2 - (2+N/2)\beta}}$$

Pour tout $\eta > 0$, on peut toujours choisir α (assez proche de 2) et β (suffisamment petit) tels que :

$$(4.24) \quad n^{N\alpha/2 - (2+N/2)\beta} = n^{N(1-\eta)}$$

Il suffit de noter que :

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 2 \\ \beta \rightarrow 0}} \left\{ \frac{N\alpha}{2} - \left(2 + \frac{N}{2}\right)\beta \right\} = N$$

Ce choix (α, β) étant effectué, il suffit maintenant de choisir $s > 0$ assez grand de façon à ce que :

$$(4.25) \quad \frac{1}{(1+n^{2\beta})^s} - \frac{1}{n^{N(1-\eta)}} \quad (s = \frac{N(1-\eta)}{2\beta})$$

Auquel cas en utilisant (4.22), (4.23), (4.24) et (4.25) on obtient très facilement, pour n assez grand :

$$\|(\tilde{T}_n - \tilde{T})\tilde{\phi}\|_{0, \frac{1}{2}}^2 \leq C(\sigma, N, \eta, \tilde{\phi}) / n^{N(1-\eta)}$$

D'où l'on déduit de façon simple résultat annoncé □

En corollaire immédiat de ce dernier résultat nous avons le

THEOREME 4.8

$$(4.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall p \in \mathbf{N} \quad \frac{d^p \phi}{dt^p}(0) = 0 \\ \phi \in L^1(0, T; L^1(\Gamma)) \end{array} \right.$$

Alors pour tout $\eta \in]0, 1[$, on peut trouver une constante positive $C_\eta(\sigma, N, \phi)$ telle que

$$\|(\mathbf{T}_n - \mathbf{T})\phi\|_{0, \frac{1}{2}, \Gamma}^2 \leq \frac{C_\eta(\sigma, N, \phi)}{n^{N(1-\eta)}}$$

Démonstration du théorème

Il suffit de remarquer que, pour une telle fonction ϕ , on peut trouver un prolongement $\tilde{\phi}$ tel que :

- $\tilde{\phi}$ est nulle pour les valeurs négatives de t
- $\tilde{\phi}$ satisfait les hypothèses du théorème 4.7.

et d'utiliser le lien entre les opérateurs (T_n, T) d'une part, (\hat{T}_n, \hat{T}) d'autre part □

Quelques remarques sur le résultat d'approximation

Il peut paraître surprenant qu'on puisse obtenir un résultat de convergence de T_n vers T alors que l'on a toujours (quelque soit le choix de f_n)

$$\begin{cases} \hat{T}_n(o, \omega) = 0 \\ \hat{T}(o, \omega) = (i\omega\sigma)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

En particulier pour tout $\tilde{\phi}$ dans $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times \mathbb{R})$

$$(\hat{T}_n - \hat{T}) \tilde{\phi}(o, \omega) = (i\omega\sigma)^{\frac{1}{2}} \tilde{\phi}(o, \omega)$$

En particulier, si nous supposons ϕ suffisamment régulière, nous avons, avec $K(t) = \left(\frac{\sigma}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}}$ (la fonction $K(t)$ est bien entendu reliée à la fonction $G(x, t)$ définie par (2.3) par la relation $K(t) = \int_{\mathbb{R}_-^{N+1}} G(x, t) dx$)

$$\int_{\mathbb{R}} (T_n \phi - T\phi)(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \underbrace{K(t-s) \phi(x, s)}_{\text{indépendant de } n} dx ds$$

Il est donc exclus d'avoir un résultat de convergence L^1 pour l'approximation de $T\phi$ par $T_n \phi$ puisque l'intégrale de $T\phi$ sera toujours mal approchée !

Pour comprendre ce type de phénomène nous l'illustrons sur l'exemple "concret" suivant. Pour simplifier nous nous affranchirons de la dépendance en

temps (ce qui revient à raisonner par exemple à ω fixé) et nous nous placerons à une dimension d'espace. Plaçons nous donc dans $L^2(\mathbb{R})$ et considérons l'opérateur :

$$J_\varepsilon : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

défini par transformée de Fourier par :

$$\forall \phi \in L^2(\mathbb{R}) \quad \widehat{J_\varepsilon \phi}(k) = (1 - e^{-|k|^2/\varepsilon}) \widehat{\phi}(k)$$

(Nous avons ici choisi $\widehat{\phi}(k) = \int \phi(x) e^{-ikx} dx$ pour ϕ dans $L^1(\mathbb{R})$).

Bien entendu, J_ε est encore défini par :

$$\forall \phi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \quad J_\varepsilon \phi(x) = \phi(x) - \sqrt{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon y^2/4} \phi(x-y) dy$$

Remarquons alors que :

$$\bullet \quad \forall k \neq 0 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{J_\varepsilon \phi}(k) = \widehat{\phi}(k)$$

(en d'autres termes, l'opérateur J_ε approche l'opérateur identité).

$$\bullet \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \widehat{J_\varepsilon \phi}(0) = 0$$

par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \phi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon \phi(x) dx = 0$$

On est donc dans une situation tout à fait analogue à celle décrite ci-dessus pour les opérateurs T_n et T . (Il suffit de raisonner à ω fixé, J_ε joue le rôle de T_n et l'opérateur T est remplacé par l'identité).

Etudions maintenant la convergence de $J_\varepsilon \phi$, pour une fonction ϕ particulière, dans les espaces L^p .

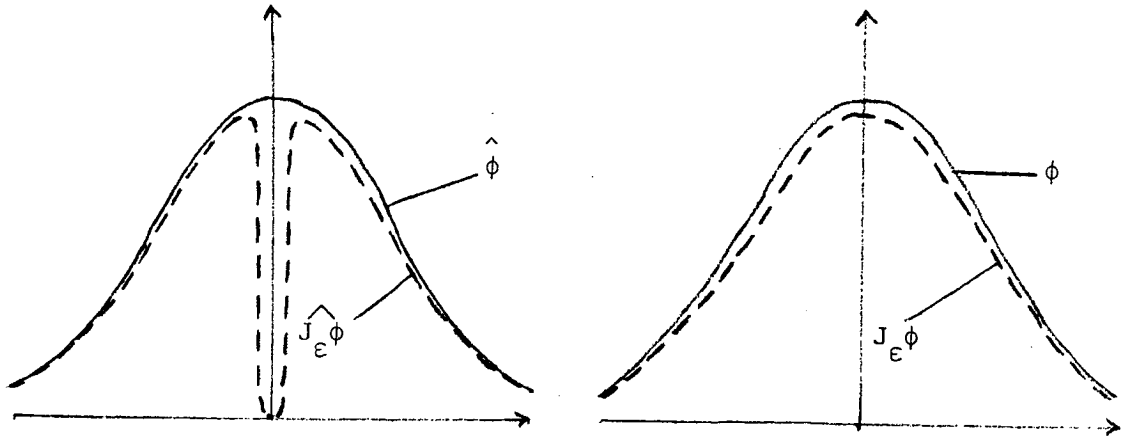
Nous choisissons : $\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \implies \hat{\phi}(k) = e^{-\frac{|k|^2}{2}}$

$$\widehat{J_\epsilon \phi}(k) = \hat{\phi}(k) - e^{-|k|^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\epsilon}\right)} = \hat{\phi}(k) - e^{-|k|^2 \frac{2+\epsilon}{2\epsilon}}$$

$$\implies J_\epsilon \phi(x) = \phi(x) - e^{-\frac{\epsilon x^2}{2(2+\epsilon)}}$$

$$\implies \phi(x) - J_\epsilon \phi(x) = e^{-\frac{\epsilon x^2}{2(2+\epsilon)}} \sqrt{\epsilon}$$

Illustration graphique



Calculons alors la norme L^p de $\phi - J_\epsilon \phi$

$$\| \phi - J_\epsilon \phi \|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int e^{-\frac{\epsilon p x^2}{2(2+\epsilon)}} dx \right)^{1/p} \epsilon^{\frac{1}{2}}$$

Nous posons alors :

$$\begin{aligned} y &= x \left[\frac{\epsilon p}{2(2+\epsilon)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \| \phi - J_\epsilon \phi \|_{L^p(\mathbb{R})} &= \epsilon^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2(2+\epsilon)}{\epsilon p} \right]^{\frac{1}{2p}} \left(\int e^{-y^2} dy \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\| \phi - J_\epsilon \phi \|_{L^p} = O\left(\epsilon^{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}\right)$$

En particulier,

$$\|\phi - J_{\varepsilon} \phi\|_{L^1} = O(1)$$

$$\|\phi - J_{\varepsilon} \phi\|_{L^2} = O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})$$

$$\|\phi - J_{\varepsilon} \phi\|_{L^{\infty}} = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$$

C'est un phénomène, plus complexe, mais analogue qui se produit pour l'approximation de $T\phi$ par $T_n \phi$. L'exemple ci-dessus laisse penser que la norme L^2 (en fait la norme $L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}})$ dans notre cas) n'est peut être pas celle pour laquelle on a l'ordre de convergence optimal (qui est obtenu, pour cet exemple précis avec la norme L^{∞}). C'est toutefois cette norme qu'il nous faut estimer pour pouvoir utiliser l'estimation générale fournie au théorème 4.8.

Nous pouvons maintenant énoncer le :

THEOREME 4.9

On suppose que la solution u du problème (3.13) vérifie :

$$\cdot \gamma_0 u \in C^{\infty}(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \cap L^1(0, T; L^1(\Gamma))$$

$$\cdot \frac{d^p}{dt^p} (\gamma_0 u)(x, 0) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

alors on a l'estimation d'erreur, pour tout $\eta \in]0, 1[$

$$\|u_n - u\|_{L^{\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}_-^{N+1}))}^2 \leq C_{\eta}(\sigma, u_0) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{N(1-\eta)}$$

$$\|u_n - u\|_{L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}_-^{N+1}))}^2 \leq C_{\eta}(\sigma, u_0) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{N(1-\eta)}$$

Remarques

En pratique, l'hypothèse $\gamma_0 u \in C^{\infty}(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \cap L^1(0, T; L^1(\Gamma))$ n'est pas trop restrictive :

- La propriété $\gamma_0 u \in C^{\infty}(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ est satisfaite, grâce à l'effet

régularisant de l'équation de diffusion dès que le support de la donnée initiale n'intersecte pas le bord Γ .

- La propriété $\gamma_0 u \in L^1(0, T; L^1(\Gamma))$ est par exemple vérifiée dans le cas σ constant, lorsque la solution s'écrit :

$$u(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N+1}{2}}} \int e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} e^{-\frac{|y-\zeta|^2}{4t}} u_0(\xi, \zeta) d\xi d\zeta$$

→

$$(\gamma_0 u)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N+1}{2}}} \int e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} e^{-\frac{\zeta^2}{4t}} u_0(\xi, \zeta) d\xi d\zeta$$

Posons

$$\tilde{u}_0(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi, \zeta) e^{-\frac{\zeta^2}{4t}} d\zeta$$

$$|\gamma_0 u(x, t)| = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N+1}{2}}} \left(\int e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \tilde{u}_0(\xi, t) d\xi \right)$$

Utilisant les propriétés du produit de convolution

$$\|\gamma_0 u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N+1}{2}}} \left(\int e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \right) \left(\int |\tilde{u}_0(x, t)| dx \right)$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}_0(\cdot, t)| dx &\leq \iint |u_0(x, y)| e^{-\frac{y^2}{4t}} dx dy \\ &\leq \iint |u_0(x, y)| dx dy. \end{aligned}$$

Donc dès que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^{N+1})$, on a :

$$\|\gamma_0 u(\cdot, t)\| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|u_0\|_{L^1}$$

d'où l'on déduit $\gamma_0 u \in L^1(0, T; L^1(\Gamma))$.

- D'une façon générale il serait intéressant d'étudier les hypothèses sur les données (u_0, σ) pour lesquelles on a : $\gamma_0 u \in C^\infty(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \cap L^1(0, T; L^1(\Gamma))$.

IV.4 - QUELQUES REMARQUES SUR LA DETERMINATION DES PARAMETRES

α_n^k ET β_n^k

En pratique pour la résolution d'un problème donné, on doit pour construire le problème approché à résoudre déterminer successivement :

- le nombre n de fractions rationnelles choisi
- ce nombre n étant fixé, les coefficients α_n^k et β_n^k de la décomposition en éléments simples :

$$f_n(z) = 1 + \sum \frac{\beta_n^k z}{1 + \alpha_n^k z}$$

En ce qui concerne le choix du nombre de fractions rationnelles, la situation est claire en ce sens que, plus n augmente, meilleure est l'approximation mais plus important est le volume des calculs à effectuer. De façon assez prosaïque, on peut dire que le nombre optimal n_0 de fractions rationnelles à choisir est celui pour lequel le gain de précision obtenu en passant de n_0 à n_0+1 fractions rationnelles n'est plus suffisant pour justifier le surcroît de calcul occasionné par cette opération.

Un tel critère étant purement qualitatif et grandement fonction de l'utilisateur, il est clair que seule une expérimentation numérique peut permettre de façon concrète le problème de la détermination de n_0 . Nous y reviendrons plus en détail dans un prochain travail [7]. Toutefois, l'expérience acquise sur des problèmes de nature analogue (voir [2], [8]), laisse penser que $n_0 = 3$ est un choix raisonnable.

Lorsque n est fixé la détermination d'une bonne famille de coefficients α_n^k et β_n^k est également un problème crucial dans la mesure où l'on peut améliorer la précision des résultats sans augmenter le volume des calculs à effectuer. Toutefois il semble clair que, à partir du moment où les coefficients α_n^k et β_n^k ne sont pas trop éloignés d'un choix optimal, le gain de précision obtenu par une amélioration de ces coefficients sera moins important que celui obtenu en rajoutant une fraction rationnelle. La suite de coefficients (α_n^k, β_n^k) obtenus pour la suite $f_n(z)$ étudiée au paragraphe 4.2 est bien évidemment un choix raisonnable ainsi que le confirme l'analyse d'erreur que nous avons menée. Toutefois rien ne dit qu'il s'agit du jeu de

paramètres optimal. Ainsi on peut construire toute une famille de suite $f_n(z)$, en utilisant le processus itératif utilisé au paragraphe 4.2 et jouant uniquement sur l'itéré initial (on peut prendre $f_0(z) = \alpha$ ou lieu de $f_0(z) = 0$, et ainsi construire une famille de suite $f_{n,\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) dont les propriétés de convergence vers f seront, pour chaque valeur de α , tout à fait analogues à celles de $f_n = f_{n,0}$. En fait, comme $f_n(z)$, ainsi qu'on peut le montrer, représente une suite d'approximants de Padé de $f(z)$, on privilégie dans l'approximation le voisinage de $z=0$. On peut penser qu'une approximation plus uniforme serait susceptible de fournir de meilleurs résultats. De façon plus précise, on peut penser que le choix optimal des paramètres α_n^k et β_n^k devrait dépendre des données du problème, c'est-à-dire pour le cas qui nous intéresse de la donnée initiale u_0 . En effet, nous avons vu (cf. théorème 4.2) que la qualité de l'approximation de u par u_n était proportionnelle à $(T_n - T)\phi$ (où $\phi = \gamma_0 u$) c'est-à-dire à $|k| \hat{\phi}(\omega, k) (f_n(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2}) - f_n(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2}))$. La solution idéale consisterait à rendre l'approximation de $f_n(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2})$ par $f(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2})$ dans les régions où $\hat{\phi}(k, \omega)$ est importante ! Ceci est en pratique très difficile à réaliser. Toutefois l'idée de minimiser un certain écart entre $f_n(i\lambda)$ et $f(i\lambda)$ apparaît comme naturelle pour la détermination des paramètres optimaux.

Les difficultés résident alors dans le choix du critère à minimiser, puis dans la résolution numérique effective du problème de minimisation.

Comme on la déjà mentionné on a toujours :

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |f_n(i\lambda) - f(i\lambda)| = +\infty,$$

On ne peut donc pas minimiser cette quantité. En revanche on peut chercher à minimiser, les critères suivants (donnés à titre d'exemple).

$$J(f, f_n) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \frac{f_n(i\lambda) - f(i\lambda)}{f(i\lambda)} \right|$$

$$J(f, f_n) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{f(i\lambda)} - \frac{1}{f_n(i\lambda)} \right|$$

Alors le problème de la détermination du jeu de paramètres optimal consiste à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{f}_n \in F_n \text{ tq} \\ J(f, \tilde{f}_n) = \underset{f_n \in F_n}{\text{Min}} J(f, f_n) \\ F_n = \left\{ f_n(z) = 1 + \sum \frac{\beta_n^k z}{1 + \alpha_n^k z}, \alpha_n^k > 0, \beta_n^k > 0 \right\}. \end{array} \right.$$

On est alors ramené en pratique à un problème d'optimisation dans \mathbb{R}^{2n} avec contraintes. Ce problème reste encore à résoudre.

V GENERALISATION ET PROBLEMES OUVERTS

V.1 - UN DEUXIEME PRINCIPE D'APPROXIMATION

L'étude de la suite $f_n^*(z)$ suggère (si on considère cette fois la suite des indices impairs) $f_{2n+1}^*(z)$ d'étudier des approximations de $f(z) = (1+z)^{1/2}$ ayant la forme suivante :

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(z) = 1 + \gamma_n z + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_n^k z^k}{1 + \alpha_n^k z} = f_n(z) \\ \gamma_n > 0, \quad \alpha_n^k > 0, \quad \beta_n^k > 0 \end{array} \right. \quad 1 \leq k \leq n,$$

Remarquons que, comme c'était déjà le cas pour la précédente approximation nous avons imposé par construction :

$$f_n(0) = f(0)$$

La principale différence entre ce choix de f_n et celui proposé au chapitre réside dans le comportement à l'infini. A n fixé on a en effet :

$$f_n(i\lambda) = o(\lambda) \quad \text{quand } \lambda \rightarrow +\infty$$

Alors que pour le choix (1.21) du chapitre 1 on avait :

$$f_n(i\lambda) = o(1) \quad \text{quand } \lambda \rightarrow 1$$

et que pour la fonction exacte f , on a le comportement intermédiaire:

$$f(i\lambda) = o(\lambda^{1/2})$$

Les deux choix possibles de f_n "encadrent" donc f à l'infini et "coïncident" à l'origine.

Avec le choix (5.1) on est donc amené à remplacer le symbole $\hat{T}(k, \omega)$ par le symbole approché :

$$\hat{T}_n(k, \omega) = |k| f_n\left(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2}\right)$$

$$\iff \hat{T}_n(k, \omega) = |k| \left(1 + \gamma_n \left(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2}\right) + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_n^k(i\omega\sigma)}{\alpha_n^k(i\omega\sigma) + |k|^2} \right)$$

Remarquons alors que nous avons :

$$\left| \begin{aligned} \hat{T}_n(k, \omega) \hat{\phi}(k, \omega) &= |k| \left(\hat{\phi}(k, \omega) + \sum_{k=1}^n \beta_n^k \sigma \frac{i\omega \hat{\phi}(k\omega)}{\alpha_n^k(i\omega\sigma) + |k|^2} \right) \\ &+ \gamma_n \left(\frac{i\omega\sigma}{|k|^2}\right) \hat{\phi}(k, \omega) \end{aligned} \right.$$

Si maintenant nous introduisons l'opérateur régularisant S_0 , linéaire continu de $H^s(\mathbb{R}^N)$ dans $H^{s+1}(\mathbb{R}^N)$ dont le symbole est :

$$\hat{S}_0(k) = \frac{1}{|k|}$$

(formellement on a $S_0 = T_0^{-1}$) alors $\hat{T}_n(k, \omega)$ n'est autre que le symbole de l'opérateur T_n défini formellement par :

$$T_n \phi = T_0 \left(\phi + \sum_{k=1}^n \beta_n^k \sigma \frac{\partial f_n^k}{\partial t} \right) + \gamma_n \frac{d}{dt} (S_0 \phi)$$

où les fonctions auxiliaires f_n^k sont toujours définis à partir de ϕ par :

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_n^k \sigma \frac{\partial f_n^k}{\partial t} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x_j^2} &= \phi \\ f_n^k(x, 0) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Autrement dit le "nouvel" opérateur T_n se différencie de "l'ancien" par la présence du terme $S_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$. Signalons toute de suite que le traitement numérique de ce terme ne pose pas plus de difficultés pratiques que celui de u_0 puisque l'on a, pour tout couple (ϕ, ψ) de fonctions L^2 support compact :

$$(N=1) \quad \langle S_0 \phi, \psi \rangle_{\Gamma} = \frac{1}{\pi} \iint_{\Gamma \Gamma} \text{Log} \frac{1}{|x-y|} \phi(x) \psi(y) dx dy$$

$$(N \geq 2) \quad \langle S_0 \phi, \psi \rangle = \frac{2}{S_N} \iint_{\Gamma \Gamma} \frac{1}{|x-y|^{N-1}} \phi(x) \psi(y) dx dy$$

(ces formules sont à comparer aux formules données p.7).

De plus il est clair que S_0 est, au moins formellement, un opérateur symétrique et positif ce qui va entraîner le fait que l'opérateur T_n a des propriétés analogues à celles de l'opérateur étudié au paragraphe 3 puisque :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma} S_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi \, dx \, dt &= \frac{1}{2} \left(\int (S_0 \phi(T) \phi(T) - S_0 \phi(0) \phi(0)) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int S_0 \phi(T) \phi(T) \, dx \geq 0, \end{aligned}$$

dès que $\phi(0) = 0$ (ce qui sera le cas en pratique).

De même :

$$\int_0^T \int_{\Gamma} S_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dx \, dt \geq 0$$

Ceci prouve, au moins formellement, que le problème approché est bien posé.

L'analyse mathématique rigoureuse du problème, telle qu'on l'a menée aux paragraphes 2,3 et 4 apparaît comme beaucoup moins évidente. Les problèmes sont liés :

- au cadre fonctionnel : sur quel espace doit opérer l'opérateur T_n ?
- au résultat d'approximation de T_n par T quel type de convergence de T_n vers T peut-on espérer ? (la réponse à cette question est évidemment liée à la réponse à la question précédente concernant le cadre fonctionnel adapté au problème).

En revanche, l'implémentation numérique de cette méthode (qui englobe donc la méthode précédente, il suffit de faire $\gamma_n = 0$) ne pose a priori pas de difficulté supplémentaire.

V.2 - QUELQUES PROBLEMES OUVERTS

Indépendamment des problèmes liés à l'analyse mathématique rigoureuse de la généralisation proposée au paragraphe 5.1, quelques questions relatives à la méthode présentée au chapitre 1 mériteraient d'être étudiées de façon plus attentive.

① La première question concerne les propriétés du problème approché (3.13) :

- Le problème approché (3.13) satisfait-il le principe du maximum ?

En d'autres termes, la solution $u_n(x,y,t)$ du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_-^{N+1} \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} \Big|_{\Gamma} + T_n(u_n|_{\Gamma}) = 0 \end{array} \right.$$

vérifie t-elle :

$$\forall t > 0 \quad u_n(x,y,t) \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}_-^{N+1}$$

si l'on suppose que :

$$u_0(x,y) \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}_-^{N+1}$$

Rappelons qu'il s'agit d'une propriété satisfaite par la solution exacte u qu'il serait bien évidemment rassurant de voir conservée par la solution approchée u_n .

Dans le cas où $T_n = T_0$ (c'est-à-dire pour 0 fraction rationnelle !) la propriété est vraie; cela est dû à la propriété suivante de l'opérateur T_0 :

$$\forall \phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \langle T_0 \phi, \phi^+ \rangle_{\Gamma} \geq 0.$$

On rappelle que $\phi^+ = \sup(\phi, 0)$ et que pour ϕ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ alors ϕ^+ est également dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (il suffit de remarquer que $u \rightarrow u^+$ est une application linéaire continue de $H^1(\mathbb{R}_-^{N+1})$ dans lui même et d'utiliser le théorème de traces).

En effet, pour établir ce résultat il suffit d'utiliser la caractérisation suivante de T_0 (voir [5] pour plus de détails) :

Soit v l'unique solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta v = 0 \\ v|_{\Gamma} = \phi \\ v \in L^2(\mathbb{R}_-^{N+1}) = \left\{ v / \frac{v(x,y)}{1+y} \in L^2(\mathbb{R}_-^{N+1}), \nabla v \in L^2(\mathbb{R}_-^{N+1})^{N+1} \right\} \end{array} \right. \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^{N+1}$$

Alors $T_0 \phi = \frac{\partial v}{\partial n} |_{\Gamma} = \gamma_1 v$

Par suite, d'après la formule de Green

$$\int_{\mathbb{R}_-^{N+1}} \nabla v \cdot \nabla v^+ \, dx dy = \langle \gamma_1 v, \gamma_0(v^+) \rangle_{\Gamma}$$

Or

$$\left| \begin{array}{l} \gamma_1 v = T_0 \phi \\ \gamma_0(v^+) = (\gamma_0 v)^+ = \phi^+ \\ \int_{\mathbb{R}_-^{N+1}} \nabla v \cdot \nabla v^+ \, dx dy = \int_{\mathbb{R}_-^{N+1}} |\nabla v^+|^2 \, dx dy. \end{array} \right.$$

d'où nous tirons l'égalité :

$$\langle T_0 \phi, \phi^+ \rangle_{\Gamma} = \int_{\mathbb{R}_-^{N+1}} |\nabla v^+|^2 \, dx dy \geq 0$$

Attention on a bien $\langle T_0 \phi, \phi^+ \rangle_{\Gamma} \geq 0$ mais a priori,

$$\langle T_0 \phi, \phi^+ \rangle_{\Gamma} \neq \langle T_0 \phi^+, \phi^+ \rangle_{\Gamma}$$

Une condition suffisante pour que le principe du maximum soit satisfait serait que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \phi \in L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \quad b_n(\phi, \phi^+) \geq 0 \\ \text{où } b_n(\phi, \psi) = \int_0^T \langle T_n \phi(t), \psi(t) \rangle_{\Gamma} \, dt \end{array} \right.$$

Il serait intéressant de voir, (mais cela ne paraît pas évident) si cette propriété est vraie.

② La deuxième question qui nous paraît intéressante concerne le résultat de convergence de u_n vers u et peut-être formulée comme suit :

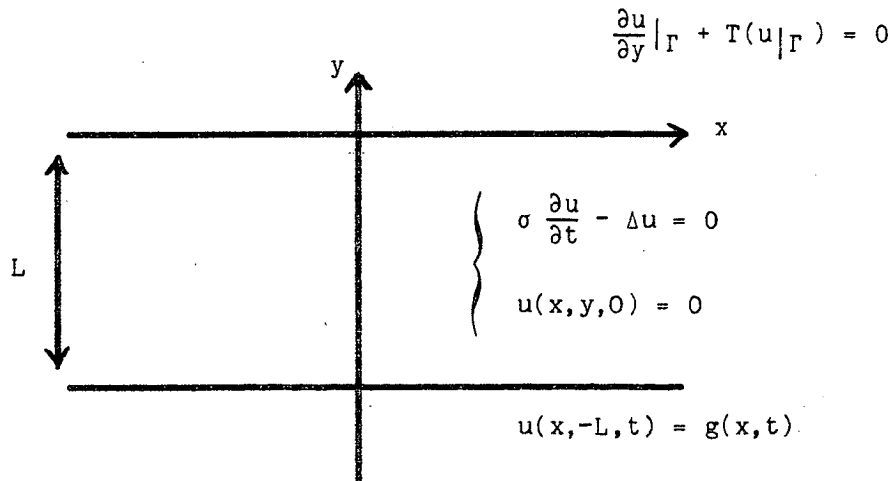
- Quelle est l'influence de la distance L entre le support de la donnée initiale u_0 et la frontière artificielle Γ sur l'estimation de $u_n - u$?

Il est clair intuitivement que l'approximation de u_n par u sera d'autant meilleure que le bord artificiel Γ sera placé loin. Il est également clair que la qualité de l'approximation dépendra de la région de l'espace à laquelle on s'intéresse. Cette remarque débouche sur une deuxième question, qui semble intimement liée à la première.

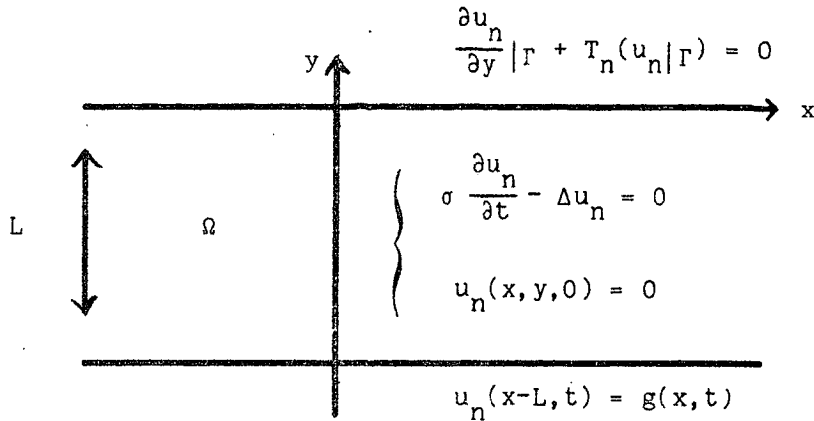
- Peut-on mesurer l'influence de la distance d'un point (x,y) au bord Γ sur la taille de l'erreur locale $u_n(x,y,t) - u(x,y,t)$?

On pourrait par exemple s'intéresser à des estimations de $\|u_n - u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_D))}$ ou $\Omega_D = \{(x,y)/y < -D\}$ et étudier l'influence de D . Il semble que l'étude du problème modèle suivant (étude qui ne semble pas trop difficile à effectuer) permettra d'apporter des éléments de réponse à ces deux questions :

On approche la solution du problème (avec σ constant)



par la solution u_n du problème



Par transformation de Fourier en temps et en espace on obtient aisément une représentation analytique explicite de u_n et u . Il devrait alors être possible d'obtenir des estimations très précises de la différence $u_n - u$ et plus précisément d'estimer.

$$\| u_n(\cdot, y, \cdot) - u(\cdot, y, \cdot) \|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))}$$

en fonction de n et y .

- ③ Cette troisième question concerne toujours l'approximation de u_n par u :

Quelle est l'influence du temps sur la qualité de l'approximation de u_n par u ?

Ce problème apparaît de même nature que celui que nous avons posé au point ②. Toutefois la réponse à cette question apparaît moins claire et la démonstration des résultats fort peu évidente. En effet, il est clair intuitivement que l'erreur commise $u_n - u$ est croissante au cours du temps. D'un autre côté, nous avons présenté notre méthode comme étant adaptée aux "petites" valeurs de σ (en effet $f_n(z)$ approche "bien" $f(z)$ au voisinage de $z=0$

et on s'intéresse à $z = i \frac{\omega\sigma}{|k|^2}$) c'est à dire aux "grandes" valeurs de t (en effet si on se place en milieu homogène par exemple, on voit que la solution u ne dépend que de x, y , et $\frac{\sigma}{t}$). Comment peut-on traduire cette propriété au niveau d'un résultat théorique ? (On pourrait imaginer par exemple que l'accroissement de l'erreur, soit $\frac{\partial}{\partial t} (u_n - u)$, décroît au cours du temps).

④ Le quatrième point présente un intérêt pratique fondamental :

Peut-on généraliser les conditions aux limites pseudo-transparentes au cas de frontières (Γ) non planes et bornées ?

Il s'agirait d'étudier deux cas :

- le cas où Γ est une variété régulière de dimension N .
- le cas du raccord entre deux hyperplans (le coin en dimension 2, le dièdre en dimension 3).

A priori ce problème comme loin d'être évident à résoudre.

*** CONCLUSION ***

Nous avons donc exhibé une famille de conditions aux limites de type "absorbant" pour l'équation de diffusion dans \mathbb{R}^n sur une frontière plane. Ces conditions sont locales en temps ce qui les rend abordables du point de vue numérique, et non locales en espace, ce qui est plus ou moins lié à la nature des phénomènes physiques que décrit l'équation traitée. Nous avons montré que ces conditions aux limites avaient, d'un point de vue mathématique, toutes les qualités requises, (stabilité, convergence vers la condition aux limites transparente). Il reste à tester ces conditions d'un point de vue numérique, c'est-à-dire construire une méthode de résolution performante pour le problème approché et mener à bien les tests de validation les plus significatifs. Ces travaux sont déjà bien entamés et feront l'objet d'un prochain rapport [7]. Enfin, l'étude de ce problème, qui est semble-t-il relativement nouveau sur ce type d'équation, soulève bien entendu de nombreuses et intéressantes questions ouvertes dont nous avons dressé une liste non exhaustive au chapitre 5. La généralisation de nos conditions à des frontières non planes constitue notamment un problème difficile mais présente un intérêt pratique évident.

REFERENCES

- [1] **A. BAMBERGER.**
"Diffraction d'ondes élastiques - Une nouvelle approche". (I), (II), (III).
Rapports internes du Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole
Polytechnique.
- [2] **B. COCKBURN, P. JOLY.**
"Justification théorique d'une méthode de résolution des équations de
Maxwell milieu polarisable". Rapport de Recherche INRIA n°326, (1984).
- [3] **B. ENGQUIST, A. MAJDA.**
"Radiation Boundary Conditions for acoustic and Elastic Wave
Calculations". *Comm. Pure. Appl. Math.* 32 (1979), pp. 313-357.
- [4] **B. ENGQUIST, A. MAJDA.**
"Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves".
Math. Comp., Vol. 31, pp. 629-651.
- [5] **Y. GOLDMAN.**
"Etude mathématique et numérique d'un modèle de propagation du
champ électrique dans une expérience de prospectin géophysique". Thèse
de 3ème Cycle 1985.
- [6] **Y. GOLDMAN, P. JOLY.**
"Prospection d'un champ électrique dans un demi espace conducteur
bidimensionel. Etude mathématique". Rapport INRIA à paraître.
- [7] **P. JOLY, L. TOURETTE.**
"Approximation numérique de conditions aux limites absorbantes non
locales pour l'équation de diffusion". Rapport INRIA à paraître.
- [8] **E.L LINDMANN**
"Free-space boundary conditions for the time dependent wave equation",
J. Comp. Physics, Vol. 18, 1975.
- [9] **J.L. LIONS, E. MAGENES**
"Problèmes aux limites non-homogènes et applications" Tomes I et II.
Dunod (1968).
- [10] **J.C. NEDELEC.**
"Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique".
Rapport interne de l'Ecole Polytechnique (1977).

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

