



**HAL**  
open science

## Analyse asymptotique des equations semiconducteur

F. Alabau

► **To cite this version:**

F. Alabau. Analyse asymptotique des equations semiconducteur. RR-0547, INRIA. 1986. inria-00076007

**HAL Id: inria-00076007**

**<https://inria.hal.science/inria-00076007>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. (1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

N° 547

### ANALYSE ASYMPTOTIQUE DES ÉQUATIONS SEMICONDUCTEUR

Fatiha ALABAU

Juillet 1986

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] P.A. Markowich (1984) : "A singular perturbation analysis of the fundamental semiconductor device equations". Siam J. App. Math., Vol. 44, n° 5, Octobre.
- [2] J. Henry et B. Louro (1985) : C.R.A.S. Paris, t. 301, Série I, n° 16, (pp. 763-766).
- [3] P.A. Markowich, C. Ringhofer, S. Selberherr, E. Langer (1983) : "An asymptotic analysis of single junction semiconductor devices". MRC-Technical Summary Report # 2527.
- [4] P.C. Fife (1973) : "Semilinear elliptic boundary value problems with small parameters". Arch. Rat. mech. Anal., 52, pp. 205-232.
- [5] M.S. Mock (1972) : "Analysis of mathematical models of semiconductor devices". Boole Press.
- [6] O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Ural'tseva (1968) : "Equations aux dérivées partielles de type elliptique". Dunod.
- [7] A. Marrocco : "Simulations numériques dans la fabrication des circuits à semiconducteurs (Process modelling)". Rapport de recherche INRIA n° 305 (Mai 1984).

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

problème réduit et montrer que dans le cas de la polarisation inverse et lorsque la différence du potentiel tend vers  $+\infty$  en valeur absolue alors  $u(0)v(0)$  tend vers 0 et que dans le cas de la polarisation directe et lorsque la différence de potentiel tend vers  $-\infty$  en valeur absolue alors  $u(0)v(0)$  tend vers  $+\infty$ . La conjecture faite sur le comportement de  $e^{(\phi_p - \phi_n)(x_0)} = u(x_0)v(x_0)$  lorsque la différence de potentiel appliqué tend vers  $\pm\infty$  est donc vraie dans ce cas particulier.

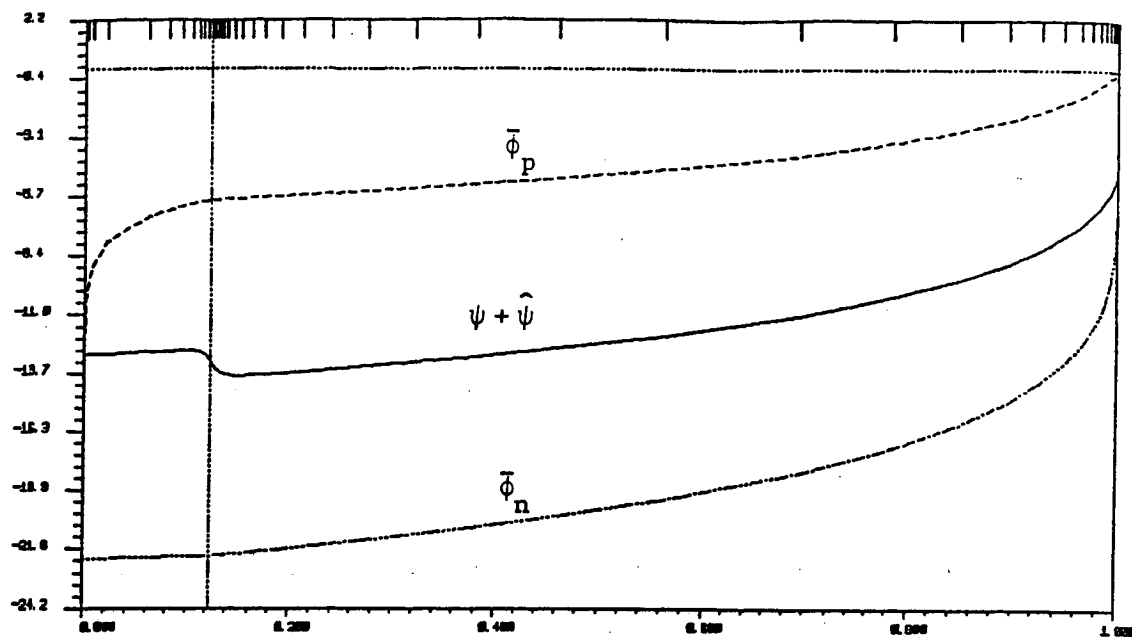
### Conclusion :

Le problème réduit, de couche limite et le problème réduit modifié sont des problèmes que l'on peut résoudre numériquement ; le problème le "plus coûteux" à résoudre numériquement étant le problème réduit (problème non linéaire couplé). L'obtention des résultats pour le problème réduit dans le cas de la polarisation inverse semble plus difficile, ce n'est pas le cas lors de la polarisation directe ; on donne une justification possible pour expliquer cette différence de comportement, en effet ; plusieurs paramètres interviennent : le petit paramètre  $\delta$ , le signe et l'ordre de grandeur de la différence de potentiel appliqué, ces paramètres interviennent sous la forme du terme  $\delta^4 e^{(\phi_p - \phi_n)(x_0)}$  (où  $x_0$  désigne l'abscisse normalisée de la jonction), on conjecture que le signe ainsi que l'ordre de grandeur de  $\phi_p - \phi_n$  à la jonction interviennent donc pour renforcer l'effet du petit paramètre  $\delta$  (cas de la polarisation inverse, on conjecture que le terme  $e^{(\phi_p - \phi_n)(x_0)}$  peut être "voisin de 0" lorsqu'en valeur absolue la différence de potentiel appliqué est "grande") ou pour le contrebalancer (cas de la polarisation directe, on conjecture que le terme  $e^{(\phi_p - \phi_n)(x_0)}$  peut être "grand" lorsque la différence de potentiel appliqué en valeur absolue est "grande"). Des résultats numériques obtenus et des conjectures faites, on en déduit que le développement asymptotique n'est valable dans le cas de la polarisation inverse que pour de faibles différences de potentiel appliqué, alors que dans le cas de la polarisation directe il semble valable même pour de fortes différences de potentiel appliqués.

Il est donc important lors de l'analyse asymptotique de ne pas négliger l'effet du petit paramètre  $\delta$  ainsi que le signe et l'ordre de grandeur du potentiel appliqué. Néanmoins la technique du développement asymptotique permet d'obtenir de bons résultats surtout dans le cas de la polarisation directe et de mieux comprendre l'influence des différents paramètres :  $\delta$ ,  $\epsilon^{1/2}$ , le signe et l'ordre de grandeur en valeur absolue de la différence du potentiel appliqué.

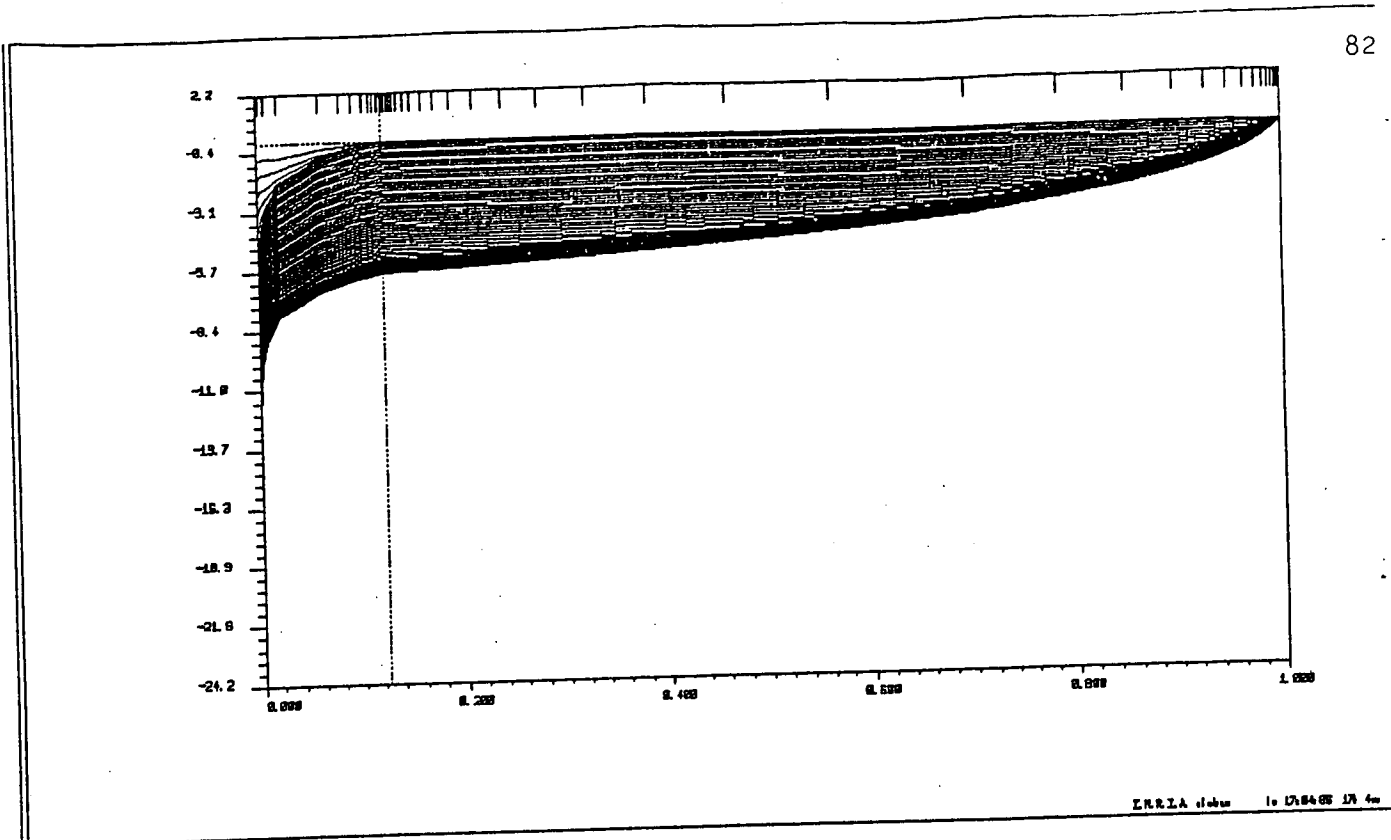
### Remarque :

Dans le cas d'une jonction symétrique, i.e :  $\Omega = ]-1,1[$  la jonction est située en  $x = 0$ , le dopage  $N$  vérifie :  $N = -1$  sur  $[-1,0[$  et  $N = 1$  sur  $]0,1]$ , de plus  $u_A(-1) = -u_A(1)$  alors on peut résoudre analytiquement le

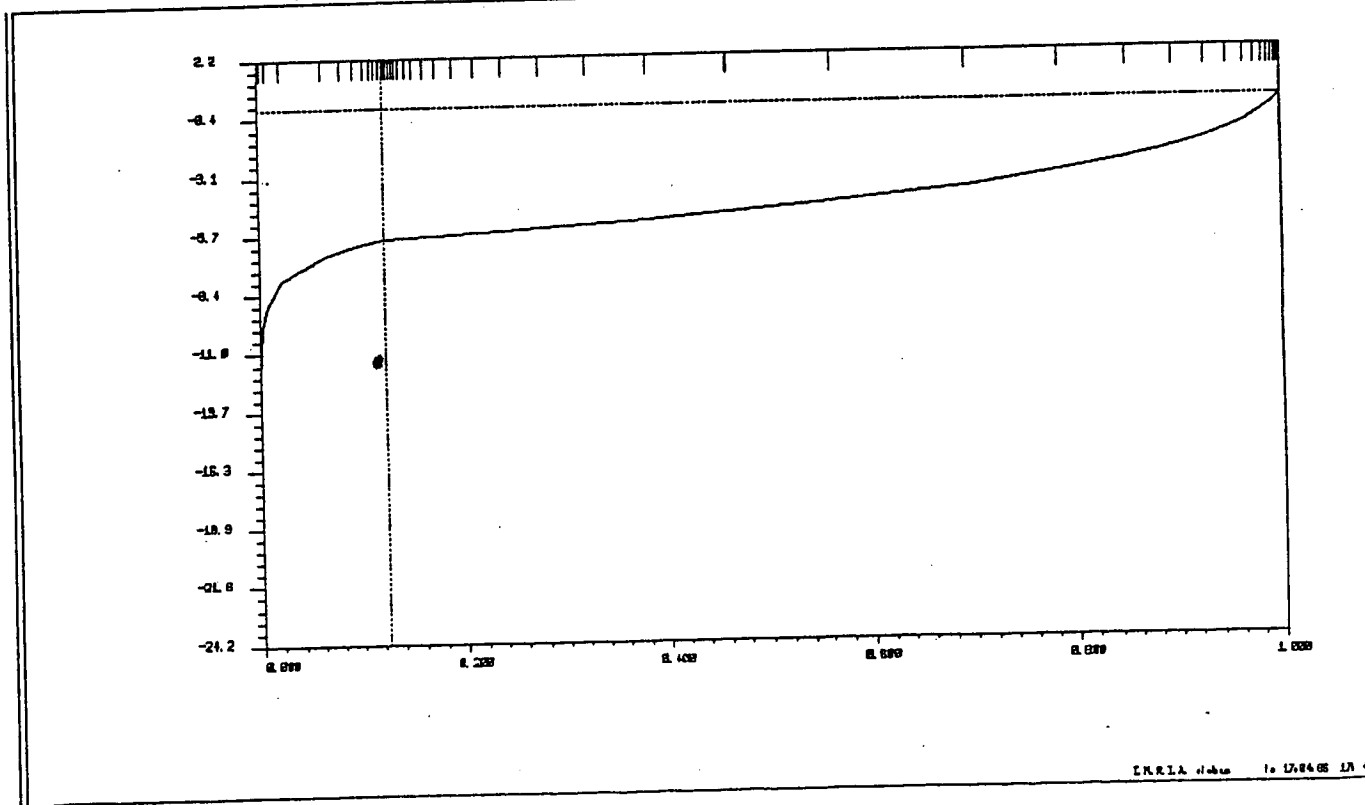


ERRATA : voir le chapitre 17 de la

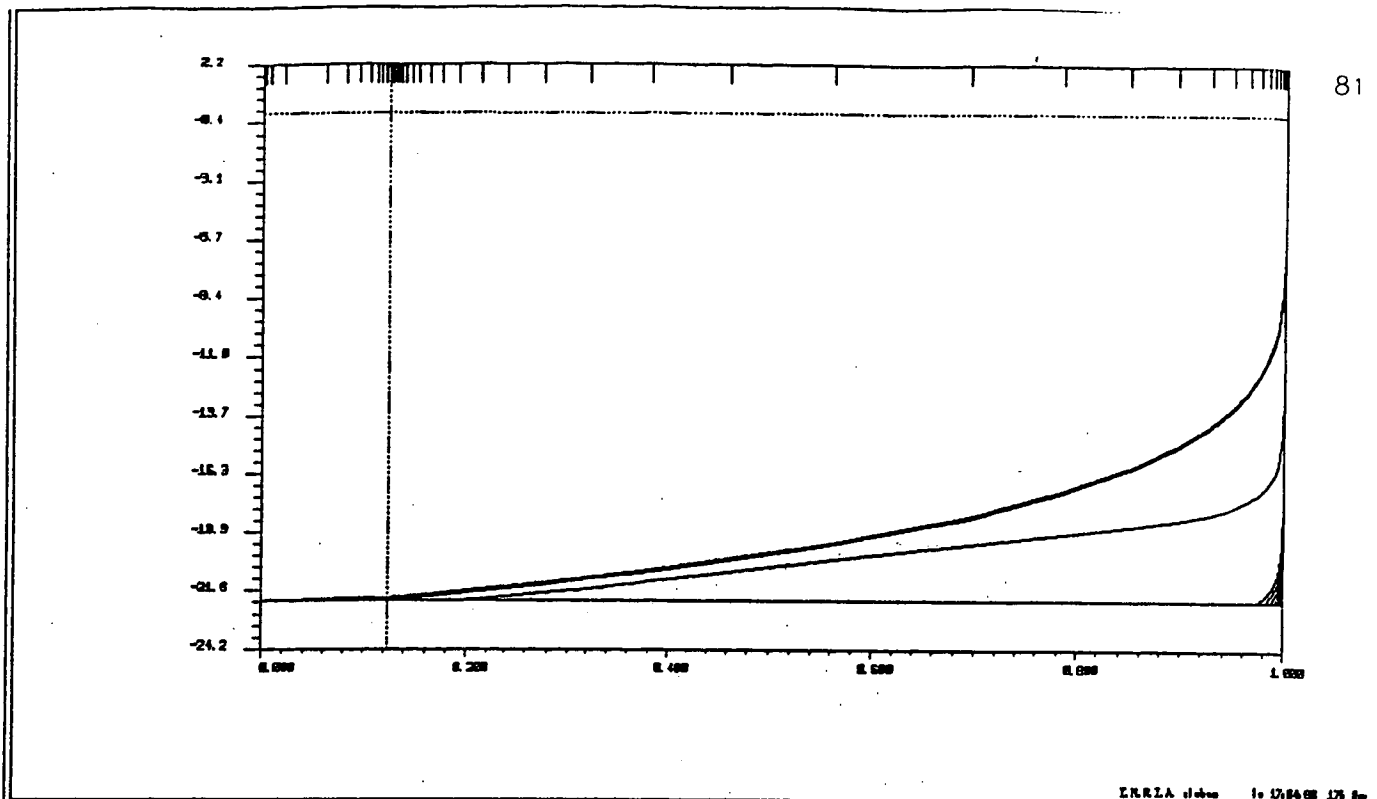
$\psi + \hat{\psi}$ ,  $\bar{\phi}_n$ ,  $\bar{\phi}_p$  (problème réduit modifié) solution finale,  $u_A(0) = -0.57$   
(polarisation directe).



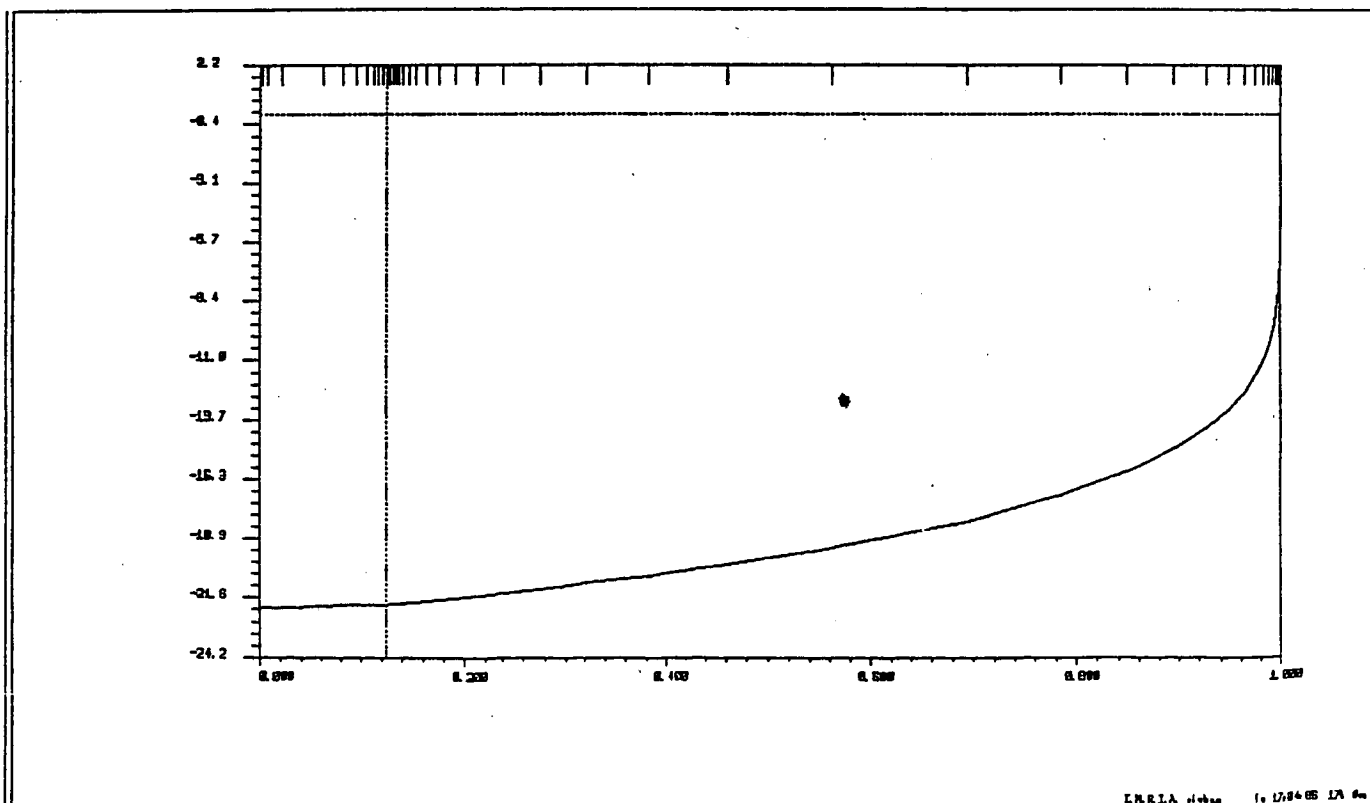
évolution de  $\bar{\phi}_p$  au cours des itérations (problème réduit modifié),  $u_A(0) = -0.57$  (polarisation directe) (initialisation type 1).



$\bar{\phi}_p$  solution finale,  $u_A(0) = -0.57$  (polarisation directe).

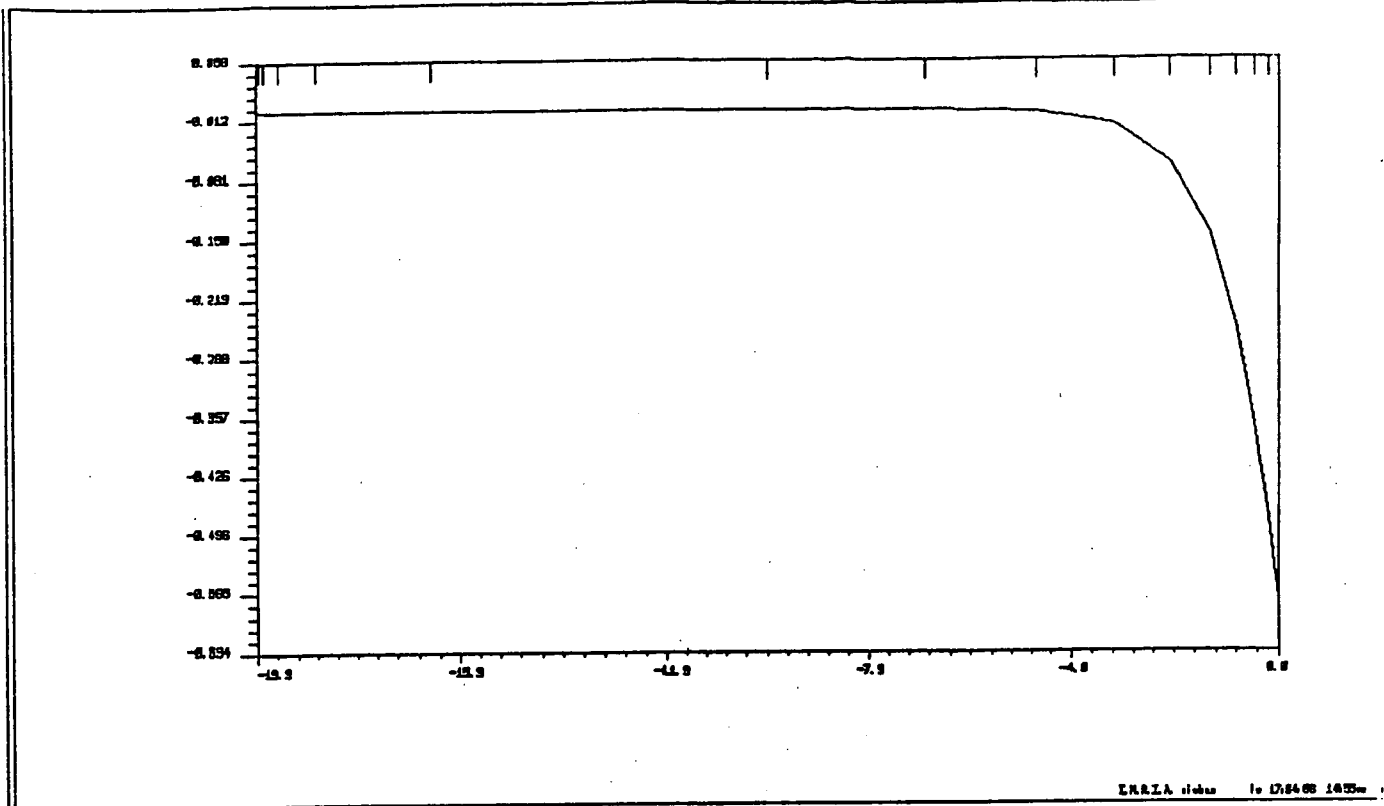


évolution au cours des itérations de  $\bar{\phi}_n$  (problème réduit modifié),  $u_A(0) = -0.57$  (polarisation directe) (initialisation type 1).

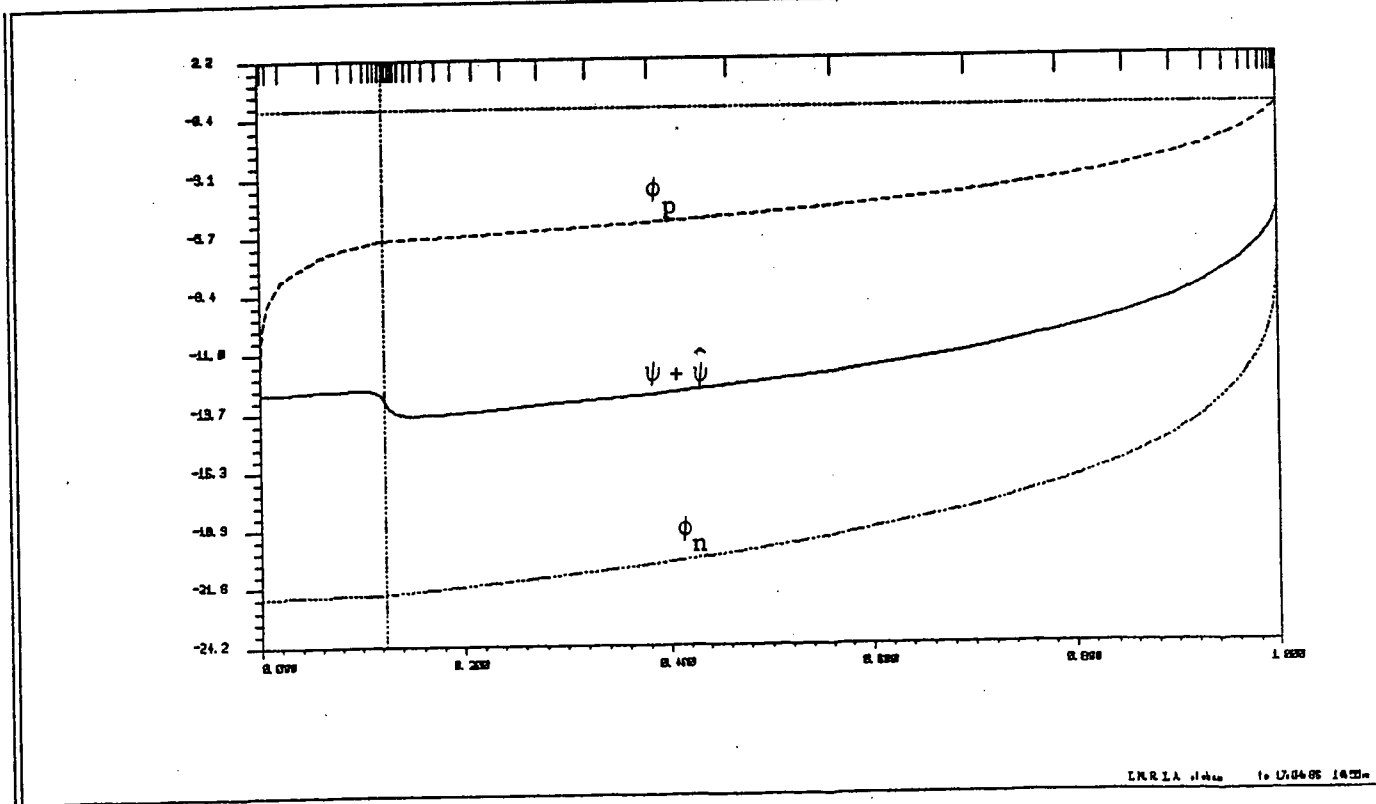


$\bar{\phi}_n$  solution finale,  $u_A(0) = -0.57$  (polarisation directe).

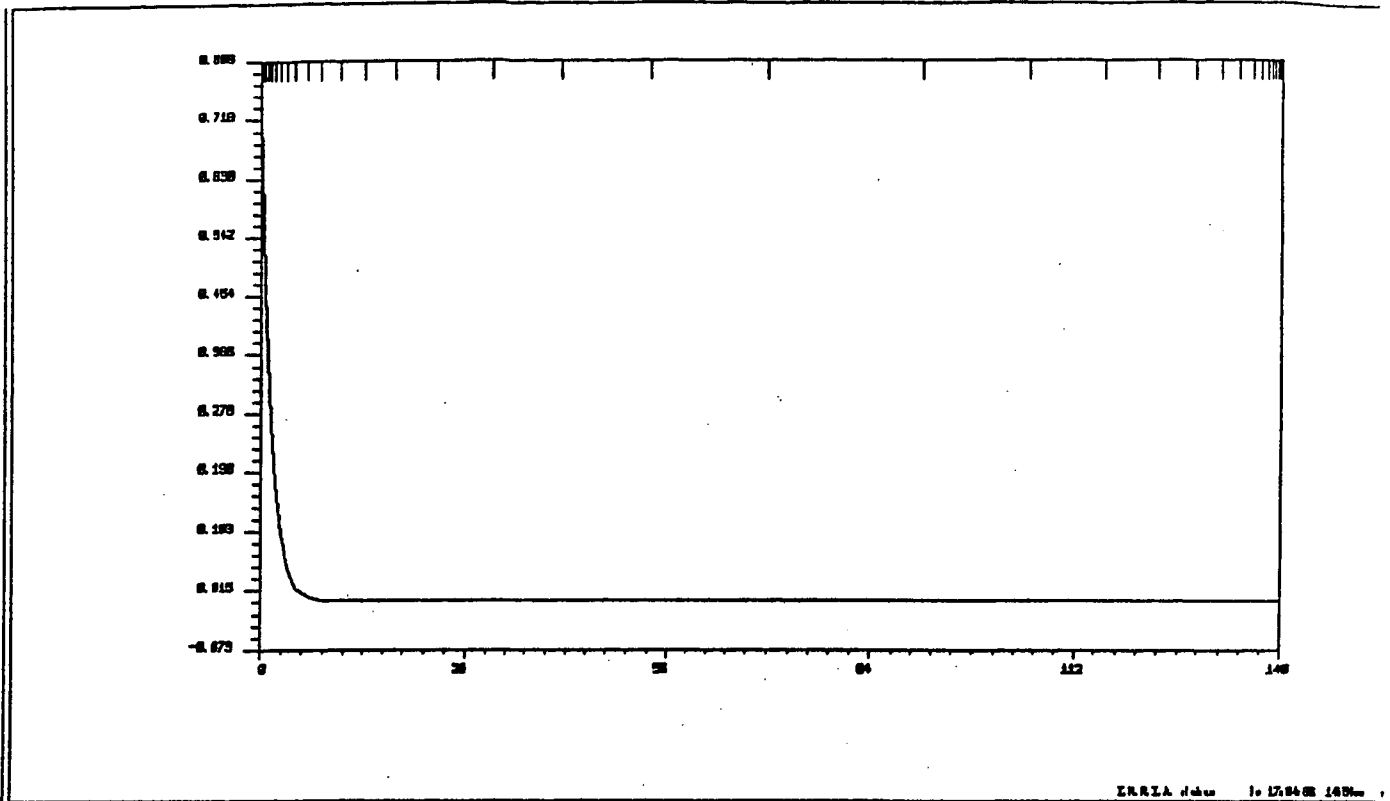




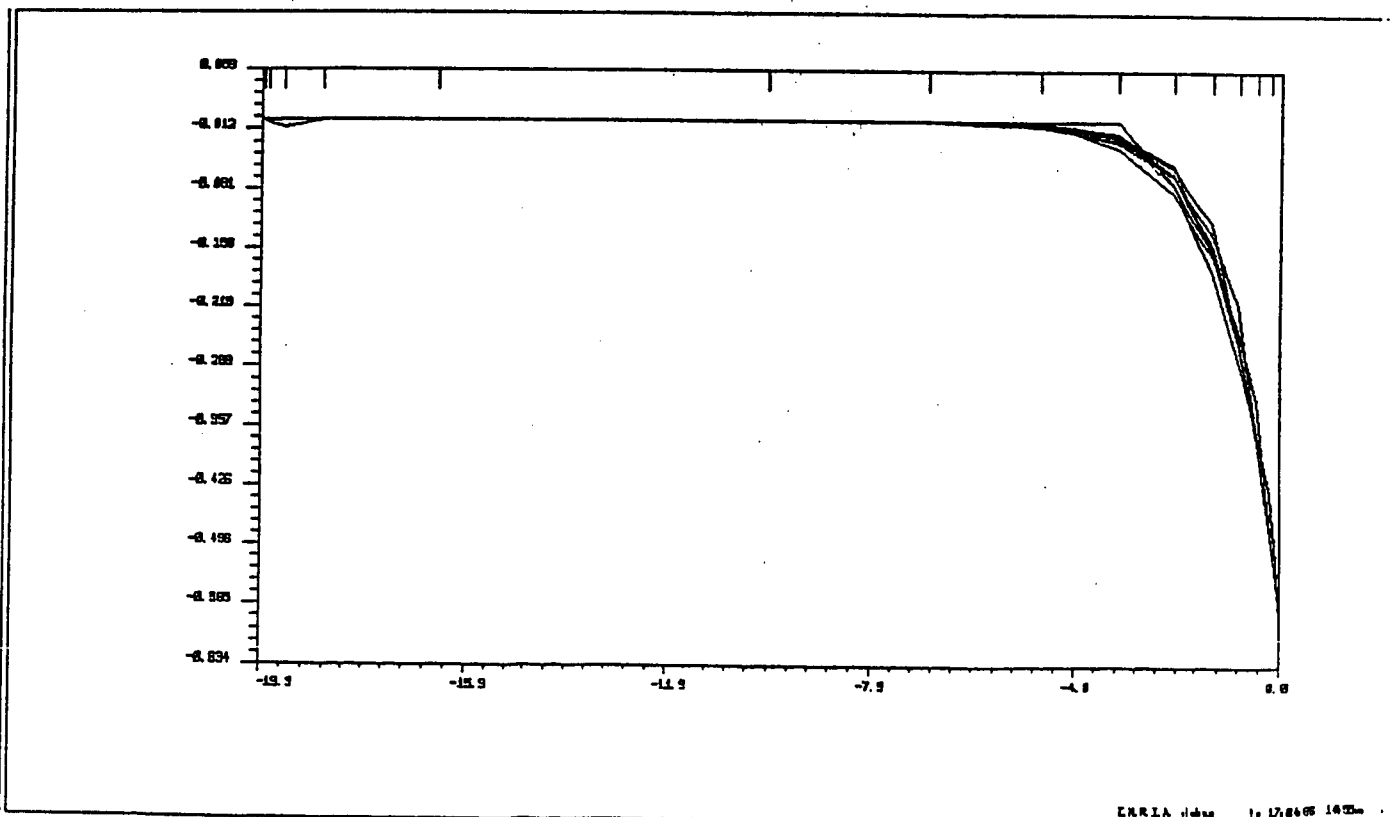
$\hat{\psi}$  à gauche de la jonction, solution finale,  $u_A(0) = -0.57$  (polarisation directe).



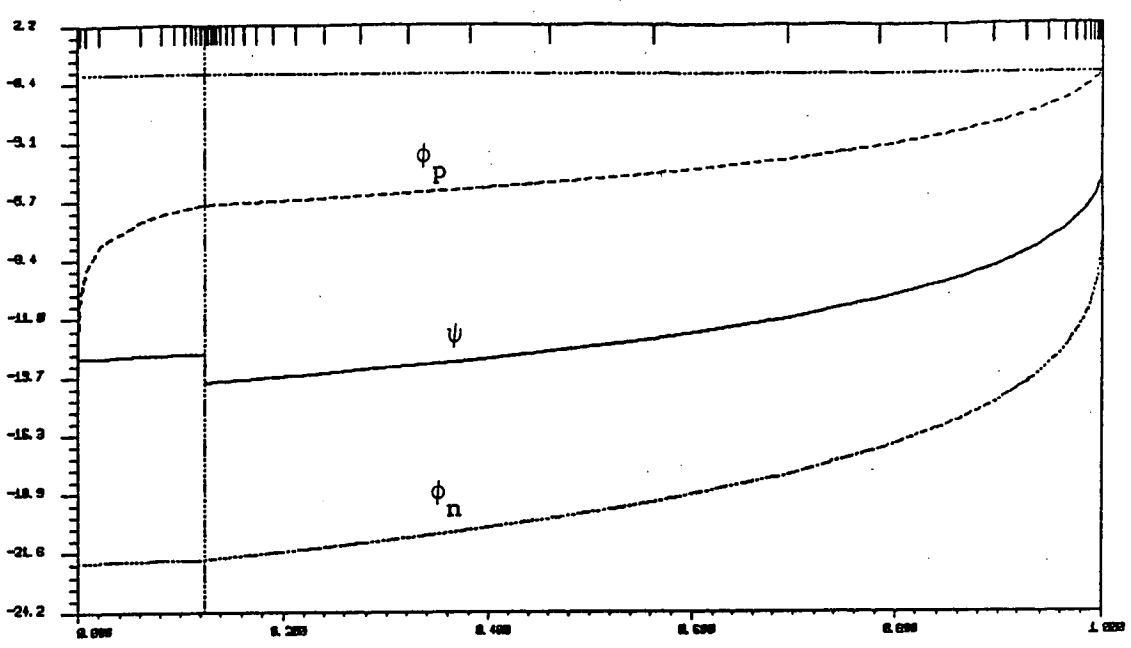
$\hat{\psi} + \psi$ ,  $\phi_n$ ,  $\phi_p$  (problème réduit) solution finale,  $u_A(0) = -0.57$  (polarisation directe).



$\hat{\psi}$  à droite de la jonction, solution finale,  $u_A(0) = -0.57$  (polarisation directe).

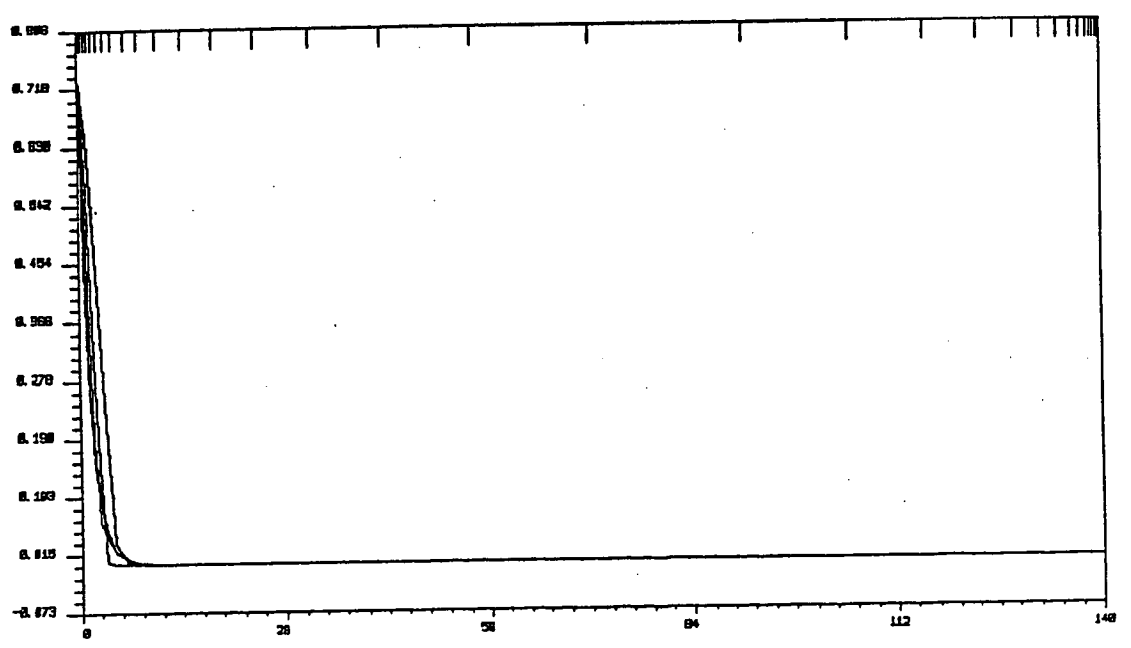


évolution de  $\hat{\psi}$  à gauche de la jonction au cours des itérations  $u_A(0) = -0.57$  (polarisation directe) (initialisation type 0).



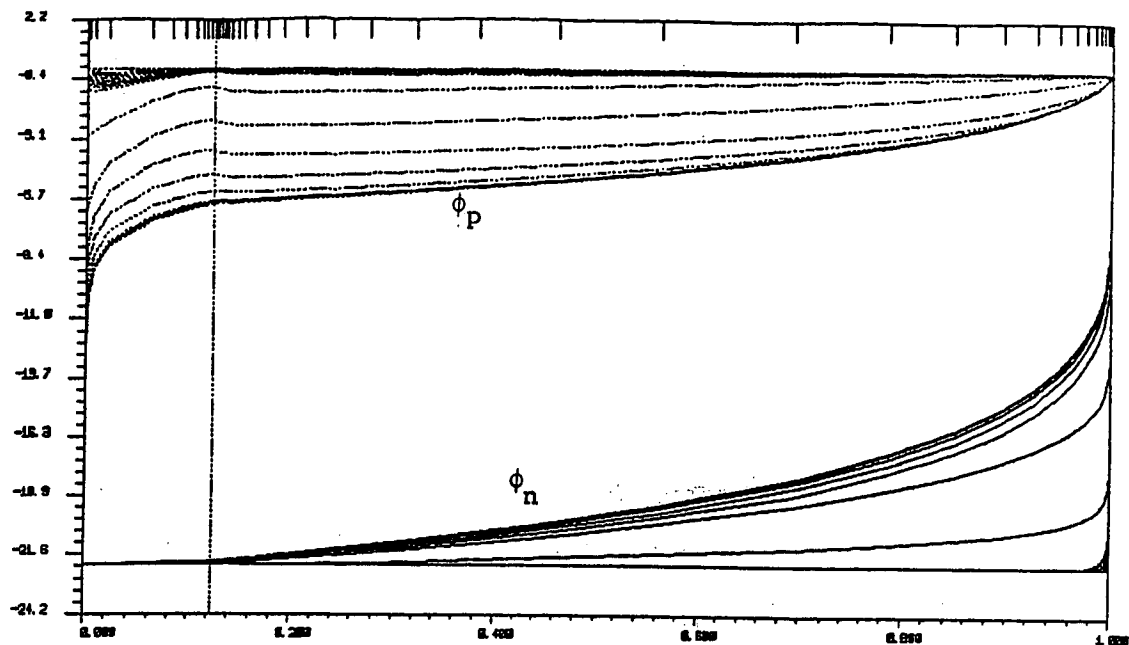
ENRRIA d'essai No 172405 1435m

$\psi, \phi_n, \phi_p$  (problème réduit)  $u_A(0) = -0.57$  (polarisation directe) solution finale.



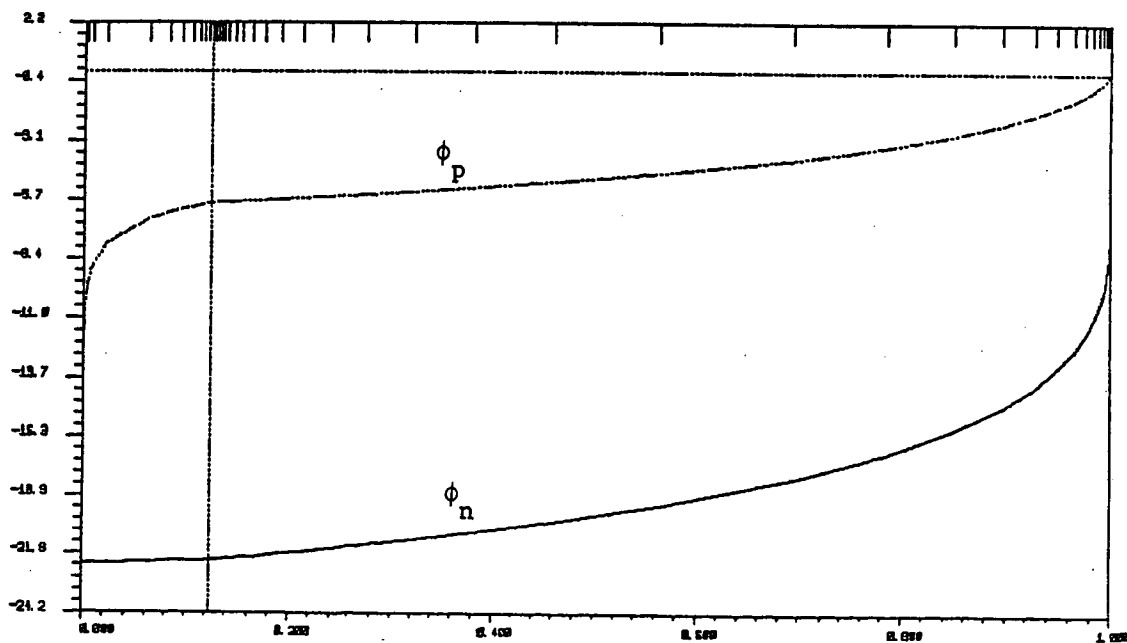
ENRRIA d'essai No 172405 1435m

évolution de  $\hat{\psi}$  à droite de la jonction au cours des itérations  
 $u_A(0) = -0.57$  (polarisation directe) (initialisation type 0).



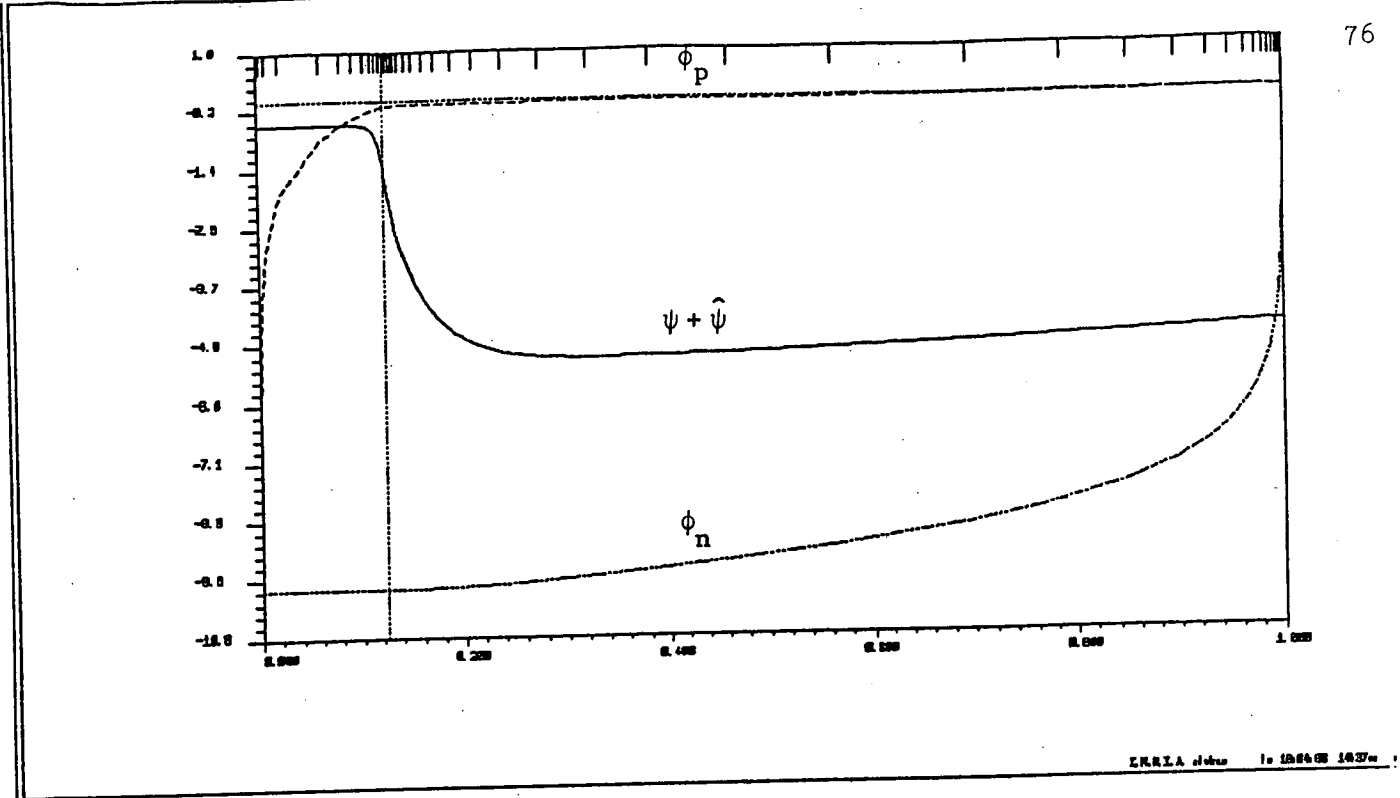
ENRIA d'Orsay le 15/04/88 14:32

$\phi_n, \phi_p$  (problème réduit)  $u_A(0) = -0.57$  (polarisation directe)  
 évolution de  $\phi_n$  et  $\phi_p$  au cours des itérations (initialisation type 1).

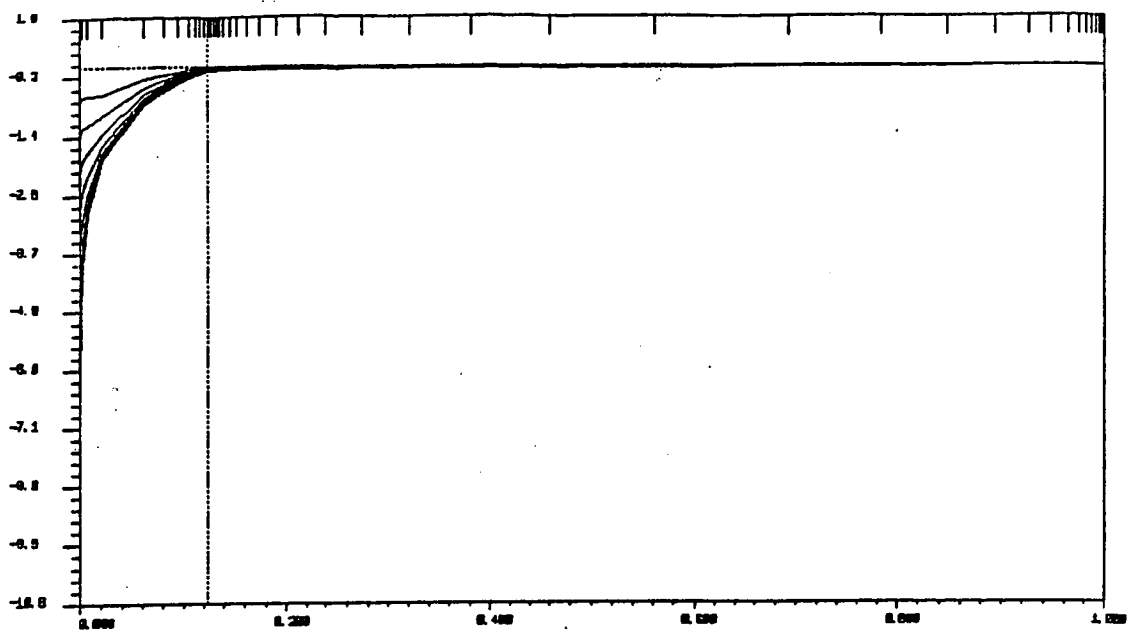


ENRIA d'Orsay le 15/04/88 14:32

solution du problème réduit ( $\phi_n, \phi_p$ )  $u_A(0) = -0.57$  (polarisation directe)

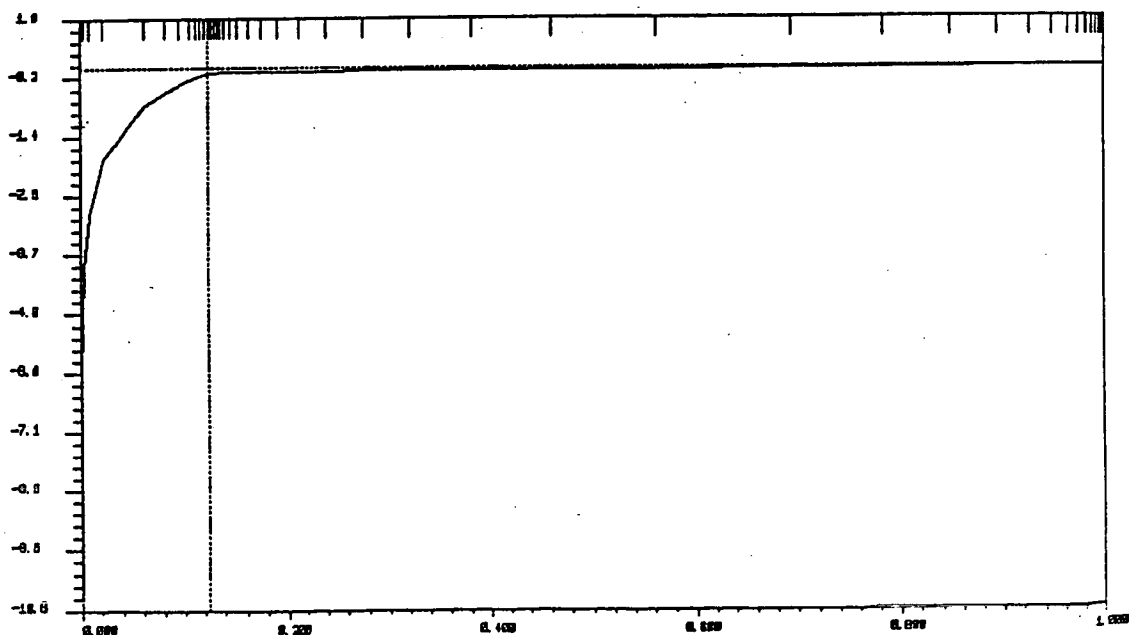


$\psi + \hat{\psi}$ ,  $\phi_n$ ,  $\phi_p$  (problème réduit modifié) solution finale,  $u_A(0) = -0.25$   
 (polarisation directe).



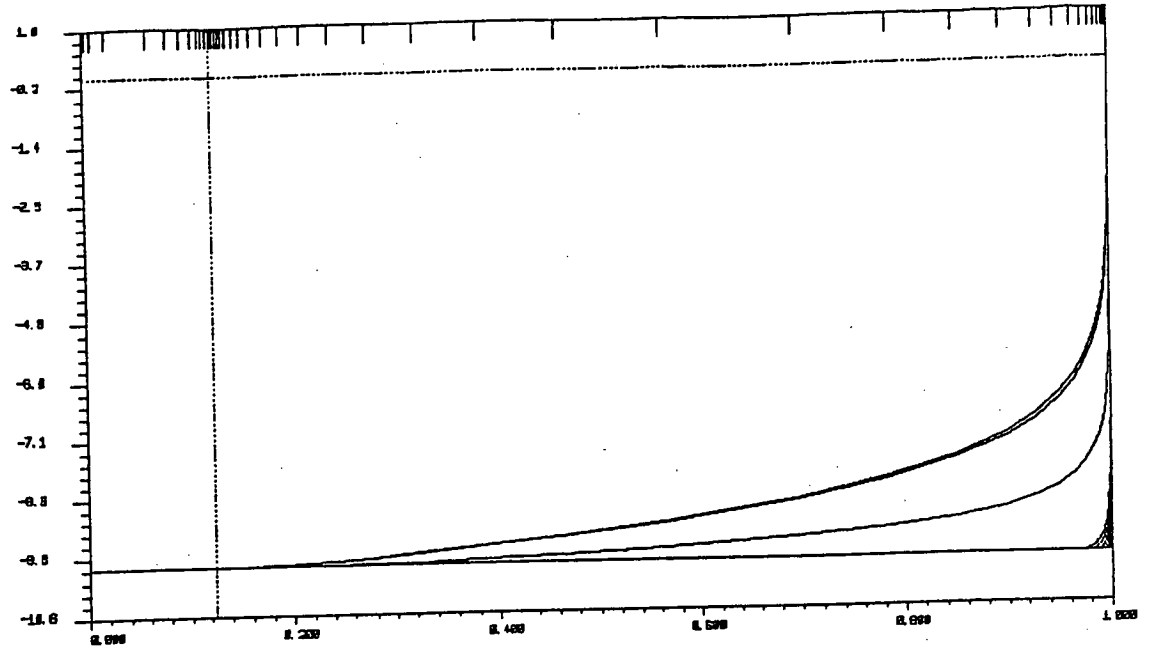
ENRRIA et al. 1984 1437

évolution de  $\bar{\phi}_p$  au cours des itérations (problème réduit modifié)  $u_A(0) = -0.25$   
(polarisation directe) (initialisation type 1).



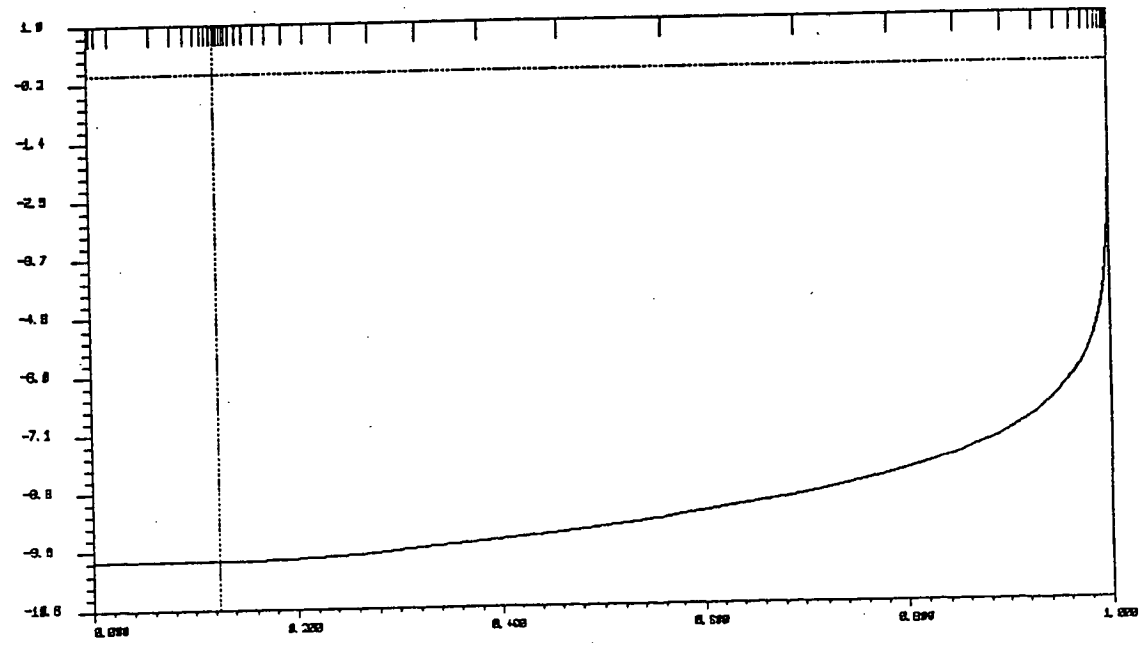
ENRRIA et al. 1984 1437

$\bar{\phi}_p$  solution finale,  $u_A(0) = -0.25$  (polarisation directe).



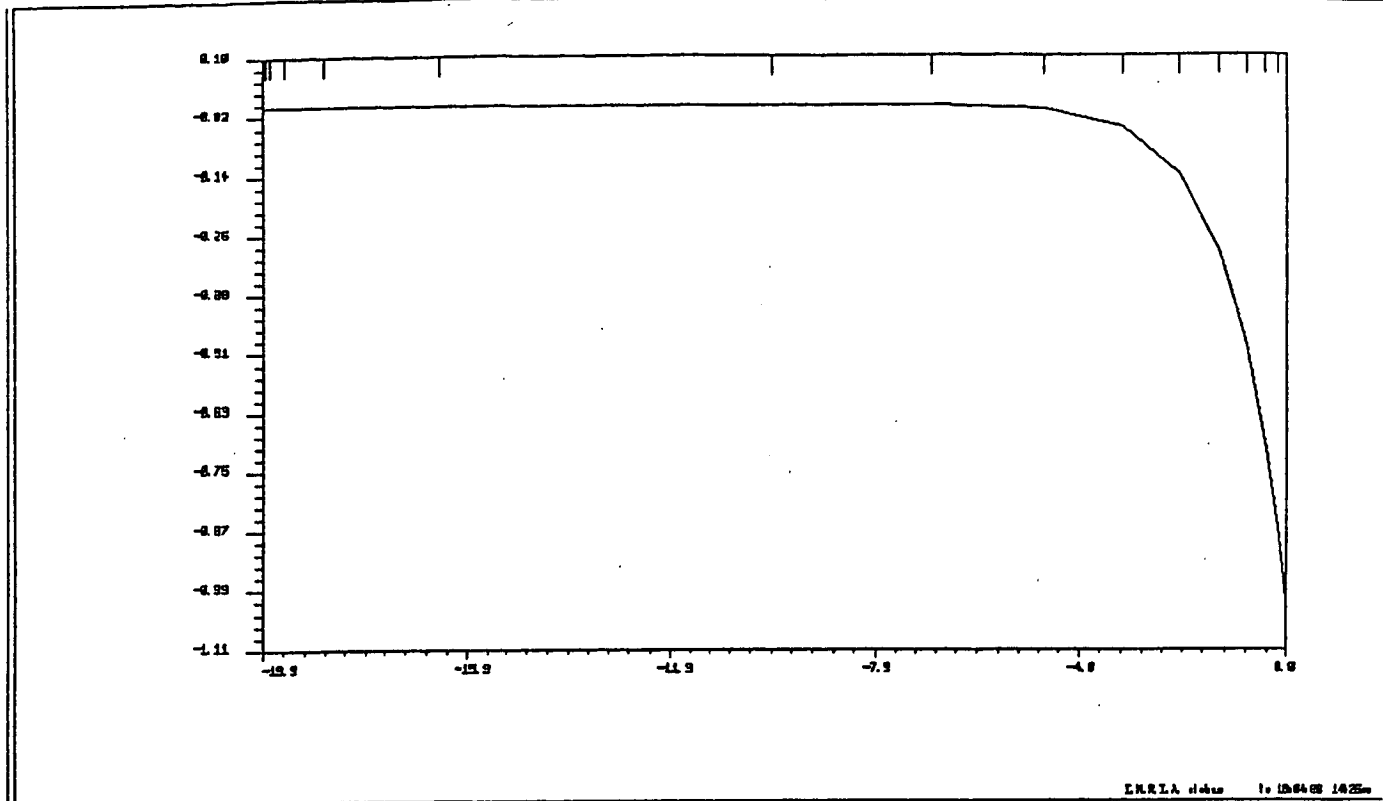
ENRIA - Paris le 10/04/88 14:25

évolution au cours des itérations de  $\bar{\phi}_n$  (problème réduit modifié),  $u_A(0) = -0.25$  (polarisation directe) (initialisation type 1).

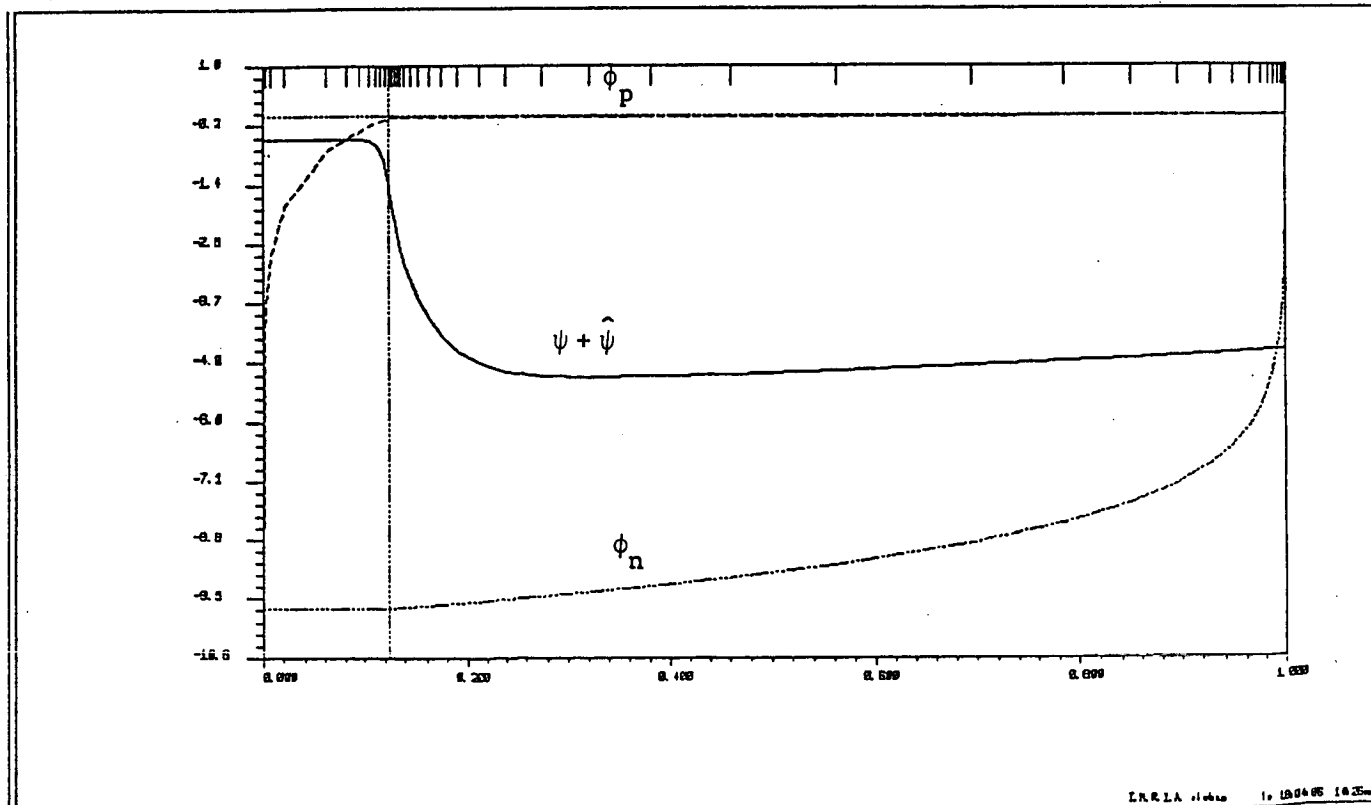


ENRIA - Paris le 10/04/88 14:25

$\bar{\phi}_n$  solution finale,  $u_A(0) = -0.25$  (polarisation directe).

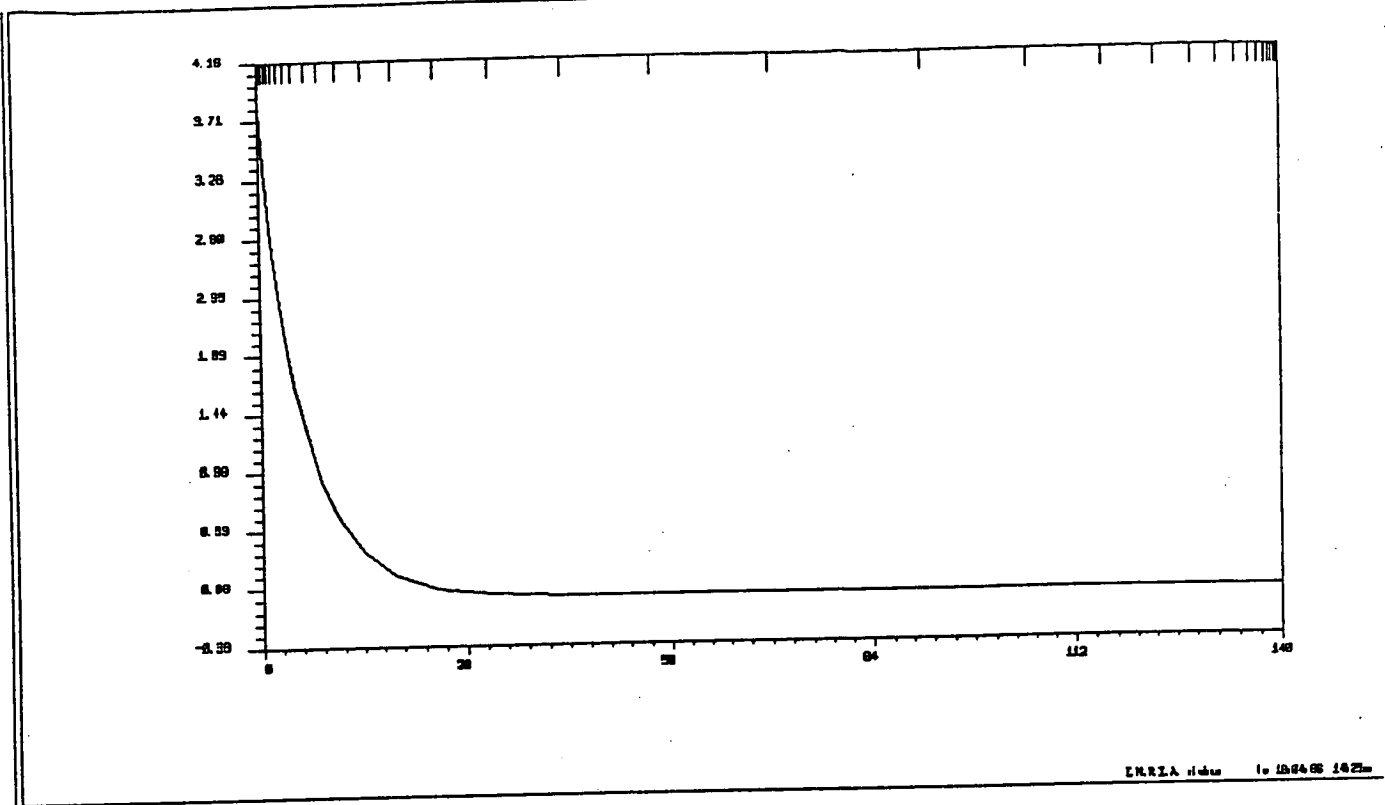


$\hat{\psi}$  à gauche de la jonction, solution finale,  $u_A(0) = -0.25$  (polarisation directe).

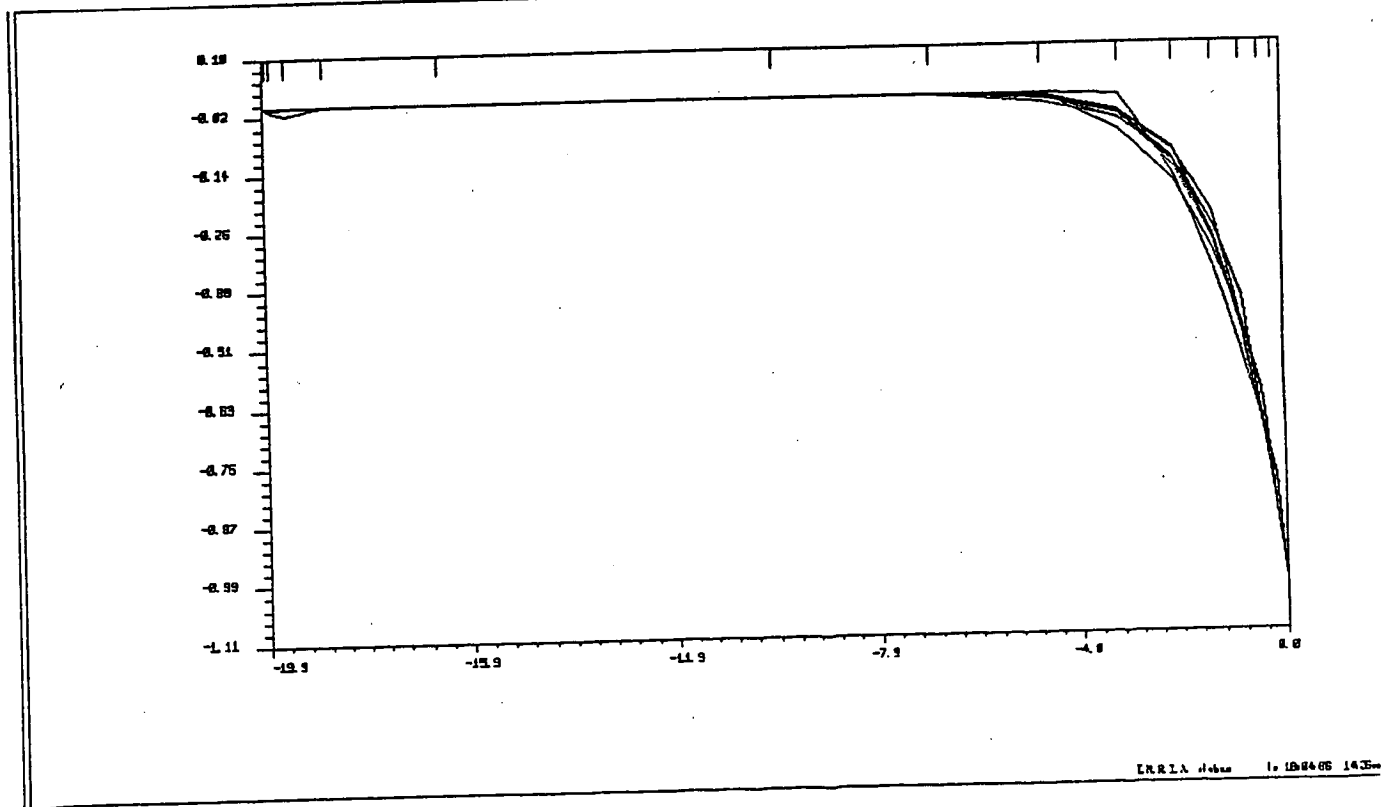


$\psi + \hat{\psi}$ ,  $\phi_n$ ,  $\phi_p$  (problème réduit), solution finale,  $u_A(0) = -0.25$  (polarisation directe).

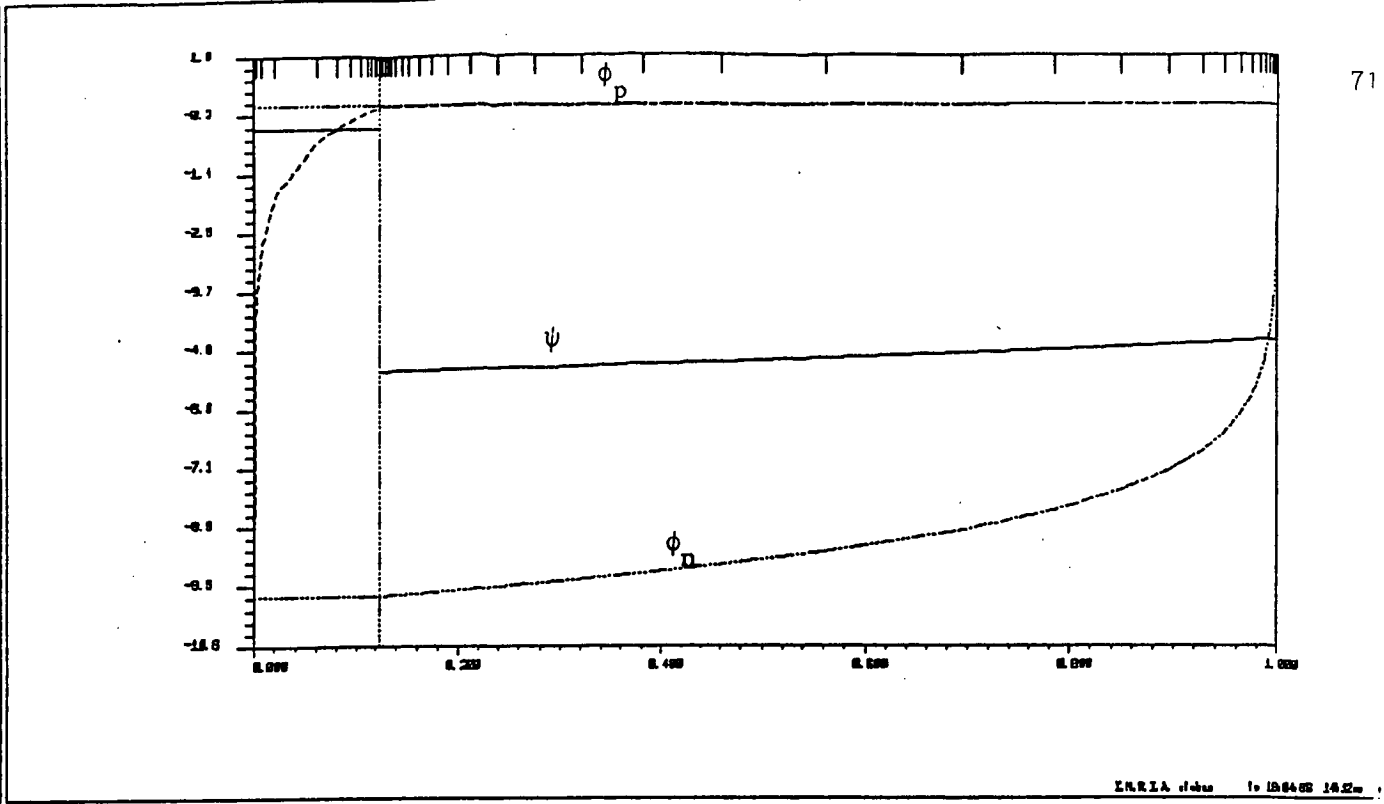




$\hat{\psi}$  à droite de la jonction, solution finale,  $u_A(0) = -0.25$  (polarisation directe).

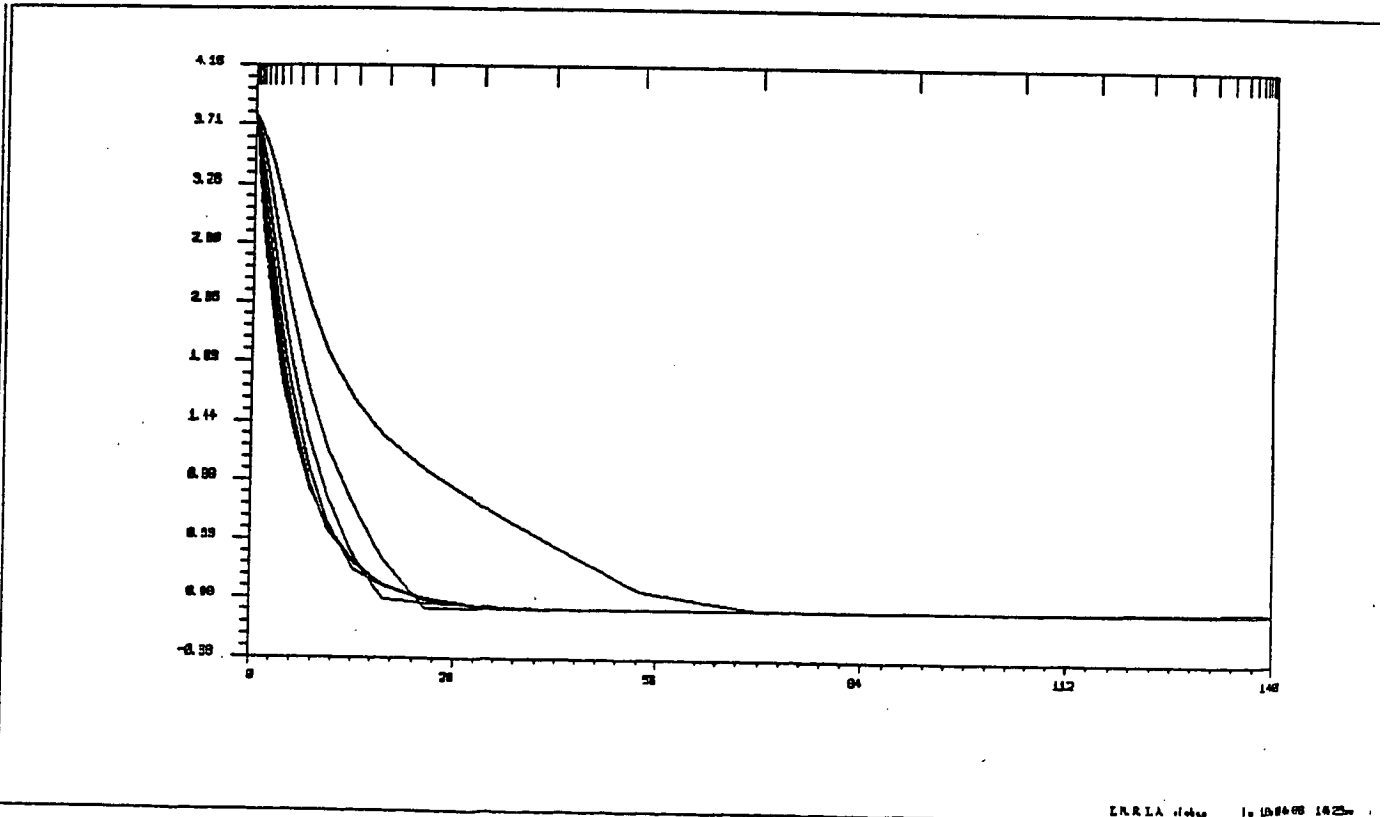


évolution de  $\hat{\psi}$  à gauche de la jonction au cours des itérations  
 $u_A(0) = -0.25$  (polarisation directe) (initialisation type 0).



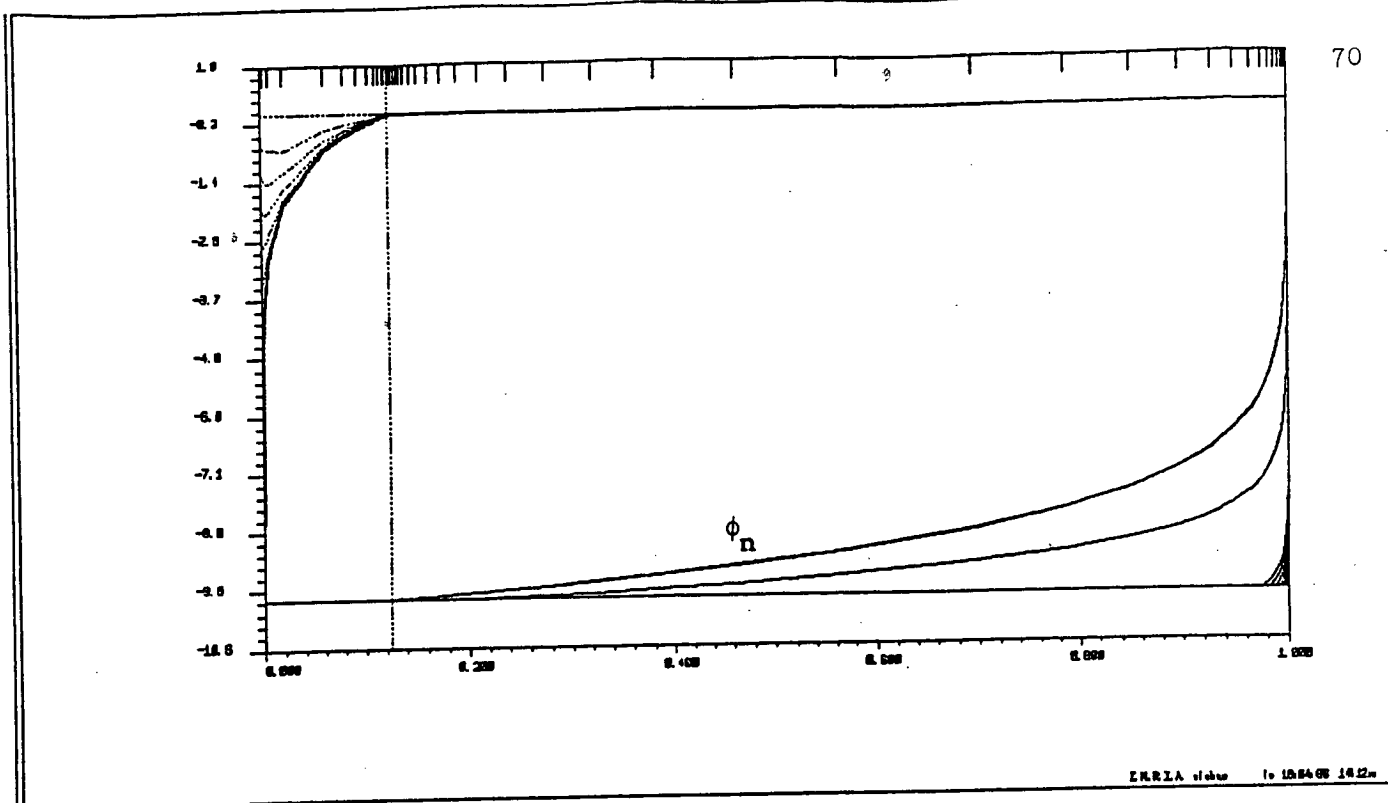
INRIA d'été 1984-85 142

$\psi, \phi_n, \phi_p$  (problème réduit)  $u_A(0) = -0.25$  (polarisation directe)  
solution finale.

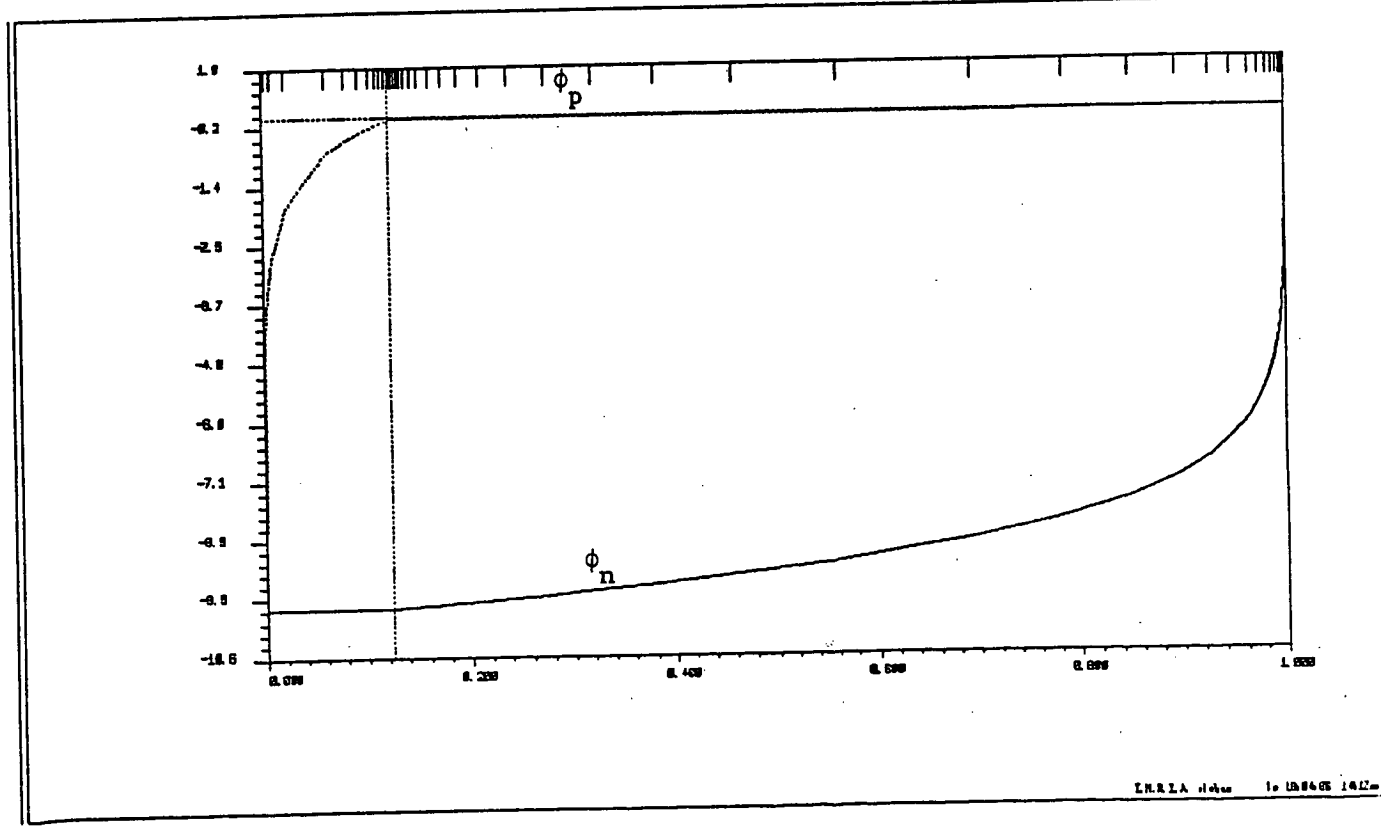


INRIA d'été 1984-85 142

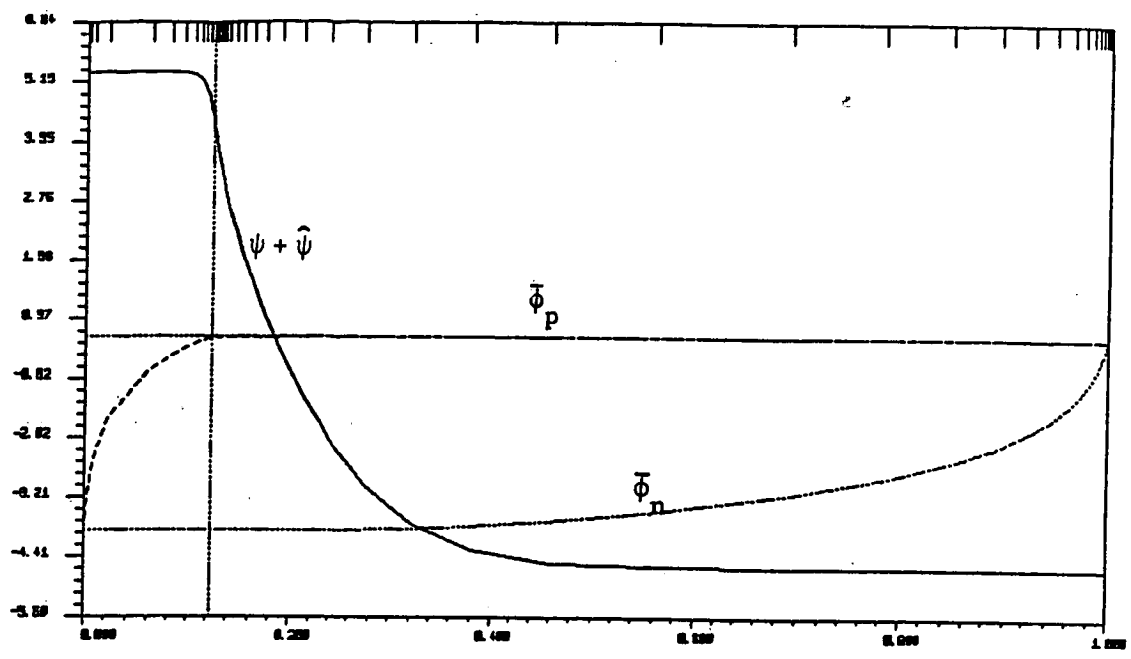
évolution de  $\hat{\psi}$  à droite de la jonction au cours des itérations  
 $u_A(0) = -0.25$  (polarisation directe) (initialisation type 0).



$\phi_n, \phi_p$  (problème réduit)  $u_A(0) = -0.25$  (polarisation directe)  
 évolution de  $\phi_n$  et  $\phi_p$  au cours des itérations (initialisation type 1).

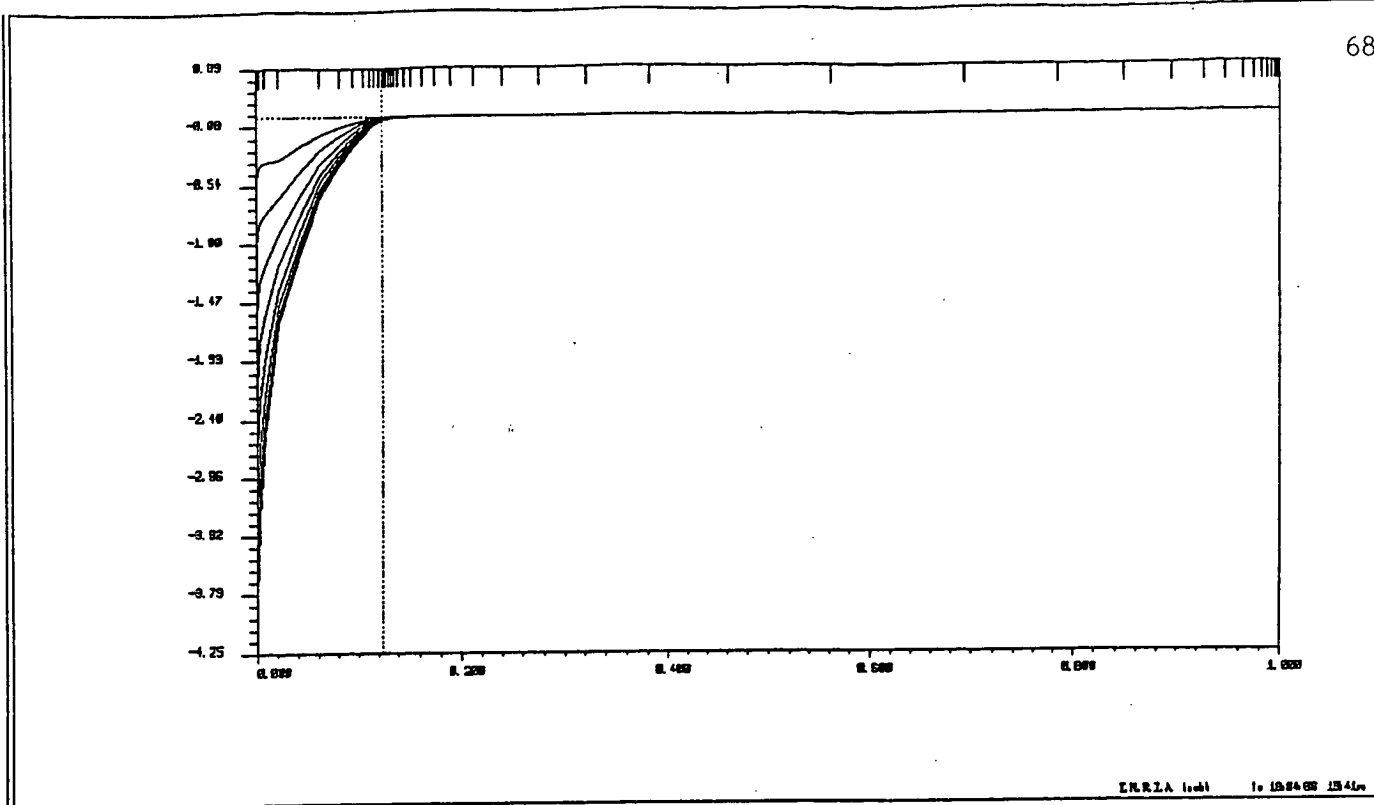


solution du problème réduit ( $\phi_n, \phi_p$ )  $u_A(0) = -0.25$  (polarisation directe)

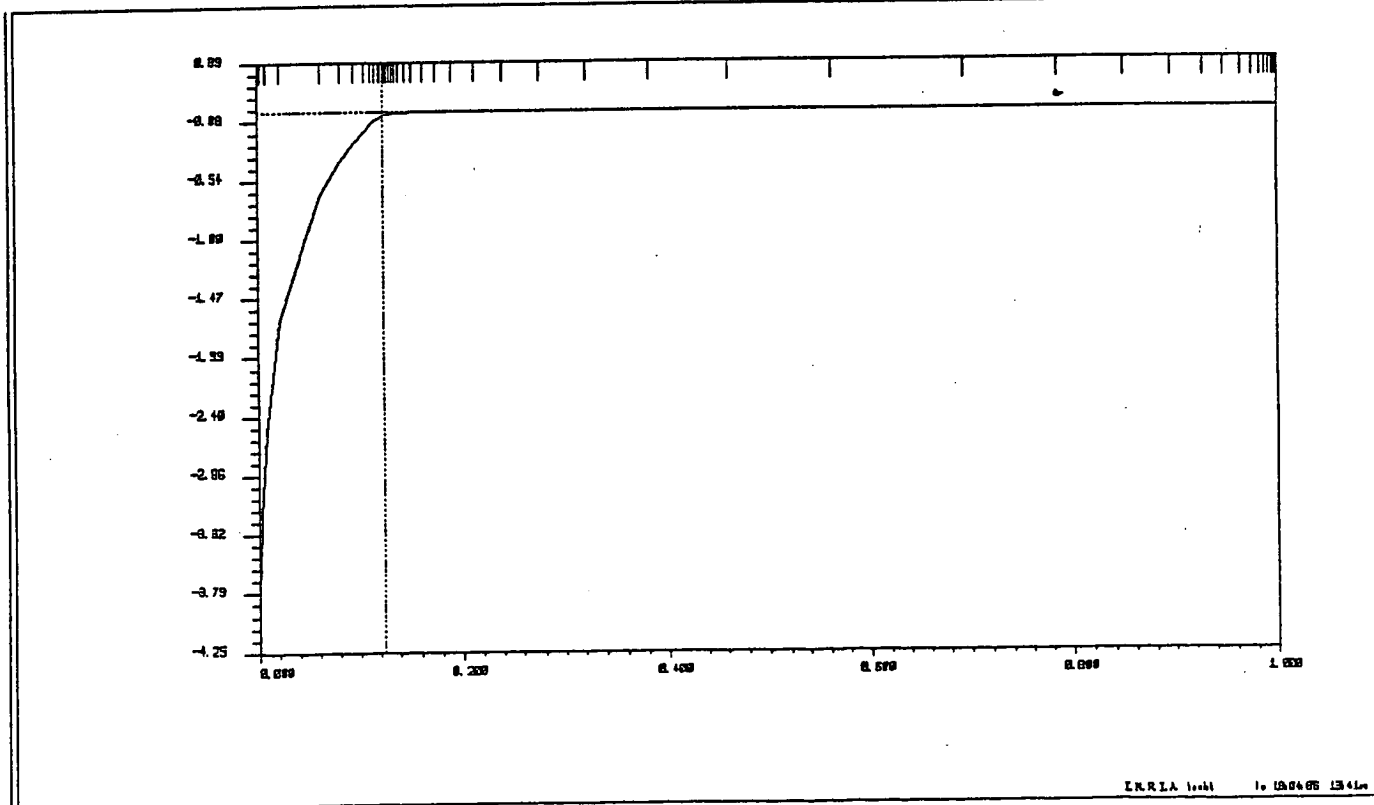


ERRATA level 10 120000 1204m

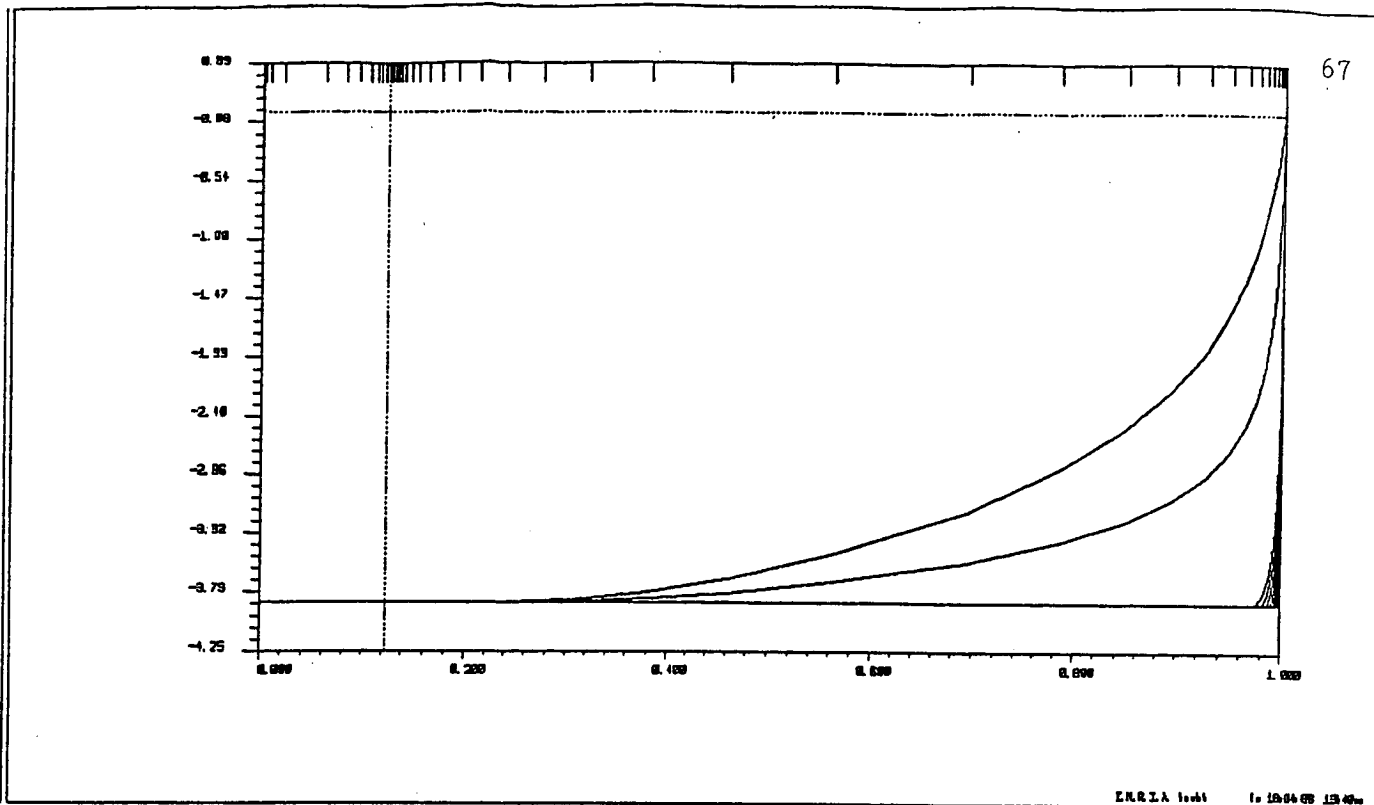
$\psi + \hat{\psi}, \bar{\phi}_n, \bar{\phi}_p$  (problème réduit modifié) solution finale,  $u_A(0) = -0.1$  (polarisation directe).



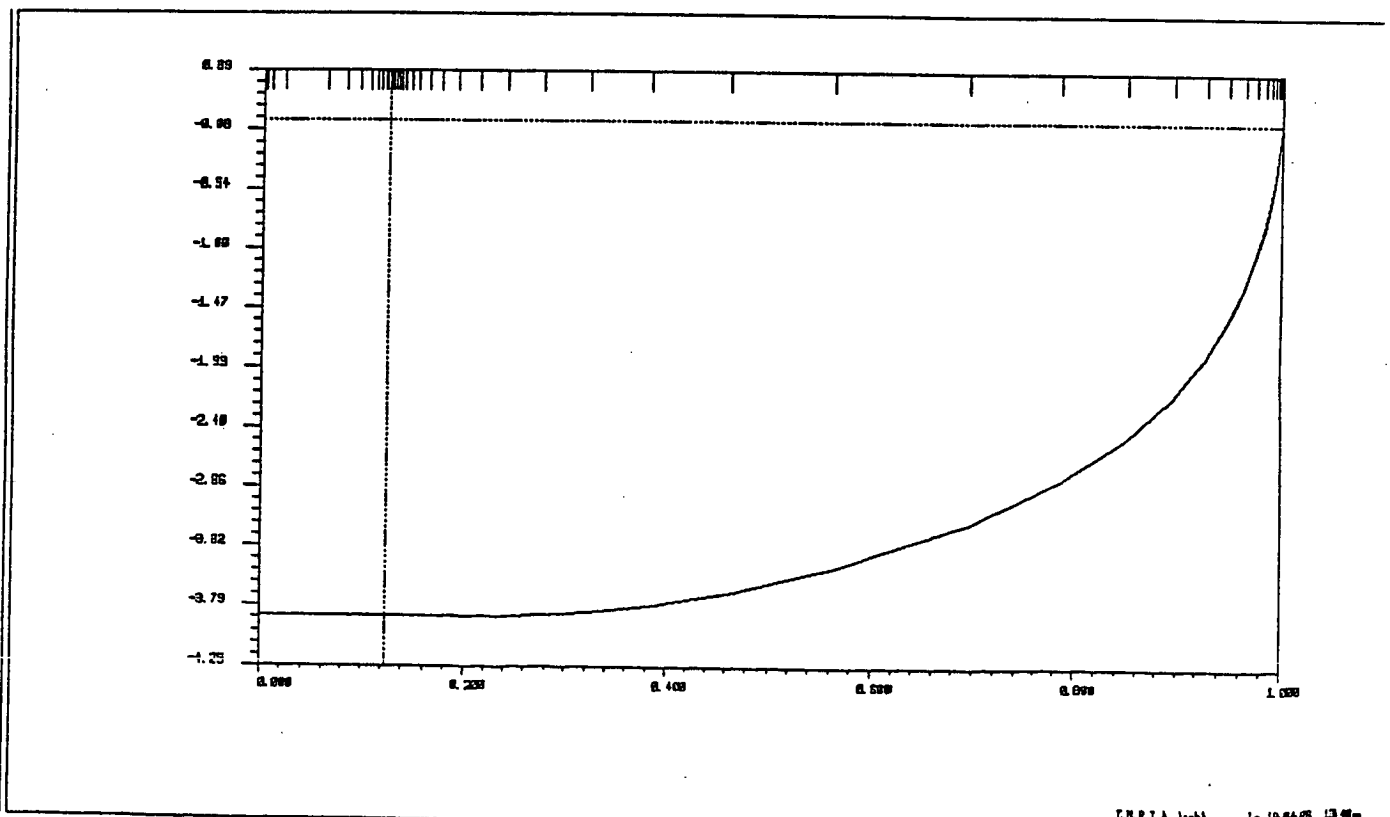
évolution de  $\bar{\phi}_p$  au cours des itérations (problème réduit modifié),  $u_A(0) = -0.1$



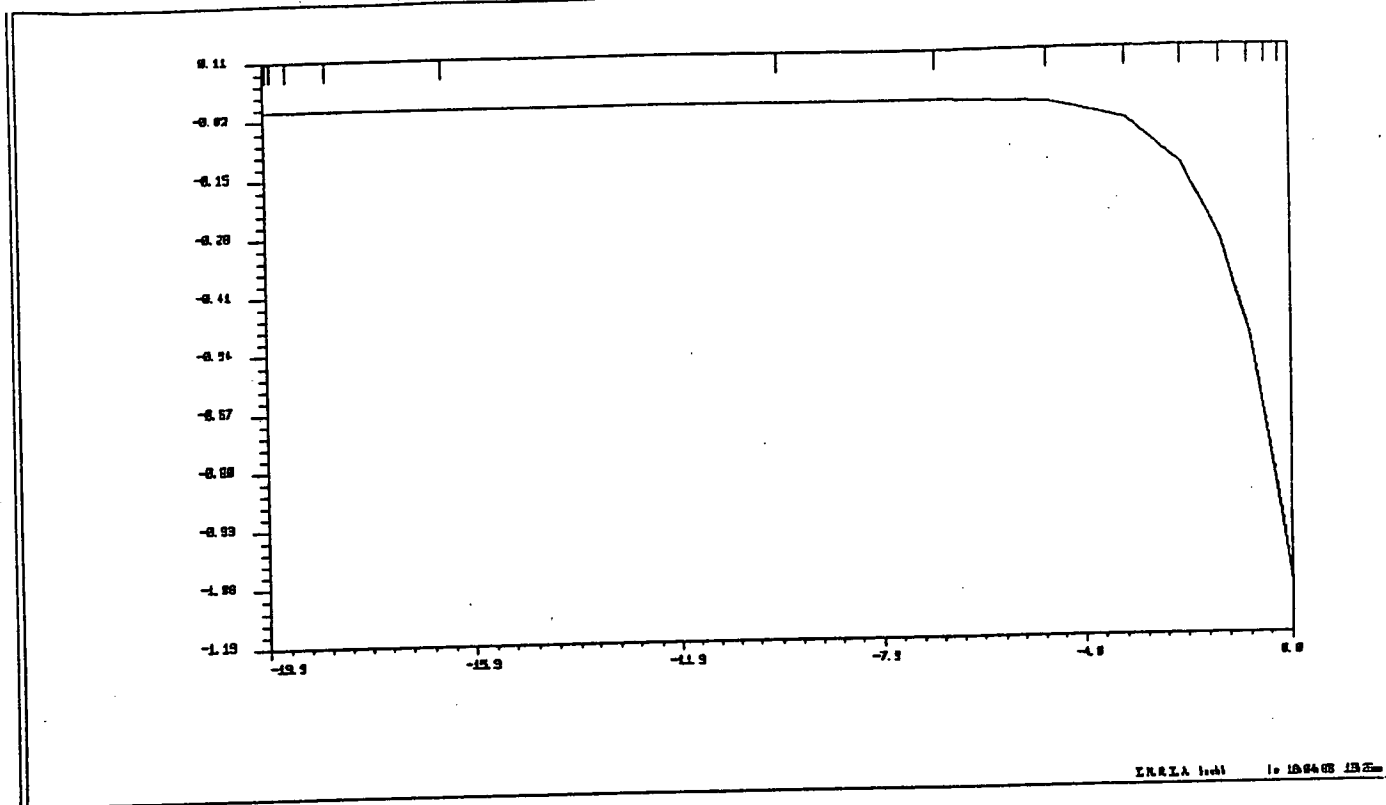
$\bar{\phi}_p$  solution finale,  $u_A(0) = -0.1$  (polarisation directe).



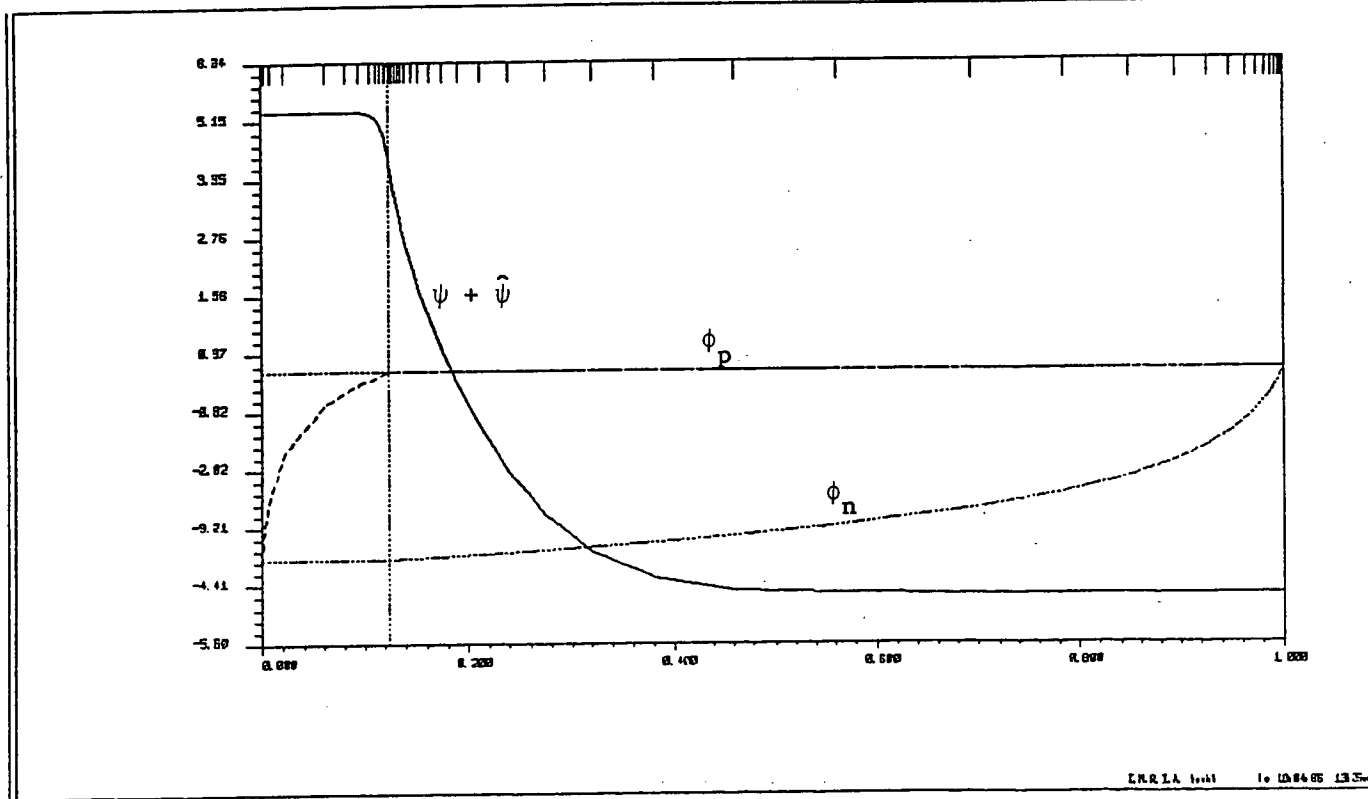
évolution au cours des itérations de  $\bar{\phi}_n$  (problème réduit modifié),  $u_A(0) = -0.1$  (polarisation directe) (initialisation type 1).



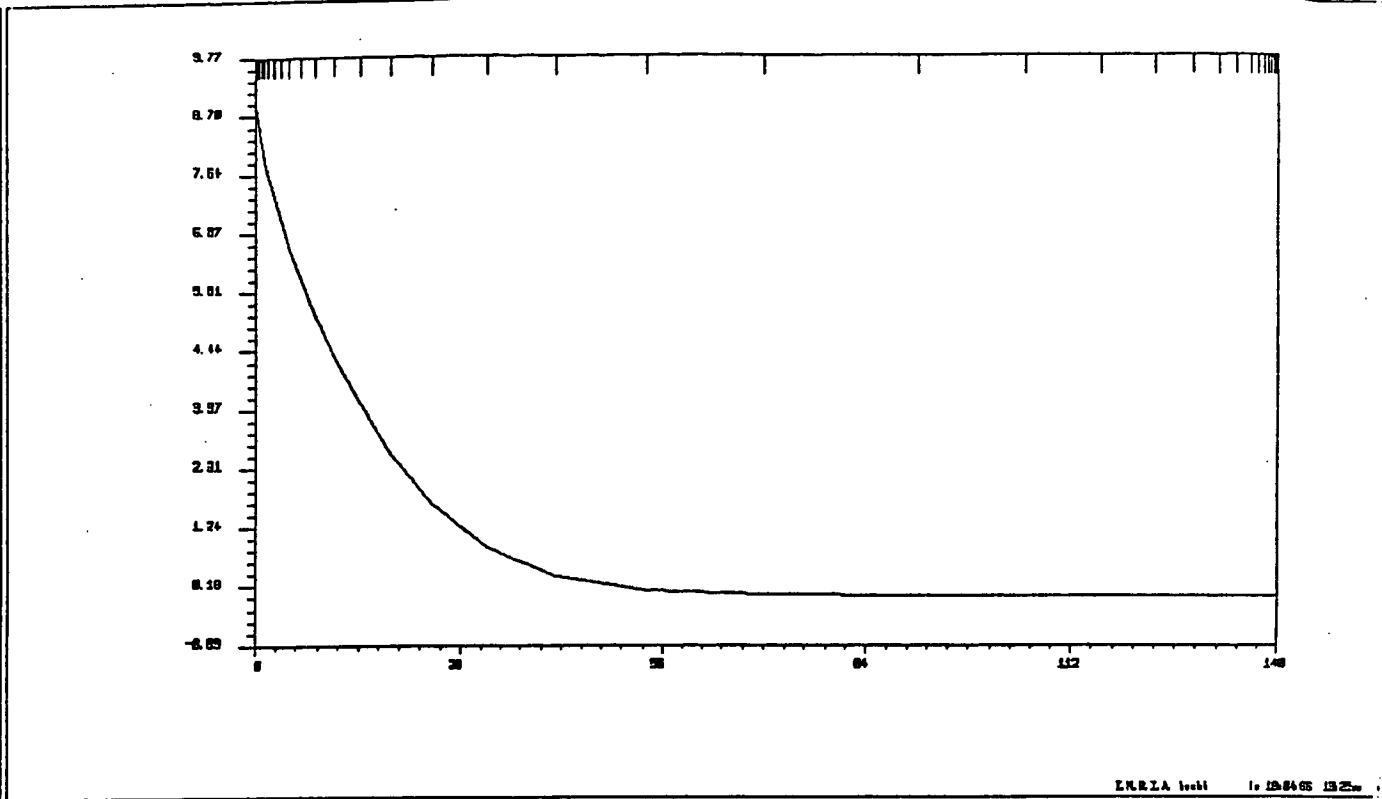
$\bar{\phi}_n$  solution finale,  $u_A(0) = -0.1$  (polarisation directe).



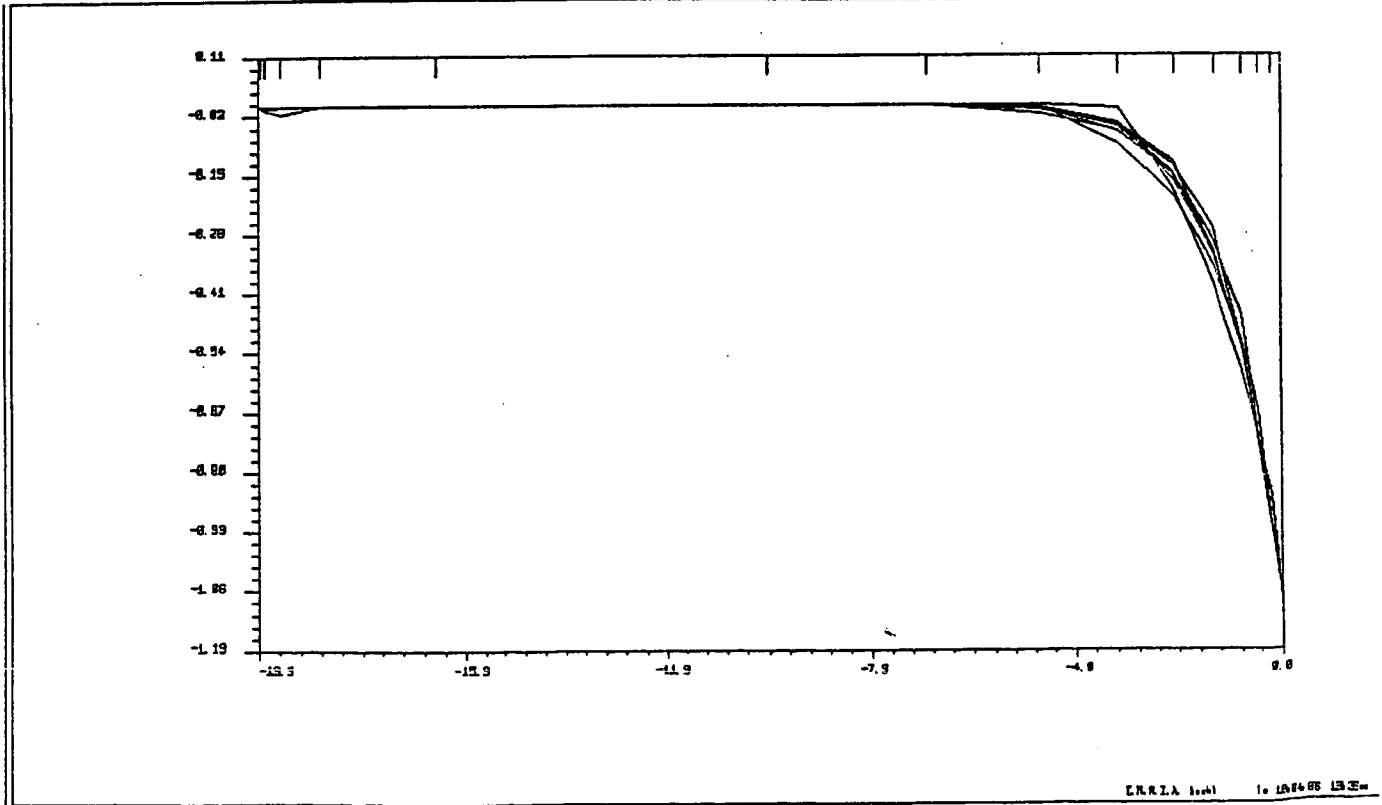
$\hat{\psi}$  à gauche de la jonction, solution finale,  $u_A(0) = -0.1$  (polarisation directe).



$\psi + \hat{\psi}$ ,  $\phi_n, \phi_p$  (problème réduit), solution finale,  $u_A(0) = -0.1$  (polarisation directe).

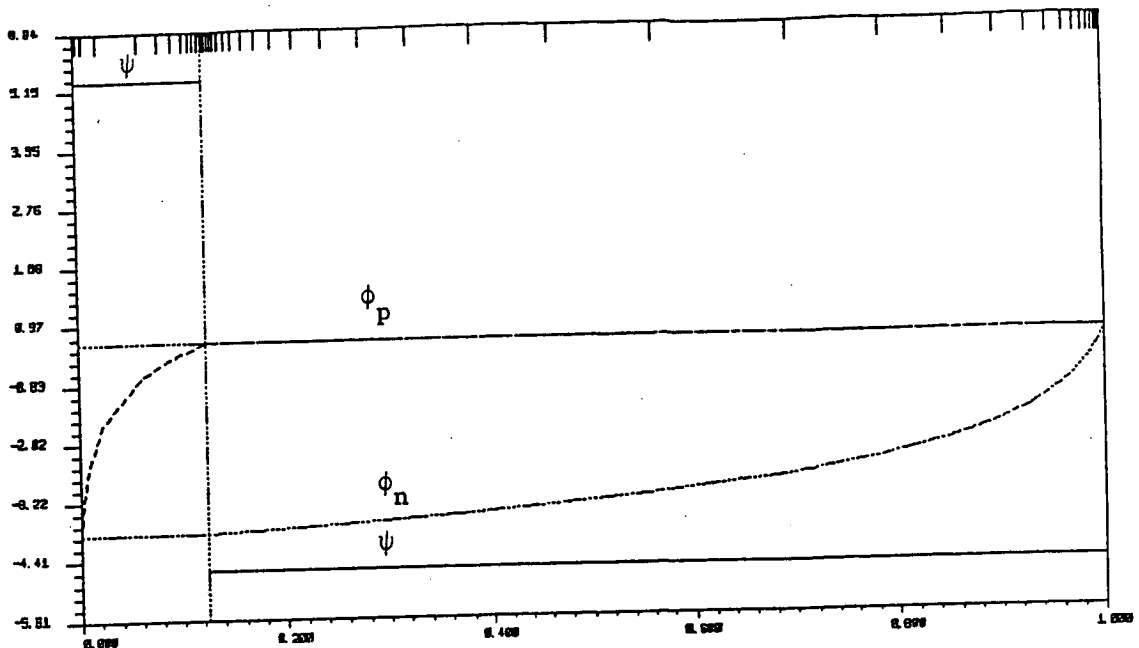


$\hat{\psi}$  à droite de la jonction, solution finale,  $u_A(0) = -0.1$  (polarisation directe).



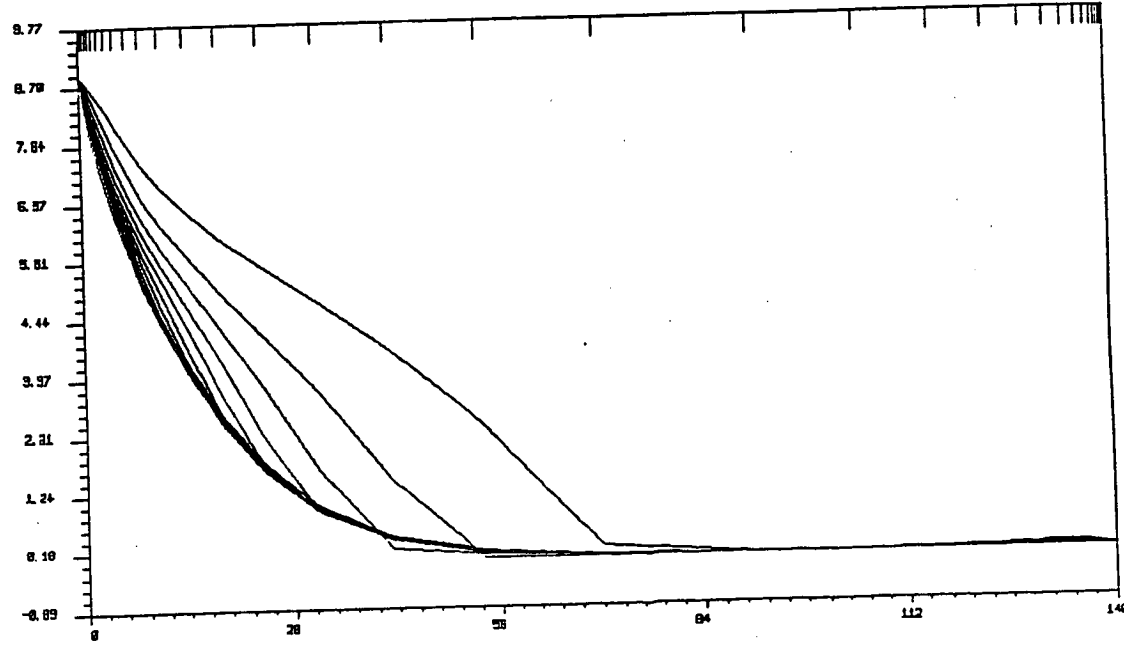
évolution de  $\hat{\psi}$  à gauche de la jonction au cours des itérations  $u_A(0) = -0.1$  (polarisation directe) (initialisation type 0).





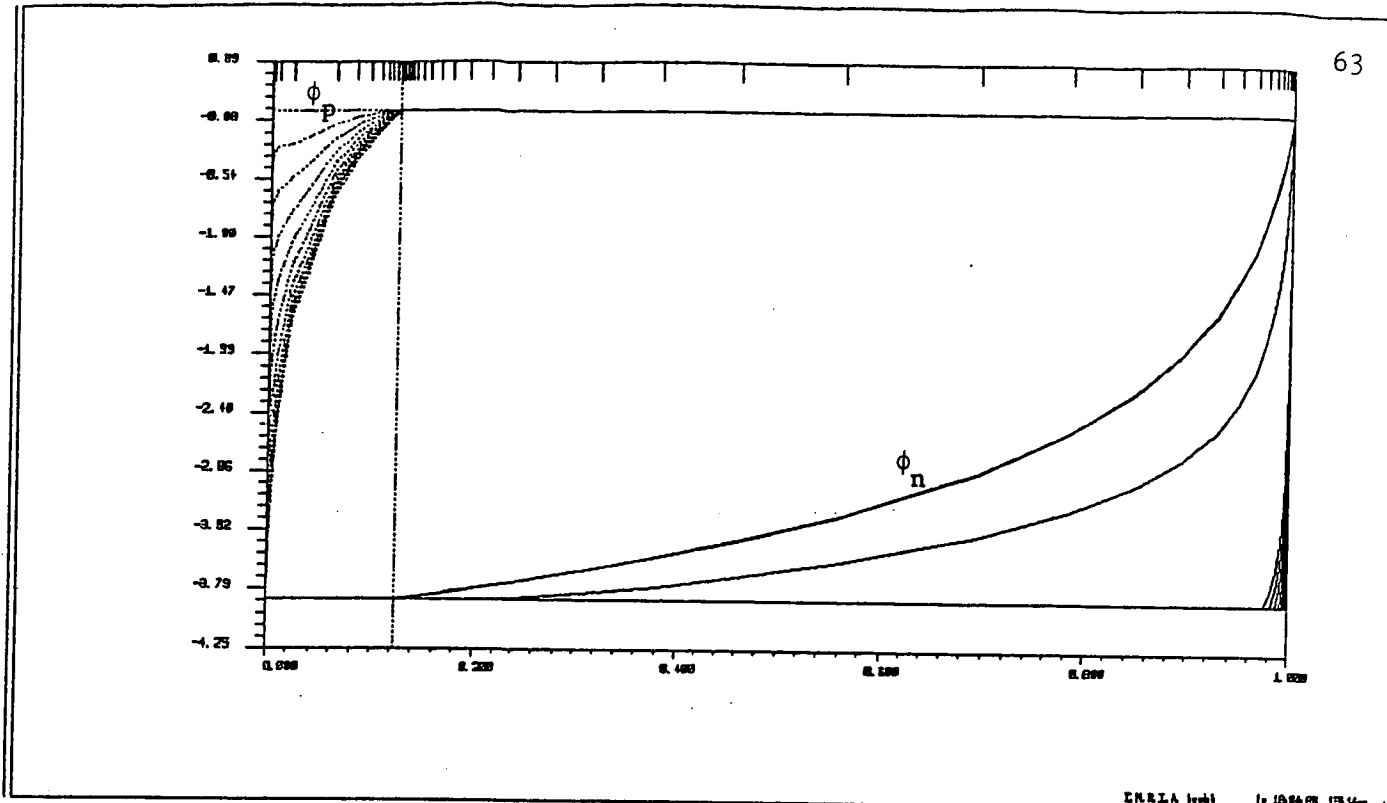
ENRRIA Inst. 10 1284 65 1314

$\psi, \phi_n, \phi_p$  (problème réduit)  $u_A(0) = -0.1$  (polarisation directe)  
solution finale.

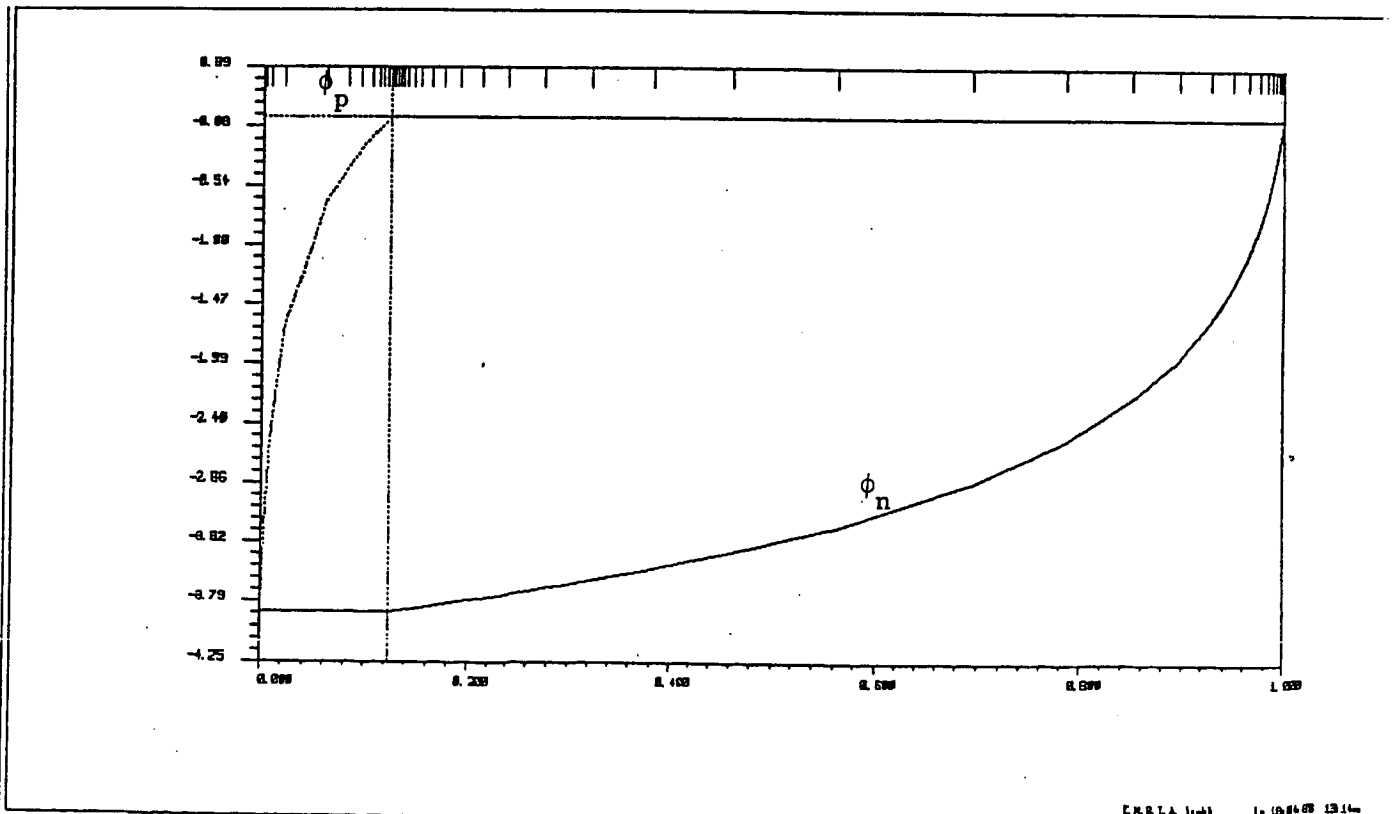


ENRRIA Inst. 10 1284 65 1314

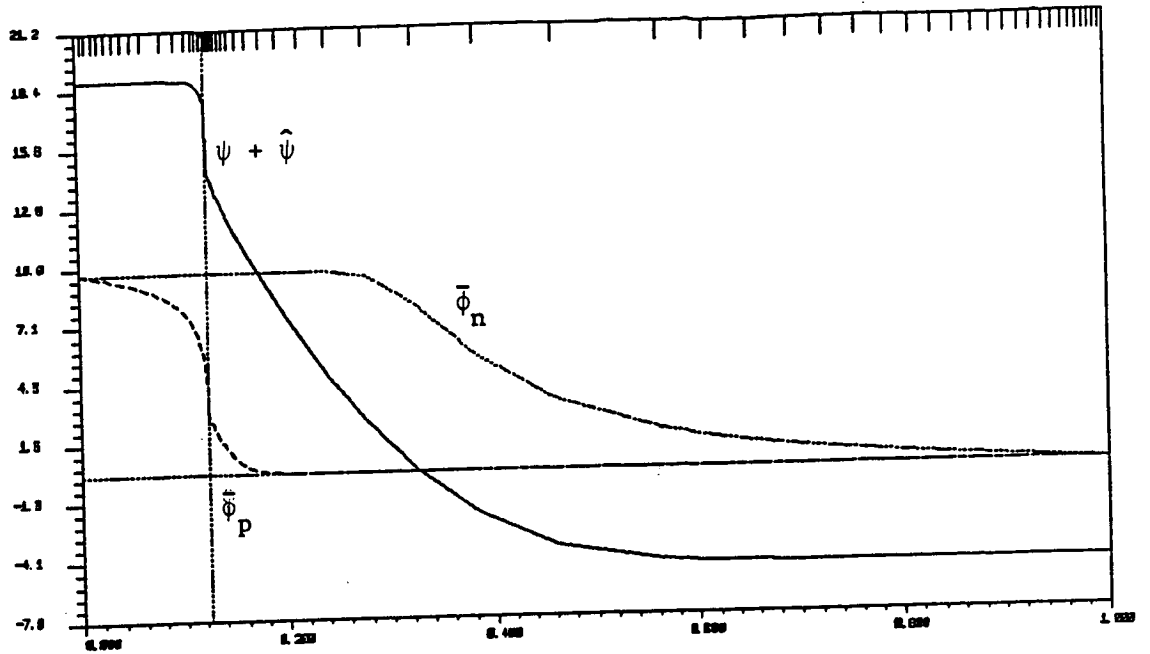
évolution de  $\hat{\psi}$  à droite de la jonction au cours des itérations  $u_A(0) = -0.1$   
(polarisation directe) (initialisation type 0).



$\phi_n, \phi_p$  (problème réduit)  $u_A(0) = -0.1$  (polarisation directe)  
 évolution de  $\phi_n$  et  $\phi_p$  au cours des itérations (initialisation type 1).

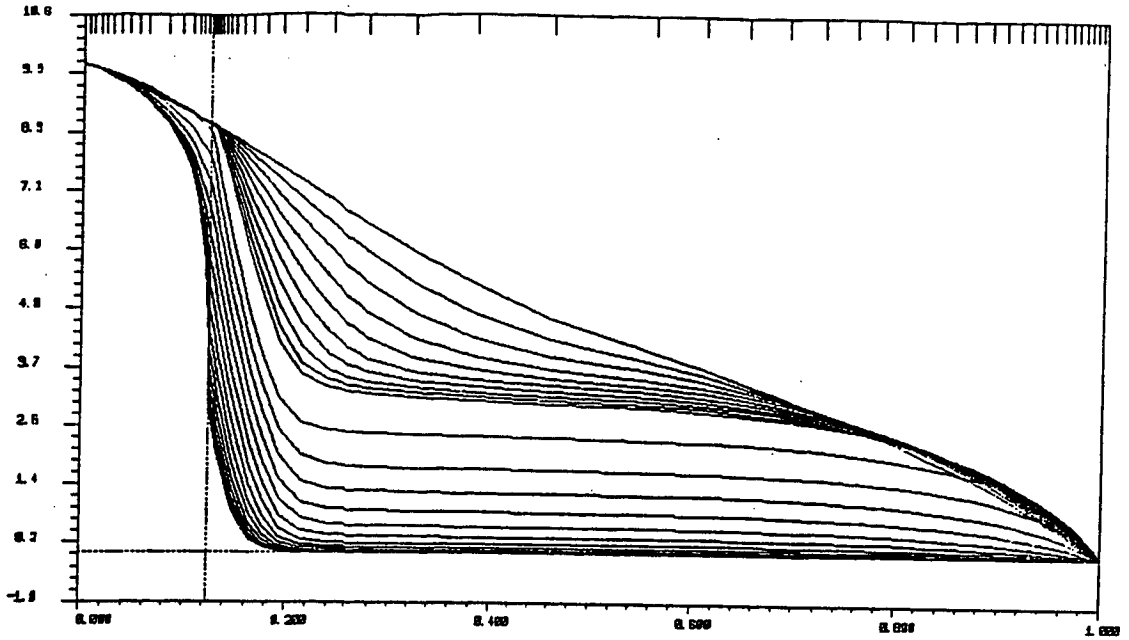


solution du problème réduit  $(\phi_n, \phi_p)$   $u_A(0) = -0.1$  (polarisation directe).



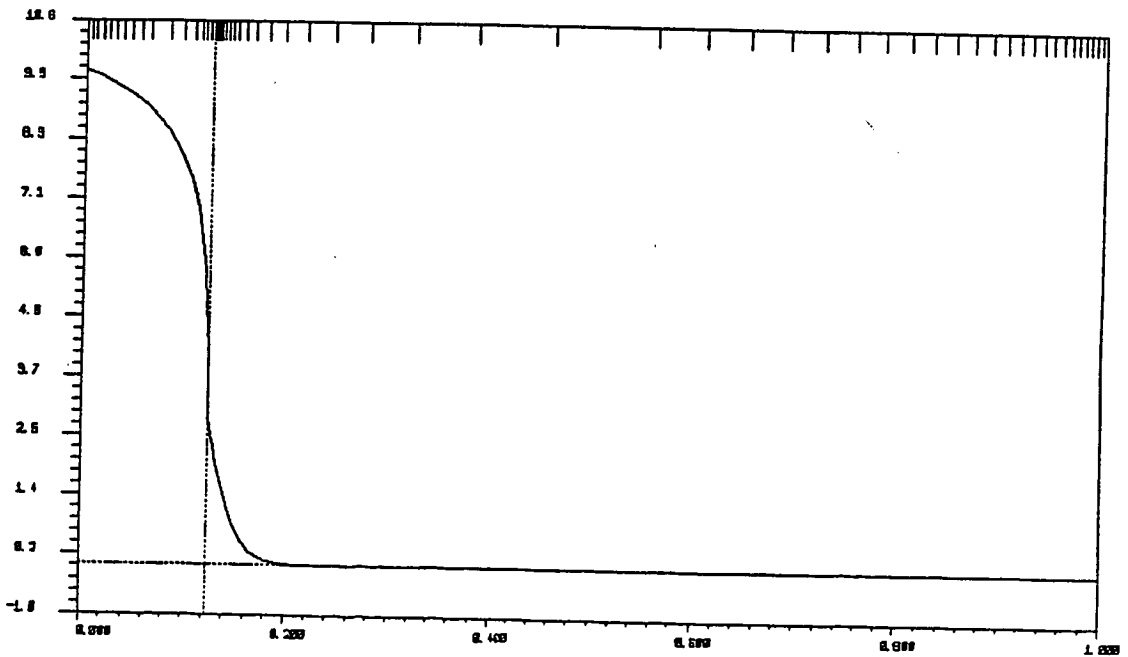
S.N.R.I.A. et al. 10 12 84 08 12 32

$\psi + \hat{\psi}$ ,  $\bar{\phi}_n$ ,  $\bar{\phi}_p$  (problème réduit modifié) solution finale,  $u_A(0) = 0.25$   
(polarisation inverse).



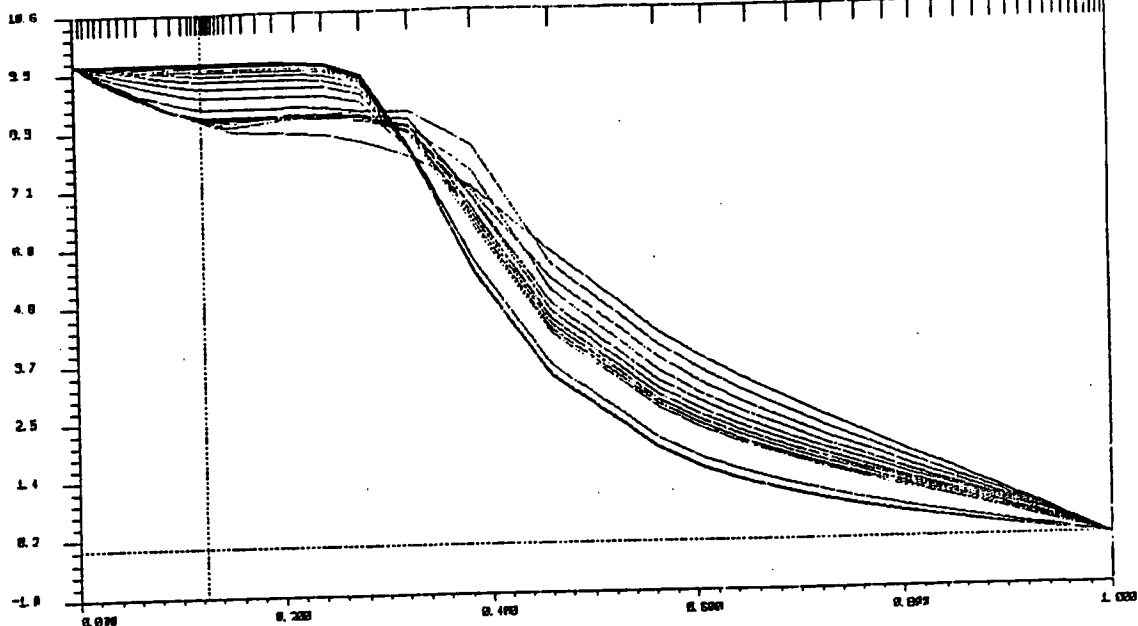
ERRIA d'Atlas 10 1504 85 13 53m

évolution de  $\bar{\phi}_p$  au cours des itérations (problème réduit modifié),  $u_A(0) = 0.25$  (polarisation inverse) (initialisation type 0).



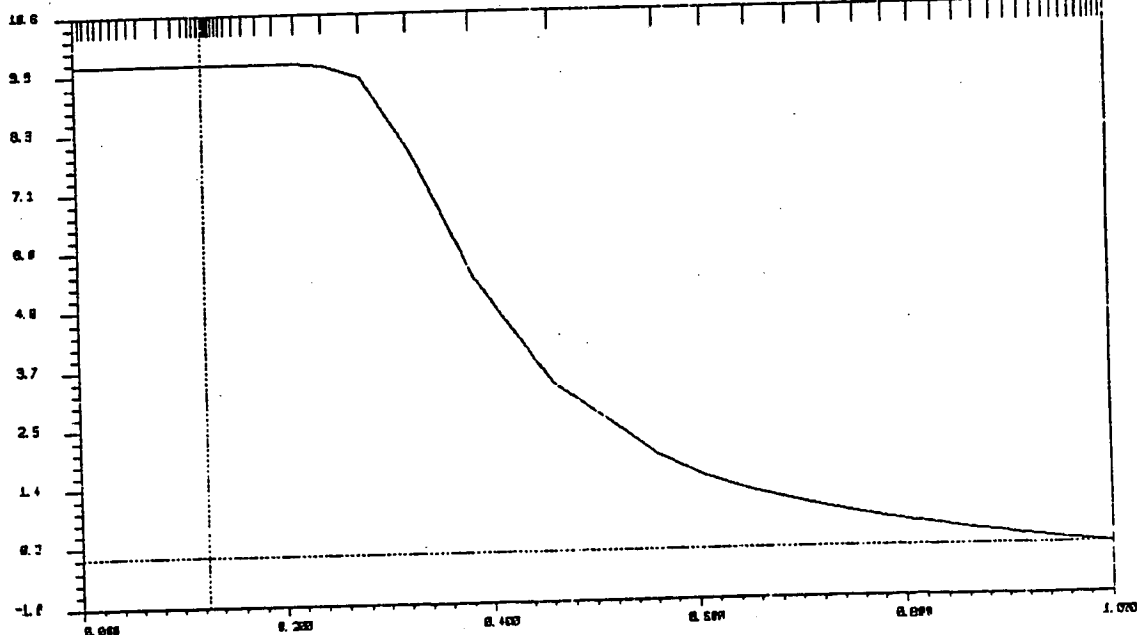
ERRIA d'Atlas 10 1504 85 13 53m

$\bar{\phi}_p$  solution finale,  $u_A(0) = 0.25$  (polarisation inverse).



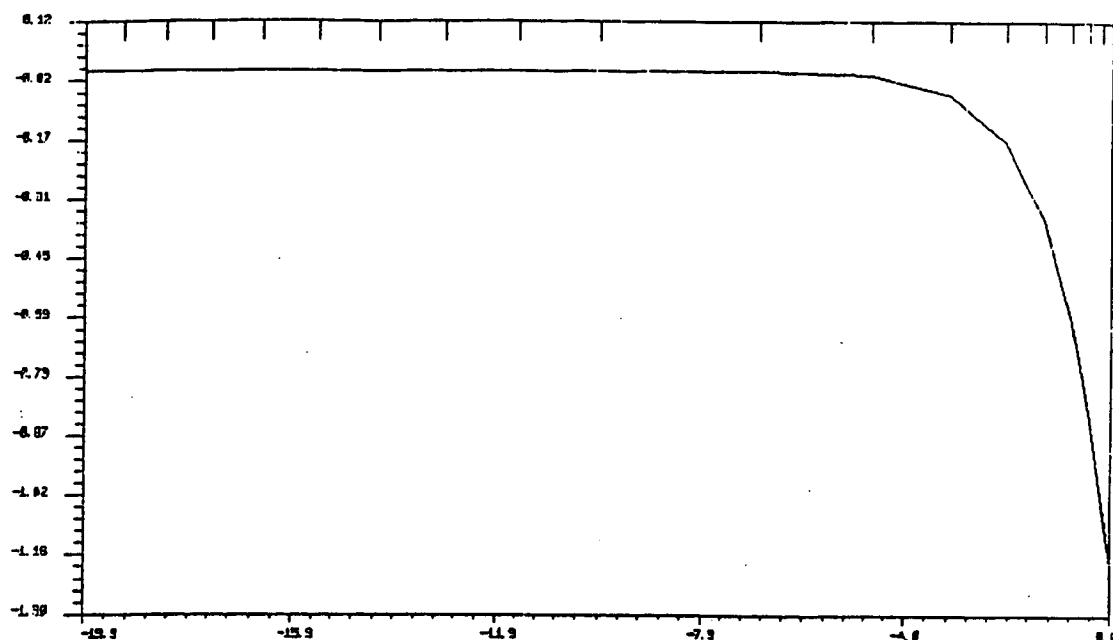
I.N.R.I.A. 1964-65 1533-

évolution au cours des itérations de  $\bar{\phi}_n$  (problème réduit modifié),  $u_A(0) = 0.25$  (polarisation inverse) (initialisation type 0).



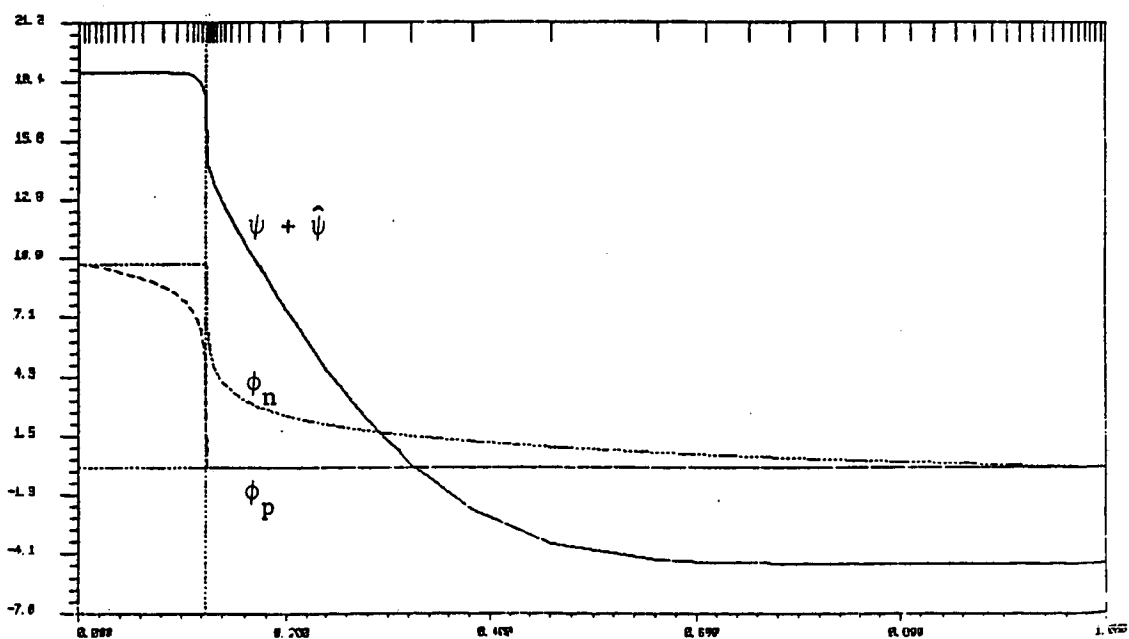
I.N.R.I.A. 1964-65 1533-

$\bar{\phi}_n$  solution finale,  $u_A(0) = 0.25$  (polarisation inverse).



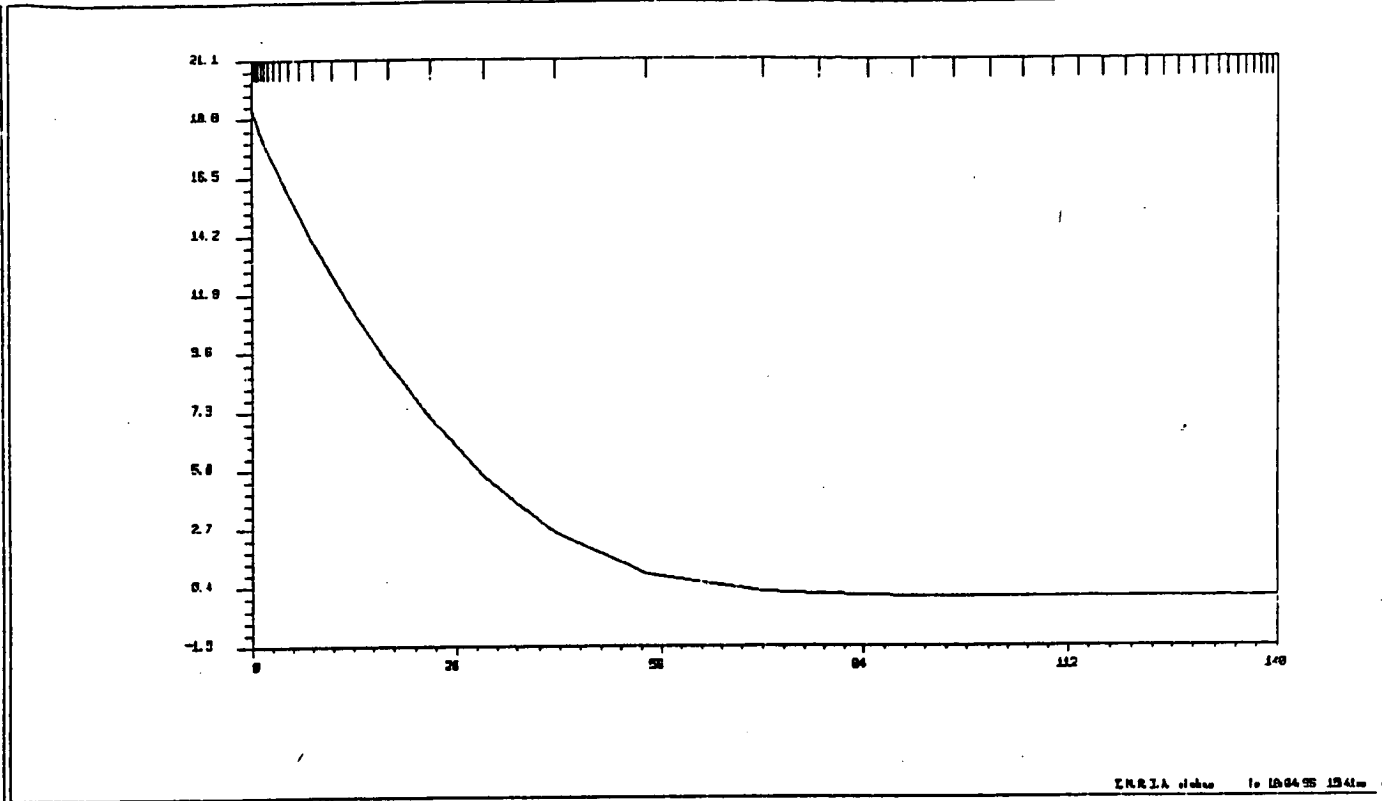
ENRIA d'été 1964-65 1342

$\hat{\psi}$  à gauche de la jonction, solution finale,  $u_A(0) = 0.25$  (polarisation inverse).

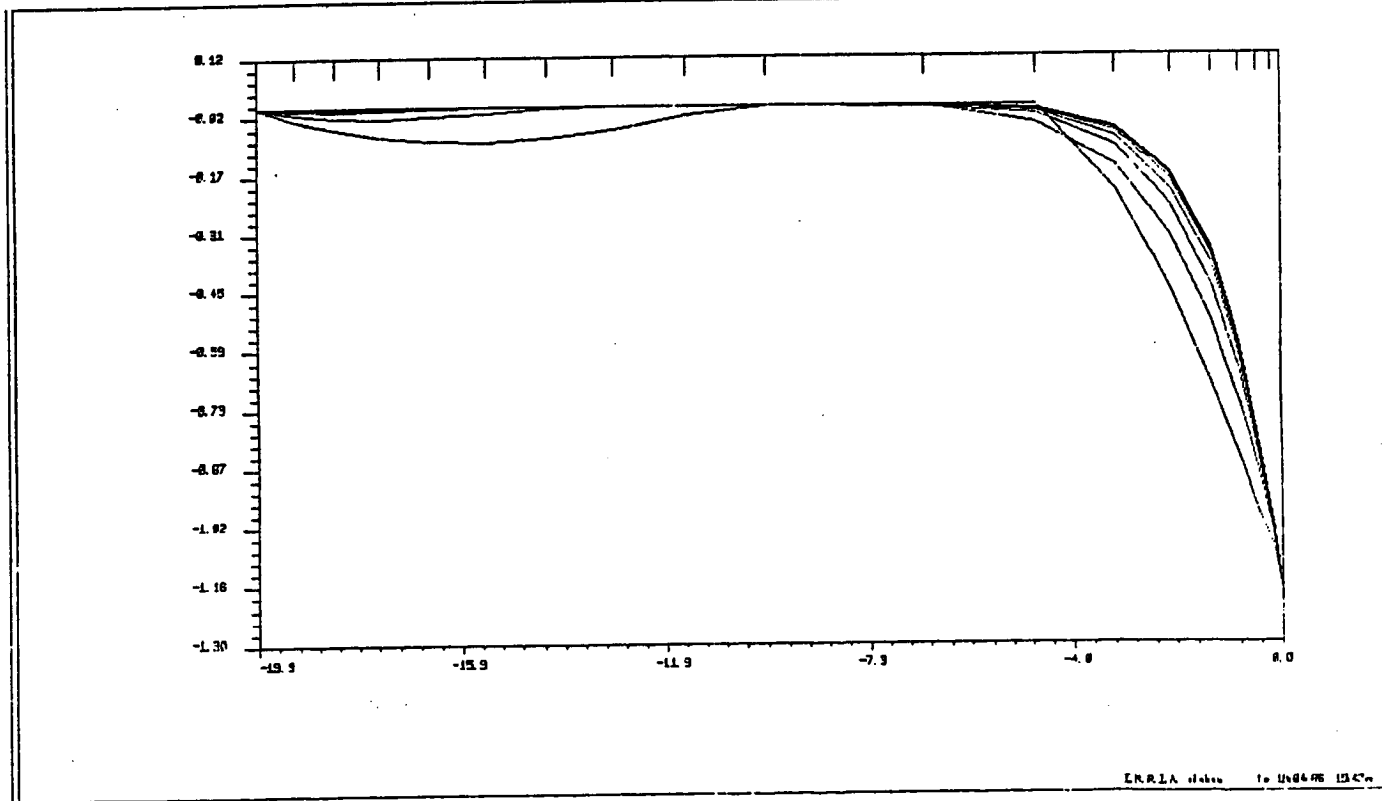


ENRIA d'été 1964-65 1342

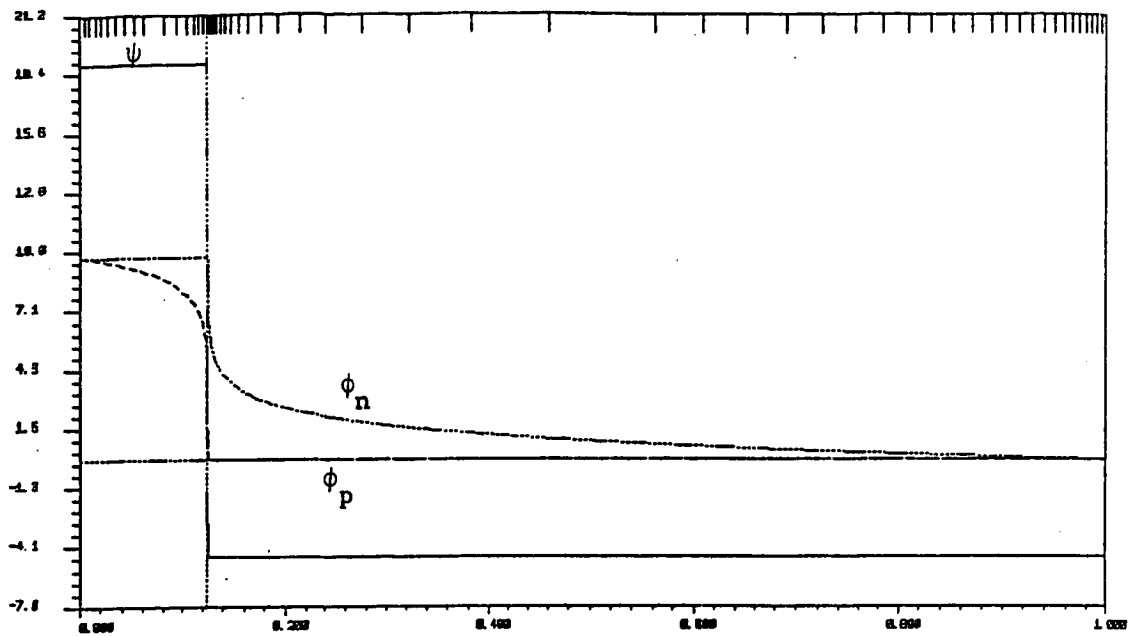
$\psi + \hat{\psi}$ ,  $\phi_n$ ,  $\phi_p$  (problème réduit), solution finale,  $u_A(0) = 0.25$  (polarisation inverse).



$\hat{\psi}$  à droite de la jonction, solution finale  $u_A(0) = 0.25$  (polarisation inverse).

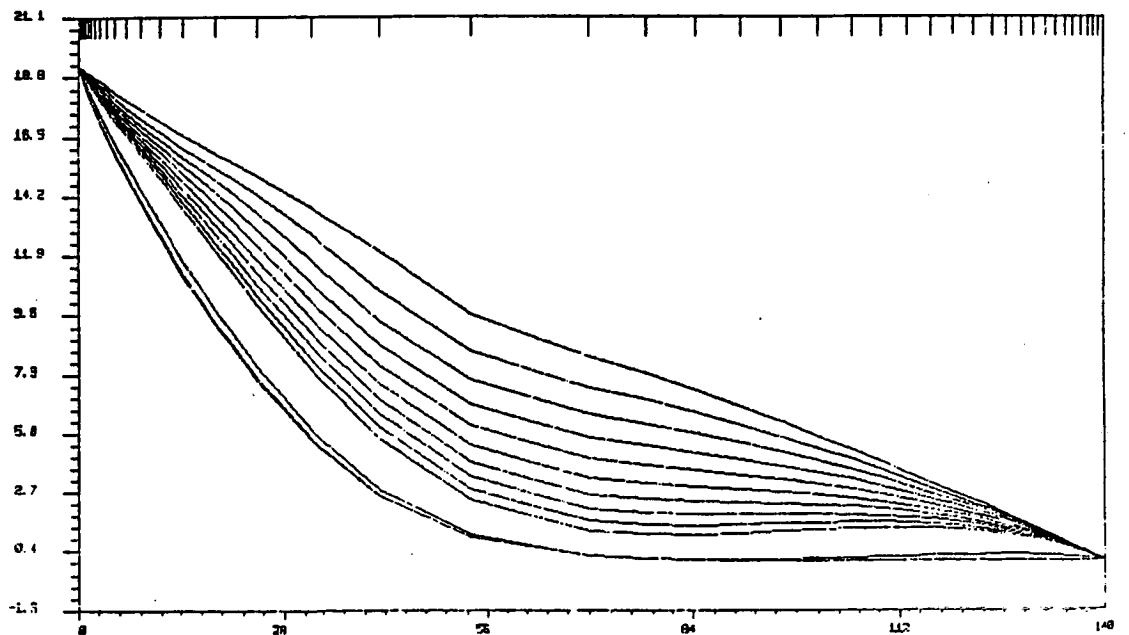


évolution de  $\hat{\psi}$  à gauche de la jonction au cours des itérations  $u_A(0) = 0.25$  (polarisation inverse) (initialisation type 0).



I.R.S.T.A. et al. - 1986-87 - 1322

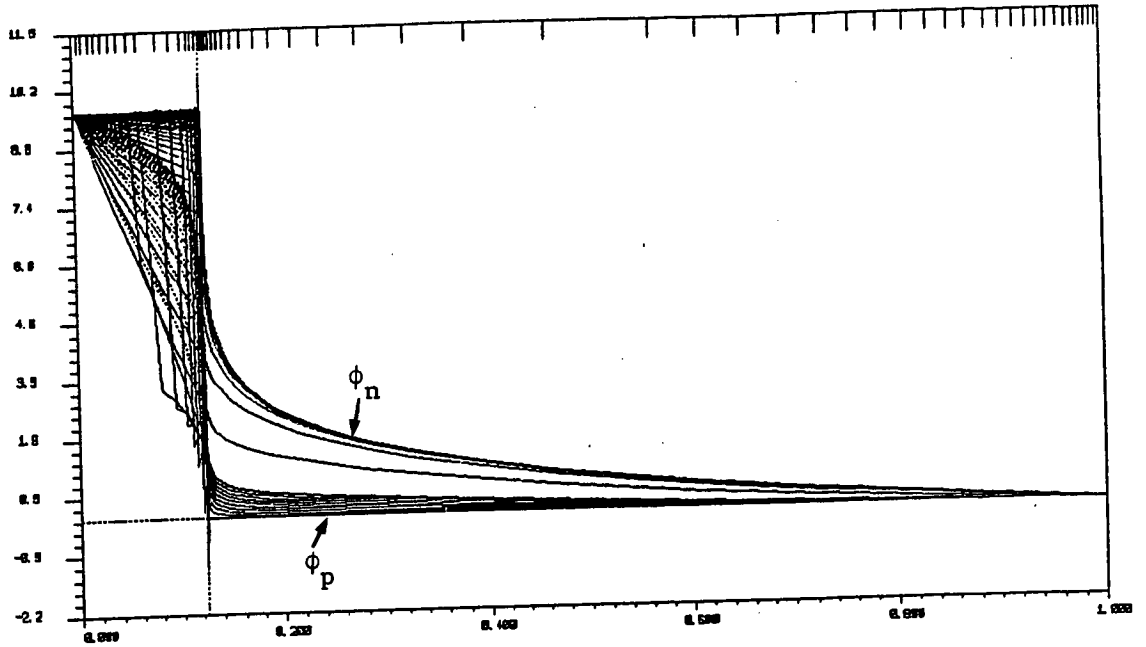
$\psi$ ,  $\phi_n$ ,  $\phi_p$  (problème réduit)  $u_A(0) = 0.25$  (polarisation inverse)  
solution finale



I.R.S.T.A. et al. - 1986-87 - 1322

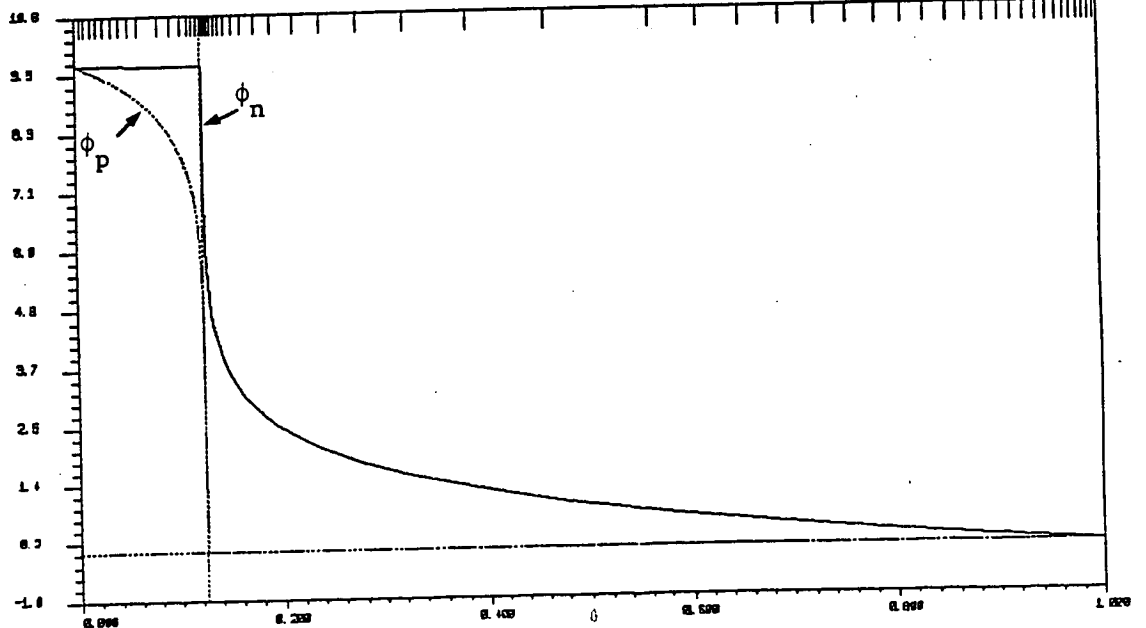
évolution de  $\hat{\psi}$  à droite de la jonction au cours des itérations  
 $u_A(0) = 0.25$  (polarisation inverse) (initialisation type 0).





INRIA Laboratoire 108448 1322

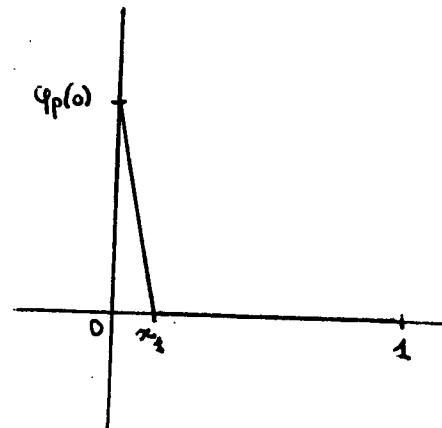
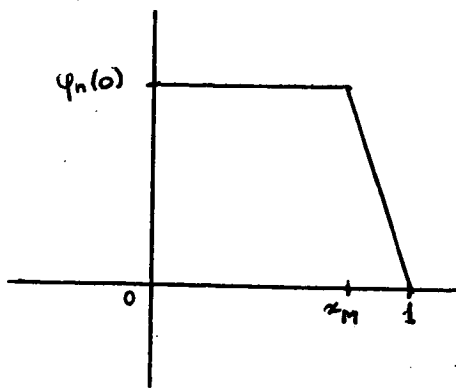
$\phi_n, \phi_p$  (problème réduit)  $u_A(0) = 0.25$  (polarisation inverse)  
 évolution de  $\phi_n$  et  $\phi_p$  au cours des itérations (initialisation type 2).



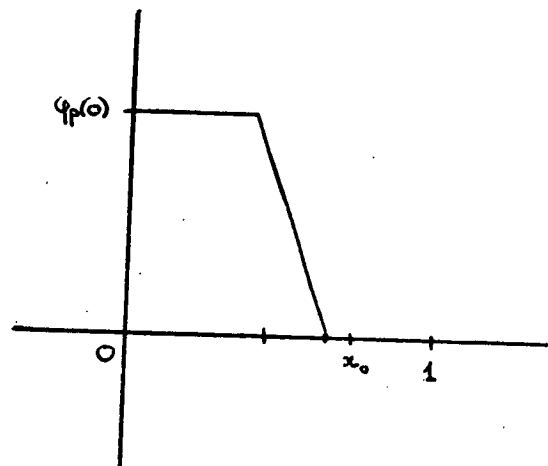
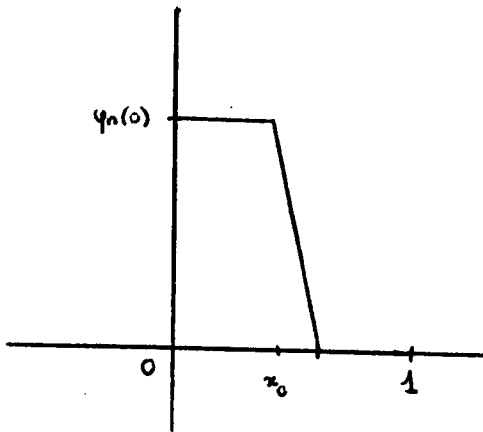
INRIA Laboratoire 108448 1322

solution du problème réduit  $(\phi_n, \phi_p)$   $u_A(0) = 0.25$

b initialisation type 1 (pour  $\phi_n$  et  $\phi_p$ ) (on rappelle que  $\phi_n(M+1) = \phi_p(M+1) = 0$ )



c initialisation type 2 (pour  $\phi_n$  et  $\phi_p$ ) ( $x_0 =$  abscisse de la jonction) :



négligeable devant  $\sqrt{\varepsilon}$  ceci lorsque  $\delta$  tend vers 0 et que  $U_A(0)$  tend vers  $+\infty$ . Cette conjecture se trouverait confirmée par l'expérience numérique puisque l'on a effectivement remarqué que dans le cas où  $U_A(0) > 0$  les courbes  $\phi_n$  et  $\phi_p$  sont "éloignées" des courbes  $\bar{\phi}_n$  et  $\bar{\phi}_p$  (problème réduit modifié) (ces dernières étant plus satisfaisantes), alors que dans le cas où  $U_A(0) < 0$  les courbes  $\phi_n$  et  $\bar{\phi}_n$  (respectivement  $\bar{\phi}_p$  et  $\phi_p$ ) sont voisines l'une de l'autre. Dans un proche avenir on doit donc éliminer l'incertitude due au choix de la formule du point milieu pour intégrer les termes  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} D(N, \phi_n, \phi_p) dx$ , ce qui pourrait conduire à une mauvaise résolution du problème réduit (pour éviter ce problème d'intégration numérique la 3ème formulation pour le problème réduit (PR3) semble plus adéquate) pour être en mesure de conclure sur l'influence du terme  $\int_{\Omega} \left| \hat{\psi} \frac{(x-x_0)}{\sqrt{\varepsilon}} \right| dx$ .

Dans les pages suivantes on présente les courbes obtenues pour les différents potentiels appliqués précités :

- . sur les différentes courbes tracées on a fait apparaître sur le haut du cadre la trace du maillage utilisé pour la résolution.

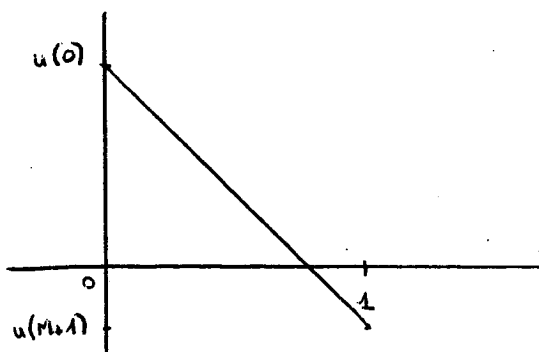
- . pour chaque potentiel appliqué, la 1ère figure montre l'évolution de l'algorithme du problème réduit : on trace d'abord  $\phi_n$  et  $\phi_p$  au cours des 10 premières itérations, puis toutes les 25 itérations.

- . les différents types d'initialisation de l'algorithme sont les suivants :

- différentes initialisations d'une courbe  $u$  :

$u(i)$  désigne la valeur de  $u$  au noeud  $i$  du maillage (le noeud  $i$  correspondant au point  $x_i$  de  $\Omega$ ) ;  $u(0)$ ,  $u(M+1)$  désignant les valeurs imposées de  $u$  au bord.

a initialisation type 0 :



1 Lors de la résolution du problème réduit on a eu à calculer

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} D(N, \phi_n, \phi_p) dx$ , on a choisi la formule d'intégration du point milieu, or  $\phi_n^i$  et  $\phi_p$  varient fortement à la jonction (cas où  $U_A(0) > 0$ ) ainsi que  $N$ , il se peut donc que cette approximation soit insuffisante.

2 Lorsque l'on observe les courbes solutions obtenues dans d'autres publications on remarque la propriété suivante (non établie) :

Dans le cas où  $U_A(0) < 0$  (polarisation directe) on a  $\phi_n(x) \leq \phi_p(x) \Rightarrow$   
 $1 \leq e^{(\phi_p - \phi_n)(x)} \quad \forall x \in \Omega,$

dans le cas où  $U_A(0) > 0$  (polarisation inverse) on a  $\phi_p(x) \leq \phi_n(x) \Rightarrow$   
 $e^{(\phi_p - \phi_n)(x)} \leq 1 \quad \forall x \in \Omega.$

L'ordre de grandeur en valeur absolue de  $(\phi_p - \phi_n)(x)$  a donc une importance, mais on conjecture que le signe de  $(\phi_p - \phi_n)(x)$  a aussi une grande importance, en effet le terme  $(\phi_p - \phi_n)(x)$  est borné par rapport à  $\delta$  mais on conjecture que lorsque  $U_A(0)$  tend vers  $+\infty$  alors le terme  $e^{(\phi_p - \phi_n)(x)}$  est "voisin de 0", alors que si  $U_A(0)$  tend vers  $-\infty$  alors le terme  $e^{(\phi_p - \phi_n)(x)}$  peut être "relativement grand". Dans le cas où  $U_A(0) > 0$  l'effet du petit paramètre  $\delta$  serait donc d'autant plus renforcé que  $U_A(0)$  est "grand", ceci à plusieurs niveaux :

. Au niveau du problème réduit, en effet :

$$D(N, \phi_n, \phi_p) = N + \sqrt{N^2 + 4\delta^4 e^{\phi_p - \phi_n}}$$

$$2 \delta^4 e^{\phi_p - \phi_n}$$

quand  $N < 0 \Rightarrow D(N, \phi_n, \phi_p) \sim -\frac{2 \delta^4 e^{\phi_p - \phi_n}}{-N}$  lorsque  $\delta$  tend vers zéro, et  $U_A(0) \rightarrow +\infty$ .

Le problème réduit risque donc d'être plus mal conditionné dans le cas où  $U_A(0) > 0$  et grand ; dans le cas où  $U_A(0) < 0$  le terme  $e^{\phi_p - \phi_n}$  contrebalance au contraire l'effet du petit paramètre  $\delta$ .

. Lors de l'obtention des estimations sur  $U_\varepsilon - u$  on a d'abord obtenu une estimation sur  $u_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon$  ; l'estimation sur  $u_\varepsilon - u$  est moins précise puisqu'elle fait intervenir  $\int_\Omega |\hat{\psi}(\frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}})| dx$  qui se comporte comme  $\sqrt{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(C)| dC$  or le terme  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(C)| dC$  dépend de  $\delta$  et de  $e^{(\phi_p - \phi_n)(x_0)}$  ; d'après l'inégalité (1.1) (SIV) et d'après les conjectures sur le comportement du terme  $e^{(\phi_p - \phi_n)(x_0)}$  lorsque  $U_A(0)$  tend vers  $+\infty$ , le terme  $\|\hat{\psi}\|_{L^\infty(0, +\infty)}$  pourrait ne pas être

Remarques : Si  $w_1, w_2$  ne sont pas adaptés la convergence est, soit très lente, soit des oscillations (qui peuvent être très fortes) sur  $\phi_n$  et  $\phi_p$  se produisent. Le maillage doit être suffisamment fin autour de 0 et de 1 surtout lorsque  $|U_A(0)|$  est "grand" ( $U_A(0) = -0.57$  V), sinon  $\phi_n$  et  $\phi_p$  évoluent très lentement. Globalement l'algorithme se comporte bien.

La résolution du problème de couche limite ne pose aucun problème, la convergence est très rapide (quelques itérations).

La résolution du problème réduit modifié ne pose pas non plus de problèmes.

## V.2. Cas où $U_A(0) > 0$ .

Ce dernier cas semble poser plus de problèmes pour la résolution du problème réduit, en effet :

Lorsque  $U_A(0)$  est trop fort (par exemple  $U_A(0) = 2.2$  V) on n'arrive pas à ajuster les paramètres de relaxation  $w_1, w_2$  pour avoir la convergence (de très fortes oscillations sur  $\phi_n$  et  $\phi_p$  ont lieu). Pour un potentiel appliqué plus faible ( $U_A(0) = 0.25$  V par exemple) on obtient des courbes  $\phi_n, \phi_p$  "collées" à la jonction (cf le graphique correspondant) ce qui ne devrait pas être le cas.

En résolvant alors le problème réduit modifié on obtient des courbes  $\phi_n, \phi_p$  plus satisfaisantes (en comparaison des résultats obtenus dans d'autres publications).

Résultats pour le problème réduit :

$u_A(0)$	résidu en $\phi_n$ à la $k=1^n$	Résidu en $\phi_n$ à la $k=1^n$ dernière itération	résidu en $\phi_p$ à la $k=1^p$	Résidu en $\phi_p$ à la $k=1^p$ dernière itération	$w_1$	$w_2$	dernière itération $k=$
0.25	$6.1 \times 10^{-2}$	$9.9 \times 10^{-6}$	$5.8 \times 10^{-2}$	$9.0 \times 10^{-6}$	1.6	1.6	799

On a donc réfléchi sur les causes possibles de cette différence de comportement de l'algorithme entre les cas  $U_A(0) < 0$  et  $U_A(0) > 0$ . On émet donc certaines hypothèses :

le terme  $\phi_p(x_0) - \phi_n(x_0)$  dépend de  $\delta$  mais il vérifie les inégalités suivantes :

$$\frac{|U_A(0)|}{U_T} \leq (\phi_p - \phi_n)(x_0) \leq \frac{|U_A(0)|}{U_T}$$

on en déduit que  $K_\delta$  reste borné lorsque  $\delta$  tend vers 0. De même  $C_2^+$  reste borné lorsque  $\delta$  tend vers 0

$$C_1^+ = \frac{\delta^4 e^{(\phi_p - \phi_n)(x_0)}}{N(x_0^+)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \delta \rightarrow 0$$

on a  $C_1^+ e^{\alpha_+} = e^{K_\delta (C_1^+)^{1-\gamma}} \rightarrow 0$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$  (car  $0 < 1-\gamma$ )  
et  $\alpha_+ \rightarrow +\infty$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$

On en déduit que

$\beta$  se comporte comme  $[-\text{Log}(\delta^4 e^{(\phi_p - \phi_n)(x_0)})]^{3/2}$  lorsque  $\delta$  tend vers 0.

On en déduit (1.1)

V - Présentation des différents résultats obtenus.

V.1 - Cas où  $u_A(0) < 0$

Les différents tests effectués ont été les suivants :

$$u_A(0) = -0.1 \text{ V}, -0.25 \text{ V}, -0.57 \text{ V}$$

Pour le problème réduit

$u_A(0)$	résidu en $\phi_n$ à la dernière itération $k=1^n$	Résidu en $\phi_n$ à la dernière itération	résidu en $\phi_p$ à la dernière itération $k=1^p$	Résidu en $\phi_p$ à la dernière itération	$w_1$	$w_2$	dernière itération $k=$
- 0.1	$3.7 \times 10^{-3}$	$9.4 \times 10^{-7}$	0.5	$2.2 \times 10^{-7}$	1.6	1.4	77
- 0.25	$5.5 \times 10^{-4}$	$3.1 \times 10^{-6}$	0.4	$8.9 \times 10^{-5}$	1.65	1.9	154
- 0.57	$1.4 \times 10^{-4}$	$1.7 \times 10^{-6}$	0.1	$9.4 \times 10^{-6}$	1.7	1.98	357

(cf Marrocco [7] pour la définition des résidus)

$w_1$  (respectivement  $w_2$ ) étant le paramètre de relaxation associé à l'équation en  $\phi_n$  (respectivement en  $\phi_p$ ),  $k$  = nombre d'itérations de E.G.S.N.

$$\Rightarrow \tau_0 \left[ \frac{\hat{\psi}(0^+)}{2} \right] \leq \int_0^{+\infty} \hat{\psi}(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{-[\hat{\psi}(0^+)]^2}{2\psi'(0^+)} \leq \int_0^{+\infty} \hat{\psi}(\tau) d\tau$$

il s'agit d'évaluer  $\beta = \frac{-\alpha_+^2}{\psi'(0^+)}$  (on a  $\beta > 0$ )

en intégrant une fois l'équation vérifiée par  $\hat{\psi}$  et en utilisant le fait que  $\hat{\psi}'(+\infty) = 0$  on trouve que :

$$\frac{1}{2} \frac{d\hat{\psi}}{d\tau}^2 = C_1^+(e^{\hat{\psi}-1}) + C_2^+(e^{-\hat{\psi}-1}) - C_3^+ \hat{\psi}$$

on en déduit que :

$$\frac{1}{2} [\hat{\psi}'(0^+)]^2 = C_1^+(e^{\alpha_+-1}) + C_2^+(e^{-\alpha_+-1}) - C_3^+ \alpha_+$$

on a donc :

$$\beta^2 = \frac{\alpha_+^4}{2[C_1^+(e^{\alpha_+-1}) + C_2^+(e^{-\alpha_+-1}) - C_3^+ \alpha_+]}$$

où  $\alpha_+$ ,  $C_1^+$ ,  $C_2^+$  dépendent de  $\delta$ .

$$\text{on a : } 2 C_1^+ = N(x_0^+) + \sqrt{N^2(x_0^+) + 4 \delta^4 e^{(\phi_p - \phi_n)(x_0^+)}}$$

$$2 C_2^+ = -N(x_0^+) + \sqrt{N^2(x_0^+) + 4 \delta^4 e^{(\phi_p - \phi_n)(x_0^+)}}$$

$$\alpha_+ = K_\delta - \gamma \log(C_1^+) \text{ où :}$$

$$K_\delta = \frac{(N^2(x_0^+) + 4\delta^4 e^{(\phi_p - \phi_n)(x_0^+)})^{1/2} - (N^2(x_0^-) + 4\delta^4 e^{(\phi_p - \phi_n)(x_0^-)})^{1/2}}{N(x_0^-) - N(x_0^+)} + \gamma \log(C_1^-)$$

$$\text{avec } \gamma = \frac{N(x_0^-)}{N(x_0^-) - N(x_0^+)}$$

d'après l'hypothèse on a :  $0 < \gamma < 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} (e^{\psi+\hat{\psi}M} \hat{u}'_{\varepsilon})' = 0 \\ \hat{u}_{\varepsilon/\Gamma} = u/\Gamma \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (e^{-(\psi+\hat{\psi}M)} \hat{v}'_{\varepsilon})' = 0 \\ \hat{v}_{\varepsilon/\Gamma} = v/\Gamma \end{array} \right.$$

On pose  $\hat{u}_{\varepsilon} = e^{-\hat{\phi}} \hat{u}_n$  et  $\hat{v}_{\varepsilon} = e^{\hat{\phi}} \hat{v}_p$

On a donc deux problèmes indépendants l'un de l'autre, non linéaires à résoudre, on emploie la même méthode que précédemment.

Remarque : On introduit ce nouveau problème parce qu'en 1er lieu l'estimation s'est faite sur  $\|u_{\varepsilon} - \hat{u}_{\varepsilon}\|_{L^2}$  et  $\|v_{\varepsilon} - \hat{v}_{\varepsilon}\|_{L^2}$ , l'estimation sur  $\|u_{\varepsilon} - u\|_{L^2}$  faisant intervenir  $\|\hat{\psi}M\|_{L^1}$ , ce qui peut être moins précis lorsque  $\delta$  est petit, en effet :

Lemme 1.1 :

On suppose toujours que  $N(x_0^+) < 0$ ,  $N(x_0^-) > 0$ , on a alors la minoration suivante pour  $\delta$  suffisamment petit (indépendamment de  $\varepsilon$ )

$$c \left| \log (\delta e^{(\hat{\phi}_p - \hat{\phi}_n)(x_0)}) \right|^{3/2} \leq \|\hat{\psi}\|_{L^1(0, \infty)} \quad (1.1)$$

où  $c$  est une constante strictement positive, indépendante de  $\delta$ .

Démonstration :

On sait que  $\hat{\psi}$  vérifie :  $0 \leq \hat{\psi}(\tau) \leq \alpha_+$   $\forall \tau \in [0, +\infty]$ ,  $\hat{\psi}$  vérifie :  $\frac{d^2 \hat{\psi}}{d\tau^2} = g(\hat{\psi})$  où  $g(\hat{\psi}) = C_1^+ e^{\hat{\psi}} - C_2^+ e^{-\hat{\psi}} - C_3^+$  la fonction  $x \rightarrow g(x)$  étant

croissante et comme  $g(0) = 0$  on en déduit que :

$0 \leq \frac{d^2 \hat{\psi}}{d\tau^2} \Rightarrow \hat{\psi}'(0^+)_{\tau} + \hat{\psi}(0^+) \leq \hat{\psi}(\tau)$  sur  $[0, +\infty[$  (ici la tangente en 0 à la courbe est au dessous de la courbe)

On pose  $\tau_0 = \frac{\hat{\psi}(0^+)}{\hat{\psi}'(0^+)}$

On en déduit donc que :  $\int_0^{\tau_0} [\hat{\psi}'(0^+)_{\tau} + \hat{\psi}(0^+)] d\tau \leq \int_0^{\tau_0} \hat{\psi}(\tau) d\tau$



$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^A \frac{d\hat{\psi}}{d\tau} \frac{dw_i}{d\tau} + \int_0^A (C_1^+ e^{\hat{\psi}} - C_2^+ e^{-\hat{\psi}} - C_3^+) w_i d\tau = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq N \\ \hat{\psi}(0^+) = \alpha_+ \\ \hat{\psi}(A) = 0 \end{array} \right.$$

Soit  $\hat{\psi}_i$  la valeur de  $\hat{\psi}$  en  $\tau_i$

$$\text{On pose } g_i(\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_N) = \int_0^A \frac{d\hat{\psi}}{d\tau} \frac{dw_i}{d\tau} + \int_0^A (C_1^+ e^{\hat{\psi}} - C_2^+ e^{-\hat{\psi}} - C_3^+) w_i$$

On a alors un problème non linéaire discret à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On cherche } (\hat{\psi}_1 \dots \hat{\psi}_N) \text{ tels que} \\ g_i(\hat{\psi}_1 \dots \hat{\psi}_N) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq N \\ \hat{\psi}_0 \text{ et } \hat{\psi}_{N+1} \text{ étant connus.} \end{array} \right.$$

On a choisi de résoudre ce problème par E.G.S.N.

Remarque : On peut soit prendre un maillage quelconque sur  $[0, A]$ . Soit prendre le maillage utilisé pour résoudre le problème réduit en le dilatant (ie prendre  $\tau_i = \frac{x_i - x_0}{\sqrt{\epsilon}}$ ) dans ce cas la valeur de A est imposée :  $A = \frac{1-x_0}{\sqrt{\epsilon}}$ . Dans ce cas il ne faut pas que la zone d'extension de charge (ou encore l'épaisseur de la couche limite) soit trop étendue.

Pour l'instant c'est cette dernière option qui a été retenue pour sa facilité de mise en oeuvre (on a effectivement vérifié que la zone d'extension de charge n'était pas trop étendue), en effet lorsque l'on contracte à nouveau le domaine en revenant à la variable  $x = \sqrt{\epsilon} \tau + x_0$  la fonction  $\hat{\psi}$  définie par ses valeurs aux noeuds  $\tau_i$  est bien linéaire par morceaux sur le même maillage que le problème réduit. Le résultat final (solution approchée du problème  $P_\epsilon$ ) est donc donné par :  $\psi_i + \hat{\psi}_i, \phi_{ni}, \phi_{pi}$ .

IV - Problème réduit modifié :

IV.1. Lors de l'analyse asymptotique on a introduit les fonctions  $\tilde{u}_\epsilon, \tilde{v}_\epsilon$  solutions de :

$$\text{où} \quad \hat{\psi}_i(\tau) = 4 \operatorname{Argth} \left( \operatorname{th} \left( \frac{\alpha_+}{4} \right) e^{-\tau\sqrt{2C_1^+}} \right) \quad (2.2)$$

Démonstration :

$$\text{On pose } g(\hat{\psi}) = C_1^+ e^{\hat{\psi}} - C_2^+ e^{-\hat{\psi}} - C_3^+$$

$$\hat{\psi} \text{ est solution de } \begin{cases} \frac{d^2 \hat{\psi}}{d\tau^2} = g(\hat{\psi}) \\ \hat{\psi}(0^+) = \alpha_+ \\ \hat{\psi}(+\infty) = 0 \end{cases}$$

On a déjà constaté au cours de la 1ère partie de cet article (cf II.1) que :  $0 \leq \hat{\psi}(\tau) \leq \alpha_+$  sur  $]0, +\infty[$ , or  $N(x_0^+) < 0$ , on en déduit que :

$$g_1(\hat{\psi}) \leq g(\hat{\psi}) \leq g_2(\hat{\psi}) \quad (2.3)$$

$$\text{où} \quad g_i(\hat{\psi}) = C_i^+ (e^{\hat{\psi}} - e^{-\hat{\psi}})$$

on rappelle que  $C_1^+ - C_2^+ - C_3^+ = 0$

On introduit les fonctions  $\hat{\psi}_i$  solutions de :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \hat{\psi}_i}{d\tau^2} = g_i(\hat{\psi}_i) \\ \hat{\psi}_i(0^+) = \alpha_+ \\ \hat{\psi}_i(+\infty) = 0 \end{cases}$$

On vérifiera que  $\hat{\psi}_i$  est donnée par la formule (2.2).

En utilisant la relation (2.3) et le fait que les fonctions  $x \rightarrow g_i(x)$  sont croissantes il est facile de conclure.

On peut donc maintenant évaluer l'épaisseur de la couche limite à droite de 0, et prendre en compte numériquement la condition au limite en  $+\infty$ . On se donne donc un nombre  $A > 0$  "suffisamment grand" (il sera déterminé numériquement grâce à l'encadrement (2.1)) et un maillage sur  $[0, A]$  constitué par les points  $(t_i)_{0 \leq i \leq N+1}$ .

On discrétise suivant la même technique que pour le problème réduit, on obtient alors le problème suivant à résoudre :

II.2. Résolution numérique du problème réduit (formulation  $\phi_n, \phi_p$ ) :

II.2.1. Formulation variationnelle et discrétisation :

$$(PR2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{On cherche } \phi_n \text{ et } \phi_p \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} D(N, \phi_n, \phi_p) \phi_n' w_1' dx = 0 \quad \forall w_1 \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} D(-N, \phi_n, \phi_p) \phi_p' w_2' dx = 0 \quad \forall w_2 \in H_0^1(\Omega) \\ + \text{ conditions aux limites} \end{array} \right.$$

$$\text{où } D(N, \phi_n, \phi_p) = N + \sqrt{N^2 + 4 \delta^4 e^{\phi_p - \phi_n}}$$

On se donne un maillage sur  $[0,1]$  constitué par les points  $(x_i)$   
 $0 \leq i \leq M+1$  tels que :  $x_0 = 0$ ,  $x_{i+1} = x_i + h_i$ ,  $x_{M+1} = 1$

On pose  $K_i = [x_i, x_{i+1}]$

Soit  $H_h^1 = \{u_h \in C^0(\Omega), u_{h/K_i} \in P_1(K_i) \quad \forall 0 \leq i \leq M\}$  où  $P_1(K_i) =$   
 l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

$$H_{0h}^1 = \{u_h \in H_h^1, u_h(0) = u_h(1) = 0\}$$

Soit  $w_i$  la fonction de base associée en noeud  $i$ , définie comme suit :

$$w_i \in H_h^1 \text{ et } w_i(x_j) = \delta_{ij}$$

Le problème discrétisé est alors :

$$P_h = \left\{ \begin{array}{l} \text{On cherche } (\phi_{nh}, \phi_{ph}) \in (H_h^1)^2 \\ \int_{\Omega} D(N, \phi_{nh}, \phi_{ph}) \phi_{nh}' w_i' = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq M \\ \int_{\Omega} D(-N, \phi_{nh}, \phi_{ph}) \phi_{ph}' w_i' = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq M \\ + \text{ Conditions aux limites} \end{array} \right.$$

Soient  $\phi_{ni}, \phi_{pi}$  les valeurs de  $\phi_{nh}, \phi_{ph}$  au point  $x_i$ .

On supprime l'indice  $h$  pour alléger les notations.

II.1.2. Formulation  $\phi_n, \phi_p$  (quasi-niveaux de Fermi normalisés).

On introduit la variable  $\phi_n$  (respectivement  $\phi_p$ ), quasi-niveau de Fermi en électrons normalisé (respectivement en trou) :

$$\text{On pose } \left\{ \begin{array}{l} u = e^{-\phi_n} \\ v = e^{\phi_p} \end{array} \right.$$

Le problème réduit devient alors :

$$\begin{cases} (N + \sqrt{N^2 + 4\delta^4 e^{\phi_p - \phi_n}} \phi_n)' = 0 & (2.1) \\ (-N + \sqrt{N^2 + 4\delta^4 e^{\phi_p - \phi_n}} \phi_p)' = 0 & (2.2) \end{cases} \quad \text{sur } \Omega = ]0, 1[$$

$$(PR2) \left\{ \begin{array}{l} \phi_n(0) = \phi_p(0) = \frac{u_A(0)}{u_T} \\ \phi_n(1) = \phi_p(1) = 0 \end{array} \right.$$

Remarque 1 : En reprenant les équations de  $P_\epsilon$  (cf. I.1) on pourra vérifier qu'il n'y a pas de couche limite d'ordre 0 sur  $\phi_n$  et  $\phi_p$ .

Remarque 2 : Une 3ème formulation est possible, en n'explicitant pas  $\psi$  en fonction de  $\phi_n$  et  $\phi_p$  soit :

$$(PR3) \left\{ \begin{array}{l} \delta^2 e^{\psi - \phi_n} - \delta^2 e^{\phi_p - \psi} - N = 0 \\ (e^{\psi - \phi_n} \phi_n')' = 0 \\ (e^{\phi_p - \psi} \phi_p')' = 0 \\ + \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

Cette formulation n'a pas encore été testée. Pour l'instant notre choix s'est porté sur la 2ème formulation.

III. Résolution de problème de Couche limite d'ordre 0 en  $\psi$  :

III.1. Le problème de Couche limite se présente sous la forme :

$$(PLM1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \hat{\psi}}{d\tau^2} = C_1^- e^{\hat{\psi}} - C_2^- e^{-\hat{\psi}} - C_3^- \quad \text{sur } ]-\infty, 0[ \\ \hat{\psi}(0^-) = \alpha^- \\ \hat{\psi}(-\infty) = 0 \end{array} \right.$$

$$(PLM2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \hat{\psi}}{d\tau^2} = C_1^+ e^{\hat{\psi}} - C_2^+ e^{-\hat{\psi}} - C_3^+ \quad \text{sur } ]0, +\infty[ \\ \hat{\psi}(0^+) = \alpha^+ \\ \hat{\psi}(+\infty) = 0 \end{array} \right.$$

(cf II.1 (b) pour les valeurs de  $\alpha^-$  et  $\alpha^+$ )

$$\text{où } C_1^+ = \delta^2 e^{\psi(x_0^+)} u(x_0) \quad , \quad C_2^+ = \delta^2 e^{-\psi(x_0^+)} v(x_0) \quad , \quad C_3^+ = N(x_0^+)$$

(avec les définitions équivalentes pour  $C_1^-$ ,  $C_2^-$ ,  $C_3^-$ ). On peut expliciter  $C_1^+$ ,  $C_2^+$ , en fonction de  $\phi_n(x_0)$  et  $\phi_p(x_0)$  :

$$C_1^+ = \frac{N(x_0^+) + \sqrt{N^2(x_0^+) + 4\delta^4 e^{4(\phi_p - \phi_n)(x_0)}}}{2} \quad C_2^+ = \frac{-N(x_0^+) + \sqrt{N^2(x_0^+) + 4\delta^4 e^{4(\phi_p - \phi_n)(x_0)}}}{2}$$

III.2. Résolution numérique du problème de couche limite

III.2.1. Formulation variationnelle et discrétisation :

On expose la méthode employée pour résoudre (PLM2) (on procédera de même pour résoudre (PLM1)).

Pour prendre en compte numériquement la condition au limite en  $+\infty$ , il faut connaître à priori l'épaisseur de la couche limite à droite de 0. On peut effectivement évaluer cette épaisseur en effet :

Lemme 2.1 : Hypothèse :  $N(x_0^+) < 0$  ( $N(x_0^-) > 0$ ) (jonction de type NP)

Soit  $\hat{\psi}$  la solution de (PLM2) alors on a l'encadrement suivant

$$\hat{\psi}_2(\tau) \leq \hat{\psi}(\tau) \leq \hat{\psi}_1(\tau) \quad \forall \quad \tau \in [0, +\infty[ \quad (2.1)$$

On pose

$$\begin{aligned} f_{1i}(\phi_{n1}, \dots, \phi_{nM}, \phi_{p1}, \dots, \phi_{pM}) &= \int_{\Omega} D(N, \phi_n, \phi_p) \phi'_n w'_i \\ f_{2i}(\phi_{n1}, \dots, \phi_{nM}, \phi_{p1}, \dots, \phi_{pM}) &= \int_{\Omega} D(-N, \phi_n, \phi_p) \phi'_p w'_i \end{aligned}$$

On a donc le problème non linéaire couplé discret suivant à résoudre :

$$(PR2D) \left\{ \begin{array}{l} \text{On cherche } (\phi_{n1}, \dots, \phi_{nM}, \phi_{p1}, \dots, \phi_{pM}) \text{ tels que} \\ f_{1i}(\phi_{n1}, \dots, \phi_{nM}, \phi_{p1}, \dots, \phi_{pM}) = 0 \quad 1 \leq i \leq M \\ f_{2i}(\phi_{n1}, \dots, \phi_{nM}, \phi_{p1}, \dots, \phi_{pM}) = 0 \\ \phi_{n,0}, \phi_{n,M+1}, \phi_{p,0}, \phi_{p,M+1} \text{ étant connus} \end{array} \right.$$

Pour la résolution numérique du problème (PR2D) on a choisi une méthode de type relaxation non linéaire, soit E.G.S.N (extrapolated Gauss-Seidel Newton). Sa mise en oeuvre est relativement peu coûteuse, puisqu'elle ne nécessite que les calculs suivants :

- . le calcul des  $f_{1i}, f_{2i}$
- . le calcul de  $\frac{\partial f_{1i}}{\partial \phi_{ni}}, \frac{\partial f_{1i}}{\partial \phi_{pi}}, \frac{\partial f_{2i}}{\partial \phi_{ni}}, \frac{\partial f_{2i}}{\partial \phi_{pi}}$

Par contre on a deux paramètres de relaxation à ajuster (cf Marrocco [7] pour l'exposé plus détaillé de la méthode).

Remarque 1 : Dans le cas de la dimension 1, lorsque l'on linéarise le problème discret (par exemple par Newton), la matrice du système linéaire associé est tridiagonale par blocs (2x2). Il existe des méthodes très efficaces pour résoudre les systèmes tridiagonaux par blocs, par contre ces méthodes ne pourront être étendues au cas où la dimension est 2 ou 3.

Remarque 2 : Le calcul des fonctions  $f_{1i}, f_{2i}$  nécessite l'évaluation d'intégrales du type :  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} D(N, \phi_n, \phi_p) dx$  où  $N, \phi_n, \phi_p$  sont des fonctions linéaires sur  $K_i$ . Pour l'approximation de ces intégrales on a choisi la formulet du point milieu soit :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} D(N, \phi_n, \phi_p) dx \approx h_i D(N_{i+\frac{1}{2}}, \phi_{ni+\frac{1}{2}}, \phi_{pi+\frac{1}{2}})$$

$$\text{où } N_{i+\frac{1}{2}} = \frac{N_i + N_{i+1}}{2}$$

On appelle la région N la région où  $c$  (le dopage) est positif, et région P celle où  $c$  est négatif.

Les deux petits paramètres  $\epsilon$  et  $\delta^2$  ont les valeurs suivantes :

$$\epsilon = 3.9 \times 10^{-5} \quad \delta^2 = 10^{-4}$$

## II. Résolution numérique du problème réduit :

II.1. On rappelle que le problème réduit se présente sous la forme :

$$(PR) \left\{ \begin{array}{l} \delta^2 e^{\psi} u - \delta^2 e^{-\psi} v - N = 0 \\ (e^{\psi} u')' = 0 \\ (e^{-\psi} v')' = 0 \\ u(0) = e^{-u_A(0)/u_T} \quad v(0) = e^{-u_A(0)/u_T} \\ u(1) = e^{-u_A(1)/u_T} \quad v(1) = e^{-u_A(1)/u_T} \end{array} \right.$$

On fait la convention suivante :  $u_A(1) = 0$

Différentes formulations pour le problème réduit sont possibles :

### II.1.1. Formulation $u, v$ :

A partir de la 1ère équation de (PR) on peut expliciter  $\psi$  en fonction de  $u$  et  $v$ , on obtient alors le système non linéaire couplé suivant :

$$(PR1) \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{N + \sqrt{N^2 + 4\delta^4 uv}}{2\delta^2 u} u' \right)' = 0 \quad (1.1) \\ \left( \frac{-N + \sqrt{N^2 + 4\delta^4 uv}}{2\delta^2 v} v' \right)' = 0 \quad (1.2) \\ + \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

Cette formulation conduit à des problèmes d'overflow, en effet :

$\frac{1}{u_T}$  est de l'ordre de 40 or  $u(0) = e^{-u_A(0)/u_T}$  et  $v(0) = e^{u_A(0)/u_T}$ , le potentiel appliqué doit être relativement faible. On a donc choisi une autre formulation.

### Résultats numériques :

(Cas d'une jonction abrupte en dimension 1)

Dans la première partie de cet article on a souligné les difficultés numériques dues à la présence d'un petit paramètre (la longueur de Debye) dans l'équation de Poisson. Par la technique du développement asymptotique on a obtenu différents problèmes à résoudre, indépendants de la longueur de Debye, soient : le problème réduit qui est un système non linéaire de 2 équations couplées ; et le problème de couche limite d'ordre 0 en  $\psi$  qui est un problème de type Poisson non linéaire.

On présente dans cette partie les méthodes numériques pour résoudre ces différents problèmes. la méthode choisie est une méthode de type relaxation non linéaire.

#### I. Modèle testé numériquement :

Le choix s'est porté sur le germanium car l'on disposait de résultats numériques donnés par la résolution complète du système  $P_\epsilon$  (cf. I.1).

- Valeur des différents paramètres (système d'unité C.G.S) :

On reprend les notations de la 1ère partie de cet article :

$$\begin{aligned}
 q &= 1.6 \times 10^{-19} \\
 \epsilon_s &= \epsilon_r \times \epsilon_0 \quad \text{où} \quad \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-11} \quad (\text{permittivité du vide}) \\
 &\quad \epsilon_r = 16 \quad (\text{permittivité relative du germanium}) \\
 U_T &= 2.5875 \times 10^{-2} \\
 n_i &= 2.5 \times 10^{13}
 \end{aligned}$$

Les dimensions non normalisées de l'ouvert sont :

$$x_{\min} = 0 \quad x_{\max} = 1.53 \times 10^{-4} \quad (\Omega = ]x_{\min}, x_{\max}[)$$

l'abscisse non normalisée de la jonction est :  $x_j = 0.19 \times 10^{-4}$

$$c = \begin{cases} 2.5 \times 10^{17} & \text{sur } ]x_{\min}, x_j[ \\ -2.5 \times 10^{15} & \text{sur } ]x_j, x_{\max}[ \end{cases}$$



En normalisant le système régissant les phénomènes conducteurs, on reformule le problème comme un problème de perturbations singulières. En reprenant le développement asymptotique formel obtenu en [1], on cherche à justifier sa validité.

On a obtenu des estimations  $L^2$  en  $o(\sqrt{\epsilon})$  pour la différence entre la solution et le premier terme du développement, ceci en dimension d'espace égale à 1 et pourvu que le potentiel appliqué soit suffisamment faible. On a aussi obtenu des estimations  $L^2$  pour les densités de courant en  $o(\epsilon^{1/4})$ . Toujours sous les conditions énoncées ci-dessus on a obtenu des estimations  $H^1$  locales (le local signifiant que l'on se place en dehors d'un voisinage de la jonction) en  $o(\sqrt{\epsilon})$ .

Dans le cas particulier de l'équilibre pour un dopage constant par sous-domaine on a obtenu, ceci en dimension d'espace égale à 1, 2 ou 3, une estimation  $L^2$  en  $o(\epsilon^{3/4})$  et une estimation  $H^1$  globale en  $o(\epsilon^{1/4})$ .

#### Remerciements

Je remercie Monsieur Jacques HENRY (INRIA-Rocquencourt) pour m'avoir suggéré de nombreuses améliorations et pour l'aide qu'il m'a apportée à la rédaction de cet article.

On présente maintenant dans la dernière partie des résultats numériques.

Par ailleurs d'après (2.2) on a :

$$\varepsilon \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{1,\Omega}^2 \leq c\varepsilon^q \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0,\Omega} + c\varepsilon^{3/4} \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0,\Omega}$$

$$\Rightarrow \varepsilon \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{1,\Omega}^2 \leq c\varepsilon^{3/2}$$

$$\Rightarrow \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/4}.$$

### Corollaire

Sous les hypothèses du théorème 2.1 et dans le cas d'une jonction plane, c'est-à-dire que  $\Gamma$  et  $\Omega$  sont tels que :  $\Delta t = 0$  presque partout dans  $\Omega$  alors :

$$\|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^q$$

ceci  $\forall q > 0$

$$\|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq c\varepsilon^q$$

### Démonstration

Comme  $\Delta t \equiv 0$  presque partout dans  $\Omega$  les termes  $T_{\varepsilon i}$  dans la démonstration du théorème 2.1 sont nuls, on en déduit le corollaire.

### Remarque

Dans le cas où  $n = 1$  on a de façon évidente  $\Delta t = 0$  dans  $\Omega$ .

de même

$$(2.4) \quad \left| \int_{\Omega_2} [(2\delta^2 \text{sh}(\phi_\varepsilon) - N) - (2\delta^2 \text{sh}(\psi(0^-) + \hat{\psi}) - N(0^-)) M(t)] (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) dx dy \right| \leq c\varepsilon^q \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0, \Omega_2}$$

On pose :

$$T_{\varepsilon 1} = \sqrt{\varepsilon} \int_{\Omega_1} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \tau} \Delta t M(t) (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) dx dy$$

$$|T_{\varepsilon 1}| \leq \sqrt{\varepsilon} \|\Delta t\|_{L^\infty(\Omega_1)} \left\| \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \tau} \right\|_{0, \Omega_1} \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0, \Omega_1}.$$

Par le changement de variable :  $(x, y) \rightarrow (\tau, s)$  où  $\tau = t/\varepsilon$  on montre aisément que

$$\left\| \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \tau} \right\|_{0, \Omega_1} \leq c\varepsilon^{1/4}$$

d'où

$$(2.5) \quad |T_{\varepsilon 1} + T_{\varepsilon 2}| \leq c\varepsilon^{3/4} \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0, \Omega}.$$

Par ailleurs le terme :

$$A_\varepsilon^+ = \langle (2\delta^2 \text{sh}(\psi_\varepsilon) - N) - (2\delta^2 \text{sh}(\phi_\varepsilon) - N), \psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon \rangle$$

vérifie :

$$(2.6) \quad A_\varepsilon^+ \geq c \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0, \Omega}^2.$$

De (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) on déduit que :

$$c \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0, \Omega}^2 \leq c\varepsilon^q \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0, \Omega} + c\varepsilon^{3/4} \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0, \Omega}$$

d'où

$$\|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0, \Omega} \leq c\varepsilon^{3/4}.$$

Démonstration du théorème 2.1

On pose

$$I_\varepsilon = \varepsilon \langle \Delta(\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon), \psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon \rangle = -\varepsilon \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{1,\Omega}^2.$$

Après calcul on trouve que :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{1,\Omega}^2 + \langle (2\delta^2 \text{sh}(\psi_\varepsilon) - N) - (2\delta^2 \text{sh}(\phi_\varepsilon) - N), \psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon \rangle = \\ & - \int_{\Omega_1} [(2\delta^2 \text{sh}(\phi_\varepsilon) - N) - (2\delta^2 \text{sh}(\psi(0^+) + \hat{\psi}) - N(0^+))M(t(x,y))] (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \, dx dy \\ (2.2) \quad & - \int_{\Omega_2} [(2\delta^2 \text{sh}(\phi_\varepsilon) - N) - (2\delta^2 \text{sh}(\psi(0^-) + \hat{\psi}) - N(0^-))M(t(x,y))] (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \, dx dy \\ & + \sqrt{\varepsilon} \int_{\Omega_1} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \tau} \Delta t M(\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \, dx dy + \sqrt{\varepsilon} \int_{\Omega_2} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \tau} \Delta t M(\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \, dx dy \\ & + \int_{\Omega_1} c_\varepsilon (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \, dx dy + \int_{\Omega_2} c_\varepsilon (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \, dx dy. \end{aligned}$$

On étudie les différents termes : sur le voisinage de la jonction défini par  $t \in [-w/2, w/2]$  on a :

$$\phi_\varepsilon = \psi + \hat{\psi}$$

or  $\psi/\Omega_i = \text{constante}$  pour  $i = 1, 2$

$$\Rightarrow \phi_\varepsilon = \psi(0^+) + \hat{\psi}$$

pour  $t \in [0, w/2]$  et  $M \equiv 1$

$$N = N(0^+)$$

La fonction à intégrer dans le premier terme du second membre de (2.2) est nulle pour  $t \in [0, w/2]$ . On utilise alors la décroissance exponentielle de  $\hat{\psi}$  pour en déduire que :

$$(2.3) \quad \left| \int_{\Omega_1} [(2\delta^2 \text{sh}(\phi_\varepsilon) - N) - (2\delta^2 \text{sh}(\psi(0^+) + \hat{\psi}) - N(0^+))M(t)] (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \, dx dy \right| \leq c\varepsilon^q \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0,\Omega_1}$$

DémonstrationLemme 2.2.

Sous les hypothèses du théorème 2.1 on a :

$$\varepsilon \Delta(\psi + \hat{\psi}M) = \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial^2 \tau} M + \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \tau} \Delta t M + c_\varepsilon$$

où

$$(2.1) \quad \|c_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c\varepsilon^q \quad \forall q > 0.$$

DémonstrationRemarque

N étant indépendante de s,  $\psi$  est indépendante de s, on en déduit que  $\hat{\psi}$  ne dépend pas de s.

On utilise par ailleurs les relations suivantes :

$$[\psi + \hat{\psi}M]_\Gamma = 0 ; \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \tau}(0^-, s) = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \tau}(0^+, s) \text{ et } \psi/\Omega_i = \text{constante} \quad i = 1, 2.$$

On en déduit après calcul que :

$$c_\varepsilon = 2\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \tau} \frac{dM}{dt} + \hat{\psi} \left[ \frac{d^2 M}{d^2 t} + \frac{dM}{dt} \Delta t \right].$$

Pour démontrer l'estimation (2.1) on utilise le fait que  $M(t) \equiv 1$  pour  $t \in [-w/2, w/2]$ , donc  $c_\varepsilon \equiv 0$  sur un voisinage fixe de la jonction ; on utilise alors la décroissance exponentielle de  $\hat{\psi}$  et de  $\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \tau}$  donnée au théorème 1.3 (II).

On en conclut (2.1).

$$\alpha_-(s) = \frac{[2\delta^2 \text{ch}(\psi(0^-, s)) - 2\delta^2 \text{ch}(\psi(0^+, s)) + N(0^+, s) (\psi(0^+, s) - \psi(0^-, s))]}{N(0^+, s) - N(0^-, s)}$$

$$\alpha_+(s) = \frac{[2\delta^2 \text{ch}(\psi(0^-, s)) - 2\delta^2 \text{ch}(\psi(0^+, s)) + N(0^-, s) (\psi(0^+, s) - \psi(0^-, s))]}{(N(0^+, s) - N(0^-, s))}$$

On cherche maintenant à établir des estimations  $L^2$  et  $H^1$  sur le reste d'ordre 0 du développement asymptotique.

Soit  $M$  une fonction  $\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  telle que :

$$M(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [-w/2, w/2] \\ 0 \leq M(t) \leq 1 & \text{pour } w/2 \leq |t| \leq w \\ 0 & \text{pour } |t| \geq w. \end{cases}$$

Le premier terme du développement est donc :

$$\phi_\varepsilon(x, y) = \psi(x, y) + \hat{\psi}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}, s\right) M(t).$$

### Théorème 2.1

On suppose que  $\Gamma$  et  $\Omega$  vérifient les hypothèses précédentes. On suppose en outre que le dopage  $N$  est constant par sous domaine, c'est-à-dire que :

$$N = \begin{cases} N_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ N_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

où  $N_1$  et  $N_2$  sont des constantes, avec  $N_1 \neq N_2$ .

Alors  $\|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c\varepsilon^{3/4}$

$$\|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{1, \Omega} \leq c\varepsilon^{1/4}.$$

### III - 2. Développements asymptotiques

On cherche  $\psi_\varepsilon$  sous la forme d'un développement asymptotique qui a la forme suivante :

$$\psi_\varepsilon(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} [\psi_i(x,y) + \hat{\psi}_i(\frac{t(x,y)}{\sqrt{\varepsilon}}, s(x,y))] (\sqrt{\varepsilon})^i.$$

Dans la suite on notera  $\psi_0$  par  $\bar{\psi}$  et  $\hat{\psi}_0$  par  $\hat{\psi}$ . Dans le cas particulier de l'équilibre le problème réduit (PR) devient :

$$(PR) \left\{ \begin{array}{l} \delta^2 e^{\bar{\psi}} - \delta^2 e^{-\bar{\psi}} = N \\ \bar{\psi}/\Gamma_D = \log\left(\frac{N + \sqrt{N^2 + 4\delta^4}}{2\delta^2}\right) \\ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n e}/\Gamma_n = 0 \end{array} \right.$$

on trouve que  $\bar{\psi} = \log\left(\frac{N + \sqrt{N^2 + 4\delta^4}}{2\delta^2}\right)$

Le problème de couche limite (PCL) devient :

$$(PCL) \left\{ \begin{array}{l} (PCL1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial^2 \tau} = 2\delta^2 \operatorname{sh}(\psi(0^-, s) + \hat{\psi}) - N(0^-, s) \text{ pour } \tau < 0 \\ \hat{\psi}(0^-, s) = \alpha_-(s) \\ \hat{\psi}(-\infty, s) = 0 \end{array} \right. \\ (PCL2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial^2 \tau} = 2\delta^2 \operatorname{sh}(\psi(0^+, s) + \hat{\psi}) - N(0^+, s) \text{ pour } \tau > 0 \\ \hat{\psi}(0^+, s) = \alpha_+(s) \\ \hat{\psi}(-\infty, s) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où :

que  $\Gamma$  est une courbe  $\mathcal{C}^\infty$ . On supposera de plus que  $\bar{\Gamma}$  intersecte  $\partial\Omega$  en deux points  $S_1$  et  $S_2$  qui sont à une distance strictement positive de  $\Gamma_D$  et qu'il existe deux cercles de rayon  $w$  centrés en  $S_1$  et  $S_2$ , à l'intérieur desquels  $\Gamma$  et  $\partial\Omega$  sont perpendiculaires. Toujours selon les définitions de Markowich [1] on définit :  $t(x,y)$  la distance orientée de  $(x,y)$  à  $\Gamma$  (où  $(x,y) \in \Omega$ ), ce qui signifie que  $t > 0$  dans  $\Omega_1$  et  $t < 0$  dans  $\Omega_2$  ; et  $s(x,y)$  la "projection orthogonale" de  $(x,y)$  sur  $\Gamma$  ( $s$  est unique dans un "voisinage suffisamment petit" de  $\Gamma$ ). Les coordonnées locales  $(t,s)$  vérifient les propriétés suivantes :

$\nabla t / \Gamma$  est le vecteur unitaire normal pointant vers  $\Omega_1$ .

On pose :

$$\frac{\partial s}{\partial x \partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x} & \frac{\partial s_2}{\partial x} \\ \frac{\partial s_1}{\partial y} & \frac{\partial s_2}{\partial y} \end{pmatrix} .$$

On remarque alors que :

$$\left( \frac{\partial s}{\partial x \partial y} \right)^T \nabla t / \Gamma = 0 \quad (\text{où l'indice } T \text{ désigne la transposition}).$$

Pour plus de détails se référer à Markowich [1].

De plus pour une fonction  $f$  définie sur  $\Omega$  (ou  $\bar{\Omega}$ ) on pose :

$$f^\Gamma(t,s) = f(x,y)$$

dans la suite par abus de notation on notera  $f^\Gamma$  par  $f$ .

De plus dans un voisinage de  $\Gamma$  où  $s$  est unique on pose pour  $s \in \Gamma$  :

$$f(0^+,s) = \lim_{\substack{(a,b) \rightarrow s \\ (a,b) \in \Omega_1}} f(a,b), \quad f(0^-,s) = \lim_{\substack{(a,b) \rightarrow s \\ (a,b) \in \Omega_2}} f(a,b).$$



### III - CAS DE L'EQUILIBRE. DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Lors de l'équilibre le potentiel appliqué  $u_A$  étant nul on a :  $u_\varepsilon \equiv 1$  et  $v_\varepsilon \equiv 1$ , le système  $P_\varepsilon$  se réduit donc à une seule équation ; par ailleurs la propriété de monotonie de l'opérateur  $\psi \rightarrow e^\psi - e^{-\psi} - N$  est évidente, ceci sans restriction sur la dimension d'espace. Le cas de l'équilibre justifie donc d'un traitement particulier. On se place dans le cas où la dimension d'espace  $n$  est égale à 1, 2 ou 3. La jonction  $\Gamma$  est donc suivant les cas un point, une courbe ou une surface, elle partitionne  $\Omega$  en deux sous domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Dans la suite on va obtenir dans le cas particulier où le dopage  $N$  est constant dans chaque sous domaine, une estimation  $L^2$  pour le reste d'ordre 0 du développement asymptotique en  $\varepsilon^{3/4}$  et une estimation  $H^1$  (sur  $\Omega$  tout entier) pour ce même reste en  $\varepsilon^{1/4}$ .

#### III - 1. Equation de base et coordonnées locales autour de la jonction

Le système  $P_\varepsilon$  se réduit à une seule équation qui est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \Delta \psi_\varepsilon = \delta^2 e^{\psi_\varepsilon} - \delta^2 e^{-\psi_\varepsilon} - N \text{ dans } \Omega \\ \psi_\varepsilon / \Gamma_D = \log \left( \frac{N + \sqrt{N^2 + 4\delta^4}}{2\delta^2} \right) \\ \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} / \Gamma_n = 0 \end{array} \right.$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  avec  $n = 1, 2$  ou  $3$ .

$\partial\Omega$  se partitionne en  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_n$ . Sur la portion de frontière  $\Gamma_D$  les conditions aux limites sur  $\psi_\varepsilon$  sont de type Dirichlet non homogène, sur  $\Gamma_n$  elles sont de type Neumann homogène.

$n_\varepsilon$  désigne la normale extérieure à  $\Gamma_n$

$N$ , le dopage, admet un saut à travers la jonction  $\Gamma$  et est "régulier" sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

Pour faciliter l'exposé on se placera dans le cas où  $n = 2$ . On supposera

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\bar{\psi}_\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 + \int_\Omega S_\varepsilon |(\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi})'|^2 &\leq c\varepsilon \|\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}\|_{0,\Omega} + c\varepsilon \|\psi_\varepsilon\|_{L^2_{loc}} \|\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}\|_{0,\Omega} \\ &+ c \|\psi_\varepsilon - \bar{\psi}\|_{L^2_{loc}}^2 + c \|S_\varepsilon - S\|_{L^2_{loc}} \|\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}\|_{0,\Omega} + c\varepsilon \|\psi_\varepsilon\|_{L^2_{loc}} |\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}|_{1,\Omega} \\ &+ c \|S_\varepsilon - S\|_{L^2_{loc}} |\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}|_{1,\Omega} + c\varepsilon \|\bar{\psi}_\varepsilon\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

ceci d'après le lemme 2.1 (car  $\psi/\Omega_i \in H^2(\Omega_i)$ ).

D'après le théorème 2.1 on a :

$$\|\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^p \text{ avec } p = \frac{1}{2}.$$

On déduit du théorème 2.1 que :

$$\|S_\varepsilon - S\|_{L^2_{loc}} \leq c\varepsilon^p$$

or  $0 < \alpha \leq S_\varepsilon$  où  $\alpha$  est indépendant de  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon \|\bar{\psi}_\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 + \alpha |\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}|_{1,\Omega}^2 &\leq c\varepsilon^{1+p} + c\varepsilon^{2p} + c\varepsilon \|\psi_\varepsilon\|_{L^2_{loc}} \varepsilon^p \\ &+ c\varepsilon \|\psi_\varepsilon\|_{L^2_{loc}} |\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}|_{1,\Omega} + c\varepsilon^p |\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}|_{1,\Omega} + c\varepsilon \|\bar{\psi}_\varepsilon\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

d'après le lemme 3.1.

$$\Rightarrow \varepsilon \|\bar{\psi}_\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 + \alpha |\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}|_{1,\Omega}^2 \leq c\varepsilon + \frac{c\varepsilon}{\gamma} + \gamma |\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}|_{1,\Omega}^2 + \frac{c\varepsilon}{\gamma} + \gamma c\varepsilon \|\bar{\psi}_\varepsilon\|_{0,\Omega}^2$$

où  $\gamma > 0$  quelconque, on choisit  $\gamma$  assez petit, indépendant de  $\varepsilon$ .

$$\Rightarrow c_1 \varepsilon \|\bar{\psi}_\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 + c_2 |\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}|_{1,\Omega}^2 \leq c\varepsilon$$

d'où  $|\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}|_{1,\Omega} \leq c\varepsilon^p$  avec  $p = \frac{1}{2}$

$$\|\bar{\psi}_\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq c.$$

$$S_\varepsilon = u_\varepsilon e^{\psi_\varepsilon} + v_\varepsilon e^{-\psi_\varepsilon}$$

$$S = u e^\psi + v e^{-\psi}.$$

Soit  $\phi$  une fonction suffisamment régulière, nulle sur un voisinage de la jonction,  $\phi \equiv 1$  sur  $\theta$ ,  $\phi \geq 0$ .

On pose :

$$\bar{\psi}_\varepsilon = \phi \psi_\varepsilon$$

$$\bar{\psi} = \phi \psi.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon (\bar{\psi}_\varepsilon)^{(4)} - [S_\varepsilon (\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi})']' &= \varepsilon [\phi^{(4)} \psi_\varepsilon + 4\phi^{(3)} \psi_\varepsilon' + 6\phi'' \psi_\varepsilon'' + 4\phi' \psi_\varepsilon^{(3)}] \\ &\quad - [S_\varepsilon \phi' (\psi_\varepsilon - \psi)]' - S_\varepsilon (\psi_\varepsilon - \psi)' \phi' + \phi [(S_\varepsilon - S) \psi']'. \end{aligned}$$

On multiplie par  $(\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi})$  et on intègre par parties :

or  $\bar{\psi}_\varepsilon = \psi_\varepsilon$  sur un voisinage du bord

et  $\Delta \psi_\varepsilon = 0$  sur le bord  $\Gamma_D$

$$\Rightarrow \int_\Omega \bar{\psi}_\varepsilon^{(4)} (\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}) = \int_\Omega \bar{\psi}_\varepsilon'' (\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi})''$$

d'où :

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_\Omega \bar{\psi}_\varepsilon'' (\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi})'' + \int_\Omega S_\varepsilon |(\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi})'|^2 &= \varepsilon \int_\Omega \phi'' \psi_\varepsilon (\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}) \\ + 4\varepsilon \int_\Omega \phi^{(3)} \psi_\varepsilon' (\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}) + 2\varepsilon \int_\Omega \phi'' \psi_\varepsilon'' (\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}) &+ \int_\Omega S_\varepsilon (\phi')^2 (\psi_\varepsilon - \psi)^2 \\ - \int_\Omega (S_\varepsilon - S) \psi' \phi' (\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi}) - 4\varepsilon \int_\Omega \psi_\varepsilon'' \phi' (\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi})' &- \int_\Omega (S_\varepsilon - S) \psi' \phi (\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\psi})' \end{aligned}$$

d'où :

Dans le livre de Ladyzhenskaya et Ural'tseva [6] (théorème 17.4, p. 214) on trouve une estimation de  $\|\nabla u'\|_{L^\infty}$  qui fait intervenir  $\|\nabla \psi'\|_{L^q}$  avec  $q > n$  ( $n$  étant la dimension de l'espace), or on applique le lemme 2.2 avec  $\psi' = \psi_\varepsilon$ ,  $\|\nabla \psi_\varepsilon'\|_{L^q}$  se comportant comme  $\varepsilon^p$  avec  $p < 0$ , on ne peut donc conclure.

### III - ESTIMATION H<sup>1</sup> LOCALE

Lemme 3.1 : (du à J. Henry et B. Louro [2]).

Soit  $\theta$  un sous ensemble de  $\Omega$  ne contenant pas un voisinage de la jonction (mais contenant le bord de  $\Omega$ ) alors

$$\sqrt{\varepsilon} \|\Delta \psi_\varepsilon\|_{L^2(\theta)} \leq c$$

$$\|\psi_\varepsilon\|_{1,\theta} \leq c$$

où  $c$  est une constante qui dépend de  $\theta$ , mais non de  $\varepsilon$  (cf. J. Henry et B. Louro [2]).

### Théorème 3.2

Soit  $\theta$  un sous ensemble de  $\Omega$  comme ci-dessus et sous les mêmes hypothèses que le théorème 2.1, on suppose en outre que  $N/\Omega_i \in H^2(\Omega_i)$   $i = 1, 2$  alors on a :

$$\|\psi_\varepsilon^{-\psi}\|_{H^1(\theta)} \leq c(\theta) \varepsilon^q \quad \text{avec } q = \frac{1}{2}$$

$$\|\psi_\varepsilon''\|_{L^2(\theta)} \leq c(\theta)$$

où  $c(\theta)$  est une constante qui dépend de  $\theta$  mais non  $\varepsilon$ .

### Démonstration

On reprend les techniques développées dans [2] par J. Henry. On pose :

On peut déduire du théorème 2.1 des estimations sur le reste du développement pour les densités de courant d'électrons et de trous. On rappelle que les densités de courant sont données par les relations :

$$J_{n_\varepsilon} = e \psi_\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx} \quad \text{et} \quad J_{p_\varepsilon} = e^{-\psi_\varepsilon} \frac{dv_\varepsilon}{dx}.$$

On pose  $\bar{J}_n = e^\psi \frac{du}{dx}$  et  $\bar{J}_p = e^{-\psi} \frac{dv}{dx}$ . On obtient alors le résultat suivant :

Corollaire : Sous les hypothèses du théorème 2.1 on a :

$$\|J_{n_\varepsilon} - \bar{J}_n\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/4}$$

$$\|J_{p_\varepsilon} - \bar{J}_p\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/4}.$$

Démonstration :

$$J_{n_\varepsilon} - \bar{J}_n = (e^{\psi_\varepsilon} - e^\psi) \frac{du_\varepsilon}{dx} + \frac{d}{dx} (u_\varepsilon - u) e^\psi$$

$$\Rightarrow \|J_{n_\varepsilon} - \bar{J}_n\|_{0,\Omega} \leq c_1 [\|\psi_\varepsilon - \psi\|_{0,\Omega} + \|u_\varepsilon - u\|_{1,\Omega}]$$

or  $\|\psi_\varepsilon - \psi\|_{0,\Omega} \leq \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0,\Omega} + \|\phi_\varepsilon - \psi\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/2} + c\varepsilon^{1/4}$

d'où  $\|J_{n_\varepsilon} - \bar{J}_n\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/4}$

de même  $\|J_{p_\varepsilon} - \bar{J}_p\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/4}.$

Remarque

Au niveau du lemme 2.2 (lemme de monotonie) on a utilisé une majoration de  $\|\frac{du'}{dx}\|_{L^\infty}$  où  $u'$  est solution de  $\frac{d}{dx} (e^{\psi'} \frac{du'}{dx}) = 0$ .

Pour généraliser le théorème 2.1 au cas de dimensions d'espace supérieures ou égales à 2 il faudrait donc obtenir des conditions suffisantes pour que  $\|\nabla u'\|_{L^\infty}$  soit suffisamment petit.

$$c_1 \varepsilon \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{1,\Omega}^2 + c_2 \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \leq c\varepsilon$$

on en déduit que :

$$\|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/2}$$

$$\|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq c.$$

On obtient aisément que :

$$\|u_\varepsilon - u\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/2}$$

$$\|v_\varepsilon - v\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/2}$$

$$\|u_\varepsilon - u\|_{1,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/4}$$

$$\|v_\varepsilon - v\|_{1,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/4}$$

En effet :

$$\|u_\varepsilon - u\|_{0,\Omega} \leq \|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon\|_{0,\Omega} + \|\bar{u}_\varepsilon - u\|_{0,\Omega}$$

or  $\|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq c\|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/2} \Rightarrow \|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/2}$

et  $\|\bar{u}_\varepsilon - u\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/2}$  d'après (2.6)

d'où  $\|u_\varepsilon - u\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/2}$

$$\|v_\varepsilon - v\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/2}.$$

Par ailleurs

$$\|u_\varepsilon - u\|_{1,\Omega} \leq \|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon\|_{1,\Omega} + \|\bar{u}_\varepsilon - u\|_{1,\Omega}$$

$$\Rightarrow \|u_\varepsilon - u\|_{1,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/4} \text{ d'après (2.8)}$$

de même  $\|\bar{v}_\varepsilon - v\|_{1,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/4}$  d'après (2.9).

$$\|\bar{u}_\varepsilon - u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|\phi_\varepsilon - \psi\|_{L^1(\Omega)}$$

$$|\bar{u}_\varepsilon - u|_{1,\Omega} \leq c \|\phi_\varepsilon - \psi\|_{0,\Omega}$$

On en déduit de même que

$$\|\bar{v}_\varepsilon - v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|\phi_\varepsilon - \psi\|_{L^1(\Omega)}$$

$$|\bar{v}_\varepsilon - v|_{1,\Omega} \leq c \|\phi_\varepsilon - \psi\|_{0,\Omega}$$

### Démonstration du corollaire

$$\|\phi_\varepsilon - \psi\|_{L^1(\Omega)} = \|\hat{\psi}M\|_{L^1(\Omega)} \leq c \|\hat{\psi}\|_{L^1(\Omega)} \leq c\varepsilon^{1/2}$$

en faisant le changement de variable

$$\tau = \frac{x - x_0}{\sqrt{\varepsilon}}$$

De même  $\|\phi_\varepsilon - \psi\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/4}$  on en déduit donc (2.6), (2.7), (2.8), (2.9).

Par ailleurs d'après le lemme 2.2 de monotonie on a que :

$$(2.10) \quad c \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \leq \int_0^1 (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) [(u_\varepsilon e^{\psi_\varepsilon} - v_\varepsilon e^{-\psi_\varepsilon}) - (\bar{u}_\varepsilon e^{\phi_\varepsilon} - \bar{v}_\varepsilon e^{-\phi_\varepsilon})] dx.$$

En utilisant (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) dans l'expression (2.1) on obtient finalement

$$\varepsilon |\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon|_{1,\Omega}^2 + c \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \leq c\varepsilon^{1/2} \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0,\Omega} + c\varepsilon |\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon|_{1,\Omega}$$

Soit  $\gamma > 0$  tel que :

$$1 - c\gamma/2 > 0 \text{ et } \bar{c} - c\gamma/2 > 0$$

$$\varepsilon |\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon|_{1,\Omega}^2 + c \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \leq c \left[ \frac{\varepsilon}{\gamma} + \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \gamma/2 + |\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon|_{1,\Omega}^2 \varepsilon\gamma/2 \right]$$

d'où :

Corollaire :

$$(2.6) \quad \|\bar{u}_\varepsilon - u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\varepsilon^{1/2}$$

$$(2.7) \quad \|\bar{v}_\varepsilon - v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\varepsilon^{1/2}$$

$$(2.8) \quad |\bar{u}_\varepsilon - u|_{1,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/4}$$

$$(2.9) \quad |\bar{v}_\varepsilon - v|_{1,\Omega} \leq c\varepsilon^{1/4}.$$

Démonstration

On pose  $w = \bar{u}_\varepsilon - u$  et  $f(x) = -(e^{\phi_\varepsilon} - e^\psi) \frac{du}{dx}$ . On a alors  $\frac{d}{dx}(e^{\phi_\varepsilon} \frac{dw}{dx}) = \frac{df}{dx}$  avec  $w(0) = w(1) = 0$ . On en déduit que :

$$\frac{dw}{dx} = f e^{-\phi_\varepsilon} - \frac{\int_0^1 e^{-\phi_\varepsilon} f ds}{\int_0^1 e^{-\phi_\varepsilon} ds} e^{-\phi_\varepsilon}$$

d'où :

$$w(x) = \int_0^x f(t) e^{-\phi_\varepsilon(t)} dt - \frac{\int_0^1 f e^{-\phi_\varepsilon}}{\int_0^1 e^{-\phi_\varepsilon}} \int_0^x e^{-\phi_\varepsilon}$$

d'où :

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^1} \leq c \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|\phi_\varepsilon - \psi\|_{L^1(\Omega)} \leq c \|\phi_\varepsilon - \psi\|_{L^1(\Omega)}$$

où  $c$  est indépendante de  $\varepsilon$

de même

$$\left\| \frac{dw}{dx} \right\|_{0,\Omega} \leq c \|\phi_\varepsilon - \psi\|_{0,\Omega}$$

On a donc :



$$M_1(x) = \int_0^1 \frac{d}{dx}(ve^{-\psi})(x_0 + t(x-x_0))dt$$

$$M_2(x) = \int_0^1 \frac{dN}{dx}(x_0 + t(x-x_0))dt.$$

Il est facile de vérifier que :

$$\|M_1\|_{0, J_\alpha^-} \leq c_1 \left\| \frac{d}{dx}(ve^{-\psi}) \right\|_{0, \Omega_1} \leq c$$

et

$$\|M_2\|_{0, J_\alpha^-} \leq c_1 \left\| \frac{dN}{dx} \right\|_{0, \Omega_1} \leq c$$

en faisant le changement de variable  $\tau = \frac{x-x_0}{\sqrt{\epsilon}}$ .

On en déduit que

$$(2.4) \quad \|F\|_{L^2(J_\alpha^-)} \leq c\epsilon^{1/2}.$$

On obtient de même

$$(2.5) \quad \|F\|_{L^2(J_\alpha^+)} \leq c\epsilon^{1/2}.$$

Pour majorer le terme  $G_\epsilon = \int_0^1 (\psi_\epsilon - \phi_\epsilon)(u - \bar{u}_\epsilon)e^{\phi_\epsilon} + \int_0^1 (\psi_\epsilon - \phi_\epsilon)(\bar{v}_\epsilon - v)e^{-\phi_\epsilon}$ , on doit obtenir des estimations sur  $(\bar{u}_\epsilon - u)$  et  $(\bar{v}_\epsilon - v)$  en norme  $L^2$ , on utilise donc le lemme suivant :

### Lemme 2.3

Soient  $\bar{u}_\epsilon$ ,  $\bar{v}_\epsilon$ ,  $\phi_\epsilon$ ,  $\psi$ ,  $u$ ,  $v$  les fonctions précédemment introduites, alors sous les hypothèses du théorème 2.1 on a :

$$\|\bar{u}_\epsilon - u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|\phi_\epsilon - \psi\|_{L^1(\Omega)}$$

$$\|\bar{v}_\epsilon - v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|\phi_\epsilon - \psi\|_{L^1(\Omega)}$$

$$|\bar{u}_\epsilon - u|_{1, \Omega} \leq c \|\phi_\epsilon - \psi\|_{0, \Omega}$$

$$|\bar{v}_\epsilon - v|_{1, \Omega} \leq c \|\phi_\epsilon - \psi\|_{0, \Omega}$$

On pose :  $I_{\alpha}^{-} = [0, x_0 - \alpha/2]$  et  $I_{\alpha}^{+} = [x_0 + \alpha/2, 1]$  et  $I_{\alpha} = I_{\alpha}^{-} \cup I_{\alpha}^{+}$  en utilisant la relation :

$$(2.2) \quad u(x_0^{-})e^{\psi(x_0^{-})} - v(x_0^{-})e^{-\psi(x_0^{-})} - N(x_0^{-}) = 0$$

On peut réécrire  $F$  sous la forme suivante :

$$F(x) = e^{\psi}(e^{\hat{\psi}^M-1})u - e^{-\psi}(e^{-\hat{\psi}^M-1})v - M(x)[2v(x_0^{-})e^{-\psi(x_0^{-})}\text{sh}(\hat{\psi}) + N(x_0^{-})(e^{\hat{\psi}-1})]$$

sur  $I_{\alpha}^{-}$ , on procède de même sur  $I_{\alpha}^{+}$ .

On en déduit en utilisant la décroissance exponentielle de  $\hat{\psi}$  que :

$$(2.3) \quad \|F\|_{L^2(I_{\alpha})} \leq c\varepsilon^q \text{ ceci } \forall q > 0.$$

Il suffit donc de restreindre l'intervalle d'intégration à  $J_{\alpha}$  où  $J_{\alpha} = J_{\alpha}^{-} \cup J_{\alpha}^{+}$  avec  $J_{\alpha}^{-} = [x_0 - \alpha/2, x_0]$  et  $J_{\alpha}^{+} = [x_0, x_0 + \alpha/2]$ .

Sur  $J_{\alpha}$  on a :  $M \equiv 1$ , donc

$$F(x) = ue^{\psi}(e^{\hat{\psi}-1}) - ve^{-\psi}(e^{-\hat{\psi}-1}) - 2v(x_0^{-})e^{-\psi(x_0^{-})}\text{sh}(\hat{\psi}) - N(x_0^{-})(e^{\hat{\psi}-1}).$$

En utilisant à nouveau la relation (2.2) on trouve finalement :

$$F(x) = 2\text{sh}(\hat{\psi})[ve^{-\psi} - v(x_0^{-})e^{-\psi(x_0^{-})}] + (e^{\hat{\psi}-1})[N(x) - N(x_0^{-})] \text{ sur } J_{\alpha}^{-}$$

or  $(ve^{-\psi})/\Omega_i \in H^1(\Omega_i)$ , en effet d'après le lemme 1.2  $\psi/\Omega_i \in H^1(\Omega_i)$ , or on sait déjà que :  $v/\Omega_i \in H^1(\Omega_i)$  et que par ailleurs  $v \in L^{\infty}(\Omega)$  et  $\psi \in L^{\infty}(\Omega)$ , on en déduit donc que  $(ve^{-\psi})/\Omega_i \in H^1(\Omega_i)$  pour  $i = 1, 2$ .

On en déduit que :

$$F(x) = 2\text{sh}(\hat{\psi})(x-x_0)M_1(x) + e^{\hat{\psi}}(x-x_0)M_2(x)$$

avec

où  $c_\varepsilon$  vérifie l'estimation (1.6).

On introduit les fonctions  $\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} (e^{\phi_\varepsilon} \frac{d\bar{u}_\varepsilon}{dx}) = 0 \\ \bar{u}_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(0) \\ \bar{u}_\varepsilon(1) = u_\varepsilon(1) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} (e^{-\phi_\varepsilon} \frac{d\bar{v}_\varepsilon}{dx}) = 0 \\ \bar{v}_\varepsilon(0) = v_\varepsilon(0) \\ \bar{v}_\varepsilon(1) = v_\varepsilon(1) \end{array} \right.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left| \psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon \right|_{1, \Omega}^2 + \int_0^1 (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) [(u_\varepsilon e^{\psi_\varepsilon} - v_\varepsilon e^{-\psi_\varepsilon}) - (\bar{u}_\varepsilon e^{\phi_\varepsilon} - \bar{v}_\varepsilon e^{-\phi_\varepsilon})] \\ &= -c_\varepsilon + \varepsilon \int_0^{x_0} \frac{d\psi}{dx} \frac{d}{dx} (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) + \varepsilon \int_{x_0}^1 \frac{d\psi}{dx} \frac{d}{dx} (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \\ &+ \int_0^1 (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) (u - \bar{u}_\varepsilon) e^{\phi_\varepsilon} + \int_0^1 (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) (\bar{v}_\varepsilon - v) e^{-\phi_\varepsilon} \\ (2.1) \quad &+ \int_0^{x_0} (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) [((e^{\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon})u - M(x)u(x_0^-)e^{\psi(x_0^-) + \hat{\psi}}) \\ &- ((e^{-\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon})v - M(x)v(x_0^-)e^{-\psi(x_0^-) - \hat{\psi}}) + M(x)N(x_0^-)] \\ &+ \int_{x_0}^1 (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) [((e^{\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon})u - M(x)u(x_0^+)e^{\psi(x_0^+) + \hat{\psi}}) \\ &- ((e^{-\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon})v - M(x)v(x_0^+)e^{-\psi(x_0^+) - \hat{\psi}}) + M(x)N(x_0^+)]. \end{aligned}$$

On étudie ces deux dernières intégrales. On pose :

$$\begin{aligned} F(x) &= [(e^{\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon})u - M(x)u(x_0^-)e^{\psi(x_0^-) + \hat{\psi}}] - [(e^{-\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon})v - M(x)v(x_0^-)e^{-\psi(x_0^-) - \hat{\psi}}] \\ &+ M(x)N(x_0^-) \end{aligned}$$

sur  $\Omega_1 = [0, x_0]$ , avec l'extension évidente sur  $\Omega_2 = [x_0, 1]$ .

d'où  $\|u-u'\|_{1,\Omega} \leq c \left\| \frac{du'}{dx} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|\psi-\psi'\|_{0,\Omega}$ .

On va maintenant majorer  $\left\| \frac{du'}{dx} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$  :

$$\frac{d}{dx} (e^{\psi'} \frac{du'}{dx}) = 0$$

On en déduit que :

$$\frac{du'}{dx}(x) = \frac{u'(1) - u'(0)}{\int_0^1 e^{-\psi'(t)} dt} e^{-\psi'(x)}$$

d'où  $\left\| \frac{du'}{dx} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_1 |u'(1) - u'(0)| \leq c |u_A(1) - u_A(0)|$ .

Donc si  $|v_{\max}|$  est suffisamment petit,  $\left\| \frac{du'}{dx} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$  l'est aussi d'où

$$\langle \psi-\psi', (ue^\psi - ve^{-\psi}) - (u'e^{\psi'} - v'e^{-\psi'}) \rangle \geq c \|\psi-\psi'\|_{0,\Omega}^2.$$

#### Démonstration du théorème 2.1

Dans toute la suite on posera  $\tau = (x - x_0)/\sqrt{\varepsilon}$  et  $\phi_\varepsilon(x) = \psi(x) + \hat{\psi}(\frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}})M(x)$ . On calcule alors  $I_\varepsilon = \varepsilon \langle \Delta(\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon), \psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon \rangle$ , où  $\Delta$  est pris au sens des distributions.

Comme  $(\frac{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}{\partial \Omega}) = 0$  on a  $I_\varepsilon = -\varepsilon \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{1,\Omega}^2$ .

On utilise alors le lemme (1.4) avec  $\theta = \psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon$  et dans l'expression (1.5) on remplace  $\frac{d^2 \hat{\psi}}{d^2 \tau}$  par le second membre de (PCL1) et (PCL2), on obtient après calcul :

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \|\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{1,\Omega}^2 = \\ & \int_0^{x_0} (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) [(u_\varepsilon e^{\psi_\varepsilon - v_\varepsilon} e^{-\psi_\varepsilon - N} - M(x)(u(x_0^-) e^{\psi(x_0^-) + \hat{\psi}(-v(x_0^-)) - \psi(x_0^-) - \hat{\psi}(-N(x_0^-))})] + \\ & \int_{x_0}^1 (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) [(u_\varepsilon e^{\psi_\varepsilon - v_\varepsilon} e^{-\psi_\varepsilon - N} - M(x)(u(x_0^+) e^{\psi(x_0^+) + \hat{\psi}(-v(x_0^+) - \psi(x_0^+) - \hat{\psi}(-N(x_0^+))})] + \\ & c_\varepsilon = \varepsilon \int_0^{x_0} \frac{d\psi}{dx} \frac{d}{dx} (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) - \varepsilon \int_{x_0}^1 \frac{d\psi}{dx} \frac{d}{dx} (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} (e^{\psi} \frac{du}{dx}) = 0 \\ u(0) = \delta^2 e^{-u_A(0)/u_T} \\ u(1) = \delta^2 e^{-u_A(1)/u_T} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} (e^{\psi'} \frac{du'}{dx}) = 0 \\ u'(0) = u(0) \\ u'(1) = u(1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} (e^{-\psi} \frac{dv}{dx}) = 0 \\ v(0) = \delta^2 e^{u_A(0)/u_T} \\ v(1) = \delta^2 e^{u_A(1)/u_T} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} (e^{-\psi'} \frac{dv'}{dx}) = 0 \\ v'(0) = v(0) \\ v'(1) = v(1) \end{array} \right.$$

alors si  $|v_{\max}| = |u_A(1) - u_A(0)|$  est suffisamment petit on a :

$$\langle \psi - \psi', (ue^{\psi} - ve^{-\psi}) - (u'e^{\psi'} - v'e^{-\psi'}) \rangle \geq c \|\psi - \psi'\|_{0,\Omega}^2$$

où  $c$  ne dépend que de  $\bar{\psi}_-$  et  $\bar{\psi}_+$ .

Rappelons brièvement la démonstration de Mock, on a :

$$\begin{aligned} \langle \psi - \psi', (ue^{\psi} - ve^{-\psi}) - (u'e^{\psi'} - v'e^{-\psi'}) \rangle &= \langle \psi - \psi', u(e^{\psi} - e^{\psi'}) \rangle \\ &- \langle \psi - \psi', v(e^{-\psi} - e^{-\psi'}) \rangle + \langle \psi - \psi', (u-u') e^{\psi'} \rangle - \langle \psi - \psi', (v-v') e^{-\psi'} \rangle \\ &\geq c_1 \|\psi - \psi'\|_{0,\Omega}^2 + c_2 \|\psi - \psi'\|_{0,\Omega}^2 - c_3 \|\psi - \psi'\|_{0,\Omega} \|u-u'\|_{0,\Omega} \\ &- c_4 \|\psi - \psi'\|_{0,\Omega} \|v-v'\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

or 
$$\frac{d}{dx} (e^{\psi} \frac{du}{dx} - e^{\psi'} \frac{du'}{dx}) = 0$$

d'où 
$$\int_{\Omega} e^{\psi} \left| \frac{d(u-u')}{dx} \right|^2 = - \int_{\Omega} (e^{\psi} - e^{\psi'}) \frac{du'}{dx} \frac{d(u-u')}{dx}$$

Théorème 2.1

On fait les hypothèses suivantes  $N$  est définie sur  $\bar{\Omega}$ ,  $N \in L^\infty(\Omega)$ ,  $N$  est Lipschitzienne dans un voisinage de 0 et de 1. On suppose en outre que  $N/\Omega_1 \in C^{0,\alpha}(\Omega_1) \cap H^1(\Omega_1)$  pour un certain  $\alpha > 0$  et pour  $i = 1, 2$ ; on suppose encore que  $N/\Omega_1$  admet un prolongement continu à  $\bar{\Omega}_1$  encore noté  $N$  ceci pour  $i = 1, 2$ ; alors si  $|v_{\max}| = |u_A(1) - u_A(0)|$  est suffisamment petit on a les résultats suivants :

$$\|\psi_\epsilon - (\psi + \hat{\phi})\|_{0,\Omega} \leq c \sqrt{\epsilon}$$

$$\|u_\epsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \sqrt{\epsilon}$$

$$\|u_\epsilon - u\|_{1,\Omega} \leq c \epsilon^{1/4}$$

$$\|v_\epsilon - v\|_{0,\Omega} \leq c \sqrt{\epsilon}$$

$$\|v_\epsilon - v\|_{1,\Omega} \leq c \epsilon^{1/4}$$

où  $c$  est une constante strictement positive, indépendante de  $\epsilon$ .

Démonstration

On utilise le lemme suivant (lemme de monotonie, cf. Mock [5]).

Lemme 2.2

On se donne deux fonctions  $\psi, \psi'$  telles que :

$$\bar{\psi}_- \leq \psi \leq \bar{\psi}_+$$

$$\bar{\psi}_- \leq \psi' \leq \bar{\psi}_+$$

où  $\bar{\psi}_-$  et  $\bar{\psi}_+$  sont des constantes. On leur associe alors  $u, u', v, v'$  solutions de :

### Démonstration

Après calcul on trouve que :

$$(1.7) \quad c_\varepsilon = 2\sqrt{\varepsilon} \int_0^{x_0} \frac{\hat{d}\psi}{d\tau} \left( \frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \frac{dM}{dx} \theta + 2\sqrt{\varepsilon} \int_{x_0}^1 \frac{\hat{d}\psi}{d\tau} \left( \frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \frac{dM}{dx} \theta$$

$$+ \varepsilon \int_0^{x_0} \hat{\psi} \left( \frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \frac{d^2M}{d^2x} \theta + \varepsilon \int_{x_0}^1 \hat{\psi} \left( \frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \frac{d^2M}{d^2x} \theta$$

La démonstration de 1.6 est évidente en utilisant le théorème 1.3, en effet :

sur un voisinage fixe de la jonction  $I_\alpha = [x_0 - \alpha/2, x_0 + \alpha/2]$   $\frac{dM}{dx} = \frac{d^2M}{d^2x} = 0$ , les fonctions à intégrer dans l'expression (1.7) sont donc nulles, on intègre ces fonctions en dehors d'un voisinage de la jonction, on fait alors le changement de variable  $\tau = \frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}}$ , on utilise la décroissance exponentielle de  $\hat{\psi}$  et  $\frac{d\psi}{d\tau}$  à l'infini pour conclure.

### I - 2. Estimation $L^2$ pour le reste d'ordre 0 du développement asymptotique

Comme on l'a déjà précisé plus haut, notre but est de "valider" en quelque sorte le développement asymptotique (DA), ceci en obtenant des estimations pour le reste d'ordre 0. Ce but a été atteint dans une certaine mesure, en dimension 1 et si la différence de potentiel appliqué  $|u_A(1) - u_A(0)|$  est suffisamment petite. Si ces conditions sont réalisées alors le reste d'ordre 0 du développement tend vers 0 en norme  $L^2$  comme  $\sqrt{\varepsilon}$ . La restriction sur le potentiel appliqué provient du fait que l'on fait intervenir une propriété de monotonie pour l'opérateur  $\psi \rightarrow e^\psi u - e^{-\psi} v - N$  où  $u, v$  sont déterminés en résolvant les deux équations de continuité associées à  $\psi$ ; cette propriété de monotonie a été développée par Mock [5]. On soulignera de plus, ce qui fait qu'à priori cette démonstration ne peut s'étendre au cas de dimension supérieure strictement à 1.

Remarque

Du théorème (1.3) on déduit en particulier que  $\hat{\psi}(\frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}})$  est borné par des constantes indépendantes de  $\varepsilon$ . En effet puisque  $\hat{\psi}$  est monotone sur  $]-\infty, 0]$  et  $[0, +\infty[$  on en déduit que : si  $\hat{\psi}(0^-) < 0$  alors  $\hat{\psi}$  est décroissante sur  $]-\infty, 0]$ , que  $\hat{\psi}$  reste négative sur  $]-\infty, 0]$  on a donc :

$$\hat{\psi}(0^-) \leq \hat{\psi}(\tau) \leq 0 \text{ sur } ]-\infty, 0].$$

On raisonne de même si  $\hat{\psi}(0^-) > 0$ .

On pose  $\hat{\phi}(x) = \hat{\psi}(\frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}}) M(x)$ .

Démonstration 1.4

Sous les hypothèses du théorème (1.1)(II) et si de plus  $N/\Omega_i \in H^1(\Omega_i)$  pour  $i = 1, 2$  alors :

la dérivée seconde, au sens des distributions, de  $\varepsilon(\psi + \hat{\phi})$  se calcule de la façon suivante :

soit  $\theta \in H_0^1(\Omega)$  alors

$$(1.5) \quad \varepsilon \left\langle \frac{d^2(\psi + \hat{\phi})}{d^2x}, \theta \right\rangle = \int_0^{x_0} \frac{d^2 \hat{\psi}}{d^2 \tau} \left( \frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}} \right) M(x) \theta(x) dx + \int_{x_0}^1 \frac{d^2 \hat{\psi}}{d^2 \tau} \left( \frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}} \right) M(x) \theta(x) dx$$

$$- \varepsilon \int_0^{x_0} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \varepsilon \int_{x_0}^1 \frac{d\psi}{dx} \frac{d\theta}{dx} + c_\varepsilon$$

où  $c_\varepsilon$  vérifie :

$$(1.6) \quad |c_\varepsilon| \leq c\varepsilon^q \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{ceci } \forall q > 0$$

où  $c$  est une constante strictement positive indépendante de  $\varepsilon$ .



De plus  $\psi/\Omega_i \in \mathcal{C}(\Omega_i)$  et admet un prolongement continu à  $\bar{\Omega}_i$ ,  $i = 1, 2$  et  $(u, v) \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ .

### Lemme 1.2

Sous les mêmes hypothèses que le théorème 1.1 (dans II) alors :

si  $N/\Omega_i \in H^1(\Omega_i)$  on a :  $\psi/\Omega_i \in H^1(\Omega_i)$

$N/\Omega_i \in H^2(\Omega_i)$  on a :  $\psi/\Omega_i \in H^2(\Omega_i)$ .

### Démonstration

$\psi$  vérifie  $e^\psi u - e^{-\psi} v - N = 0 \Rightarrow \psi = \log \left( \frac{N + \sqrt{N^2 + 4uv}}{2u} \right)$  où  $(u, v) \in (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$  et où  $0 < u_1 \leq u \leq u_2$   $0 < v_1 \leq v \leq v_2$ , on a donc :

$$N/\Omega_i \in H^1(\Omega_i) \Rightarrow \psi/\Omega_i \in H^1(\Omega_i).$$

De plus  $\frac{d}{dx} (e^\psi \frac{du}{dx}) = 0 \Rightarrow$  et  $e^\psi \frac{du}{dx} = c = \text{cte}_2 \Rightarrow \frac{du}{dx} \in L^\infty(\Omega)$ , de même  $\frac{dv}{dx} \in L^\infty(\Omega)$ .  
On en déduit donc aisément que si  $N/\Omega_i \in H^2(\Omega_i)$  alors  $\psi/\Omega_i \in H^2(\Omega_i)$ .

### Théorème 1.3

Sous les hypothèses du théorème 1.1 (II) ; alors pour  $(\psi, u, v)$  donné solution faible de (PR), le problème de couche limite d'ordre 0 (P.C.L.) admet une solution unique monotone sur  $]-\infty, 0]$  et monotone sur  $[0, +\infty[$ .

De plus  $\tau \rightarrow \hat{\psi}(\tau)$  décroît exponentiellement lorsque  $t \rightarrow -\infty$  et  $\tau \rightarrow +\infty$ .

Démonstration cf. P.C. Fife [4], (Lemme 2.1 p. 207) et Markowich [1].

### Remarque

Dans l'article de Fife il est aussi précisé sous forme de remarque que :  $\frac{d\hat{\psi}}{dt}$  décroît exponentiellement à l'infini (cf. p. 208 de [4]).

$$\hat{\psi}(0^-) + \psi(x_0^-) = \hat{\psi}(0^+) + \psi(x_0^+)$$

et 
$$\frac{d\hat{\psi}}{d\tau}(0^+) = \frac{d\hat{\psi}}{d\tau}(0^-)$$

on trouve explicitement :

$$\alpha_- = [(u(x_0^-)e^{\psi(x_0^-)} + v(x_0^-)e^{-\psi(x_0^-)}) - (u(x_0^+)e^{\psi(x_0^+)} + v(x_0^+)e^{-\psi(x_0^+)}) \\ + N(x_0^+) (\psi(x_0^+) - \psi(x_0^-))] / N(x_0^+) - N(x_0^-)$$

$$\alpha_+ = [(u(x_0^-)e^{\psi(x_0^-)} + v(x_0^-)e^{-\psi(x_0^-)}) - (u(x_0^+)e^{\psi(x_0^+)} + v(x_0^+)e^{-\psi(x_0^+)}) \\ + N(x_0^-) (\psi(x_0^+) - \psi(x_0^-))] / N(x_0^+) - N(x_0^-)$$

(cf. [1] pour plus de détails).

De plus on obtient :  $\hat{u}_0 \equiv 0$                        $\hat{v}_0 \equiv 0$  .

Dans [1] Markowich prouve que les problèmes sont bien posés. De plus  $(\psi, u, v)$  vérifient les mêmes estimations à priori que  $(\psi_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  (soit cf. I. (3.1), (3.2), (3.3)). En effet dans [1] on trouvera la démonstration du théorème suivant :

#### Théorème 1.1

On suppose que  $[N]_{\{x_0\}} \neq 0$  ; que  $N/\Omega_1 \in \mathcal{C}(\Omega_1)$  et que de plus  $N/\Omega_1$  admet un prolongement continu sur  $\bar{\Omega}_1$  encore noté  $N$  pour  $i = 1, 2$ , alors le problème réduit (PR) admet une solution  $(\psi, u, v)$  telle que :

$$(u, v) \in (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^2 \text{ et } \psi \in L^\infty(\Omega)$$

de plus toute solution faible de (PR) vérifie les estimations à priori : (3.1), (3.2), (3.3).

$$\begin{array}{l}
 \text{(PR)} \left\{ \begin{array}{l}
 0 = e^{\psi_0} u_0 - e^{-\psi_0} v_0 - N \\
 \frac{d}{dx} \left( e^{\psi_0} \frac{du_0}{dx} \right) = 0 \\
 \frac{d}{dx} \left( e^{-\psi_0} \frac{dv_0}{dx} \right) = 0 \\
 \psi_0 = \psi_\varepsilon \text{ en } 0 \text{ et } 1 \\
 u_0 = u_\varepsilon \text{ en } 0 \text{ et } 1 \\
 v_0 = v_\varepsilon \text{ en } 0 \text{ et } 1
 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l}
 [u_0]_{\{x_0\}} = 0 \\
 [v_0]_{\{x_0\}} = 0 \\
 \left[ e^{\psi_0} \frac{du_0}{dx} \right]_{\{x_0\}} = 0 \\
 \left[ e^{-\psi_0} \frac{dv_0}{dx} \right]_{\{x_0\}} = 0
 \end{array}
 \end{array}$$

où  $[f]_{\{x_0\}}$  désigne le saut de  $f$  en  $x_0$ .

Dans la suite on notera  $\psi_0, u_0, v_0$  par  $\psi, u, v$ .

(b) On obtient le terme de couche limite d'ordre 0 pour  $\psi$  de la manière suivante : ( $\hat{\psi}_0$  est notée par  $\hat{\psi}$ )

$$\begin{array}{l}
 \text{(PCL)} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{(PCL1)} \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{d^2 \hat{\psi}}{d^2 \tau} = u(x_0^-) e^{\psi(x_0^-) + \hat{\psi}} - v(x_0^-) e^{-\psi(x_0^-) - \hat{\psi}} - N(x_0^-) \text{ pour } \tau < 0 \\
 \hat{\psi}(0^-) = \alpha^- \\
 \hat{\psi}(-\infty) = 0
 \end{array} \right. \\
 \text{(PCL2)} \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{d^2 \hat{\psi}}{d^2 \tau} = u(x_0^+) e^{\psi(x_0^+) + \hat{\psi}} - v(x_0^+) e^{-\psi(x_0^+) - \hat{\psi}} - N(x_0^+) \text{ pour } \tau > 0 \\
 \hat{\psi}(0^+) = \alpha^+ \\
 \hat{\psi}(+\infty) = 0
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

où  $\alpha^-$  et  $\alpha^+$  sont calculés à l'aide des relations suivantes :

On a obtenu le résultat suivant, le reste d'ordre 0 du développement asymptotique est en  $O(\sqrt{\epsilon})$  ceci en norme  $L^2$ . De cette estimation on déduit une estimation sur le reste du développement pour les densités de courant d'électrons et de trous.

Remarque : on n'a pas étudié l'influence du petit paramètre  $\delta$ .

## II - 1. Développements asymptotiques, problème limite et problème de couche limite

On cherche  $\psi_\epsilon, u_\epsilon, v_\epsilon$  sous la forme de série du type :

$$(DA) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_\epsilon(x) = \psi_0(x) + \hat{\psi}_0 \left( \frac{x-x_0}{\sqrt{\epsilon}} \right) M(x) + \sqrt{\epsilon} [\psi_1(x) + \hat{\psi}_1 \left( \frac{x-x_0}{\sqrt{\epsilon}} \right) M(x)] + \dots \\ u_\epsilon(x) = u_0(x) + \hat{u}_0 \left( \frac{x-x_0}{\sqrt{\epsilon}} \right) M(x) + \sqrt{\epsilon} [u_1(x) + \hat{u}_1 \left( \frac{x-x_0}{\sqrt{\epsilon}} \right) M(x)] + \dots \\ v_\epsilon(x) = v_0(x) + \hat{v}_0 \left( \frac{x-x_0}{\sqrt{\epsilon}} \right) M(x) + \sqrt{\epsilon} [v_1(x) + \hat{v}_1 \left( \frac{x-x_0}{\sqrt{\epsilon}} \right) M(x)] + \dots \end{array} \right.$$

Dans toute la suite on posera :  $\tau = \frac{x-x_0}{\sqrt{\epsilon}}$  et  $M$  désignera une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  qui vaut 1 sur un voisinage de  $x_0$  et 0 "loin" de  $x_0$ , plus précisément :

$$M(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \equiv 0 & \text{sur } [0, x_0-\alpha] \cup [x_0+\alpha, 1] \\ 0 \leq M \leq 1 & \text{sur } [x_0-\alpha, x_0-\alpha/2] \cup [x_0+\alpha/2, x_0+\alpha] \\ M \equiv 1 & \text{sur } [x_0-\alpha/2, x_0+\alpha/2] \end{array} \right.$$

En remplaçant  $(\psi_\epsilon, u_\epsilon, v_\epsilon)$  dans  $(P_\epsilon)$  par leurs développements asymptotiques donnés par (DA) et en identifiant formellement terme à terme (cf. [1] pour plus de détails) on obtient les problèmes suivants à résoudre :

(a) le problème limite ou encore problème réduit :

$$\frac{d^\varepsilon \psi_\varepsilon}{d^2x}, \frac{d^2 u_\varepsilon}{d^2x}, \frac{d^2 v_\varepsilon}{d^2x} \in L^2(\Omega).$$

Démonstration. (cf : Markowich [1]).

## II - DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

On s'intéresse à la limite des solutions de  $P_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro ; les conditions au bord sur  $\psi_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon$  étant fixées, indépendantes de  $\varepsilon$ . Regardons la 1ère équation du problème ( $P_\varepsilon$ ) ; dans cette équation faisons formellement  $\varepsilon = 0$ , le "problème limite" en quelque sorte est alors :  $e^\psi u - e^{-\psi} v - N = 0$  ; on ne peut avoir pour ce problème  $(\psi, u, v) \in H^1(\Omega)$  en effet si c'était le cas on aurait  $N \in H^1(\Omega)$ ,  $N$  serait donc en particulier continue en  $x_0$ , ce qui n'est pas le cas, donc l'une au moins des trois fonctions  $\psi, u, v$  n'est pas dans  $H^1(\Omega)$ , ceci à cause du saut de  $N$  en  $x_0$ . On voit donc que par rapport au problème initial ( $P_\varepsilon$ ) on perd de la régularité sur les "limites" de  $\psi_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon$ . Ceci signifie qu'il va y avoir un phénomène de couche limite au voisinage de la jonction  $x_0$ .

Remarque : Pour des résultats de convergence des solutions de ( $P_\varepsilon$ ) je renvoie à l'article de Jacques HENRY et Bento LOURO ([2]) ; dans cet article les auteurs ont obtenu des résultats de convergence, ce qui permet de justifier la validité du développement asymptotique. Ce phénomène a aussi été étudié par Markowich. Dans [1] notamment il propose un développement asymptotique formel et la justifie dans le cas de l'équilibre (i.e.  $u_A \equiv 0$ ) par une estimation en norme  $L^\infty$  ; on trouvera dans [3] (Markowich, Ringhofer and al.) un autre résultat d'estimation  $L^\infty$ , en dimension 1, mais la normalisation du problème initial n'est plus la même, par conséquent le développement asymptotique n'est plus le même ; de plus le dopage  $N$  doit être supérieur à une constante  $\beta$  strictement positive.

Dans notre article on reprend le développement asymptotique de [1]. Le but est alors d'obtenir des estimations pour le "reste" du développement constitué par la différence entre la solution de ( $P_\varepsilon$ ) et le premier terme (terme d'ordre 0) du développement asymptotique, on appellera cette différence le reste d'ordre 0 du développement.

et toute solution de  $(P_\varepsilon)$  telle que  $(\psi_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in (H^1(\Omega))^3$  et  $\psi_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$  vérifie les estimations à priori suivantes :

$$(3.1) \quad u_1 = \delta^2 \min(e^{-u_-/u_T}, e^{-u_+/u_T}) \leq u \leq \delta^2 \max(e^{-u_-/u_T}, e^{-u_+/u_T}) = u_2$$

$$(3.2) \quad v_1 = \delta^2 \min(e^{u_-/u_T}, e^{u_+/u_T}) \leq v \leq \delta^2 \max(e^{u_-/u_T}, e^{u_+/u_T}) = v_2$$

$$(3.3) \quad \psi_- \leq \psi \leq \psi_+$$

avec 
$$\psi_- = \log \left( \frac{N_+ + \sqrt{N_+^2 + 4\delta^4}}{2u_1} \right) \text{ où } N_+ = \sup_{\Omega} N$$

$$\psi_+ = \log \left( \frac{N_- + \sqrt{N_-^2 + 4\delta^4}}{2u_2} \right) \text{ et } N_- = \inf_{\Omega} N$$

Démonstration (cf. Markowich [1]).

Remarque : On retiendra en particulier de ce théorème que  $\psi_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon$  sont dans  $L^\infty(\Omega)$ , et que les bornes données par (3.1), (3.2), (3.3) sont indépendantes de  $\varepsilon$ .

### Théorème 3.2

On reprend les hypothèses du théorème 3.1. On suppose en outre que  $N/\Omega_i \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega_i)$  pour un certain  $\alpha > 0$ , ceci pour  $i = 1, 2$ . Alors toute solution  $(\psi_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  du problème  $(P_\varepsilon)$  pour laquelle  $\psi_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$  vérifie :

$$(\psi_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in (\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))^3$$

$$\psi_\varepsilon/\Omega_i \in \mathcal{C}^2(\Omega_i) \quad i = 1, 2$$

$$(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{C}^2(\Omega)$$

de plus :

Dans la suite on remplace  $\delta^2 u$  par  $u$  et  $\delta^2 v$  par  $v$ . Les densités de courant sont alors données par :

$$J_n = e^\psi \frac{du}{dx} \text{ et } J_p = e^{-\psi} \frac{dv}{dx}.$$

On étudie donc finalement le problème suivant :

$$(P_\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{d^2 \psi_\varepsilon}{dx^2} = e^{\psi_\varepsilon} u_\varepsilon - e^{-\psi_\varepsilon} v_\varepsilon - N \\ \frac{d}{dx} \left( e^{\psi_\varepsilon} \frac{du_\varepsilon}{dx} \right) = 0 \\ \frac{d}{dx} \left( e^{-\psi_\varepsilon} \frac{dv_\varepsilon}{dx} \right) = 0 \\ u_\varepsilon = \delta^2 e^{-u_A/u_T} \\ v_\varepsilon = \delta^2 e^{u_A/u_T} \\ \psi_\varepsilon = \log \left( \frac{N + \sqrt{N^2 + 4\delta^4}}{2\delta^2} \right) + u_A/u_T \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{sur } \Omega \\ \\ \\ \text{ceci en } x = 0 \text{ et } x = 1 \end{array}$$

I - 3. Rappels des résultats de régularité, d'estimations à priori et d'existence des solutions pour le problème  $p_\varepsilon$

### Théorème 3.1

On suppose que  $N$  est définie sur  $\bar{\Omega}$ ,  $N \in L^\infty(\Omega)$ ,  $N$  est lipschitzienne sur un voisinage de 0 et de 1.

Alors le problème  $(P_\varepsilon)$  admet une solution faible

$$(\psi_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^3$$

On pose alors :  $\psi_s = \psi/u_T$ ,  $n_s = n/\bar{c}$ ,  $p_s = p/\bar{c}$ ,  $u_s = u$ ,  $v_s = v$  et  $x_s = x/l$ .

On pose :  $\Omega_s = \{x_s, lx_s \in \Omega\}$ .

Pour alléger les notations on supprime l'indice  $s$ , on obtient alors le problème normalisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon \frac{d^2 \psi}{dx^2} = \delta^2 e^{\psi} u - \delta^2 e^{-\psi} v - N \\ \frac{d}{dx} (e^{\psi} \frac{du}{dx}) = 0 \\ \frac{d}{dx} (e^{-\psi} \frac{dv}{dx}) = 0 \end{array} \right. \quad \text{où } x \in \Omega$$

avec

$$\epsilon = \frac{\epsilon_s u_T}{l^2 q \bar{c}} \quad \text{et} \quad \delta^2 = n_1 / \bar{c}.$$

Les conditions au bord sont :

$$\left. \begin{array}{l} u = e^{-u_A/u_T} \\ v = e^{u_A/u_T} \\ \psi = \log \left( \frac{N + \sqrt{N^2 + 4\delta^4}}{2\delta^2} \right) + u_A/u_T \end{array} \right\} \quad \text{ceci en } x = 0 \text{ et } x = 1$$

$\epsilon$  est le paramètre de perturbation singulière.

Les densités de courant normalisées sont données par :

$$J_n = \delta^2 e^{\psi} \frac{du}{dx} \quad \text{et} \quad J_p = \delta^2 e^{-\psi} \frac{dv}{dx}$$

$N$  admet un saut à travers la jonction qui se réduit à un seul point que l'on notera  $x_0$  ;  $N$  est régulière sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .



On n'admettra bien sûr que les solutions pour lesquelles  $n > 0$  et  $p > 0$ .  
Les conditions au bord sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} n - p - c &= 0 \\ np &= n_i^2 \\ \psi &= u_T \log \left( \frac{n}{n_i} \right) + u_A \end{aligned} \right\} \text{ ceci en } x = 0 \text{ et } x = \ell$$

$n_i$  est la concentration intrinsèque du semi-conducteur, c'est une constante  
 $u_T$  désigne le voltage thermique, c'est une constante, on supposera la validité de la relation d'Einstein, soit :

$$\frac{dn}{\mu n} = \frac{dp}{\mu p} = u_T$$

$u_A$  désigne le potentiel appliqué avec les conventions suivantes :

$$\begin{aligned} u_A(0) &= u_- \\ u_A(\ell) &= u_+ \end{aligned}$$

$c$  admet un saut à travers ce que l'on appelle la jonction qui dans le cas où  $n = 1$  se réduit à un point, la jonction divise  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , dans lesquels  $c$  est régulier.

## I - 2. Normalisation

On fait le changement de variable :

$$n = n_i e^{\psi/u_T} u \quad p = n_i e^{-\psi/u_T} v$$

on pose

$$\bar{c} = \sup_{\Omega} |c| \quad \text{et} \quad N = c/\bar{c}.$$

## I - INTRODUCTION

### I - 1. Equations de base et normalisation

On s'intéresse aux équations régissant les phénomènes semi-conducteurs. On se place dans le cas où la dimension d'espace est égale à un. Les équations de base sont alors :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx}(\epsilon s \frac{d\psi}{dx}) &= q(n - p - c) \\ \frac{d}{dx}(dn \frac{dn}{dx} - \mu_n n \frac{d\psi}{dx}) &= R \\ \frac{d}{dx}(dp \frac{dp}{dx} + \mu_p p \frac{d\psi}{dx}) &= R \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{équation de Poisson } \times e^{-\psi} \text{ où } \Omega \subset \mathbb{R} \\ &\text{avec } \Omega = ]0, \ell[ \\ &\text{équation de continuité des électrons} \\ &\text{équation de continuité des trous} \end{aligned}$$

$\psi$  désigne le potentiel électrostatique

$n$  la densité d'électrons

$p$  la densité de trous

$\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}$

$R$  est le terme de génération-recombinaison, on négligera ses effets, c'est-à-dire que dans toute la suite on supposera que  $R \equiv 0$

$dn, dp$  désignent respectivement les coefficients de diffusion des électrons et des trous, on les supposera constants dans la suite

$\mu_n, \mu_p$  sont respectivement les mobilités des électrons et des trous, on les supposera aussi constants dans la suite

$\epsilon s$  est la permittivité du semi-conducteur

$q$  désigne la charge de l'électron

$c$  le dopage du matériau.

Les densités de courant d'électrons et de trous sont :

$$J_n = q(dn \frac{dn}{dx} - \mu_n n \frac{d\psi}{dx})$$

$$J_p = -q(dp \frac{dp}{dx} + \mu_p p \frac{d\psi}{dx}).$$

La norme sur  $L^2(\Omega)$  est donnée par :  $\|u\|_{0,\Omega} = [\int_{\Omega} |u|^2 dx]^{\frac{1}{2}}$ , elle sera aussi notée  $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ .

La norme sur  $L^{\infty}(\Omega)$  est donnée par :  $\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \sup_{\Omega} \text{ess } |u(x)|$ , elle sera aussi notée  $\|u\|_{\infty}$ .

La norme sur  $H^1(\Omega)$  est donnée par :  $\|u\|_{1,\Omega} = (\|u\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^n |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2)^{\frac{1}{2}}$ .

La semi-norme  $H^1(\Omega)$  désigne :  $|u|_{1,\Omega} = [\sum_{i=1}^n |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2]^{\frac{1}{2}}$ .

On notera le produit scalaire sur  $L^2(\Omega)$  par :  $\langle u,v \rangle = \int_{\Omega} uv dx$ .

NOTATIONS

$\Omega$  : ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n = 1, 2$  ou  $3$

$\partial\Omega$  : frontière de  $\Omega$

$L^p(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty\}$  avec  $1 \leq p < +\infty$

$L^\infty(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et il existe } c \text{ telle que } |u(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$

$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$

$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \frac{u}{\partial\Omega} = 0\}$

$H^2(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \forall i, j \in \{1, \dots, n\}\}$

$\mathcal{C}^k(\Omega) =$  ensemble des fonctions  $k$  fois continûment différentiables sur  $\Omega$  avec  $k \geq 0$ . On pose  $\mathcal{C}^0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$

$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega}) =$  ensemble des fonctions  $u$  de  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  telles que pour chaque multi-indice  $\alpha$ ,  $|\alpha| \leq k$ ,  $D^\alpha u$  se prolonge continûment sur  $\bar{\Omega}$ . (On rappelle qu'un multi-indice est un  $n$ -uplet  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  avec les  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  pour  $i = 1, \dots, n$ . On pose alors  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  et  $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ )

$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}(\Omega), \sup_{x,y \in \Omega} \left| \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^\alpha} \right| < \infty\}$  avec  $0 < \alpha < 1$

On munit les différents espaces des normes suivantes :

La norme sur  $L^1(\Omega)$  est donnée par :  $\|u\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |u| dx$

Dans la quatrième partie, on présente le cas de l'équilibre. Dans le cas où le dopage est constant par sous domaine, en dimension d'espace égale à 1, 2 ou 3 on obtient une estimation  $L^2$  en  $o(\varepsilon^{3/4})$  cette estimation est donc meilleure que dans le cas général et on obtient de plus une estimation  $H^1$  globale en  $o(\varepsilon^{1/4})$ . Dans ce même cas Markowich [1] avait obtenu une estimation  $L^\infty$  en  $o(\sqrt{\varepsilon})$ , notre résultat est donc nouveau.

Dans la dernière partie de cet article on présente des résultats numériques. On souligne l'influence du petit paramètre  $\delta$  (influence qui n'a pas été étudiée dans la partie théorique) sur la validité du développement asymptotique.

Dans cet article on présente une analyse par perturbations singulières des équations semi-conducteur.

Dans l'introduction on normalise les équations selon la méthode employée par Markowich (cf [1]) on fait alors apparaître un paramètre de perturbation  $\epsilon$ . On a alors à résoudre un système de trois équations dépendant d'un paramètre  $\epsilon$ . On s'intéresse au comportement des solutions quand  $\epsilon$  tend vers 0. Il est connu qu'au voisinage des "régions" où le dopage admet un saut, les solutions de ce système varient très fortement, on appelle ces régions les régions de couche limite ; d'un point de vue numérique il est très difficile d'approcher ces solutions dans les régions de couche limite, on voit donc l'intérêt d'obtenir un développement asymptotique pour les solutions, qui nous permettra alors de résoudre des systèmes ne dépendant plus de  $\epsilon$ .

Dans la deuxième partie on rappelle le développement asymptotique des solutions du problème normalisé (obtenu en [1]). Ce développement asymptotique est en fait formel, Markowich (cf [1]) le justifie dans le cas particulier de l'équilibre par une estimation en norme  $L^\infty$  en  $o(\sqrt{\epsilon})$  ; on trouvera dans [3] (Markowich, Ringhofer and al.) un autre résultat d'estimation  $L^2$  en  $o(\sqrt{\epsilon})$ , en dimension 1, mais la normalisation du problème initial n'est plus la même, par conséquent le développement n'est plus le même ; de plus le dopage doit être supérieur à une constante strictement positive, ce qui exclut en particulier les jonctions du type p-n. On s'est donc intéressé à une justification éventuelle du développement asymptotique obtenu en [1]. Le but est donc d'obtenir des estimations pour le "reste" du développement, constitué par la différence entre la solution du problème avec paramètre  $\epsilon$  et le premier terme du développement asymptotique. On a obtenu des estimations  $L^2$  en  $o(\sqrt{\epsilon})$  pour le "reste" du développement, ceci en dimension d'espace égale à 1 et pourvu que le potentiel appliqué soit "suffisamment petit". On souligne de plus ce qui fait qu'à priori cette démonstration ne peut s'étendre au cas où la dimension est 2 ou 3. Sous ces conditions on obtient des estimations  $L^2$  sur les densités de courant.

Dans la troisième partie on obtient une estimation de type  $H^1$  local en  $o(\sqrt{\epsilon})$  (le local signifiant que l'on se place en dehors d'un voisinage de la jonction) sous les conditions citées ci-dessus.

On a à résoudre un système non linéaire de 3 équations : l'équation de Poisson et les deux équations de continuité. Au voisinage des régions, appelées jonctions, où le dopage (intervenant dans le second membre de l'équation de Poisson) admet un saut, les solutions du système varient très fortement lorsque la longueur de Debye tend vers 0, les solutions admettent donc des couches limites au voisinage des jonctions.

On reprend les développements asymptotiques formels obtenus par Markowich, on cherche à justifier leur validité. On prouve une estimation  $L^2$  et une estimation  $H^1$  "locale" (loin des jonctions) pour le reste d'ordre 0 du développement, ceci en dimension d'espace égale à 1 et pourvu que le potentiel appliqué soit suffisamment faible. Dans le cas particulier de l'équilibre (c'est-à-dire lorsque le potentiel appliqué est nul), sans restriction sur la dimension de l'espace, on obtient une estimation  $L^2$  et une estimation  $H^1$  pour le reste d'ordre 0 du développement.

Dans la dernière partie on présente des résultats numériques.

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DES EQUATIONS SEMICONDUCTEUR

Fatih ALABAU

INRIA

Domaine de Voluceau  
BP 105 - Rocquencourt  
78153 Le Chesnay Cedex - France

ABSTRACT.

We present in this paper a singular perturbation analysis for the fundamental semiconductor equations ; the singular perturbation parameter is the minimal normed Debye length of the semiconductor.

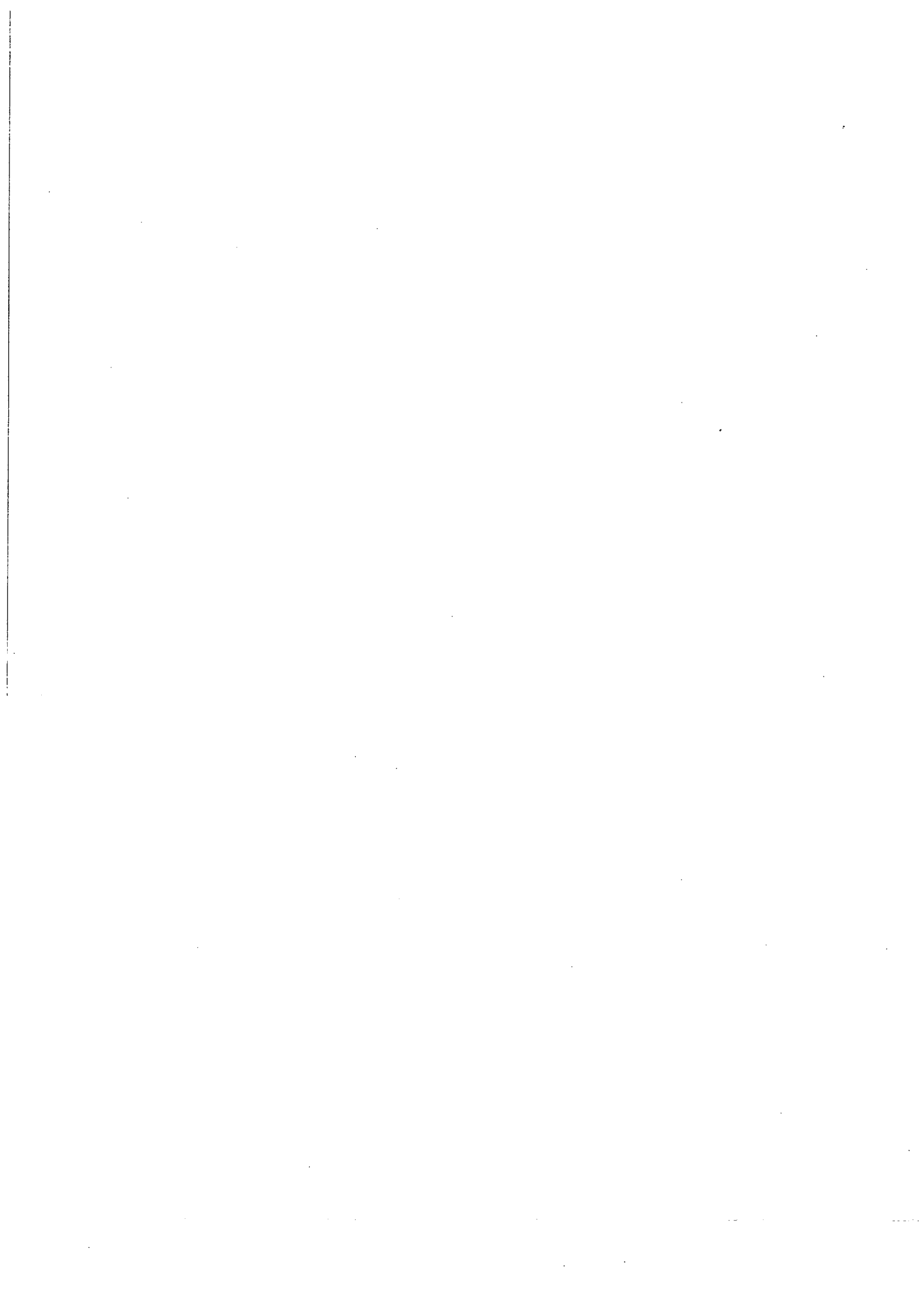
We have a non linear system of three equations which are : the Poisson's equation and the two continuity equations. In a neighbourhood of the areas across which the impurity doping (which appears in the second member of the Poisson's equation) admits a jump (such areas are called junctions) the solutions of the system have internal layers.

We wish to verify the validity of the formal asymptotic development obtained by Markowich. We prove, when the space dimension is one and when the applied potential is sufficiently small an  $L^2$  and a "local"  $H^1$  estimates ("local" means far from the junctions) for the remainder term of order zero of the asymptotic development. In the particular case of the equilibrium (when the applied potential is zero), without restriction on the space dimension, we obtain an  $L^2$  and a  $H^1$  estimates for the remainder term of order zero of the asymptotic development. In the last part we present numerical results.

RESUME.

On présente dans cet article une analyse par perturbations singulières des équations régissant les phénomènes semi-conducteur, le paramètre de perturbation singulière étant la longueur de Debye du semi-conducteur.





1)

2)

3)

4)

5)

6)