HAL
open science

Etude mathematique du couplage air sous-sol dans la diffusion d'un champ electrique en milieu conducteur tridimensionnel

Patrick Joly, Michel Kern

To cite this version:

Patrick Joly, Michel Kern. Etude mathematique du couplage air sous-sol dans la diffusion d'un champ electrique en milieu conducteur tridimensionnel. RR-0556, INRIA. 1986. inria-00075998

HAL Id: inria-00075998

https://inria.hal.science/inria-00075998v1

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 556

ÉTUDE MATHÉMATIQUE DU COUPLAGE AIR SOUS-SOL DANS LA DIFFUSION D'UN CHAMP ÉLECTRIQUE EN MILIEU CONDUCTEUR TRIDIMENSIONNEL

Patrick JOLY
Michel KERN

Août 1986

ETUDE MATHEMATIQUE DU COUPLAGE AIR SOUS-SOL DANS LA DIFFUSION D'UN CHAMP ELECTRIQUE EN MILIEU CONDUCTEUR TRIDIMENSIONNEL

*****

Patrick JOLY* - **Michel KERN****

*****

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une convention de recherche **INRIA/SIMULOG/CFP/CGG/SNEA(P).**

* : INRIA
** : INRIA-SIMULOG

PAPIER RECUPERÉ ET RECYCLÉ

RESUME

Nous étudions la diffusion du champ électrique dans un sous-sol conducteur en dimension 3. A l'aide d'un opérateur intégral, nous montrons comment restreindre le problème au seul demi-espace conducteur. Ceci nous amène à étudier précisément les propriétés de trace de l'espace $H(\vec{rot}, \Omega)$.

Nous donnons un résultat d'existence pour le problème dans le 1/2 espace, en nous appuyant sur une formulation variationnelle, exploitable numériquement.

ABSTRACT

The diffusion of an electric field into a conductive 3 dimensional substratum is studied. By means of a singular integral operator, we restrict the problem to the conductive half space. This leads us to a study of the trace properties of the space $H(\vec{curl}, \Omega)$. We give an existence result for the restricted problem, based on a numerically computable variational formulation.

MOTS CLES

Equations de Maxwell - Géophysique - Opérateur intégral - Théorèmes de trace.

KEY WORDS

Maxwell's equations - Geophysics- Integral operator - Trace theorems.

TABLE DES MATIERES

Pages

0 - INTRODUCTION 01

I - POSITION DU PROBLEME 04

I.1 - Le modèle physique 04

I.2 - Remarque sur la régularité des champs 08

II - CADRE FONCTIONNEL ET ESPACE DE TRACES 10

II.1 - Les espaces $H(\vec{rot};\Omega)$ et $\mathcal{H}(\vec{rot},\Omega)$ 11

II.2 - Espaces de fonctions définies sur Γ 13

II.3 - Les théorèmes de traces dans $H(\vec{rot};\Omega)$ 22

III - PROBLEME DANS L'ESPACE ENTIER EQUIVALENCE AVEC UN PROBLEME DE TRANSMISSION 34

II.1 - Le problème dans l'espace entier 34

II.2 - Equivalence avec un problème de transmission 39

IV - L'OPERATEUR T 48

V - EXISTENCE ET UNICITE DES SOLUTIONS DANS LE DEMI-ESPACE 67

VI.1 - Etude d'un opérateur non borné 67

VI.2 - Existence et unicité de solutions fortes 71

VI.3 - Existence et unicité des solutions faibles 74

VI - CONCLUSION 83

VII - REFERENCES 85

****

0 - INTRODUCTION

Les méthodes électromagnétiques sont de plus en plus utilisées en prospection pétrolière et minière. Elles consistent à injecter un courant dans le sous sol ou en surface, ce qui crée un champ électromagnétique dans le sous sol conducteur. A partir des mesures du champ à la surface, on cherche à déduire des informations sur la distribution des conductivités dans le sous sol, et en particulier à localiser d'éventuelles hétérogénéités.

Le problème mathématique sous-jacent est un problème d'intentification de paramètres. Il est difficile et suppose une bonne connaissance de la nature du problème direct. Ce dernier concerne le calcul des champs, en supposant connue la distribution des conductivités. Il est donc naturel que la modélisation mathématique et la simulation numérique de ces phénomènes aient suscité de nombreux travaux.

Vue la complexité des modèles numériques, les auteurs se sont intéressés d'abord aux problèmes posés dans le domaine fréquentiel, où l'on suppose une dépendance harmonique des champs par rapport aux temps. Diverses méthodes sont utilisées pour la discrétisation spatiale : équations intégrales (HOHMANN [12]), ou méthodes d'éléments finis (COGGON [4], PRIDMORE et al [19]). Enfin, une méthode qui tente de combiner les avantages des deux précédentes, appellée méthode "hybride" (LEE et al [14], puis plus récemment LEE et MORRISON [15]).

Si, par contre on n'impose pas la dépendance en temps, le problème posé, plus difficile, est un problème d'évolution. Cette approche a donné lieu à des études sur un modèle bidimensionnel, discrétisé en espace par différences finies (ORISTAGLIO et HOHMANN [17]), ou par éléments finis (Y. GOLDMAN [10]). Le cas d'un milieu possédant un symétrie de révolution, discrétisé par différences finies, a fait l'objet d'une étude de GOLDMAN et STOYER [11]. Enfin, récemment la méthode des équations intégrales a été employée sur le cas d'un hétérogénéité tridimensionnelle, plongée dans un demi espace conducteur (SAN FILIPPO et HOHMANN [20]).

Un inconvénient majeur des études présentées est qu'elles calculent un champ secondaire (différence entre le champ total et le champ fictif qui serait crée par la même source dans un sous-sol plus simple - par exemple homogène ou stratifié), ce qui limite les méthodes à des géométries simples : en pratique, une hétérogénéité plongée dans un sous sol homogène. Le calcul du champ total est plus difficile, car il exige de pouvoir modéliser la source de courant, mais il permettra de prendre en compte des géométries quelconques.

Indiquons maintenant le point central de ce travail. Bien que les équations de Maxwell soient posées dans tout l'espace, on ne s'intéresse à la solution qu'à la surface du sol, pour les mesures, et dans le sous sol pour une meilleure compréhension théorique du phénomène. L'air, que l'on est obligé de prendre en compte ne peut apporter aucune information. Suivant GOLDMAN [10], nous adoptons l'approche suivante : utilisant le caractère homogène de l'air, les équations y sont résolues analytiquement, et grâce aux conditions de transmission des champs à l'interface air/sous-sol la solution dans l'air peut être "rabattue" sur la surface. Plus précisément, nous nous ramenons à un problème posé uniquement dans le domaine d'intérêt (le sous sol), joint à une condition aux limites de type intégral sur l'interface air/sous-sol.

Cette méthode est à rapprocher de celle suivie, par exemple par GIROIRE [9], pour résoudre des problèmes extérieurs par équations intégrales, et par JOHNSON-NEDELEC [13]. La différence étant ici qu'il n'y a pas à proprement parler de domaine intérieur : la frontière n'est pas bornée. Cet inconvénient est compensé par le fait que cet interface est un plan, ce qui nous permet d'utiliser la transformation de Fourier, comme suggéré par BAMBERGER [1]

L'approche précédente conduit naturellement à une formulation variationelle, la discrétisation pourra donc se faire par éléments finis. De plus, si l'on envisage des problèmes tridimensionnels, le champ sera discontinu à l'interface d'une hétérogénéité, et il sera naturel de rechercher une discrétisation spatiale utilisant les éléments finis développés par NEDELEC [16].

La méthodologie ébauchée précédemment est la base du travail de Y. GOLDMAN [10]. Nous nous proposons d'étendre ces idées aux cas tridimensionnel. Les différences essentielles tiennent à ce que le champ, qui est cette fois vectoriel, n'est plus nécessairement continu.

Nous adoptons le plan suivant :

Nous rappellons l'origine physique du problème, les équations de Maxwell, en indiquant les différentes hypothèses de notre modèle.

Le cadre fonctionnel sera introduit dans une second partie. Il s'agit, en particulier de rappeler la définition et les propriétés de l'espace $H(\vec{rot}, \Omega)$. Nous insistons sur les propriétés de trace des fonctions de cet espace.

Dans la troisième partie, nous formulons le problème dans tout l'espace, et montrons qu'il est équivalent à un problème de transmission.

La quatrième partie est consacrée à la définition d'un opérateur reliant la trace d'une fonction sur le sol à la trace de son rotationnel, la fonction étant solution d'un problème auxiliaire. Nous montrons l'équivalence du problème de transmission avec un problème posé dans le seul demi-espace conducteur, la condition aux limites sur l'interface air/sous-sol s'exprimant à l'aide de cet opérateur.

L'étude de ce dernier problème est l'objet de la cinquième partie. Nous établissons l'existence et l'unicité de la solution, sous diverses hypothèses. Ces résultats nous permettent d'obtenir l'existence et l'unicité de la solution du problème original.

Nous concluons sur les perspectives ouvertes par ce travail, et par quelques problèmes non résolus.

I- POSITION DU PROBLEME

I.1 - LE MODELE PHYSIQUE

On s'intéresse dans ce travail à l'étude des Equations de Maxwell dans un demi espace conducteur.

Il s'agit de déterminer quatre champs de vecteurs :

$$\begin{cases} \vec{E} & \text{champ électrique,} \\ \vec{D} & \text{induction électrique,} \\ \vec{H} & \text{champ magnétique,} \\ \vec{B} & \text{induction magnétique.} \end{cases}$$

L'évolution de ces champs est régie par les équations de Maxwell :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \vec{\text{rot}}\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}}\ \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div}\ \vec{D} = \rho \\ \text{div}\ \vec{B} = 0 \end{cases}$$

et les lois de comportement :

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \vec{B} = \mu\ \vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon\ \vec{E} \\ \vec{j} = \sigma\ \vec{E} + \vec{j}_s \end{cases}$$

Dans (1.1), ρ représente la densité de charge électrique, et $\vec{j}$ la densité de courant.

Dans (1.2), μ et ε sont respectivement la perméabilité magnétique et la permittivité dielectrique, que l'on prendra constantes et égales à leurs valeurs dans le vide :

$$\mu = 4\Pi\ 10^{-7}\ \text{H/m}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{36\Pi}\ 10^{-9}\ \text{F/m}$$

σ est la conductivité du milieu, variable en espace, et éventuellement discontinue. Elle vérifié l'importante propriété :

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \sigma \equiv 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3_+ : \text{l'air} \\ \sigma(x) \geq \sigma_* > 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3_- : \text{le sous-sol} \end{cases}$$

Enfin, $\vec{j}_s$ est le courant source, imposé par l'expérimentateur, et supposé connu.

Les deux premières des relations (1.2) caractérisent les milieux linéaires isotropes, sans polarisation.

La troisième est la loi d'Ohm, valable en milieu conducteur.

Avec les relations (1.2), (1.1) peut se réécrire :

$$(1.4)\qquad \begin{cases} \mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\text{rot}}\ \vec{E} = 0 \\ \vec{\text{rot}}\ \vec{H} = \sigma\ \vec{E} + \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_s \\ \text{div}\ \vec{H} = 0 \\ \text{div}\ \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

Rappelons l'interprétation des équations (1.4) (cf. DUCUING-LAVAL [6]))

- La première exprime la loi de Faraday, liant la force électromotrice à la variation du flux d'induction.
- La seconde est le théorème d'Ampère, qui permet de calculer le champ magnétique engendré par un courant.
- La troisième postule l'absence de charge magnétique.
- La quatrième, enfin, doit à notre sens être considérée comme définissant la charge électrique.

Nous faisons maintenant une hypothèse simplificatrice, appelée hypothèse quasistatique dans le cadre de la prospection géophysique, qui consiste à négliger les courants de déplacement $\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant les courants de conduction $\sigma \vec{E}$.

Pour comprendre le sens de cette hypothèse, il est utile d'écrire l'équation vérifiée par $\vec{E}$ seul (on reviendra d'ailleurs à ce point de vue). On élimine $\vec{H}$ dans les équations (1.4), et on obtient ($\varepsilon\mu = \frac{1}{c^2}$, $c=3.10^{-8}$ ms^{-1}, vitesse de la lumière dans le vide) :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{rot}\,(\vec{rot}\,\vec{E}) = 0$$

Cette équation est une équation des ondes généralisées, avec amortissement. Elle rend donc compte de la superposition de deux phénomènes : une propagation à vitesse c, et une diffusion des champs dans le milieu conducteur. Il est courant, dans les modèles géophysiques, de négliger le terme $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ devant $\mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Cela équivaut à négliger dans le système (1.4) les courants de déplacement $\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant $\sigma \vec{E}$, courant de conduction.
Dans le domaine fréquentiel, cette hypothèse revient à exprimer que $\frac{1}{c^2} \omega \ll \mu\sigma$. Les valeurs de σ rencontrées en pratique varient entre 10^{-3} à 10, ce qui justifie cette hypothèse dans le milieu conducteur, au moins pour les basses fréquences.

Par contre dans l'air, négliger les courants de déplacements revient à supposer que l'équilibre électrique s'établit instantanément à chaque instant,

ce qui revient à considérer la vitesse de propagation comme infinie. Pour les échelles de temps (d'une milliseconde à quelques secondes) et d'espace (quelques kilomètres) considérées, cette approximation est raisonnable.

On pourra trouver, dans ORISTAGLIO et HOHMAN [17], une discussion plus précise de cette approximation, basée sur l'étude des fonctions de Green, dans le cas d'un modèle bidimensionnel.

Pour conclure sur ce point, signalons que la situation est moins claire du point de vue mathématique. La suppression du terme $\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ fait passer d'un problème de type hyperbolique à un problème de type parabolique. Ceci relève de la thèorie des perturbations singulières, et cet aspect du problème n'a pas encore été étudié.

Avec l'hypothèses quasistatique, le système (1.4) se simplifie :

$$(1.5)\qquad \begin{cases} \mu\ \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{E} = 0 \\ \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{H} = \sigma\ \vec{E} + \vec{j}_s \\ \mathrm{div}\ \vec{H} = 0 \\ \mathrm{div}\ \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

Remarquons que ces équations ne sont pas indépendantes. Pour que les équations (1.5) soient bien posées, en un sens qui reste d'ailleurs à préciser, il faut se donner $\vec{H}_o$, le champ magnétique à l'instant initial. Cette donnée doit vérifier div $\vec{H}_o = 0$. Mais alors, en prenant la divergence de la première équation (1.5), il vient :

$$\frac{d}{dt}\ (\mathrm{div}\ \vec{H}) = 0,$$

qui permet de retrouver la troisième équation (1.5). D'autre part, nous considérons la quatrième équation comme définissant la charge électrique. Il suffit donc de garder les deux premières équations. On peut alors éliminent $\vec{H}$ entre ces deux équations, en prenant le rotationnel de la première, et en dérivant la seconde par rapport au temps.

Il reste

$$\mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{rot}\,(\vec{rot}\,\vec{E}) = -\mu \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} \tag{1.6}$$

et on rappelle que σ vérifie l'importante condition (1.3).

On fera dans toute la suite l'hypothèse (réaliste) qu'il n'y a pas de source de courant dans l'air. $\vec{E}$ est donc solution d'un problème couplant une équation de type diffusion dans le sous sol, et une équation elliptique dans l'air :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu\sigma \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{rot}\,(\vec{rot}\,\vec{E}) = -\mu \dfrac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} & \text{dans } \mathbb{R}^3_- \\ \vec{rot}\,(\vec{rot}\,\vec{E}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3_+ \end{array} \right. \tag{1.7}$$

L'essentiel de ce travail va consister à montrer comment on peut remplacer l'air par une condition aux limites non locale sur l'interface air/sous-sol.

I.2 - REMARQUE SUR LA REGULARITE DES CHAMPS

En l'abscence de courant source (c'est le cas général), on a la relation :

$$\vec{rot}\,\vec{H} = \sigma\vec{E}$$

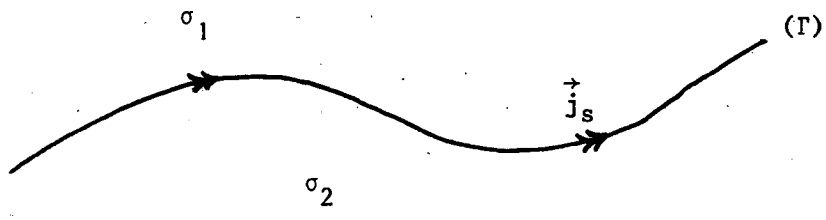
d'où l'on tire

$$\mathrm{div}\,(\sigma\vec{E}) = 0$$

• Dans le cas ou σ est constant, div $\vec{E} = 0$, et il n'y a pas de charges volumiques. Chaque composante de $\vec{E}$ est alors solution d'une équation de la chaleur, donc est régulière.

• Si σ n'est plus constante, mais est une fonction régulière de x, on ne peut plus affirmer que div$\vec{E} = 0$, mais la densité de charge ρ qui apparaît est régulière, ainsi que le champ $\vec{E}$.

• La situation est différente si σ présente des discontinuités le long d'une surface :



Ce sera souvent le cas en pratique : par exemple dans le cas d'un milieu stratifié, ou de la présence d'une hétérogénéité.

Il est bien connu par les physiciens (DUCUING-LAVAL [6]) qu'il apparaît des densités surfaciques, c'est-à-dire des distributions portées par la surface.

Sur le champ électrique ceci se traduit par le fait que :

- la composante tangentielle du champ électrique $\vec{n} \quad \vec{E}$ est continue au passage de l'interface (S)
- la composante normale du champ électrique subit une discontinuité à la traversée de (S) :

$$[\vec{n}\cdot\vec{E}] = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \tag{1.8}$$

ou $[\vec{n}\cdot\vec{E}]$ est le saut de $\vec{E}\cdot\vec{n}$ au passage de l'interface, et ρ_s est la densité surfacique de charge apparue sur (S).

Ces propriétés physiques vont se révéler fondamentales pour l'étude mathématique. Elles impliquent, en effet, que le champ $\vec{E}$ n'est pas dans $H^1(\mathbb{R}^3_+)$, mais dans $H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+)$. Et la propriétés des sauts se traduira par l'existence d'une formule de Green appropriée.

II - CADRE FONCTIONNEL ET ESPACES DE TRACES

Le but de ce chapitre est de fixer de façon précise le cadre fonctionnel adapté à notre problème (c'est l'objet du paragraphe 2.1) et de donner les théorèmes de traces que nous utiliserons de façon essentielle dans la suite de l'étude (c'est l'objet du paragraphe 2.3). Ceci nécessite la définition et l'étude des propriétés d'espaces de fonctions définies sur l'interface air-sous-sol (Γ), ce que nous détaillons au paragraphe 2.2.

Précisons tout d'abord les notations que nous utiliserons dans la suite de ce chapitre :

- (x_1,x_2,x_3) est le point courant de $\mathbb{R}^3$
- $\mathbb{R}^3_+ = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3>0\}$
- $\mathbb{R}^3_- = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3<0\}$
- $\Gamma = \partial\mathbb{R}^3_- = \partial\mathbb{R}^3_+ = \{(x_1,x_2,0);\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ est assimilé à $\mathbb{R}^2$
- (x_1,x_2) désigne le point courant de (Γ)
- $n = (0,0,1)$ est le vecteur normal sortant de $\mathbb{R}^3$.

Nous utiliserons également la transformation de Fourier dans les directions (x_1,x_2) définie, pour toute fonction ϕ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ par :

$$\mathcal{F}\phi(k_1,k_2) = \hat{\phi}(k_1,k_2) = \frac{1}{2\pi}\iint \phi(x_1,x_2)e^{-i(k_1x_1+k_2x_2)}dx_1\ dx_2 \tag{2.1}$$

$\mathcal{F}$ définit ainsi une isométrie de $L^2(\Gamma)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Pour toute fonction u de $L^2(\mathbb{R}^3_+)$ (ou $L^2(\mathbb{R}^3_-)$) nous désignerons également par $\hat{u} = \mathcal{F}u$ la transformée de Fourier partielle dans les directions (x_1,x_2) définie par :

$$\text{p.p. } x_3 > 0 \text{ (ou}<0) \quad \mathcal{F}\hat{u}(\cdot,x_3) = \mathcal{F}(u(\cdot,x_3))$$

$\mathcal{F}$ définit ainsi également une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^3_+)$ (respectivement $L^2(\mathbb{R}^3_-)$ dans lui même.

II.1 - LES ESPACES $H(\vec{rot};\ \Omega)$ et $\mathcal{H}(\vec{rot},\ \Omega)$

Comme nous l'avons précisé au paragraphe (1.2), l'espace de fonctions naturel dans lequel nous cherchons la solution de notre problème doit être un espace de champs de vecteurs qui admette les discontinuités des composantes normales de ces champs à travers une surface. En particulier, il est exclu, contrairement à ce qui se passait pour le problème bidimensionnel (voir [10]), d'espèrer trouver des solutions dans $H^1(\mathbb{R}^3)^3$. En fait, le cadre naturel dans lequel il convient de se placer est bien connu : c'est celui des espaces $H(\vec{rot};\Omega)$ qui ont déjà été largement étudiés notamment dans DUVAUT-LIONS [7], GIRAULT-RAVIART [8] ou DAUTRAY-LIONS [5].

Lorsque Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^3$ (dans le cas qui nous intéresse on aura $\Omega=\mathbb{R}^3_+$ ou $\Omega = \mathbb{R}^3_-$), nous définissons :

$$H(\vec{rot};\Omega) = \{\vec{u} \in L^2(\Omega)^3,\ \vec{rot}\ \vec{u} \in L^2(\Omega)^3\} \tag{2.2}$$

et le produit scalaire (pour $(\vec{u},\ \vec{v})$ dans $H(\vec{rot};\ \Omega)^2$) :

$$(\vec{u},\ \vec{v})_{\vec{rot}} = (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{rot}\ \vec{u},\ \vec{rot}\ \vec{v}) \tag{2.3}$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire usuel dans $L^2(\Omega)^3$. Nous avons bien sur le

THEOREME 2.1

- $H(\vec{rot};\Omega)$ muni du produit scalaire (2.3) est un espace de Hilbert .
- $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$ est dense dans $H(\vec{rot};\Omega)$

Dans le cas plus précis où Ω désigne le demi espace $\mathbb{R}^3_+$ ou l'espace entier $\mathbb{R}^3$, nous serons amenés à introduire, ainsi que cela avait déjà été fait dans le cas bidimensionnel avec l'espace $\mathcal{H}^1(\Omega)$, des espaces $H(\vec{rot})$ avec poids dans une direction, à savoir la direction $x_3 > 0$. L'introduction de ces espaces est rendue nécessaire par la résolution du problème dans le demi espace $\mathbb{R}^3_+$:

$$\vec{rot}\ (\vec{rot}\ \vec{u}) = 0 \tag{2.4}$$

dont les solutions ne sont pas en général dans $L^2(\mathbb{R}^3_+)^3$ bien que leurs rotationnels y soient (par exemple, on notera que l'on peut construire une solution de (2.4) par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, dans le problème $\varepsilon \vec{u}_\varepsilon + \vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u}_\varepsilon) = 0$, problème coercif dans $H(\vec{rot};\ \Omega)$. On constate alors que $\| \vec{rot}\ \vec{u}_\varepsilon \|$ reste bornée alors que $\| \vec{u}_\varepsilon \|$ explose conme $\frac{1}{\varepsilon}$). Nous définissons donc pour $\Omega = \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^3_+$, l'espace :

$$(2.5) \qquad \mathcal{H}(\vec{rot};\ \Omega) = \{\vec{u} \in L^1_{loc}(\Omega)^3 \ /\ p\ \vec{u} \in L^2(\Omega)^3,\ \vec{rot}\ \vec{u} \in L^2(\Omega)^3\}$$

ou p est la fonction de poids unidimensionnelle définie par :

$$(2.6) \qquad \begin{cases} p(x_3) = \dfrac{1}{1+x_3} & \text{si } x_3 > 0 \\ p(x_3) = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous munissons bien évidemment $\mathcal{H}(\vec{rot};\ \Omega)$ d'une structure hilbertienne par le produit scalaire :

$$(2.7) \qquad (\vec{u},\ \vec{v})_{\vec{rot},p} = (p\vec{u},\ p\vec{v}) + (\vec{rot}\ \vec{u},\ \vec{rot}\ \vec{v})$$

Le seul résultat concernant $\mathcal{H}(\vec{rot};\ \Omega)$ que nous utiliserons dans ce chapitre est le suivant (nous l'énonçons sans démonstration).

Introduisons une fonction de troncature $\alpha(x_3)$ définie par :

$$\begin{cases} \bullet \quad \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}) \\ \bullet \quad \alpha(x_3) = 1 & \forall\ x_3 \in\ ]-\infty, 1[\\ \bullet \quad \alpha(x_3) = 0 & \forall\ x_3 \in\ ]2, +\infty[\\ \bullet \quad 0 \leq \alpha(x_3) \leq 1 & \forall\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et nous définissons l'opérateur :

$$P_\alpha : \ \vec{u} \in \mathcal{H}(\vec{rot};\ \Omega) \longrightarrow P_\alpha\ \vec{u} = \alpha\vec{u}$$

Nous avons alors le :

THEOREME 2.2

- $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$ est dense dans $\mathcal{H}(\vec{rot};\ \Omega)$
- L'opérateur P_α est linéaire continu de $\mathcal{H}$ $(\vec{rot}\ ;\ \Omega)$ dans $H(\vec{rot}\ ;\Omega)$.
- Pour tout u dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$: $P_\alpha\ \vec{u}|_\Gamma = \vec{u}|_\Gamma$

Grâce à ce théorème, les théorèmes de traces que nous obtiendrons pour l'espace $H(\vec{rot};\ \Omega)$ s'étendront immédiatement et sans modification à $(\vec{rot};\Omega)$. Le fait que "$\mathcal{H}(\vec{rot};\ \Omega)$ et $H(\vec{rot};\ \Omega)$ ont mêmes traces sur Γ" est dû au fait que la fonction poids n'affecte que la direction orthogonale à l'interface (Γ).

2.2 - ESPACES DE FONCTIONS DEFINIES SUR Γ

Avant de définir les espaces fonctionnels auxquels nous allons nous intéresser, il convient de rappeler quelques définitions d'opérateurs différentiels définis sur le bord Γ. Il nous suffit de les définir dans $\mathcal{D}$, ils s'étendent par dualité à $\mathcal{D}'$. Pour $(\vec{\phi},\ \psi)$ dans $\mathcal{D}(\Gamma)^2\times\mathcal{D}(\Gamma)$ nous définissons donc :

$$(2.8)\qquad \begin{cases} \operatorname{div}\vec{\phi} = \dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_2} \\ \operatorname{rot}\vec{\phi} = \dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_2} \\ \mathbf{rot}\ \psi = \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2},\ -\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) \\ \vec{\operatorname{grad}}\ \psi = \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) \end{cases}$$

Les opérateurs rot et **rot** d'une part, div et $(-\vec{\operatorname{grad}})$ d'autre part, sont formellement adjoints. Plus précisément, nous avons les identités : $(d\sigma = dx_1 dx_2)$.

$$(2.9)\qquad \begin{cases} \bullet\ \forall\ (\vec{\phi},\ \psi)\in\mathcal{D}(\Gamma)^2\times\mathcal{D}(\Gamma) \quad \int \operatorname{rot}\vec{\phi}\cdot\psi\ d\sigma = \int \vec{\phi}\cdot\mathbf{rot}\ \psi\ d\sigma \\ \bullet\ \forall\ (\vec{\phi},\ \psi)\in\mathcal{D}(\Gamma)^2\times\mathcal{D}(\Gamma) \quad \int \operatorname{div}\vec{\phi}\cdot\psi\ d\sigma = -\int \vec{\phi}\ \vec{\operatorname{grad}}\ \psi\ d\sigma \end{cases}$$

$$(2.10)\quad \left|\begin{array}{ll} \bullet\ \forall\,\psi \in \mathcal{D}(\Gamma) & \mathrm{rot}(\vec{\mathrm{grad}}\,\psi) = 0 \\ \bullet\ \forall\,\psi \in \mathcal{D}(\Gamma) & \mathrm{div}\,(\vec{\mathbf{rot}}\,\psi) = 0 \end{array}\right.$$

ainsi que les égalités :

$$(2.11)\quad \left|\begin{array}{l} \mathbf{rot}(\mathrm{rot}) = \vec{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}) - \Delta \\ \mathrm{rot}(\mathbf{rot}) = -\Delta \end{array}\right.$$

Rappelons également que les espaces de Sobolev $H^s(\Gamma)$, $s \in \mathbb{R}$, se définissent grâce à la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ par :

$$H^s(\Gamma) = \{\phi \in \mathcal{S}'(\Gamma) \ / \ (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\ \hat{\phi}(k) \in L^2(\mathbb{R}^2)\ \}$$

(où $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ et $|k| = (k_1^2+k_2^2)^{1/2}$)

$H^s(\Gamma)$ est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|\phi\|^2_{s,\Gamma} = \int_{\mathbb{R}^2} (1+|k|^2)^s\ |\hat{\phi}(k)|^2\ dk$$

Nous serons également amenés à faire appel aux espaces :

$$\mathcal{H}^s(\Gamma) = \{\phi \in \mathcal{S}(\Gamma) \ / \ |k|^s\ \hat{\phi}(k) \in L^2(\Gamma)\}$$

espaces de Hilbert pour la norme

$$|\phi|^2_{s,\Gamma} = \int_{\mathbb{R}^2} |k|^{2s}\ |\hat{\phi}(k)|^2\ dk$$

On notera que l'on a les inclusions strictes et continues (la constante de continuité étant égale à 1).

- $\forall\ s > 0 \qquad H^s(\Gamma) \subset \mathcal{H}^s(\Gamma)$
- $\forall\ s < 0 \qquad \mathcal{H}^s(\Gamma) \subset H^s(\Gamma)$

Nous pouvons définir sans ambiguité les espaces fonctionnels :

$$\left|\begin{array}{l} H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div},\Gamma) = \{\vec{\phi} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 \ / \ \mathrm{div}\ \vec{\phi} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\} \\ \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div},\Gamma) = \{\vec{\phi} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 \ / \ \mathrm{div}\ \vec{\phi} \in \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\} \\ H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot},\Gamma) = \{\vec{\phi} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 \ / \ \mathrm{rot}\ \vec{\phi} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\} \\ \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot},\Gamma) = \{\vec{\phi} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 \ / \ \mathrm{rot}\ \vec{\phi} \in \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\} \end{array}\right.$$

Ces quatre espaces sont des espaces de Hilbert pour les normes respectives :

$$(2.12) \quad \left|\begin{array}{l} \|\vec{\phi}\|_{\mathrm{div},\Gamma} = \|\vec{\phi}\|^2_{-\frac{1}{2}} + \|\mathrm{div}\ \vec{\phi}\|_{L_{-\frac{1}{2}},\Gamma} \\ |\vec{\phi}|^2_{\mathrm{div},\Gamma} = \|\vec{\phi}\|^2_{-\frac{1}{2}} + |\mathrm{div}\ \vec{\phi}|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \\ \|\vec{\phi}\|^2_{\mathrm{rot},\Gamma} = \|\vec{\phi}\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \|\mathbf{rot}\ \vec{\phi}\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} \\ |\vec{\phi}|^2_{\mathrm{rot},\Gamma} = \|\vec{\phi}\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} + |\mathbf{rot}\ \vec{\phi}|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} \end{array}\right.$$

D'autre part on vérifie aisément, via les procédés classiques (troncature, régularisation) que les espaces $\mathcal{D}(\Gamma)$ et $\mathcal{S}(\Gamma)$ sont denses dans chacun de ces espaces.

Il est clair que l'on a les inclusions continues.

$$(2.13) \quad \begin{array}{l} \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div};\ \Gamma) \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div};\ \Gamma) \\ \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot};\ \Gamma) \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot};\ \Gamma) \end{array}$$

ainsi que les inégalités :

$$\forall\ \vec{\phi} \in \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div},\Gamma) \qquad |\vec{\phi}|_{\mathrm{div},\Gamma} \leq \|\vec{\phi}\|_{\mathrm{div};\Gamma}$$

$$\forall\ \vec{\phi} \in \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot};\Gamma) \qquad |\vec{\phi}|_{\mathrm{rot};\Gamma} \leq \|\vec{\phi}\|_{\mathrm{rot};\Gamma}$$

Comme l'inclusion $\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est stricte, on pourrait s'attendre à ce que les inclusions (2.13) soient également strictes. En fait, il n'en est rien puisque l'on a le :

THEOREME 2.3

On a les égalités algébriques et topologiques suivantes :

(i) $\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div};\Gamma) = H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div};\Gamma)$

(ii) $\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot};\Gamma) = H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot};\Gamma)$

Démonstration du théorème

Nous nous contenterons de démontrer le point (i), la preuve du point (ii) est identique. Pour démontrer (i) il nous suffit de montrer l'existence d'une constante positive C telle que :

$$\forall \vec{\phi} \in \mathcal{S}(\Gamma)^2 \qquad |\mathrm{div}\,\vec{\phi}\,|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} \leq C\,\left(\|\vec{\phi}\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \|\mathrm{div}\,\vec{\phi}\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma}\right)$$

On conclut ensuite par densité. Or par définition :

$$|\,\mathrm{div}\,\vec{\phi}\,|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|k_1\hat{\phi}_1+k_2\hat{\phi}_2|^2}{|k|}\,dk = \int_{|k|\leq 1} \frac{|k_1\hat{\phi}_1+k_2\hat{\phi}_2|^2}{|k|}\,dk + \int_{|k|\geq 1} \frac{|k_1\hat{\phi}_1+k_2\hat{\phi}_2|^2}{|k|}\,dk$$

Or, nous avons :

$$\int_{|k|\geq 1} \frac{|k_1\hat{\phi}_1+k_2\hat{\phi}_1|^2}{|k|}\,dk = \int_{|k|\geq 1} \frac{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}}{|k|}\,\frac{|k_1\hat{\phi}_1+k_2\hat{\phi}_1|^2}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}}\,dk$$

Mais $\displaystyle\operatorname*{Max}_{|k|\geq 1} \frac{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}}{|k|} = \sqrt{2}$, donc

$$(2.14) \qquad \int_{|k|\geq 1} \frac{|k_1\hat{\phi}_1+k_2\hat{\phi}_1|^2}{|k|}\,dk \leq \sqrt{2}\int_{|k|\geq 1} \frac{|k_1\hat{\phi}_1+k_2\hat{\phi}_1|^2}{|k|}\,dk \leq \sqrt{2}\;\|\mathrm{div}\,\vec{\phi}\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

De la même façon il vient (avec $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2)$)

$$\int_{|k|\leq 1} \frac{|k_1\hat{\phi}_1+k_2\hat{\phi}_1|^2}{|k|}\,dk \leq \int_{|k|\leq 1} |k|\;|\hat{\phi}(k)|^2\,dk = \int_{|k|\leq 1} |k|\;(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}\,\frac{|\hat{\phi}(k)|^2}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}}\,dk$$

Mais $\quad \underset{|k|\leq 1}{\text{Max}} \; |k|(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, donc

$$(2.15) \quad \left| \begin{aligned} \int_{|k|\leq 1} \frac{|k_1\hat{\phi}_2+k_2\hat{\phi}_1|^2}{|k|}\, dk &\leq \sqrt{2} \int_{|k|\leq 1} \frac{|\hat{\phi}(k)|^2}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}}\, dk \\ &\leq \sqrt{2}\; \|\vec{\phi}\|_{L_{\frac{1}{2},\Gamma}} \end{aligned} \right.$$

En regroupant (2.14) et (2.15) nous obtenons

$$|\text{div}\, \vec{\phi}|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} \leq \sqrt{2}\, (\|\vec{\phi}\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \|\text{div}\, \vec{\phi}\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma})$$

ce qui achève la démonstration □

Nous allons maintenant donner deux caractérisations des espaces $H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot};\, \Gamma)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div};\, \Gamma)$ qui déboucheront ensuite sur des résultats de dualité entre ces espaces :

THEOREME 2.4

On a les égalités algébriques :

- $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div};\, \Gamma) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 + \mathbf{rot}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$
- $H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot};\, \Gamma) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 + \vec{\text{grad}}\,(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$

Démonstration :

Nous donnerons les détails pour $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div};\, \Gamma)$ et indiquerons les modifications qui interviennent dans le cas de $H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot};\, \Gamma)$. Décomposons la démonstration en deux étapes :

(1) Nous montrons que $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2+\mathbf{rot}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{div};\, \Gamma)$

En effet, soit $\vec{\phi}$ un élément de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 + \mathbf{rot}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$, alors, par définition même de cet espace :

$$\exists\, (\vec{\phi}^*,\psi) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \;/\; \vec{\phi} = \vec{\phi}^* + \mathbf{rot}\, \psi$$

Comme **rot** $\in \mathcal{L}\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2\right)$ on a donc bien :

$$\vec{\phi} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2$$

Par ailleurs $\quad \operatorname{div} \vec{\phi} = \operatorname{div} \vec{\phi}^*$ (car div (**rot**) = 0).

Comme div $\in \mathcal{L}\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2,\ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$ on en déduit que

$$\operatorname{div} \vec{\phi} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

Par conséquent $\vec{\phi} \in H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div};\ \Gamma)$.

(2) Nous établissons l'inclusion inverse

$$H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div},\ \Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 + \mathbf{rot}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

Pour cela nous allons décomposer toute fonction $\vec{\phi}$ de $H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div};\ \Gamma)$ sous la forme :

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}_0 + \vec{\operatorname{grad}}\ \psi_0 + \mathbf{rot}\ \psi \tag{2.16}$$

avec :
$$\begin{cases} \vec{\phi}_0 \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^2 \\ \psi_0 \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \\ \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{cases}$$

ce qui démontrera le résultat annoncé puisque :

$$\vec{\phi}^* = \vec{\phi}_0 + \vec{\operatorname{grad}}\ \psi_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2$$

Pour obtenir (2.16) nous définissons $\vec{\phi}_0$, ψ_0 et ψ comme étant les solutions (uniques) des trois problèmes elliptiques auxiliaires suivants :

$$-\Delta\vec{\phi}_0 + \vec{\phi}_0 = \vec{\phi} \tag{2.17}$$

$$-\Delta\psi_0 + \psi_0 = -\operatorname{div} \vec{\phi} \tag{2.18}$$

$$-\Delta\psi + \psi = -\operatorname{rot} \vec{\phi} \tag{2.19}$$

Remarquons alors que :

- $(\vec{\phi}, \operatorname{div}\vec{\phi}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \Longrightarrow (\vec{\phi}_0, \psi_0) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^2 \times H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$
- $\operatorname{rot} \vec{\phi} \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \Longrightarrow \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

Posons alors : $\vec{\theta} = \vec{\phi}_0 + \vec{\operatorname{grad}}\ \psi_0 + \mathbf{rot}\ \psi \quad (\quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$

Nous pouvons remarquer que :

$$\operatorname{div} \vec{\theta} = \operatorname{div} \psi_0 + \Delta\psi_0 \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

Par conséquent on a :

$$\vec{\theta} \in H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}; \Gamma)$$

Nous appliquons l'opérateur $\vec{\operatorname{grad}}$ à (2.18) et **rot** à (2.19) nous obtenons :

(2.20) $\qquad -\Delta(\vec{\operatorname{grad}}\ \psi_0) + \vec{\operatorname{grad}}\ \psi_0 = -\vec{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{\phi})$

(2.21) $\qquad -\Delta(\mathbf{rot}\ \psi) + \mathbf{rot}\ \psi = -\mathbf{rot}(\operatorname{rot} \vec{\phi})$

Nous ajoutons alors membre à membre (2.17), (2.20) et (2.21) pour aboutir à (nous utilisons (2.11)) :

$$-\Delta\vec{\theta} + \vec{\theta} = -\Delta\vec{\phi} + \vec{\phi}$$

d'où nous déduisons $\vec{\phi} = \vec{\theta}$ et par suite (2.16). Dans le cas de l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}; \Gamma)$, la partie 1 est immédiate. Pour la partie 2, en utilisant les mêmes problèmes auxiliaires, on décompose tout élément $\vec{\phi}$ de $H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}; \Gamma)$ sous la forme :

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}_0 + \vec{\operatorname{grad}}\ \psi_0 + \mathbf{rot}\ \psi$$

avec cette fois :
$$\begin{cases} \vec{\phi}_0 \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^2 \\ \psi_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \psi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \end{cases}$$

□

Commentaires

• On a clairement les inclusions strictes suivantes :

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 \subset H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div};\ \Gamma) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2$$

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 \subset H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot},\ \Gamma) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2$$

Notre résultat indique de façon précise comment l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div};\ \Gamma)$ (resp. $H^{\frac{1}{2}}(\mathrm{rot},\ \Gamma)$) se distingue des espaces $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2$ (qu'il contient) et $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2$ (qui le contiennent) :

- la partie "non $H^{\frac{1}{2}}$" d'une fonction de $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div};\ \Gamma)$ est automatiquement un rotationnel.

- la partie "non $H^{\frac{1}{2}}$" d'une fonction de $H^{\frac{1}{2}}(\mathrm{rot};\ \Gamma)$ est forcément un gradient.

• Attention, les sommes $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) + \mathbf{rot}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ ne sont pas hilbertiennes.

• La démonstration du théorème montre que l'on a en fait les résultats plus précis suivants :

$$H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div},\ \Gamma) = H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^2 + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \left(H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\right) + \mathbf{rot}\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$$

$$H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot};\ \Gamma) = H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^2 + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) + \mathbf{rot}\left(H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\right)$$

• On peut également montrer que :

$$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 = H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div};\ \Gamma) + H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot};\ \Gamma)$$

Nous allons maintenant établir un résultat caractérisant les duaux des espaces $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div};\ \Gamma)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot};\ \Gamma)$

THEOREME 2.5

On a les égalités (en tant que sous espaces de $\mathcal{D}'(\Gamma)$) :

• $[H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div};\ \Gamma)]' = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$

• $[H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot};\ \Gamma)]' = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 + \mathbf{rot}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$

Démonstration du théorème

A nouveau nous ne détaillerons la démonstration que pour $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div};\ \Gamma)$. Le cas de $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot};\ \Gamma)$ est très similaire.

(1) Montrons que $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 + \vec{\text{grad}}\,(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \subset (H^{-\frac{1}{2}}(\text{div};\ \Gamma))'$

Soient $(\vec{\phi},\psi) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et μ dans $\mathcal{D}(\Gamma)^2$

$$< \vec{\phi} + \vec{\text{grad}}\,\psi,\ \vec{\mu} > = <\vec{\phi},\ \vec{\mu}>_\Gamma - <\psi,\ \text{div}\ \vec{\mu}>_\Gamma$$

($<\cdot,\cdot>_\Gamma$ désignant la dualité $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) - H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$).

Par conséquent :

$$|<\vec{\phi} + \vec{\text{grad}}\ \vec{\psi},\ \vec{\mu}>| \leq C\ (\|\vec{\phi}\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}\|\vec{\mu}\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \|\psi\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}\ \|\text{div}\ \vec{\mu}\|_{-\frac{1}{2},\Gamma})$$

$$\leq C\ (\|\vec{\phi}\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} + \|\psi\|^2_{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\ \|\vec{\mu}\|_{\text{div},\Gamma}$$

Par densité, cette inégalité s'étend à toute fonction $\vec{\mu}$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div},\ \Gamma)$, ce qui prouve l'inclusion annoncée.

(2) Pour établir l'inclusion inverse nous utilisons le théorème de Riesz qui permet d'identifier tout espace de Hilbert à son dual. Plus précisément nous utilisons l'opérateur :

$$S : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$
$$\phi \longrightarrow S\phi$$

tel que

$$\forall\ \psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \qquad <S\phi,\ \psi>_\Gamma = (\phi,\psi)_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

(Nous avons utilisé le fait que $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un espace de Hilbert et que $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est son dual).

Par ailleurs, si L désigne un élément de $[H^{-\frac{1}{2}}(\text{div},\ \Gamma)]'$, nous savons, en appliquant cette fois le théorème de Riesz à $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div},\ \Gamma)$, qu'il existe $\vec{\phi}$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\text{div},\Gamma)$ tel que :

$$\forall\ \vec{\psi} \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{div},\ \Gamma) \qquad <L,\ \vec{\psi}> = (\vec{\phi},\ \vec{\psi})_{\text{div},\Gamma}$$

Soit,

$$<L,\ \vec{\psi}> = (\vec{\phi},\ \vec{\psi})_{-\frac{1}{2},\Gamma} + (\text{div}\ \vec{\phi},\ \text{div}\ \vec{\psi})_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

En utilisant l'opérateur S, cette dernière égalité peut se réécrire, lorsque $\vec{\psi}$ est dans $\mathcal{D}(\Gamma)^2$, sous la forme :

$$\langle L, \vec{\psi}\rangle = \langle S\vec{\phi}, \vec{\psi}\rangle + \langle S(\mathrm{div}, \vec{\phi}), \mathrm{div}\, \vec{\psi}\rangle$$
$$= \langle S\vec{\phi}, \vec{\psi}\rangle + \langle \vec{\mathrm{grad}}\ (S\ \mathrm{div}\ \vec{\phi}), \vec{\psi}\rangle\rangle$$

d'où nous déduisons l'égalité au sens des distributions

(2.22) $$L = S\vec{\phi} - \vec{\mathrm{grad}}\,(S\ \mathrm{div}\ \vec{\phi})$$

ce qui prouve que $L \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 + \vec{\mathrm{grad}}\,(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ puisque :

$$(S\vec{\phi}, S(\mathrm{div}\vec{\phi})) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$ □

Une conséquence directe des théorèmes 2.4 et 2.5 est le :

COROLLAIRE 2.1

Les espaces $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}, \Gamma)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}, \Gamma)$ sont duaux l'un de l'autre :

$$\left(H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}, \Gamma)\right)' = H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}, \Gamma)$$
$$\left(H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}, \Gamma)\right)' = H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}, \Gamma)$$

Remarques -Les espaces $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}, \Gamma)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}, \Gamma)$ sont des espaces intermédiaires entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2$. Toutefois aucun de ces espaces n'est contenu dans, ni ne contient, l'espace intermédiaire $L^2(\Gamma)^2$

II.3 - LES THEOREMES DE TRACES DANS $H(\vec{\mathrm{rot}}; \Omega)$

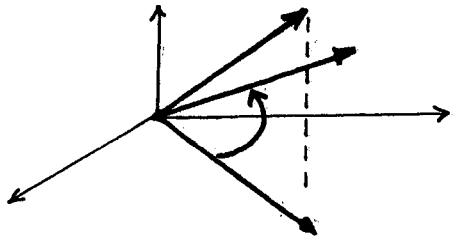
Définissons tout d'abord les opérateurs de traces tangentielles γ_t et γ_τ. Si Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ "assez régulière", Ω étant localement d'un seul côté de Γ, nous désignons par $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à Γ sortant Ω. Nous pouvons alors définir les opérateurs (τ cursif L^2 désigne le sous espace des champs de vecteurs de $L^2(\Gamma)^3$ qui sont tangents à Γ).

$$(2.23)\quad \left|\begin{array}{l} \gamma_\tau : \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \longrightarrow \mathcal{T}L^2(\Gamma) \\ \qquad \vec{u} \longrightarrow \gamma_\tau \vec{u} = \vec{u}\wedge\vec{n}|_\Gamma \\ \gamma_t : \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \longrightarrow \mathcal{T}L^2(\Gamma) \\ \qquad \vec{u} \longrightarrow \gamma_t \vec{u} = \gamma_\tau \vec{u} \wedge \vec{n} = (\vec{u}\wedge\vec{n})\wedge\vec{n}|_\Gamma \end{array}\right.$$

Dans le cas du demi espace $\Omega = \mathbb{R}^3_+$ qui nous intéresse ici, si $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$, alors :

$$(2.24)\quad \left|\begin{array}{l} \gamma_\tau : \mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}^3_+)^3 \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)^2 \\ \qquad \gamma_\tau\vec{u}(x_1, x_2) = \big(u_2(x_1, x_2, 0), -u_1(x_1, x_2, 0)\big) \\ \gamma_t : \mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}^3_+)^3 \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)^2 \\ \qquad \gamma_t\vec{u}(x_1, x_2) = \big(u_1(x_1, x_2, 0), u_2(x_1, x_2, 0)\big) \end{array}\right.$$

Illustration graphique



- $\gamma_t\vec{u}$ est la trace normale usuelle
- $\gamma_\tau\vec{u}$ se déduit de $\gamma_t\vec{u}$ par une rotation d'angle $\frac{\Pi}{2}$ dans le plan tangent.

Notons que $\gamma_t\vec{u}$ est indépendant de l'orientation de la normale. Dans tout ce qui suit, Ω désignera $\mathbb{R}^3_+$ (ou $\mathbb{R}^3_-$). Rappellons tout d'abord le théorème de traces classique dans $H(\vec{rot}, \Omega)$, théorème dont on trouvera une démonstration dans GIRAULT-RAVIART [8] par exemple :

THEOREME 2.6

L'application γ_τ se prolonge de façon unique en une application linéaire continue, toujours notée γ_τ, de $H(\vec{rot};\Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2$ et on a la formule de Green, pour tout couple $(\vec{u},\vec{v})$ dans $H(\vec{rot};\ \Omega) \times H^1(\Omega)^3$:

$$(2.25)\quad \int_\Omega (\vec{u}\cdot\vec{rot}\ \vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{rot}\ \vec{u})\ dx = \langle\gamma_\tau\ \vec{u},\ \gamma_0\vec{v}\rangle_\Gamma$$

où γ_0 désigne l'opérateur de trace usuel de $H^1(\Omega)^3$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$.

La démonstration du théorème repose précisément sur la formule de Green (2.25) qui, dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des fonctions régulières s'écrit simplement :

$$\int (\vec{u}\cdot\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u})\,dx = \int_\Gamma (\vec{u}\wedge\vec{n})\cdot\vec{v}\,d\sigma$$

En fait, le résultat énoncé dans le théorème n'est pas optimal en ce sens que, ainsi qu'on va le voir, l'application γ_τ n'est par surjective de $H(\vec{\mathrm{rot}}, \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2$. D'ailleurs, on voit bien que, dans la formule de Green (2.25), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ jouent un rôle symétrique dans le nombre de gauche et disymétrique dans le membre de droite (On peut du reste remplacer sans changer la formule $\gamma_0\vec{v}$ par $\gamma_t\vec{v}$ puisque $\gamma_\tau\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$).

Notre but dans ce paragraphe est de donner le théorème de traces optimal pour $H(\vec{\mathrm{rot}}; \Omega)$. Les résultats que nous énonçons ont déjà été obtenus, dans un cadre plus général, par PAQUET [18], qui utilise le formalisme de la géométrie différentielle et du calcul extérieur. Il ne nous a pas semblé inutile de donner une démonstration de ces résultats, expurgée des difficultés techniques liées au fait que l'on travaille avec des variétés riemanniennes en dimension n, et qui a donc le mérite d'être simple et concrète.

Nous énonçons tout d'abord le :

THEORME 2.7

(i) L'opérateur γ_τ se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire continu de $H(\vec{\mathrm{rot}}; \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}, \Gamma)$

(ii) L'opérateur γ_t se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire continu de $H(\vec{\mathrm{rot}}, \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}, \Gamma)$

(iii) Pour tout couple $(\vec{u},\vec{v})$ dans $H(\vec{\mathrm{rot}}, \Omega)^2$, on a la formule de Green :

(2.26) $$(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u}, \vec{v}) - (\vec{u}, \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v}) = \langle \gamma_\tau\,\vec{u}, \gamma_t\,\vec{v} \rangle_\Gamma$$

ou $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne la dualité $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}, \Gamma) - H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}, \Gamma)$

Démonstration

(i) Nous utilisons le théorème 2.6 et le fait que :

$$H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}, \Gamma) = (\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}, \Gamma))$$

Pour obtenir notre résultat, il suffit d'établir une estimation du type :

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \qquad |\mathrm{div}\, \gamma_\tau \vec{u}|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \leq C \|\vec{u}\|_{\vec{rot}}$$

où C désigne une constante indépendante de $\vec{u}$. On conclut alors de façon classique un utilisant la densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$ dans $H(\vec{rot};\ \Omega)$.

Soit donc $\vec{u}$ dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$ et $\vec{w} = \vec{rot}\ \vec{u}$. Utilisons la transformée de Fourier partielle dans les directions $(x_1,\ x_2)$.
Il vient :

$$\hat{w}_1(k_1,\ k_2,\ x_3) = (ik_2\ \hat{u}_3 - \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_3})\ (k_1,\ k_2,\ x_3) \tag{2.27}$$

$$\hat{w}_2(k_1,\ k_2,\ x_3) = (\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_3} - ik_1\ \hat{u}_3)\ (k_1,\ k_2,\ x_3) \tag{2.28}$$

$$\hat{w}_3(k_1,\ k_2,\ x_3) = (ik_1\ \hat{u}_2 - ik_2\ \hat{u}_1)\ (k_1,\ k_2,\ x_3) \tag{2.29}$$

Introduisons alors $\vec{\phi} = \gamma_\tau\ \vec{u}$ et posons $\psi = \mathrm{div}(\gamma_\tau\ \vec{u}) = \mathrm{div}\ \vec{\phi}$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(k_1,\ k_2) &= ik_1\ \hat{\phi}_1(k_1,\ k_2) \quad + \quad ik_2\ \hat{\phi}_2(k_1,\ k_2)\\ &= ik_2\ \hat{u}_1(k_1,\ k_2,\ 0) - \ ik_1\ \hat{u}_2(k_1,\ k_2,\ 0)\\ &= \hat{w}_3\ (k_1,\ k_2,\ 0) \qquad\qquad \text{(cf. (2.29))}\end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}|\hat{\psi}(k_1,k_2)|^2 &= -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_3}\left(|\hat{w}_3(k_1,\ k_2,\ x_3)|^2\right) dx_3\\ &= -\int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial \hat{w}_3}{\partial x_3}\ \overline{\hat{w}_3} + \overline{\frac{\partial \hat{w}_3}{\partial x_3}}\ \hat{w}_3\right)(k_1,\ k_2,\ x_3)\ dx_3\end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|\hat{\psi}(k_1,k_2)|^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial \hat{w}_3}{\partial x_3}\ (k_1,k_2,x_3)dx_3\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} |\hat{w}_3(k_1,k_2,x_3)|^2 dx_3\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.30}$$

Or, d'après (2.29), nous savons que :

$$\frac{\partial \hat{w}_3}{\partial x_3}(k_1,k_2,x_3) = ik_1 \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_3}(k_1,k_2,x_3) - ik_2 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_3}(k_1,k_2,x_3)$$

Des égalités (2.27) et (2.28), nous tirons :

$$\frac{\partial \hat{w}_3}{\partial x_3}(k_1,k_2,x_3) = -\left(ik_1\hat{w}_1(k_1,k_2,x_3) + ik_2\,\hat{w}_2(k_1,k_2,x_3)\right) \tag{2.31}$$

Par conséquent :

$$\left|\frac{\partial \hat{w}_3}{\partial x_3}(k_1,k_2,x_3)\right|^2 \leq |k|^2 \left(|\hat{w}_1(k_1,k_2,x_3)|^2 + |\hat{w}_2(k_1,k_2,x_3)|^2\right)$$

En reportant cette inégalité dans (2.30), nous obtenons :

$$|\hat{\psi}(k_1,k_2)|^2 \leq |k|^2 \left(\int_0^{+\infty} |\hat{w}_3(k_1,k_2,x_3)|^2 dx_3\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} \left(|\hat{w}_1(k_1,k_2,x_3)|^2 + |\hat{w}_2(k_1,k_2,x_3)|^2\right) dx_3\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \frac{|k|}{2} \left(\int_0^{+\infty} |\hat{w}(k_1,k_2,x_3)|^2\, dx_3\right.$$

Par suite nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(k)|^2}{|k|}\, dk \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{w}(k_1,k_2,x_3)|^2\, dk_1\, dk_2\, dx_3$$

Soit encore, grâce au théorème de Plancherel

$$|\mathrm{div}\, \gamma_\tau \vec{u}\,|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} \leq \frac{1}{2} \|\, \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{u}\,\|^2$$

ce qui achève la démonstration du point (i).

Remarque Nous avons donné une démonstration utilisant la transformée de Fourier. On peut aussi donner une démonstration plus directe en remarquant que :

$$\vec{u} \in H(\vec{\mathrm{rot}}, \Omega) \Longrightarrow \vec{w} = \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$$

puisque div $\vec{w}$ = 0 (qui n'est autre quel'égalité (2.31)). On peut alors utiliser le théorème de traces classique de H(div, Ω) (voir GIRAULT-RAVIART [8]) et en déduire que :

$$\gamma_\nu \vec{w} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

où γ_ν est l'opérateur de trace normale défini par :

$$\forall \vec{v} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \qquad \gamma_\nu \vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{n}|_\Gamma$$

Pour conclure il suffit alors de remarquer, c'est un simple calcul, que :

$$\forall \vec{v} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \qquad \gamma_\nu(\vec{rot}\ \vec{u}) = \mathrm{div}\ (\gamma_\tau \vec{u})$$

En d'autres termes la trace normale du rotationnel vecteur d'un champ $\vec{u}$ n'est autre que la divergence de la trace tangentielle de ce même champ.

(ii) La démonstration de ce cas est en tous points analogue à celle du cas **(i)**.

(iii) La formule de Green (2.26) s'obtient par passage à la limite dans la formule classique lorsque l'on considère des suites $(\vec{u}_n, \vec{v}_n)$ de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$ telles que :

$$(\vec{u}_n, \vec{v}_n) \longrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \qquad \text{dans } H(\vec{rot}, \Omega)^2$$

Ce passage à la limite est rendu loisible :

- par les points **(i)** et **(ii)** d'une part,
- par le corollaire 2.1 d'autre part □

Enonçons finalement les résultats de surjectivité qui complètent ceux du théorème 2.7.

THEOREME 2.8

(i) L'application γ_τ est surjective de $H(\vec{rot}, \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}, \Gamma)$,

(ii) L'application γ_t est surjective de $H(\vec{rot}, \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}, \Gamma)$

Démonstration du théorème

(i) Nous allons construire un opérateur de relèvement explicite que nous utiliserons par la suite au chapitre 4. Pour cela, nous considérons le problème auxilaire suivant, $\vec{\phi}$ étant donné dans $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$:

$$(2.33) \quad \begin{cases} \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\,\vec{u}) + \vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega = \mathbb{R}^3_+ \\ \gamma_\tau \vec{u} = \phi & \text{sur } \Gamma = \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

dont nous cherchons une soluton dans $H(\vec{\text{rot}}, \Omega)$. Pour effectuer le calcul de $\vec{u}$ nous remarquons tout d'abord que si $\vec{u}$ est solution de (2.33) alors div $\vec{u} = 0$. Par suite le problème (2.33) est équivalent à :

$$(2.34) \quad \begin{cases} -\Delta\vec{u} + \vec{u} = 0 \\ \text{div}\,\vec{u} = 0 \\ \gamma_\tau\,\vec{u} = \vec{\phi} \end{cases}$$

Nous résolvons alors (2.34) par transformation de Fourier partielle dans les directions (x_1, x_2), (nous notons $\hat{u}(k_1,k_2,x_3)$ le vecteur $(\mathcal{F}\,\vec{u})(k_1,k_2,x_3)$) :

$$\left| \begin{array}{lll} -\dfrac{d^2\hat{u}}{dx_3^2} + (1+|k|^2)\,\hat{u} = 0 & & x_3 > 0 \\ i\,k_1\,\hat{u}_1 + ik_2\,\hat{u}_2 + \dfrac{d\hat{u}_3}{dx_3} = 0 & & x_3 > 0 \\ \hat{u}_1(k_1,k_2,0) = \hat{\phi}_2(k_1,k_2) & & \\ \hat{u}_2(k_1,k_2,0) = -\hat{\phi}_1(k_1,k_2) & & \end{array} \right.$$

De la première équation de ce système nous tirons :

$$\hat{u}(k_1,k_2,x_3) = \hat{u}(k_1,k_2,0)\; e^{-(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}} x_3}$$

Des deux conditions aux limites nous tirons :

$$\hat{u}_1(k_1,k_2,x_3) = \hat{\phi}_2(k_1,k_2)\, e^{-(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}} x_3}$$
$$\hat{u}_2(k_1,k_2,x_3) = -\hat{\phi}_1(k_1,k_2)\, e^{-(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}} x_3}$$

Nous utilisons enfin l'équation sur la divergence, qui nous fournit

$$ik_1\, \hat{\phi}_2(k_1, k_2) - ik_2\, \hat{\phi}_1(k_1, k_2) = (1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}\, \hat{u}_3(k_1,k_2, 0).$$

Finalement nous considérons la fonction $\vec{u}$ dont la transformée de Fourier partielle est donnée par :

$$(2.35) \qquad \begin{cases} \hat{u}_1(k_1,k_2,x_3) = \hat{\phi}_2(k_1,k_2)\, e^{-(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}} x_3} \\ \hat{u}_2(k_1,k_2,x_3) = \hat{\phi}_1(k_1,k_2)\, e^{-(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}} x_3} \\ \hat{u}_3(k_1,k_2,x_3) = \dfrac{ik_1\hat{\phi}_2(k_1,k_2) - ik_2\hat{\phi}_1(k_1,k_2)}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}}\, e^{-(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}} x_3} \end{cases}$$

$\vec{u}$ constitue bien un relèvement de $\vec{\phi}$ puisque :

$$\gamma_\tau\, \vec{u} = \vec{\phi}$$

Il nous reste à vérifier que $\vec{u}$ est dans $H(\vec{rot}, \Omega)$. Pour cela nous utiliserons le :

LEMME 2.1

Soit $v(x_1,x_2,x_3)$ définie par sa transformée de Fourier partielle :

$$\hat{v}(k_1,k_2,x_3) = \hat{\psi}(k_1,k_2) e^{-(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}} x_3}$$

Alors $\psi \in H^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow v \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et $\|v\|^2 = \frac{1}{2}\, \|\psi\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma}$

Démonstration du Lemme

Par le théorème de Plancherel nous avons :

$$\| v \|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(k_1,k_2)|^2 \, e^{-2(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}} x_3} \, dx_3 \, dk_1 \, dk_2$$

Or, par un simple calcul nous avons

$$\int_0^{+\infty} e^{-2(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}} x_3} \, dx_3 = \frac{1}{2(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Par conséquent :

$$\| v \|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(k)|^2}{2(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}} \, dk = \frac{1}{2} \| \psi \|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

□

En appliquant le lemme 2 fois successivement avec :

- $v = u_1 \qquad \psi = \phi_2$
- $v = u_2 \qquad \psi = -\phi_1$

Nous montrons que (u_1,u_2) $L^2(\Omega)^2$ et que :

$$\| u_1 \|^2 + \| u_2 \|^2 = \frac{1}{2} \| \phi_1 \|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \frac{1}{2} \| \phi_2 \|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} \tag{2.36}$$

D'autre part soit ψ la fonction dont la transformée de Fourrier est donnée par :

$$\hat{\psi}(k) = \frac{i(k_1\hat{\phi}_2 - k_2\hat{\phi}_1)(k)}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Nous remarquons que, par Cauchy Schwartz

$$|\hat{\psi}(k)| \leq |\hat{\phi}_1(k)|^2 + |\hat{\phi}_2(k)|^2$$

D'où nous déduisons que $\psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2$ et que

$$\| \psi \|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} \leq \frac{1}{2} \| \phi_1 \|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \| \phi_2 \|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

Ainsi en appliquant une nouvelle fois le lemme au couple (u_3, ψ), nous voyons que u_3 est dans $L^2(\Omega)$ et que :

$$(2.37) \qquad \| u_3 \|^2 \leq \frac{1}{2} \| \phi_1 \|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \frac{1}{2} \| \phi_2 \|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

Regroupons (2.36) et (2.37) nous obtenons :

$$(2.38) \qquad \vec{u} \in L^2(\Omega)^3 \quad \text{et} \quad \| \vec{u} \|^2 \leq \| \vec{\phi} \|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

Considérons maintenant $\vec{w} = \vec{\text{rot}}\ \vec{u}$ et posons $\hat{w} = \mathcal{F}\ \vec{w}$.

Par définition du rotationnel nous avons :

$$\begin{cases} \hat{w}_1(k_1,k_2,x_3) = (ik_2\ \hat{u}_3 - \dfrac{d\hat{u}_2}{dx_3})\ (k_1,k_2,x_3) \\ \hat{w}_2(k_1,k_2,x_3) = (\dfrac{d\hat{u}_1}{dx_3} - ik_1\ \hat{u}_3)\ (k_1,k_2,x_3) \\ \hat{w}_3(k_1,k_2,x_3) = (ik_1\ \hat{u}_2 - ik_2\ \hat{u}_1)\ (k_1,k_2,x_3) \end{cases}$$

En utilisant les expressions (2.35) nous obtenons

$$\hat{w}_j(k_1,k_2,x_3) = \hat{\psi}_j(k_1,k_2)\ e^{-(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}} x_3}$$

où les fonctions $(\hat{\psi}_1,\ \hat{\psi}_2,\ \hat{\psi}_3)$ sont données par :

$$\begin{cases} \hat{\psi}_1(k_1,k_2) = \left\{ \dfrac{ik_2(ik_1\hat{\phi}_2 - ik_2\hat{\phi}_1)}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}} - (1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}\ \hat{\phi}_2 \right\} (k_1,k_2) \\ \hat{\psi}_2(k_1,k_2) = \left\{ (1+|k|^2)^{\frac{1}{2}} \hat{\phi}_1 - \dfrac{ik_1(ik_1\hat{\phi}_2 - ik_2\hat{\phi}_1)}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} (k_1,k_2) \\ \hat{\psi}_3(k_1,k_2) = \left(ik_1\ \hat{\phi}_1 + ik_2\ \hat{\phi}_2\right) (k_1,k_2) \end{cases}$$

Nous réécrivons ces égalités en faisant apparaitre le terme de divergence $ik_1\hat{\phi}_1 + ik_2\hat{\phi}_2$ que nous savons contrôler. Nous obtenons alors :

$$(2.39)\qquad \begin{cases} \hat{\psi}_1(k_1,k_2) = \left\{ \dfrac{ik_1(ik_1\hat{\phi}_1+ik_2\hat{\phi}_2)}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{\hat{\phi}_1}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} (k_1,k_2) \\ \hat{\psi}_2(k_1,k_2) = \left\{ \dfrac{ik_1(ik_1\hat{\phi}_1+ik_2\hat{\phi}_2)}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{\hat{\phi}_2}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} (k_1,k_2) \\ \hat{\psi}_3(k_1,k_2) = (ik_1\hat{\phi}_1 + ik_2\hat{\phi}_2)\ (k_1,k_2) \end{cases}$$

Nous pouvons alors, grâce à l'inégalité de Cauchy Schwartz et au théorème de Plancherel, montrer que (ψ_1,ψ_2,ψ_3) $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ et que l'on a les inégalités :

$$(2.40)\qquad \|\psi_1\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \|\psi_2\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} \leq \|\operatorname{div}\vec{\phi}\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \|\vec{\phi}\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

$$(2.41)\qquad \|\psi_3\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} \leq \|\operatorname{div}\vec{\phi}\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

(En fait l'inégalité (2.41) s'obtient en remarquant que :

$$\left(|\hat{\psi}_1|^2+|\hat{\psi}_2|^2\right)(k_1,k_2) = \frac{1}{1+|k|^2}\left\{(1+|k|^2)\ \left|\left(ik_1\hat{\phi}_1+ik_2\hat{\phi}_2\right)\right|^2+|\hat{\phi}_1|^2+|\hat{\phi}_2|^2\right\}(k_1,k_2)$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 2.1 aux couples (w_1, ψ_1), (w_2, ψ_2) et (w_3, ψ_3) pour obtenir :

$$(2.42)\qquad \begin{aligned} &\vec{w} = \vec{\operatorname{rot}}\ \vec{u} \in L^2(\Omega)^3 \\ &\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{\operatorname{rot}}\ \vec{u}\|^2 \leq \|\vec{\phi}\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} + 2\,\|\operatorname{div}\vec{\phi}\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \end{aligned}$$

En regroupant (2.39) et (2.42), nous obtenons finalement :

$$(2.43)\qquad \begin{aligned} &\vec{u} \in H(\vec{\operatorname{rot}};\ \Omega) \\ &\|\vec{u}\|^2_{\vec{\operatorname{rot}}} \leq 2\,\|\vec{\phi}\|^2_{\operatorname{div},\Gamma} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du point (i).

La démonstration du point (ii) se mène de façon identique en partant cette fois du problème auxiliaire

$$\begin{cases} \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u} + \vec{u} = 0 \\ \gamma_t\ \vec{u} = \vec{\phi} \end{cases} \qquad \square$$

Remarque Nous désignerons par R le relèvement de $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div};\ \Gamma)$ dans $H(\vec{\mathrm{rot}},\ \mathbb{R}^3_+)$ défini par le problème auxiliaire (2.33) (lorsque $\Omega=\mathbb{R}^3_+$). Nous avons donc montré que R est un opérateur linéaire continu et l'inégalité (2.38) prouve que :

$$\| \mathbb{R} \|_{\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div};\ \Gamma);\ H(\vec{\mathrm{rot}};\ \mathbb{R}^3_+))} \leq \sqrt{2}$$

Rappelons enfin que ce relèvement est à divergence nulle.

III - PROBLEME DANS L'ESPACE ENTIER

EQUIVALENCE AVEC UN PROBLEME DE TRANSMISSION

L'objet de ce chapitre est de poser de façon précise le problème (1.6), et de montrer qu'il est équivalent à un problème de transmission entre les restrictions de la solution aux deux demi-espaces.

Au paragraphe 3.1, nous définissons la notion de solution. Faute d'avoir établi un résultat d'équivalence de norme analogue à celui de [10], nous n'avons pas de résultat général d'existence pour ce problème. Ainsi, outre son importance pour la résolution numérique, la réduction au demi-espace (via l'équivalence avec le problème de transmission qui occupe le paragraphe 3.2), constitue un artifice qui nous permet de prouver l'existence d'une unique solution à ce problème.

III. 1 - LE PROBLEME DANS L'ESPACE ENTIER

Rappelons que le problème auquel nous nous intéressons consiste à chercher un champ électrique, que nous noterons $\vec{u}$, vérifiant :

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \mu\,\sigma\,\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u} = \vec{f} & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(x_1,x_2,x_3,0) = \vec{u}_0(x_1,x_2,x_3) & \end{cases}$$

La fonction de conductivité σ vérifie :

$$(3.2)\qquad \left|\begin{array}{ll} \sigma \equiv 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3_+ \\ \sigma \geq \sigma_* > 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3_- \\ \sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^3) & \end{array}\right.$$

Par conséquent, et en raisonnant formellement pour motiver les définitions suivantes, nous pouvons écrire que $\vec{u}$ vérifie (en l'abscence de source dans le demi-espace supérieur, ce qui sera le cas général) :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u} = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^3_+$$

Mais ce problème n'admet pas une solution unique. Par conséquent, et autant pour des raisons physiques que mathématiques (cf. Chap. 4), nous sommes conduits à lui adjoindre la condition :

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^3_+$$

Nous verrons au chapitre suivant que le problème :

$$\left|\begin{array}{lll} \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{u} = 0 & & \text{dans } \mathbb{R}^3_+ \\ \operatorname{div} \vec{u} \quad = 0 & & \text{dans } \mathbb{R}^3_+ \\ \vec{u}_{|\mathbb{R}^2} & \text{donné} & \end{array}\right.$$

admet une solution unique dans l'espace $\mathcal{H}(\vec{\operatorname{rot}}, \mathbb{R}^3_+)$.

Ces préliminaires justifient l'introduction de l'espace :

$$(3.3) \quad V = \{\vec{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3,\ p\vec{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3,\ \vec{\operatorname{rot}}\vec{u} \in L^2(\mathbb{R}^3),\ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ \text{ dans } \mathbb{R}^3_+\}$$

p étant la fonction de poids définie en (2.6). V muni de la norme induite par $\mathcal{H}(\vec{\operatorname{rot}}, \mathbb{R}^3)$ en est un sous espace fermé. C'est donc un espace de Hilbert. Suivant GOLDMAN [10] nous définissons l'espace :

$$(3.4) \qquad W_\sigma = \{\vec{u} \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3_-)) \cap L^2(0,T;V);\ \sigma \frac{d\vec{u}}{dt} \in L^2(0,T;V')\}$$

qui est un espace de Banach pour la norme :

$$(3.5) \qquad \|\vec{u}\|_{W_\sigma} = \|\vec{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3_-))} + \|\vec{u}\|_{L^2(0,T,V)} + \|\sigma \frac{d\vec{u}}{dt}\|_{L^2(0,T,V')}$$

Remarque 3.1

L'expression $\sigma \frac{d\vec{u}}{dt}$ $L^2(0,T;V')$ doit être comprise au sens suivant (cf. GOLDMAN [10]). Pour $\vec{u} \in L^2(0,T;V)$, $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, la distribution notée $\sigma \frac{d\vec{u}}{dt}$, et définie par : $\forall \vec{\phi} \in \mathcal{D}(]0,T[;\ V)$

$$< \sigma \frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{\phi} > = - \int_{\mathbb{R}_+} (\sigma \vec{u}, \frac{d\vec{\phi}}{dt})$$

est continue pour la norme de $L^2(0,T;V)$ de $\vec{\phi}$ □

Finalement, nous posons le problème :

$$(3.6)\quad \left|\begin{array}{ll} \sigma \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{rot}\ \vec{rot}\ \vec{u} = \vec{f} & \text{dans } \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+ \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3_+\times\mathbb{R}_+ \\ \vec{u}(x_1,x_2,x_3,0) = \vec{u}_0(x_1,x_2,x_3) & \end{array}\right.$$

Nous faisons sur les données $\vec{f}$ et $\vec{u}_0$ les hypothèses suivantes :

$$(3.7)\quad \begin{cases} \vec{f} \in L^2(0,T;V') \\ \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3_-) \end{cases}$$

Nous appelons solution faible de (3.6) une fonction $\vec{u}$ vérifiant :

$$(3.8)\quad \left|\begin{array}{l} \vec{u} \in W_\sigma \quad \text{tel que } \forall\, \vec{v} \in V \\ \dfrac{d}{dt}(\sigma\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{rot}\ \vec{u}, \vec{rot}\ \vec{v}) = \langle \vec{f}, \vec{v}\rangle_{V-V'} \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{array}\right.$$

(,) désigne le produit scalaire usuel de $L^2(\mathbb{R}^3)$

A ce point de l'exposé, le lecteur s'attend à trouver un résultat d'existence pour (3.7). Il n'a pas été possible d'établir de façon directe un tel résultat. Ce sera une conséquence de la chaine d'équivalence que nous établirons au paragraphe 3.2 et au chapitre 4, ainsi que de l'étude du problème dans le demi-espace au chapitre 5.

Pour obtenir un résultat analogue (pour le problème bidimensionnel), GOLDMAN [10] utilise la méthode Galerkin, qui repose essentiellement sur l'établissement d'estimations a priori. Il est intéressant de voir quelle étape manque pour l'obtention de ces estimations.

Réécrivons l'équation vérifiée par $\vec{u}$:

$$\sigma \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{rot}\ \vec{rot}\ \vec{u} = \vec{f}$$

Nous multiplions scalairement cette équation par $\vec{u}$, et intégrons en espace. Pour $t \in [0,T]$, il vient :

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\ |\sqrt{\sigma}\ \vec{u}|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + |\vec{rot}\ \vec{u}|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \langle f(t), \vec{u}(t)\rangle_{V-V'} \leq C\|\vec{f}\|_{V'}\ \|\vec{u}\|_V$$

Nous intégrons cette inégalité en temps entre 0 et t:

$$\frac{1}{2}|\sqrt{\sigma}\ \vec{u}(t)|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t |\vec{rot}\ \vec{u}(s)|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq \frac{1}{2}|\sqrt{\sigma}\ \vec{u}_0|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C\int_0^t \|\vec{f}(s)\|_{V'}\|\vec{u}(s)\|_V\ ds$$

Puisque σ vérifie :

$$\left|\begin{array}{ll} 0 < \sigma_* \leq \sigma \leq \sigma^* & \text{dans } \mathbb{R}^3_- \\ \sigma \equiv 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3_+ \end{array}\right.$$

nous déduisons l'estimation :

$$|u(t)|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_-)} + \frac{2}{\sigma_*}\int_0^t |\vec{rot}\ \vec{u}(s)|^2\ ds \leq \frac{\sigma^*}{\sigma_*}\ |\vec{u}_0|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_-)} + \frac{2C}{\sigma_*}\int_0^t \|\vec{f}(s)\|_{V'}\ \|\vec{u}(s)\|_V\ ds$$

pour majorer l'intégrale au second membre, nous utilisons l'inégalité de Young :

$$\frac{2C}{\sigma_*}\|\vec{f}(s)\|_{V'}\ \|\vec{u}(s)\|_V \leq \frac{2C}{\sigma_*}\|\vec{f}(s)\|_{V'}\ |\vec{u}|_{L^2_p(\mathbb{R}^3)} + \frac{2C}{\sigma_*}\|\vec{f}(s)\|_{V'}\ |\vec{rot}\ \vec{u}|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq \frac{2C}{\sigma_*}\|\vec{f}(s)\|_{V'}\ |\vec{u}|_{L^2_p(\mathbb{R}^3)} + \frac{C^2}{2\sigma_*}\|\vec{f}(s)\|^2_{V'} + \frac{2}{\sigma_*}|\vec{rot}\ \vec{u}|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Ce qui nous donne finalement l'inégalité :

$$(3.9) \qquad |\vec{u}(t)|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_-)} \leq \frac{\sigma^*}{\sigma_*} |\vec{u}_0|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_-)} + \frac{C^2}{2\sigma_*} \int_0^t \|\vec{f}(s)\|^2_{V'} \, ds + \frac{2C}{\sigma_*} \int_0^t \|\vec{f}(s)\|_{V'} \, |\vec{u}(s)|_{L^2_p(\mathbb{R}^3)} \, ds$$

Si, à ce stade, il était possible d'utiliser une version étendue du lemme de Gronwall, nous aurions une majoration de $\vec{u}$, et nous pourrions achever la démonstration de façon habituelle. Pour cela, nous devons pouvoir majorer $|\vec{u}|_{L^2_p(\mathbb{R}^3)}$ par $|\vec{u}|_{L^2(\mathbb{R}^3_-)}$. De façon équivalente, peut-on établir que la qualité suivante est une norme sur V, équivalente à sa norme naturelle :

$$|\vec{u}|^2_V = |\vec{u}|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_-)} + |\vec{rot}\ \vec{u}|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Pour la question équivalente dans le cas bidimensionnel, GOLDMAN a montré que ce résultat était une conséquence facile d'une équivalence de normes sur $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2_+)$: la quantité

$$\left(|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} + |\gamma_0\ u|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2_+)$, équivalente à la norme de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2_+)$. C'est l'analogue de ce dernier résultat que nous n'avons pu obtenir. Il constitue la :

CONJECTURE 3.1

Soit $X = \{\vec{u}, p\vec{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_+)^3, \vec{rot}\ \vec{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_+), \text{div}\ \vec{u} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3_+\}$
La quantité :

$$|\vec{u}|^2_X = |\vec{rot}\ \vec{u}|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_+)} + |\gamma_\tau\ \vec{u}|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)}$$

est une norme sur X, équivalente à la norme naturelle de X

La démonstration du résultat dans le cas bidimensionnel utilise une intégration par parties sur :

$$\int_0^\infty \frac{|u|^2}{(1+x_3)^2}\, dx_3 = |u(0)|^2 + 2\int_0^\infty \frac{u\,\frac{du}{dx_3}}{1+x_3}\, dx_3$$

puis l'inégalité de Schwarz. Cette méthode ne conduit pas, ici, au résultat. Une autre méthode utilisant le lemme de Peetre-Tartar, en s'inspirant de BENDALI [2] ne s'applique pas, car elle nécessite que la frontière du domaine soit bornée (ce qui est le cas pour un problème extérieur).

Nous allons maintenant faire le premier pas vers la réduction du problème du demi-espae $\mathbb{R}^3_-$.

III.2 - EQUIVALENCE AVEC UN PROBLEME DE TRANSMISSION

Puisque la fonction de conductivité σ s'annule dans le demi-espace $\mathbb{R}^3_+$, notre problème peut s'interpréter comme le couplage entre :

- un problème stationnaire dans le demi-espace $\mathbb{R}^3_+$

$$\vec{rot}\ \vec{rot}\ \vec{u} = 0$$

- un problème d'évolution dans le demi-espace $\mathbb{R}^3_-$

$$\sigma \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{rot}\ \vec{rot}\ \vec{u} = \vec{f}$$

le couplage intervenant sur l'interface $\{z=0\}$, par l'intermédiaire des conditions de transmission des champs, bien connues des physiciens.

Le but de notre travail est de nous ramener au seul problème sur le demi espace inférieur, en utilisant le fait que la solution dans $\mathbb{R}^3_+$ est connue analytiquement.

Pour cela, nous devons tout d'abord donner un sens précis au problème de transmission évoqué ci-dessus, et montrer que, sous des hypothèses convenables sur les données, ce problème est équivalent au problème original (3.7).

Notre premier résultat est une conséquence facile de la formule de Green (2.26).

Nous désignons par $\vec{n}$ la normale sortante $\mathbb{R}^3_-$, et posons pour une fonction $\vec{u} \in H(\vec{rot}, \mathbb{R})$:

$$(3.10)\qquad \begin{cases} \vec{u}^{+} = \vec{u}|\mathbb{R}^3_+ \\ \vec{u}^{-} = \vec{u}|\mathbb{R}^3_- \end{cases}$$

Enfin, γ_τ^+ (resp. γ_τ^-) désigne l'application trace tangentielle relative à $\mathbb{R}^3_+$ (resp. $\mathbb{R}^3_-$)

LEMME 3.1

Nous avons l'équivalence :

$$\vec{u} \in H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3) \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{u}^{+} \in H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+) \\ \vec{u}^{-} \in H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_-) \\ \gamma_\tau^+ \vec{u}^{+} + \gamma_\tau^- \vec{u}^{-} = 0 \end{cases}$$

Démonstration

• Soit $\vec{u} \in H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3)$, et $\vec{u}^{+}$, $\vec{u}^{-}$ définies par (3.10).

Il est immédiat que

- $\vec{u}^{+} \in H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+)$
- $\vec{u}^{-} \in H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_-)$

Pour établir la relation entre les traces, nous utilisons la formule de Green (2.16) :

- d'abord dans tout l'espace,
- ensuite pour chacun des demi-espaces.

Soit $\vec{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$. Nous avons tout d'abord :

$$(3.11)\qquad \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}\cdot\vec{rot}\,\vec{\phi} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{rot}\,\vec{u}\cdot\vec{\phi}$$

Mais, d'autre part, en décomposant l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}\cdot\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} = \int_{\mathbb{R}^3_+} \vec{u}^+\cdot\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} + \int_{\mathbb{R}^3_-} \vec{u}^-\cdot\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3_+} \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u}^+\cdot\vec{\phi} - \langle\gamma_\tau^+\,\vec{u}^+,\ \gamma_\tau\vec{\phi}\rangle + \int_{\mathbb{R}^3_-} \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u}^-\cdot\vec{\phi} - \langle\vec{\gamma}_\tau^-\vec{u}^-,\gamma_t\vec{\phi}\rangle$$

Soit,

$$\text{(3.12)} \qquad \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}\cdot\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u}\cdot\vec{\phi} - \langle\gamma_t^+\,\vec{u}^+ + \gamma_\tau^-\,\vec{u}^-,\ \gamma_\tau\,\vec{\phi}\rangle.$$

En composant (3.12) et (3.11), on obtient la formule annoncée.

Inversement, soit $\vec{u}^+ \in H(\vec{\mathrm{rot}},\ \mathbb{R}^3_+)$, $\vec{u}^- \in H(\vec{\mathrm{rot}},\ \mathbb{R}^3_-)$ vérifiant la condition :

$$\text{(3.13)} \qquad \gamma_\tau^+\,\vec{u}^+ + \gamma_\tau^-\,\vec{u}^- = 0$$

La fonction $\vec{u}$ définie par :

$$\left|\begin{array}{l} \vec{u}_{|\mathbb{R}^3_+} = \vec{u}^+ \\ \vec{u}_{|\mathbb{R}^3_-} = \vec{u}^- \end{array}\right.$$

est visiblement dans $L^2(\mathbb{R}^3)$; et si nous définissons (provisoirement) $\vec{w}$ par :

$$\left|\begin{array}{l} \vec{w}_{|\mathbb{R}^3_+} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u}^+ \\ \vec{w}_{|\mathbb{R}^3_-} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u}^- \end{array}\right.$$

cette fonction est également dans $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Reste à prouver que $\vec{w} = \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}$, ce que nous vérifions au sens des distributions. Soit $\vec{\phi} \in \mathcal{D}\ (\mathbb{R}^3)^3$:

$$\langle\ \vec{w}-\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u},\ \vec{\phi}\ \rangle = \langle\ \vec{w},\ \vec{\phi}\ \rangle - \langle\vec{u},\ \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{\phi}\ \rangle.$$

Puisque $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, ces crochets de dualité se réinterprétent comme des intégrales :

$$\begin{aligned} < \vec{w}-\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u}, \vec{\phi} > &= \int_{\mathbb{R}^3_+} \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u}^+\cdot\vec{\phi} + \int_{\mathbb{R}^3_-} \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u}^-\cdot\vec{\phi} - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}\cdot\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3_+} \vec{u}^+\cdot\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} + \int_{\mathbb{R}^3_-} \vec{u}^-\cdot\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}\cdot\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} \\ &- < \gamma_t^+ \vec{u}^+, \gamma_t \vec{\phi} > - < \gamma_\tau^- \vec{u}^-, \gamma_t \vec{\phi} >. \end{aligned}$$

La somme des intégrales s'annule par définition de $\vec{u}$, et le terme de bord est nul par la condition de transmission (3.13). Par conséquent :

$$\vec{w}-\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3,$$

Donc

$$\vec{w} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3. \qquad \square$$

Remarques

•Au delà de son énoncé abstrait, le lemme (3.1) exprime le fait, bien connu en physique, que "la composante tangentielle du champ électrique est continue au passage d'une hétérogénéité".

•Outre son utilisation pour établir l'équivalence de nos deux problèmes, l'intérêt du lemme (3.1) est de permettre la construction de sous espaces de dimension finie de $H(\vec{\mathrm{rot}}, \Omega)$. Il suffit que la restriction des fonctions à chaque élément K soit dans $H(\vec{\mathrm{rot}}, K)$, et que les traces tangentielles se raccordent. Pour des exemples de tels sous-espaces, cf. NEDELEC [16]. $\square$

On peut obtenir une autre formulation du lemme (3.1) en remplaçant l'espace $H(\vec{\mathrm{rot}})$ par $\mathcal{H}(\vec{\mathrm{rot}})$, puisque ces espaces ont les mêmes traces sur Γ. D'autre part, il est utile d'exprimer le résultat en termes de traces γ_t, qui sont indépendantes de la normale.

COROLLAIRE 3.1

Nous avons l'équivalence :

$$\vec{u} \in \mathcal{H}(\vec{rot}, \mathbb{R}^3) \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{u}^+ \in \mathcal{H}(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+) \\ \vec{u}^- \in H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_-) \\ \gamma_t \vec{u}^+ = \gamma_t \vec{u}^- \end{array} \right.$$

Démonstration

- Si $\vec{u} \in \mathcal{H}(\vec{rot}, \mathbb{R}^3)$, alors $\quad \vec{u}^+ \in \mathcal{H}(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+)$, $\vec{u}^- \in H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_-)$

Pour le raccord des traces, nous nous ramenons au lemme (3.1) par troncature, et nous utilisons :

$$\gamma_t \vec{u}^+ = -\gamma_\tau^+ \vec{u}^+ \quad \vec{n} \; ; \quad \gamma_t \vec{u}^- = \gamma_\tau^- \vec{u}^- \quad \vec{n}$$

- Inversement, si $\vec{u}^+ \in \mathcal{H}(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+)$, $\vec{u}^- \in H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_-)$, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^3} p(x_1,x_2,x_3)^2 \, |\vec{u}(x_1,x_2,x_3)|^2 < \infty$$

Pour montrer que $\vec{rot}\, \vec{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)$, nous procèdons comme au lemme (3.1). □

Pour poser le problème de transmission, nous avons besoin de modéliser une source comprenant un partie volumique (concentrée dans le sous-sol), et une partie surfacique.

Nous modélisons une source surfacique de la façon suivante :

soit $\vec{\phi} \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$. Nous définissons "$\vec{\phi}\,\delta(\Gamma)$" par :

$$\forall \vec{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3, \quad \langle \vec{\phi}\delta(\Gamma), \vec{\psi} \rangle = \langle \vec{\phi}, \gamma_t \vec{\psi} \rangle.$$

Nous supposerons que les données $\vec{u}_0$, $\vec{g}$ et $\vec{\phi}$ vérifient les hypothèses :

$$(3.14) \qquad \left| \begin{array}{l} \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3_-) \\ \vec{g} \in L^2(0,T;\, L^2(\mathbb{R}^3_-)); \; \text{supp}\, \vec{g} \subset \mathbb{R}^3_- \\ \vec{\phi} \in L^2(0,T; H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)). \end{array} \right.$$

Nous posons maintenant :

- le problème dans tout l'espace

$$(3.15)\quad \left|\begin{array}{ll} \vec{u} \in C^0(0,T;V) \cap H^1(0,T;L^2(\mathbb{R}^3_-)) & \\ \sigma \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u}) = \vec{f} \equiv \vec{g} + \vec{\phi}\delta(\Gamma) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3_+ \\ \vec{u}(x_1,x_2,x_3,0) = \vec{u}_0(x_1,x_2,x_3) & \end{array}\right.$$

- le problème de transmission

$$(3.16)\quad \left|\begin{array}{ll} \vec{u}^+ \in C^0(0,T;\mathcal{H}(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+)) & \\ \vec{u}^- \in C^0(0,T,H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_-)) \cap H^1(0,T;L^2(\mathbb{R}^3_-)) & \\ \operatorname{div} \vec{u}^+ = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3_+ \\ \vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u}^+) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3_+ \\ \mu\sigma \dfrac{\partial \vec{u}^-}{\partial t} + \vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u}^-) = g & \text{dans } \mathbb{R}^3_- \\ \gamma_t \vec{u}^+ = \gamma_t \vec{u}^- & \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(rot, \Gamma) \\ \gamma^+_\tau(\vec{rot}\ \vec{u}^+) + \gamma^-_\tau(\vec{rot}\ \vec{u}^-) = \vec{\phi} & \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma) \end{array}\right.$$

Remarque Le problème de transmission (3.16) a bien un sens. En effet, nous cherchons $\vec{u}^+$ dans $\mathcal{H}(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+)$ et $\vec{u}^-$ dans $H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_-)$. Comme $\mathcal{H}(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+)$ a même trace sur $\mathbb{R}^2$ que $H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+)$, $\gamma_t \vec{u}^+$ $H^{-\frac{1}{2}}(rot, \Gamma)$.
D'autre part, $\vec{rot}\vec{u}^+ \in H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+)$ et de même, puisque $\vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u}^-) = \vec{g} - \sigma \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}^3_-)$, $\vec{rot}\ \vec{u}^- \in H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_-)$. Donc $\gamma^+_\tau(\vec{rot}\ \vec{u}^+)$ et $\gamma^-_\tau(\vec{rot}\ \vec{u}^-)$ sont dans $H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma)$.

Nous sommes en mesure d'énoncer le résultat principal de ce chapitre :

THEOREME 3.1

$\vec{u}$ est solution du problème dans tout l'espace (3.15) si, et seulement si, le couple $(\vec{u}^+, \vec{u}^-)$ est solution du problème de transmission (3.16), ou :

$$\vec{u}^+ = \vec{u}_{|\mathbb{R}^3_+} \quad , \quad \vec{u}^- = \vec{u}_{|\mathbb{R}^3_-}$$

Démonstration

- Soit $\vec{u}$ solution de (3.15)

Multiplions scalairement l'équation vérifiée par $\vec{u}$ par une fonction $\vec{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$, intégrons sur $\mathbb{R}^3$.

i) Choisissons $\vec{v}$ à support compact dans $\mathbb{R}^3_+$. Il vient :

$$\vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u}^+) = 0$$

ii) De même, pour $\vec{v}$ à support dans $\mathbb{R}^3_-$:

$$\sigma \frac{\partial \vec{u}^+}{\partial t} + \vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u}^+) = \vec{g}$$

Par le lemme (3.1), $\vec{u}^+ \in \mathcal{H}(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+)$, $\vec{u}^- \in H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_-)$

et on a la condition de raccord : $\gamma_t \vec{u}^+ = \gamma_t \vec{u}^-$.

iii) Enfin, choisissons $\vec{v}$ quelconque dans $(\mathbb{R}^3)^3$. Nous avons :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma\, \vec{u}\cdot\vec{v} + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{rot}\ \vec{u}\cdot\vec{rot}\ \vec{v} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{g}\cdot\vec{v} + \langle \vec{\phi}, \gamma_t \vec{v} \rangle$$

Séparons les intégrales sur $\mathbb{R}^3_+$ et $\mathbb{R}^3_-$. La formule de Green (2.16) nous donne alors (d'après les étapes **i)** et **ii)** les intégrales sont nulles) :

$$\langle \gamma^+_\tau(\vec{rot}\ \vec{u}^+), \gamma_t \vec{v} \rangle + \langle \gamma^-_\tau(\vec{rot}\ \vec{u}^-), \gamma_t \vec{v} \rangle = \langle \vec{\phi}, \gamma_t \vec{v} \rangle$$

C'est la dernière condition de (3.16).

- Inversement, soit $(\vec{u}^+, \vec{u}^-)$ solution de (3.16). Définissons $\vec{u}$ par :

$$\begin{cases} \vec{u}_{|\mathbb{R}^3_+} = \vec{u}^+ \\ \vec{u}_{|\mathbb{R}^3_-} = \vec{u}^- \end{cases}$$

Grace au lemme (3.1), $\vec{u} \in \mathcal{H}(\vec{\text{rot}}, \mathbb{R}^3)$.

Si $\vec{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$, alors par la formule de Green (2.16) :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sigma \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \vec{v} + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\text{rot}}\, \vec{u} \cdot \vec{\text{rot}}\, \vec{v} = \int_{\mathbb{R}^3} \sigma \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \vec{v} + \int_{\mathbb{R}^3_+} \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\, \vec{u}^+) \cdot \vec{v} + \int_{\mathbb{R}_-} \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\, \vec{u}^-) \cdot \vec{v}$$

$$+ \langle \gamma_\tau^+(\vec{\text{rot}}\, \vec{u}^+), \gamma_t\, \vec{v} \rangle + \langle \gamma_\tau^-(\vec{\text{rot}}\, \vec{u}^-), \gamma_t\, \vec{v} \rangle$$

$$= \langle \vec{\phi}, \gamma_t\, \vec{v} \rangle + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{g} \cdot \vec{v}$$

et $\vec{u}$ est solution de (3.15) □

Le problème de transmission n'est qu'un intermédiaire pour ramener notre étude au seul demi-espace $\mathbb{R}^3_-$.

Pour cela les conditions de raccord des traces jouent un rôle essentiel. En effet, sachant que $\vec{u}^+$ vérifie :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{\text{rot}}\, \vec{\text{rot}}\, \vec{u}^+ = 0 \\ \text{div}\, \vec{u}^+ \quad = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3_+ \end{array} \right.$$

nous pouvons relier les traces $\gamma_t\, \vec{u}^+$ et $\gamma_\tau^+(\vec{\text{rot}}\, \vec{u}^+)$. Supponsons donc connu un opérateur (linéaire) T tel que :

$$\gamma_\tau(\vec{\text{rot}}\, \vec{u}^+) = T(\gamma_t\, \vec{u}^+)$$

Mais alors, les conditions

$$\begin{cases} \gamma_t\, \vec{u}^+ = \gamma_t\, \vec{u}^- \\ \gamma_\tau^+(\vec{\text{rot}}\, \vec{u}^+) + \gamma_\tau^-(\vec{\text{rot}}\, \vec{u}^-) = \vec{\phi} \end{cases}$$

nous donnent :

$$\gamma_\tau^-(\vec{\text{rot}}\ \vec{u}^-) + T(\gamma_t\ \vec{u}^-) = \vec{\phi}$$

et cette condition ne fait intervenir que $\vec{u}^-$.

Formellement au moins, $\vec{u}^-$ est donc solution de :

$$(3.17)\quad \left|\begin{array}{ll} \sigma \dfrac{\partial \vec{u}^-}{\partial t} + \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\ \vec{u}^-) = \vec{g} & \text{dans } \mathbb{R}^3_- \\ \gamma_\tau^-(\vec{\text{rot}}\ \vec{u}^-) + T(\gamma_t\ \vec{u}) = \vec{\phi} & \text{sur } \Gamma \\ \vec{u}^-(t=0) = \vec{u}_0 & \end{array}\right.$$

Au chapitre suivant, nous construirons effectivement l'opérateur T, et le chapitre 5 sera consacrée à l'étude du problème dans le demi-espace (3.17). Nous aurons ainsi l'existence d'une solution à (3.7).

IV - L'OPERATEUR T

Nous allons, dans ce chapitre, expliciter l'opérateur reliant $\gamma_t \vec{u}$ à $\gamma_\tau(\vec{rot}\ \vec{u})$, pour une fonction $\vec{u}$ vérifiant :

$$\vec{rot}\ \vec{rot}\ \vec{u} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3_+$$

Nous commencerons par prouver que cet opéateur est bien défini, et donnerons ses propriétés. Tirant parti de la géométrie rectiligne de l'interface, nous donnerons une expression explicite de l'opérateur, utilisant la transformation de Fourier. Nous reviendrons ensuite dans les variables d'espace, pour donner une expression calculable de la forme bilinéaire associée à l'opérateur. Cette expression sera la base d'une formulation variationnelle pour le problème posé dans le demi-espace. Nous établirons, enfin, l'équivalence de ce problème avec le problème de transmission.

THEOREME 4.1

Soit $\vec{\phi} \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \mathbb{R}^2)$. Il existe un élément unique :

$$\vec{u} \in \mathcal{H}(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+)$$

vérifiant:

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u}) = 0 \\ \text{div}\ \vec{u} = 0 \\ \gamma_t\ \vec{u} = \vec{\phi} \end{cases}$$

Démonstration

Faute de savoir établir pour $|\vec{rot}\ \vec{u}|_0$ est une norme équivalente à la norme de $\mathcal{H}(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+)$ sur

$$W = \{ \vec{u} \in \mathcal{H}(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+),\ \text{div}\ \vec{u} = 0,\ \gamma_t\ \vec{u} = 0 \}$$

nous donnerons une démonstration indirecte.

Soit $\varepsilon>0$, nous construirons $\vec{u}$ comme limite des solutions $\vec{u}_\varepsilon$ du problème auxiliaire :

$$(4.2)\quad \left|\begin{array}{l} \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_\varepsilon) + \varepsilon\ \vec{u}_\varepsilon = 0 \\ \gamma_t\ \vec{u}_\varepsilon \qquad\qquad\qquad = \vec{\phi} \end{array}\right.$$

Grâce au relèvement construit au théorème 2.8 (ii), nous considérons $\vec{u}_0 \in H(\vec{\mathrm{rot}};\ \mathbb{R}^3_+)$, tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_t\ \vec{u}_0 = \vec{\phi} \\ \mathrm{div}\ \vec{u}_0 = 0 \end{array}\right.$$

Ceci nous permet de nous ramener au problème :

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{w}_\varepsilon \in H(\vec{\mathrm{rot}},\ \mathbb{R}^3_+) \quad (\vec{w}_\varepsilon = \vec{u}_\varepsilon - \vec{u}_0) \\ \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{w}_\varepsilon) + \varepsilon\ \vec{w}_\varepsilon = -\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_0) - \varepsilon\vec{u}_0 \\ \gamma_t\ \vec{w}_\varepsilon = 0 \end{array}\right.$$

qui admet, dans $H_0(\vec{\mathrm{rot}},\ \mathbb{R}^3_+) = \{\vec{u} \in H(\vec{\mathrm{rot}},\ \mathbb{R}^3_+),\ \gamma_t\ \vec{u} = 0\}$ la formulation variationnelle suivante :

$$(4.3)\quad \left|\begin{array}{l} \text{Trouver : } \vec{w}_\varepsilon \in H_0(\vec{\mathrm{rot}},\ \mathbb{R}^3_+), \text{ tel que } \quad \forall\ \vec{v} \in H_0(\vec{\mathrm{rot}},\ \mathbb{R}^3_+) : \\ (\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{w}_\varepsilon,\ \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{v}) + \varepsilon(\vec{w}_\varepsilon,\ \vec{v}) = -(\vec{\mathrm{rot}}\ u_0,\ \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{v}) - \varepsilon(\vec{u}_0,\ \vec{v}) \end{array}\right.$$

Puisque $\vec{u}_0 \in H(\vec{\mathrm{rot}},\ \mathbb{R}^3_+)$, le second membre est une forme linéaire continue sur $H(\vec{\mathrm{rot}},\ \mathbb{R}^3_+)$ et le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de $\vec{w}_\varepsilon$ solution de (4.3), donc de $\vec{u}_\varepsilon$ solution de (4.2). Nous établissons ensuite le :

LEMME 4.1 :

La solution $\vec{u}_\varepsilon$ de (4.2) vérifie l'estimation suivante, ou la constante C ne dépend pas de ε :

(4.4) $$\|\vec{u}_\varepsilon\|_{\mathcal{H}(\mathrm{rot},\mathbb{R}^3_+)} \leq C\ |\vec{\phi}|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot},\ \Gamma)}$$

Démonstration :

Nous raisonnerons par transformation de Fourrier partielle, ce qui est justifié puisque $\vec{u}_\varepsilon$ et $\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_\varepsilon$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^3_+)$.

Un calcul analogue à celui du théorème (2.8) montre que :

$$\begin{cases} \hat{u}_1^\varepsilon(k_1,k_2,x_3) = \hat{\phi}(k_1,\ k_2)\ e^{-(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}x_3} \\ \hat{u}_2^\varepsilon(k_1,k_2,x_3) = \hat{\phi}_2(k_1,k_2)\ e^{-(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}x_3} \\ \hat{u}_3^\varepsilon(k_1,k_2,x_3) = \dfrac{ik_1\ \hat{\phi}_1(k_1,k_2) + i\ k_2\ \hat{\phi}_2(k_1,k_2)}{(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}}\ e^{-(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}x_3} \end{cases}$$

Considérons tout d'abord l'intégrale :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}x_3}}{(1+x_3)^2}\ dx_3$$

en distinguant selon les valeurs de $|k|$:

- Pour $|k| \leq 1$, aprés intégration par parties, nous écrivons :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}x_3}}{(1+x_3)^2}\ dx_3 = 1-(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-2(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}x_3}}{(1+x_3)^2}\ dx_3 \leq 1$$

- Pour $|k| \geq 1$ nous écrivons tout simplement

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}x_3}}{(1+x_3)^2} \leq \int_0^\infty e^{-2(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}x_3}\ dx_3 \leq \frac{1}{2|k|}$$

Nous en déduisons, par exemple pour u_1 :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty \frac{|\hat{u}_1(k_1,k_2,x_3)|^2}{(1+x_3)^2}\, dk\, dx_3 \leq \int_{|k|\leq 1} |\hat{\phi}_1|^2 + \int_{|k|\geq 1} \frac{1}{2}\, \frac{|\hat{\phi}_1(k)|^2}{|k|} \leq C\, |\phi_1|^2_{-\frac{1}{2}}$$

Ce calcul est valable pour $\hat{u}_2$, et aussi pour $\hat{u}_3$ en remarquant que :

$$\frac{k_i}{(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{k_i}{|k|} \leq 1 \qquad i = 1,\ 2$$

En ce qui concerne $\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_\varepsilon$, de façon analogue à (2.39) nous avons :

$$\left|\begin{array}{l}
(\vec{\mathrm{rot}}\vec{u}_\varepsilon)_1 = \left[\dfrac{\varepsilon\hat{\phi}_2}{(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{k_1}{(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}}\,(k_2\,\hat{\phi}_1 - k_1\,\hat{\phi}_2)\right] e^{-(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}x_3} \\[2ex]
(\vec{\mathrm{rot}}\vec{u}_\varepsilon)_2 = \left[\dfrac{-\varepsilon\hat{\phi}_1}{(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{k_2}{(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}}\,(k_2\,\hat{\phi}_1 - k_1\,\hat{\phi}_2)\right] e^{-(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}x_3} \\[2ex]
(\vec{\mathrm{rot}}\vec{u}_\varepsilon)_3 = (i\,k_2\,\hat{\phi}_1 - i\,\hat{k}_1\,\hat{\phi}_2)e^{-(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}x_3}
\end{array}\right.$$

Un terme tel que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \varepsilon^2\, \frac{|\hat{\phi}_1|^2}{(\varepsilon+|k|^2)}\, e^{-(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}x_3}$$

est majoré par

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon^2\, \frac{|\hat{\phi}_1|^2}{(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{3}{2}}}\, dk$$

et puisque $\varepsilon \longrightarrow \dfrac{\varepsilon^2}{(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{3}{2}}}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on peut majorer cette dernière intégrale par $C\,|\vec{\phi}|^2_{-\frac{1}{2}}$.

Enfin, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty |k_2\,\hat{\phi}_1 - k_1\,\hat{\phi}_2|^2\, e^{-(\varepsilon+|k|^2)^{\frac{1}{2}}x_3}\, dx_3 \leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|k_2\,\hat{\phi}_1 - k_1\,\hat{\phi}_2|^2}{|k|}\, dk$

et grâce au théorème (2.3), cette intégrale est finie. □

<u>Fin de la démonstration du théorème 4.1</u> (existence).

Nous pouvons extraire de $\vec{u}_\varepsilon$ une sous suite (encore notée $\vec{u}_\varepsilon$) convergeant faiblement dans $\mathcal{H}(\vec{\text{rot}}, \mathbb{R}^3_+)$, et passer à la limite faible dans (4.3). Le seul terme pour lequel ce n'est pas immédiat est le terme $\varepsilon(\vec{w}_\varepsilon, \vec{v})$ pour lequel nous avons :

$$|\varepsilon(\vec{w}_\varepsilon, \vec{v})| \leq \varepsilon|\vec{w}_\varepsilon| \; |\vec{v}| \leq \varepsilon \; |\vec{w}_\varepsilon|_{\mathcal{H}(\vec{\text{rot}}, \mathbb{R}^3_+)} \; |\vec{v}| \leq C\,\varepsilon$$

$\vec{w}$ vérifie donc

$$\forall\, \vec{v} \in H_0(\vec{\text{rot}}, \mathbb{R}^3_+) : (\vec{\text{rot}}\,\vec{w}, \vec{\text{rot}}\,\vec{v}) = -(\vec{\text{rot}}\,\vec{u}_0, \text{rot}\,\vec{v})$$

D'autre part, $\vec{w} \in H_0(\vec{\text{rot}}, \mathbb{R}^3_+)$ qui est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}(\vec{\text{rot}}, \mathbb{R}^3_+)$, donc faiblement fermé.

En regroupant ces résultats, on constate que $\vec{u}$ vérifie :

- $\vec{u} \in \mathcal{H}(\vec{\text{rot}}, \mathbb{R}^3_+)$
- $\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{rot}}\,\vec{u} = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3_+)$
- $\gamma_t\,\vec{u} = \vec{\phi}$

Enfin, on vérifie directement sur (4.2) que $\vec{u}_\varepsilon$ est à divergence nulle. Il en est de même de $\vec{u}$, qui est donc solution de (4.1).

La méthode précédente ne nous donne pas l'unicité, que nous établissons donc directement. Il suffit, pour cela, de résoudre (4.1) avec $\vec{\phi}=0$. Le résultat sera une conséquence du :

LEMME 4.2

(4.5) Pour $\vec{u} \in W$, nous avons l'égalité :

$$|\vec{\text{rot}}\,\vec{u}|_0 = |\nabla\,\vec{u}|_0$$

et donc l'égalité topologique de W avec :

$$\{\, \vec{u} \in \mathcal{H}^1_0(\mathbb{R}^3_+),\ \text{div}\,\vec{u} = 0 \,\}$$

$\mathcal{H}_0^1(\mathbb{R}_+^3)$ est l'espace de Sobolev avec poids introduit par GOLDMAN [10].

Démonstration

Supposons d'abord $\vec{u}$ régulière. Nous avons l'égalité :

$$\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u} = -\Delta\vec{u}$$

valable pour les fonctions à divergence nulle.

Multipliant par $\vec{u}$ et intégrant, il vient (puisque $\gamma_t\ \vec{u} = 0$) :

$$|\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}|^2 = |\nabla\vec{u}| - \int_\Gamma u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_2$$

les conditions $\gamma_t\ \vec{u} = 0$, div $\vec{u} = 0$ entrainent $\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\Big|_\Gamma = 0$

d'où (4.5). On conclut alors par densité dans W de $\{\vec{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^3)^3,\ \mathrm{div}\ \vec{u}=0\}$ (voir GIRAULT-RAVIART [8]). □

Fin de la démonstration du théorème (4.1) (unicité).

$\vec{u}$ est donc solution de :

$$(4.6)\qquad \left|\begin{array}{l} -\Delta\vec{u} = 0 \\ \mathrm{div}\ \vec{u} = 0 \\ \gamma_t\ \vec{u} = 0 \end{array}\right.$$

D'après les résultats de GOLDMAN [10] sur le problème bidimensionnel, nous savons que $u_1 = u_2 = 0$.

u_3 vérifie alors $\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$, c'est donc une fonction de x_1 et x_2 seulement, ce qui est autorisé par le poids p si $u_3(x_1,x_2) \in H(\mathbf{rot}, \Gamma)$. Cette fonction vérifie, pour presque tout $x_3 \in \mathbb{R}_+$:

$$\left|\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ u_3 \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2) & \end{array}\right.$$

Nécessairement, $u_3 = 0$, ce qui achève la démonstration. □

REMARQUE 4.1

La condition div $\vec{u} = 0$ a joué un rôle essentiel pour établir l'unicité d'une solution à (4.1).

Par contre, elle n'est pas intervenue pour établir l'existence. Il est intéressant de noter que cette condition n'est pas nécessaire pour ce que nous avons en vue : établir une relation entre $\gamma_t \vec{u}$ et $\gamma_\tau(\vec{rot}\ \vec{u})$ pour $\vec{u}$ solution de :

$$\vec{rot}\ \vec{rot}\ \vec{u} = 0$$

En effet, comme on peut s'y attendre, le problème :

$$(4.7) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \vec{rot}\ \vec{rot}\ \vec{u} = 0 & \\ \gamma_t \vec{u} & = \vec{\phi} \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma) \end{array}\right.$$

n'a pas une solution unique. Par contre la quantité :

$$\gamma_\tau(\vec{rot}\ \vec{u})$$

est indépendante du choix de la solution.

Pour le vérifier (formellement) nous utilisons comme d'habitude la transformation de Fourier en (x_1, x_2). $\hat{u}(k_1, k_2, x_3)$ est solution du système différentiel ordinaire :

$$(4.8) \qquad \left|\begin{array}{l} -k_1\ k_2\ \hat{u}_2(k,x_3) + k_2^2\ \hat{u}_1(k,x_3) - \dfrac{d^2 u_1}{dx_3^2}(k,x_3) + ik_1 \dfrac{d\hat{u}_3}{dx_3}(k,x_3) = 0 \\ ik_2 \dfrac{d\hat{u}_3}{dx_3}(k,x_3) - \dfrac{d^2\hat{u}_2}{dx_3^2}(k,x_3) + k^2{}_1\ \hat{u}_2(k,x_3) - k_1 k_2\ \hat{u}_1(k,x_3) = 0 \\ ik_1 \dfrac{d\hat{u}_1}{dx_3}(k,x_3) + k_1^2\ \hat{u}_3(k,x_3) + k_2^2\ \hat{u}_3(k,x_3) + ik_2 \dfrac{d\hat{u}_2}{dx_3}(k,x_3) = 0 \end{array}\right.$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} \hat{u}_1(k,0) = \hat{\phi}_1(k) \\ \hat{u}_2(k,0) = \hat{\phi}_2(k) \end{cases}$$

On vérifie facilement que les équations (4.8) ne sont pas indépendantes. Cette difficulté disparaît si l'on s'intéresse, non pas à $\vec{u}$ mais à $\gamma_\tau(\vec{rot}\ \vec{u})$, c'est-à-dire à la valeur en $x_3 = 0$ des fonctions :

$$\left| \begin{array}{l} \hat{w}_1(k,x_3) = ik_1\ \hat{u}_3(k,x_3) - \dfrac{d\hat{u}_1}{dx_3}(k,x_3) \\ \\ \hat{w}_2(k,x_3) = ik_2\ \hat{u}_3(k,x_3) - \dfrac{d\hat{u}_2}{dx_3}(k,x_3) \end{array} \right.$$

La troisième équation (4.8) montre en effet que :

$$ik_1\ \hat{w}_1\ (k,x_3) + ik_2\ \hat{w}_2(k,x_3) = 0$$

L'élimination de $\hat{u}_3$ entre les deux premières équations (4.8) mène à :

$$(ik_2\ \hat{u}_1 - ik_1\ \hat{u}_2) = \frac{1}{|k|^2}\ (ik_2\ \hat{\phi}_1 - ik_1\ \hat{\phi}_2)\ (k)\ e^{-|k|x_3}$$

soit,

$$(ik_2\ \hat{u}_1 - ik_1\ \hat{u}_2)(k,x_3) = (ik_2\ \hat{\phi}_1 - ik_1\ \hat{\phi}_2)(k)\ e^{-|k|x_3}$$

et l'on remarque de plus que :

$$\begin{aligned} (ik_2\ \hat{w}_1 - ik_1\ \hat{w}_2) &= -\left(ik_2\ \frac{d\hat{u}_1}{dx_3} - ik_1\ \frac{d\hat{u}_2}{dx_3}\right) \\ &= |k|\ (ik_2\ \hat{\phi}_1 - ik_1\ \hat{\phi}_2). \end{aligned}$$

$\hat{w}_1(k,0)$ et $\hat{w}_2(k,0)$ sont donc solutions du système algébrique :

$$\left| \begin{array}{l} ik_1\ \hat{w}_1(k,0) + ik_2\ \hat{w}_2(k,0) = 0 \\ ik_2\ \hat{w}_1(k,0) - ik_1\ \hat{w}_2(k,0) = |k|\ (ik_2\ \hat{\phi}_1(k) - ik_1\ \hat{\phi}_2(k)) \end{array} \right.$$

qui admet une solution unique.

Ce calcul montre que $\vec{rot}\ \vec{u} \wedge \vec{n}$ est déterminé de façon unique par $\vec{\phi}$, indépendamment de $\vec{u}$ □

On peut, bien entendu, passer à la limite dans (4.4). La solution $\vec{u}$ de (4.1) vérifie donc l'estimation :

$$\|\vec{u}\|_{\mathcal{H}(\vec{rot},\ \mathbb{R}^3_+)} \leq C\ |\vec{\phi}|_{H^{-\frac{1}{2}}(rot,\ \Gamma)}$$

Le théorème (4.1) définit ainsi une application linéaire, continue d'après la remarque précédente :

$$\left|\begin{array}{l} \tilde{R} : H^{-\frac{1}{2}}(rot,\Gamma) \longrightarrow \mathcal{H}(\vec{rot},\ \mathbb{R}^3_+) \\ \qquad\qquad \vec{\phi} \longrightarrow \vec{u} \quad \text{solution de (4.1).} \end{array}\right.$$

et d'autre part $\vec{rot}\ \vec{u} \in H(\vec{rot},\ \mathbb{R}^3_+)$. Par conséquent

$$\gamma^+_\tau(\vec{rot}\ \vec{u}) \in H^{-\frac{1}{2}}(div,\ \Gamma)$$

et nous pouvons définir l'opérateur

$$T = \gamma^+_\tau \circ \tilde{R}$$

T applique $H^{-\frac{1}{2}}(rot,\ \Gamma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(div,\ \Gamma)$:

$$(4.9)\quad \left|\begin{array}{l} T : H^{-\frac{1}{2}}(rot,\ \Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(div,\ \Gamma) \\ \qquad\qquad \vec{\phi} \longrightarrow T\ \vec{\phi} = \gamma^+_\tau(\vec{rot}\ \vec{u}) \end{array}\right.$$

$\vec{u}$ étant solution de (4.1)

Nous avons l'estimation :

$$|T\ \vec{\phi}|_{H^{-\frac{1}{2}}(div,\ \Gamma)} \leq C\ |\vec{rot}\ \vec{u}|_0 \leq C\ |\vec{\phi}|_{H^{-\frac{1}{2}}(rot,\ \Gamma)}$$

ce qui prouve (la linéarité étant immédiate) le :

COROLLAIRE 4.1

T est un opérateur linéaire continu de $H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma)$ dans son dual $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$

Nous définissons une forme bilinéaire sur $H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma)^2$ par :

$$(4.10) \qquad \forall\, (\vec{\phi}, \vec{\psi}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma)^2,\ b(\vec{\phi}, \vec{\psi}) = \langle T\,\vec{\phi}, \vec{\psi}\rangle$$

le crochet désignant la dualité $H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}) - H^{-\frac{1}{2}}(\text{div})$. Nous avons alors le :

THEOREME 4.2

b est une forme bilinéaire continue symétrique et positive sur $H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma)^2$

Démonstration :

La continuité de b découle de celle de T. Considérons ensuite $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \mathcal{H}(\vec{\text{rot}}; \mathbb{R}^3_+)^2$ solutions de :

$$\left|\begin{array}{l} \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\ \vec{u}_1) = 0 \\ \gamma_t\ \vec{u}_1 = \vec{\phi}_1 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \vec{\text{rot}}\ \vec{\text{rot}}\ \vec{u}_2 = 0 \\ \gamma_t\ \vec{u}_2 = \vec{\phi}_2 \end{array}\right.$$

où $\vec{\phi}_1$ et $\vec{\phi}_2$ sont données dans $H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma)$

Nous avons :

$$b(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2) = \langle T\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2\rangle = \langle \gamma_\tau^+(\vec{\text{rot}}\ \vec{u}_1), \vec{\text{rot}}\ \vec{u}_2\rangle$$

Nous utilisons alors la formule de Green suivante, dont la démonstration est calquée sur celle du lemme 1.6 de GOLDMAN [10].

LEMME 4.3

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{H}(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+)$, $\vec{rot}\,\vec{rot}\,\vec{u} = 0$

Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^3_+} \vec{rot}\,\vec{u}\cdot\vec{rot}\,\vec{v} = \langle \gamma_\tau^+(\vec{rot}\,\vec{u}), \gamma_t\,\vec{v} \rangle$$

Appliquons ce lemme à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

$$b(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2) = \int_{\mathbb{R}^3_+} \vec{rot}\,\vec{u}_1\cdot\vec{rot}\,\vec{u}_2$$

ce qui prouve la symétrie et la positivité de b. □

Nous introduisons donc la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ définie en (2.1) et l'opérateur $\hat{T}$:

$$\hat{T} = \mathcal{F} \circ T \circ \mathcal{F}^{-1}.$$

Il s'agit maintenant d'obtenir une expression calculable de notre forme bilinéaire.

Pour cela, nous utiliserons une méthode analogue à celle due à BAMBERGER [1], pour la diffraction des ondes élastiques. Tirant parti de ce que l'interface $\Gamma=\mathbb{R}^2$ est rectiligne nous pourrons donner, par transformation de Fourier en (x_1, x_2), une forme explicite de $b(\vec{\phi}, \vec{\psi})$, faisant intervenir un noyau non intégrable. Nous ferons disparaître cette singularité en faisant intervenir les dérivées de $\vec{\phi}$ et $\vec{\psi}$, et le théorème de Plancherel nous donnera finalement une description explicite de la forme bilinéaire, où l'on reconnaîtra une convolution avec la solution élémentaire du Laplacien dans $\mathbb{R}^3$. Remarquons qu'un tel calcul n'est pas qu'un exercice de style : c'est une étape indispensable l'approximation numérique de notre problème.

Nous définissons de plus les espaces suivants :

$$\hat{H}^{-\frac{1}{2}}(rot, \mathbb{R}^2) = \left\{ \hat{\phi}(k) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)^2, \frac{\hat{\phi}(k)}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}} \in L^2(\mathbb{R}^2)^2; \frac{ik_2\hat{\phi}_1 - ik_1\hat{\phi}_2}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}} \in L^2(\mathbb{R}^2) \right.$$

$$\hat{H}^{-\frac{1}{2}}(div, \mathbb{R}^2) = \left\{ \hat{\phi}(k) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)^2, \frac{\hat{\phi}(k)}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}} \in L^2(\mathbb{R}^2)^2; \frac{ik_1\hat{\phi}_1 + ik_2\hat{\phi}_2}{(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}} \in L^2(\mathbb{R}^2) \right.$$

La définition de $\hat{T}$ correspond au diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot},\ \Gamma) & \xrightarrow{\ T\ } & H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div},\ \Gamma) \\ \mathcal{F} \Big\downarrow & & \Big\downarrow \mathcal{F} \\ \hat{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot},\ \mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\ \hat{T}\ } & \hat{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div},\ \mathbb{R}^2) \end{array}$$

Nous avons alors le :

THEOREME 4.3

$\hat{T}$ est défini par :

$\forall\ \hat{\phi} \in \hat{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot},\ \mathbb{R}^2)$:

$$(4.11)\qquad \left|\begin{array}{l} (\hat{T}\ \hat{\phi})_1(k) = -\dfrac{k_2}{|k|}\left(k_1\ \hat{\phi}_2(k_1,\ k_2) - k_2\ \hat{\phi}_1(k_1,\ k_2)\right) \\ (\hat{T}\ \hat{\phi})_2(k) = +\dfrac{k_1}{|k|}\left(k_1\ \hat{\phi}_2(k_1,\ k_2) - k_2\ \hat{\phi}_1(k_1,\ k_2)\right) \end{array}\right.$$

<u>Démonstration</u> :

Soit $\hat{\phi} \in \hat{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot},\ \mathbb{R}^2)$, et $\vec{\phi} \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot},\ \Gamma)$ tel que $\hat{\phi} = \mathcal{F}\vec{\phi}$.
Bien entendu :

$$\hat{T}\ \hat{\phi} = T\ \vec{\phi}$$

Soit $\vec{u}$ la solution dans $\mathcal{H}(\vec{\mathrm{rot}},\ \mathbb{R}^3_+)$ de :

$$\left|\begin{array}{ll} \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}) & = 0 \\ \mathrm{div}\ \vec{u} & = 0 \\ \gamma_t\ \vec{u} & = \vec{\phi} \end{array}\right.$$

Des calculs analogues à ceux du théorème (2.8), ou du lemme 4.1 (ou encore un passage à la limite sur les expressions du lemme 4.1) permettent d'obtenir facilement :

$$\left|\begin{array}{l} \hat{u}_1(k_1,k_2,x_3) = \hat{\phi}_1(k_1,k_2)\ e^{-|k|x_3} \\ \hat{u}_2(k_1,k_2,x_3) = \hat{\phi}_2(k_1,k_2)\ e^{-|k|x_3} \\ \hat{u}_3(k_1,k_2,x_3) = \dfrac{ik_1\ \hat{\phi}_1 + ik_2\hat{\phi}_2}{|k|}\ e^{-|k|x_3} \end{array}\right.$$

puis,

$$\left|\begin{array}{l} (\vec{rot}\ \vec{u})_1 = \dfrac{-k_1}{|k|}(k_2\ \hat{\phi}_1 - k_1\ \hat{\phi}_2)\ e^{-|k|x_3} \\ (\vec{rot}\ \vec{u})_2 = \dfrac{-k_2}{|k|}(k_2\ \hat{\phi}_1 - k_1\ \hat{\phi}_2)\ e^{-|k|x_3} \\ (\vec{rot}\ \vec{u})_3 = (ik_2\ \hat{\phi}_1 - ik_1\ \hat{\phi}_2)\ e^{-|k|x_3} \end{array}\right.$$

D'autre part,

$$(T\vec{\phi})\ (x_1,x_2) = (\vec{rot}\ \vec{u} \wedge \vec{\nu}) \qquad \vec{\nu} = (0,0,-1)$$

et donc,

$$(\hat{T\phi})(k_1,k_2) = \left[-(\vec{rot}\ \vec{u})_2,\ (\vec{rot}\ \vec{u})_1\right]\ \left[k_1,\ k_2,\ 0\right]$$

ce qui conduit immédiatement à (4.11). □

Grâce au théorème 4.3, nous pouvons donner une expression de la forme bilinéaire b, valable pour des fonctions suffisamment régulières, et qui se prête à un calcul numérique. A cet effet, nous introduisons l'espace :

$$H_c(rot,\ \Gamma) = \{\ \vec{\phi} \in L^2(\Gamma)^2,\ rot\ \vec{\phi} \in L^2(\Gamma),\ supp\ \vec{\phi}\ compact\ \}$$

Nous avons alors le :

THEOREME 4.4

Pour $(\vec{\phi}, \vec{\psi}) \in H_c(\mathrm{rot}, \Gamma)^2$, $b(\vec{\phi}, \vec{\psi})$ a pour expression :

$$b(\vec{\phi},\vec{\psi}) = \frac{1}{2\Pi} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{1}{|x-x'|} \mathrm{rot}\, \vec{\phi}(x)\ \mathrm{rot}\, \vec{\psi}(x')\, dx\, dx' \tag{4.12}$$

Démonstration :

Nous supposerons tout d'abord $(\vec{\phi}, \vec{\psi}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)^2$. Notre point de départ sera (4.11). En effet, grâce au théorème de PIancherel, nous pouvons écrire :

$$b(\vec{\phi},\vec{\psi}) = \langle T\vec{\phi},\vec{\psi}\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} T\vec{\phi}\cdot\vec{\psi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{T}\, \hat{\phi}\cdot\overline{\hat{\psi}}\, dk$$

Et donc, par (4.12) :

$$\begin{aligned}(\vec{\phi}, \vec{\psi}) &= \int_{\mathbb{R}^2} -\frac{k_2}{|k|}(k_1\hat{\phi}_2-k_2\hat{\phi}_1)\,\hat{\psi}_1 + \frac{k_1}{|k|}(k_1\hat{\phi}_2-k_2\hat{\phi}_1)\,\hat{\psi}_2\, dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|k|}(k_1\hat{\phi}_2-k_2\hat{\phi}_1)\,\overline{(k_1\hat{\psi}_2-k_2\hat{\psi}_1)}\, dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|k|}(ik_1\hat{\phi}_2-ik_2\hat{\phi}_1)\,\overline{(ik_1\hat{\psi}_2-ik_2\hat{\psi}_1)}\, dk\end{aligned}$$

Dans l'égalité précédente, la dernière intégrale doit s'interpréter au sens suivant :

$\hat{\phi}(k)$ est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^2$. Donc, suivant SCHWARTZ [21], nous pouvons définir le produit de la distribution $\mathrm{Pf}\,\frac{1}{|k|}$ par $(ik_2\,\hat{\phi}_1 - ik_1\,\hat{\phi}_2)$, et nous avons de plus :

$$\langle \mathrm{Pf}\,\frac{1}{|k|}(ik_2\hat{\phi}_1-ik_1\,\hat{\phi}_2)\ ;\ ik_2\hat{\psi}_1-ik_1\hat{\psi}_2\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|k|}(ik_2\hat{\phi}_1-ik_1\hat{\phi}_2)\overline{(ik_2\hat{\psi}_1-ik_1\hat{\psi}_2)}$$

D'autre part, toujours d'après SCHWARTZ [21], nous savons que $\mathrm{Pf}\,\frac{1}{|k|}$ est la transformée de Fourier du noyau localement intégrable $\frac{1}{|x|}$.

Nous remarquons alors que :

$$ik_2\,\hat{\phi}_1 - ik_1\,\hat{\phi}_2 \in \mathcal{F}(\mathrm{rot}\,\vec{\phi})$$

et donc que :

$$\frac{1}{|k|}\,(ik_1\,\hat{\phi}_2 - ik_2\,\hat{\phi}_1) = \frac{1}{2\Pi}\,\mathcal{F}\left(\frac{1}{|x|} * \mathrm{rot}\,\vec{\phi}\right)$$

Par conséquent :

$$b(\vec{\phi},\,\vec{\psi}) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\Pi|x|} * \mathrm{rot}\,\vec{\phi}\right) \overline{\mathcal{F}(\mathrm{rot}\,\vec{\psi})}\,dk$$

et donc, par le théorème de Plancherel :

$$b(\vec{\phi},\,\vec{\psi}) = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2\Pi|x|} * \mathrm{rot}\,\vec{\phi}\right)(y)\,\mathrm{rot}\,\vec{\psi}(y)\,dy$$

Il suffit de revenir à la définition de la convolution et d'appliquer le théorème de Fubini pour obtenir (4.12).

Pour montrer que cette égalité s'étend à $H_c(\mathrm{rot},\,\Gamma)$, nous considérons a priori la forme bilinéaire $\tilde{b}(\vec{\phi},\,\vec{\psi})$ définie par :

$$\forall\,(\vec{\phi},\,\vec{\psi}) \in H_c(\mathrm{rot},\,\Gamma),\ \tilde{b}(\vec{\phi},\,\vec{\psi}) = \frac{1}{2\Pi}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma} \frac{1}{|x-x'|}\,\mathrm{rot}\,\vec{\phi}(x)\,\mathrm{rot}\,\vec{\psi}(x')\,dx\,dx'$$

Nous remarquons tout d'abord que $\tilde{b}$ est continue sur $H_c(\mathrm{rot},\,\Gamma)$. En effet, si K est un compact contenant $\mathrm{supp}\,\vec{\phi} \cup \mathrm{supp}\vec{\psi}$, nous avons :

$$\tilde{b}(\vec{\phi},\vec{\psi}) = \frac{1}{2\Pi}\int_K \mathrm{rot}\,\vec{\psi}(x')\left(\int_K \frac{1}{|x-x'|}\,\mathrm{rot}\,\vec{\phi}(x)\,dx\right)dx'$$

et, part l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\tilde{b}(\vec{\phi},\vec{\psi})| \leq \frac{1}{2\Pi}\left(\int_K |\mathrm{rot}\,\vec{\psi}(x')|^2\,dx'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_K\left(\int_K \frac{1}{|x-x'|}\,\mathrm{rot}\,\vec{\phi}(x)\,dx\right)^2 dx'\right)^{\frac{1}{2}}$$

Toujours par Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_K \frac{1}{|x-x'|}\,\mathrm{rot}\,\vec{\phi}(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_K \frac{1}{|x-x'|^2}\,dx\right)\left(\int_K |\mathrm{rot}\,\vec{\phi}(x)|^2\,dx\right)$$

Donc, en reportant :

$$|\tilde{b}(\vec{\phi},\vec{\psi})| \leq \frac{1}{2\Pi}\left(\int_K\int_K \frac{dx\,dx'}{|x-x'|^2}\right)|\mathrm{rot}\,\vec{\phi}|\ |\mathrm{rot}\,\vec{\psi}|$$

$$\leq C(K)\,\|\vec{\phi}\|_{H_c(\mathrm{rot},\Gamma)}\,\|\vec{\psi}\|_{H_c(\mathrm{rot},\Gamma)}$$

Nous considérons maintenant deux suites $(\vec{\phi}_n, \vec{\psi}_n) \in \mathcal{D}\ (\mathbb{R}^2)^2$, telles que :

$$\vec{\phi}_n \longrightarrow \vec{\phi} \qquad \text{dans } H_c(\text{rot}, \Gamma)$$

$$\vec{\psi}_n \longrightarrow \vec{\psi} \qquad \text{dans } H_c(\text{rot}, \Gamma)$$

$$\text{supp } \vec{\phi}_n \cup \text{supp } \vec{\psi}_n \subset K$$

D'une part, $\tilde{b}$ est continue sur $H_c(\text{rot}, \Gamma)^2$, donc

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{b}(\vec{\phi}_n, \vec{\psi}_n) = \tilde{b}(\vec{\phi}, \vec{\psi}) \tag{4.13}$$

D'autre part, b est également continue sur $H_c(\text{rot}, \Gamma)$ (puisque cet espace s'injecte continuement dans $H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma)$), donc :

$$\lim_{n\to\infty} b(\vec{\phi}_n, \vec{\psi}_n) = b(\vec{\phi}, \vec{\psi}) \tag{4.14}$$

Enfin, $\vec{\phi}_n$ et $\vec{\psi}_n$ sont dans $\mathcal{D}\ (\mathbb{R}^2)^2$, ou b et $\tilde{b}$ coïncident, c'est-à-dire :

$$b(\vec{\phi}_n, \vec{\psi}_n) = \tilde{b}(\vec{\phi}_n, \vec{\psi}_n)$$

Comparant (4.13) et (4.14), nous obtenons (4.12). □

Remarques :

- Le théorème précédent sert essentiellement au calcul effectif de $b(\vec{\phi}, \vec{\psi})$ en vue d'une résolution numérique. Nous utiliserons les éléments de classe $H(\vec{\text{rot}})$, développés par NEDELEC [16].
  Pour un maillage rectangulaire et dans le cas le plus simple, $\vec{\phi}$ et $\vec{\psi}$ seront les traces de fonctions affines :

  $$\vec{\phi}(x,y) = (\alpha+\beta y,\ \gamma+\delta x)$$

  et nous serons bien dans le cas $(\vec{\phi}, \vec{\psi}) \in H_c(\text{rot}, \Gamma)$.

- De la même manière que dans le cas bidimensionnel, T est un opérateur de convolution, non local.

□

Nous pouvons maintenant préciser le programme ébauché à la fin du chapitre 3.

Nous introduisons tout d'abord le problème dans le demi-espace :

$$(4.15)\quad \left|\begin{array}{ll} \text{Trouver : } \vec{u}^- \in C^0(0,T;H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_-)) \cap H^1(0,T;L^2(\mathbb{R}^3_-)) & \\ \sigma \dfrac{\partial \vec{u}^-}{\partial t} + \vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u}^-) = \vec{g}(t) & \text{dans } \mathbb{R}^3_- \times \mathbb{R}_+ \\ \vec{u}^-(x,y,z,0) = \vec{u}_0(x,y,z) & \\ \gamma_\tau^-(\vec{rot}\ \vec{u}^-) + T\ (\gamma_t\ \vec{u}^-) = \vec{\phi} & \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) \end{array}\right.$$

ou $\vec{g}$, $\vec{u}_0$ et $\vec{\phi}$ vérifient les hypothèses (3.14).

Ce problème a bien un sens puisque :

$$\vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u}^-) = \vec{g} - \sigma \frac{\partial \vec{u}^-}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}^3_-)$$

et donc $\gamma_\tau^-(\vec{rot}\ \vec{u}^-) \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$, qui est l'espace image de T. Nous avons le :

THEOREME 4.5

u est solution du problème dans tout l'espace (3.15), si et seulement si le couple $(\vec{u}^+, \vec{u}^-)$, défini par :

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{u}^+ = \vec{u}\,|\,\mathbb{R}^3_+ \\ \vec{u}^- = \vec{u}\,|\,\mathbb{R}^3_- \end{array}\right.$$

vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{u}^- \text{ est solution du problème dans le demi-espace (4.15)} \\ \vec{u}^+ = \tilde{R}(\gamma_t\ \vec{u}^-) \end{array}\right.$$

ou $\tilde{R}$ est le relèvement construit au théorème (4.1).

<u>Démonstration</u>

D'après le théorème (4.1) :

$$\begin{cases} \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}^{+}) = 0 \\ \gamma_t\ \vec{u}^{+} = \gamma_t\ \vec{u}^{-} \end{cases}$$

équivaut à $\vec{u}^{+} = \tilde{R}(\gamma_t\ \vec{u}^{-})$. Donc :

$$\gamma_\tau^{+} \circ \tilde{R}(\gamma_t\ \vec{u}^{-}) + \gamma_\tau^{-}(\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}^{-}) = \vec{\phi}$$

est équivalent à

$$\gamma_\tau^{+}(\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}^{+}) + \gamma_\tau^{-}(\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}^{-}) = \vec{\phi}$$

le résultat découle alors du théorème (3.1) et de la définition de T.

□

Pour conclure, il ne nous reste plus qu'à prouver l'existence et l'unicité de solutions à (4.15). C'est l'objet du chapitre 5.

V - EXISTENCE ET UNICITE DES SOLUTIONS DANS LE DEMI-ESPACE

Nous considérons donc le problème :

$$(5.1)\quad \begin{cases} \sigma \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u}) = \vec{f} & \text{dans } \mathbb{R}^3_- \times \mathbb{R}_+ \\ \gamma_\tau^-(\vec{rot}\ \vec{u}) + T(\gamma_t\ \vec{u}) = \vec{\phi} & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \\ \vec{u}(x,y,z,0) = \vec{u}_0(x,y,z) & \end{cases}$$

Nous allons d'abord prouver l'existence et l'unicité de solutions fortes en temps, c'est-à-dire de solutions de classe C^1 en temps, à valeur dans $L^2(\mathbb{R}^3_-)$. Pour cela, nous utilisons la méthode des semi-groupes (BREZIS [3]). Nous pourrons ensuite affaiblir les hypothèses sur les données, pour obtenir des solutions faibles.

Signalons que cette méthode ne pouvait pas être appliquée au problème dans tout l'espace.

V.1 - ETUDE D'UN OPERATEUR NON BORNE

Nous notons $\Omega = \mathbb{R}^3_-$, $H = L^2(\Omega)^3$ et considérons l'opérateur non borné A défini par :

$$(5.2)\quad \begin{cases} D(A) = \{ \vec{u} \in H(\vec{rot}, \Omega),\ \vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u}) \in L^2(\Omega)^3,\ \gamma_\tau^-(\vec{rot}\ \vec{u}) + T(\gamma_t\ \vec{u}) = 0 \} \\ A\ \vec{u} = \dfrac{1}{\sigma}\ \vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u}) \quad \text{pour } \vec{u} \in D(A) \end{cases}$$

La définition de D(A) a bien un sens puisque :

$$\vec{rot}\ \vec{u} \in H(\vec{rot}, \Omega) \Longrightarrow \gamma_\tau^-(\vec{rot}\ \vec{u}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}, \Gamma)$$

et T applique bien $H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$.

H sera muni du produit scalaire (hibertien, et équivalent au produit scalaire usuel, à cause de l'hypothèse sur σ).

$$(5.3) \qquad (\vec{u}, \vec{v})_\sigma = \int_\Omega \sigma\, \vec{u}\cdot\vec{v}$$

Pour appliquer le théorème de Hille Yosida, nous utiliserons le :

THEOREME 5.1

A est un opérateur maximal monotone dans H.

Démonstration

D'après BREZIS [3], nous devons vérifier les deux points suivants :

i) $\forall\, \vec{u} \in D(A),\ (A\,\vec{u}, \vec{u})_\sigma \geq 0$

ii) $\forall\, \vec{f} \in H,\ \exists\, \vec{u} \quad D(A),\ A\,\vec{u} + \vec{u} = \vec{f}$

La démonstration de ces deux points est basée sur le :

LEMME 5.1

Pour $(\vec{u}, \vec{v}) \in D(A) \times H(\vec{\text{rot}}, \Omega)$, nous avons

$$(5.4) \qquad (A\vec{u}, \vec{v})_\sigma = a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\gamma_t\, \vec{u}, \gamma_t\, \vec{v})$$

où b est la forme bilinéaire définie en (4.10) et a est la forme bilinéaire définie sur $H(\vec{\text{rot}}, \Omega)^2$ par :

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_\Omega \vec{\text{rot}}\, \vec{u}\cdot\vec{\text{rot}}\, \vec{v}$$

Démonstration (du lemme)

Nous avons la formule de Green :

$\forall \vec{u} \in D(A)$, $\forall \vec{v} \in H(\vec{rot}, \Omega)$:

$$(A\vec{u}, \vec{v})_\sigma = \int_{\mathbb{R}^3_-} \vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u})\cdot\vec{v} = \int_{\mathbb{R}^3_-} \vec{rot}\ \vec{u}\cdot\vec{rot}\ \vec{v} - \langle \gamma_\tau^-(\vec{rot}\ \vec{u}), \gamma_t\ \vec{v} \rangle$$

Si $\vec{u} \in D(A)$, $\gamma_\tau^-(\vec{rot}\ \vec{u}) = -T(\gamma_t\ \vec{u})$. On obtient (5.4)

□

<u>Suite de la démonstration du théorème 5.1</u> :

- Vérification de i)

Prenons $\vec{u} = \vec{v}$, dans le lemme 5.1 :

$$(A\ \vec{u}, \vec{u})_\sigma = a(\vec{u}, \vec{u}) + b(\gamma_t\ \vec{u}, \gamma_t\ \vec{u})$$

Le résultat découle de la positivité de a et b.

- Vérification de ii)

Pour $\vec{f} \in H$, considérons le problème :

$$(5.5) \qquad \left| \begin{array}{l} A\vec{u} + \vec{u} = \vec{f} \\ \vec{u} \in D(A) \end{array} \right.$$

qui est équivalent, d'après le lemme 5.1, au problème variationnel suivant :

$$\left| \begin{array}{l} a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\gamma_t\ \vec{u}, \gamma_t\ \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{v})_\sigma = (\vec{f}, \vec{v})_\sigma \in \quad \forall \vec{v} \quad H(\vec{rot}, \Omega) \\ \vec{u} \in D(A) \end{array} \right.$$

Tout d'abord, le théorème de Lax Milgram nous assure de l'existence et l'unicité de $\vec{u} \in H(\vec{rot}, \Omega)$, solution de :

$$(5.6) \qquad a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\gamma_t\vec{u}, \gamma_t\vec{v}) + (\vec{u}, \vec{v})_\sigma = (\vec{f}, \vec{v})_\sigma \qquad \forall \vec{v} \in H(\vec{rot}, \mathbb{R}^3_+)$$

Reste à prouver que $\vec{u} \in D(A)$, c'est-à-dire que :

- $\vec{rot}\ \vec{rot}\ \vec{u} \in H$
- $\gamma_\tau(\vec{rot}\ \vec{u}) + T(\gamma_t\ \vec{u}) = 0$

Nous obtiendrons ces résultats en réinterprétant (5.6). Pour cela nous prenons tout d'abord $\vec{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$, ce qui donne :

$$\vec{rot}\ \vec{rot}\ \vec{u} = \sigma(\vec{f} - \vec{u}) \in L^2(\mathbb{R}^3_+)$$

Nous multiplions ensuite scalairement l'identité :

$$\sigma\ \vec{u} + \vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{u}) = \sigma\ \vec{f}$$

par $\vec{v} \in H(\vec{rot}, \Omega)$. Grâce à la formule de Green (2.26), nous avons :

$$(\vec{u}, \vec{v})_\sigma + a(\vec{u}, \vec{v}) - \langle \gamma_\tau^-(\vec{rot}\ \vec{u}), \gamma_t\ \vec{v}\rangle = (\vec{f}, \vec{v})_\sigma \tag{5.7}$$

En comparant (5.6) et (5.7), il vient :

$$b(\gamma_t\vec{u}, \gamma_t\vec{v}) = -\langle \gamma_\tau^-(\vec{rot}\ \vec{u}), \gamma_t\ \vec{v}\ \rangle \qquad \forall\ \vec{v} \in H(\vec{rot}, \Omega)$$

Par définition de b nous avons :

$$\langle T(\gamma_t\ \vec{u}), \gamma_t\ \vec{v}\rangle = -\langle\gamma_\tau^-(\vec{rot}\ \vec{u}), \gamma_t\ \vec{v}\rangle \qquad \forall\ v \in H(\vec{rot}, \Omega)$$

et donc (grâce au corrollaire 4.2) :

$$T(\gamma_t\ \vec{u}) = -\gamma_\tau^-(\vec{rot}\ \vec{u}) \quad \text{dans} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma).$$

□

COROLLAIRE 5.1

L'opérateur A est autoadjoint, positif et injectif sur H.

Démonstration

A est visiblement symétrique. Etant maximal monotone, il est donc autoadjoint (voir BREZIS [3]). Nous avons prouvé, au cours de la démonstration du théorème 5.1, l'injectivité de A+I. A est donc injectif.

□

V.2 - EXISTENCE ET UNICITE DE SOLUTIONS FORTES

Afin de pouvoir prendre en compte les termes de source surfacique, nous devons construire un opérateur de relèvement. C'est l'objet du :

LEMME 5.2

Pour tout $\vec{\phi} \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}, \Gamma)$, le problème :

$$(5.8)\quad \begin{cases} \vec{v} + \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \gamma_\tau^-(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u}) + T(\gamma_t\,\vec{u}) = \vec{\phi} & \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div},\Gamma) \end{cases}$$

admet une solution unique dans $H(\vec{\mathrm{rot}}, \Omega)$, telle que $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u} \in L^2(\Omega)^3$.

L'opérateur L défini par $L\vec{\phi} = \vec{v}$ applique continuement $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}, \Gamma)$ dans $\{\vec{u} \in H(\vec{\mathrm{rot}}, \Omega),\ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u} \in L^2(\Omega)\} \underset{\mathrm{def}}{=} H(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}, \Omega)$

Démonstration :

Précisons que $H(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}, \Omega)$ est muni de la norme hilbertienne.

$$\|\vec{v}\|^2_{\vec{\mathrm{rot}}\vec{\mathrm{rot}}} = \|\vec{v}\|^2_{H(\vec{\mathrm{rot}},\Omega)} + \|\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

De façon usuelle, (5.8) est équivalent au problème variationnel :

$$(5.9)\quad \begin{cases} \text{Trouver } \vec{v} \in H(\vec{\mathrm{rot}}, \Omega) \text{ tel que} \\ \forall\, \vec{w} \in H(\vec{\mathrm{rot}}, \Omega) : a(\vec{v}, \vec{w}) + b(\gamma_t\vec{v}, \gamma_t\vec{w}) + (\vec{v}, \vec{w})_\sigma = \langle\vec{\phi}, \gamma_t\,\vec{w}\rangle \end{cases}$$

Bien entendu, l'existence et l'unicité de la solution de ce dernier problème est garantie par le théorème de Lax Milgram.

Pour vérifier la continuité, prenons dans (5.9), $\vec{w} = \vec{v}$. Il vient :

$$\|\vec{v}\|^2_{H(\vec{\mathrm{rot}},\Omega)} + b(\gamma_t\,\vec{v}, \gamma_t\,\vec{v}) \leq \|\vec{\phi}\|_{\mathrm{div},\Gamma}\ \|\gamma_t\,\vec{v}\|_{\mathrm{rot},\Gamma}$$
$$\leq C\,\|\vec{\phi}\|_{\mathrm{div},\Gamma}\ \|\vec{v}\|_{\vec{\mathrm{rot}},\,\Omega}$$

On déduit de la positivité de b l'inégalité :

$$\|\vec{v}\|_{H(\vec{rot},\ \Omega)} \leq C\ \|\vec{\phi}\|_{div,\Gamma}$$

Enfin, comme $\vec{rot}\ (\vec{rot}\ \vec{v}) = -\vec{v}$,

$$|\vec{rot}\ \vec{rot}\ \vec{v}| \leq C\ \|\vec{\phi}\|_{div,\Gamma}$$

ce qui établit la continuité de L. □

Nous avons donc maintenant tous les éléments pour établir le caractère bien posé de notre problème. Plus précisément.

THEOREME 5.2

Sous les hypothèses :

(5.10)
$$\begin{cases} \vec{u}_0 \in H(\vec{rot}\ \vec{rot},\ \Omega) \\ \vec{f} \in C^1(0,T;L^2(\Omega)) \\ \vec{\phi} \in C^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(div,\ \Gamma)) \end{cases}$$

et la condition de raccord

(5.11)
$$\gamma_\tau(\vec{rot}\ \vec{u}_0) + T(\gamma_t\ \vec{u}_0) = \vec{\phi}(0) \qquad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(div,\Gamma)$$

le problème (5.1) admet une solution forte et une seule, qui vérifie :

$$\vec{u} \in C^1(0,T;\ L^2(\Omega)^3) \cap C^0(0,T;H(\vec{rot}\ \vec{rot},\ \Omega))$$

En particulier

$$\vec{u} \in C^0(0,T;\ H(\vec{rot},\ \Omega))$$

Démonstration :

Nous considérons tout d'abord la fonction :

$$\vec{u}(t) = L\vec{\phi}(t) \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

L étant le relèvement défini au lemme précédent. $\vec{u}$ vérifie :

$$\vec{u}(t) \in C^2(0,T;\, H(\vec{rot}\ \vec{rot},\ \Omega)$$

Nous introduisons l'inconnue auxiliaire :

$$\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}$$

$\vec{u}$ est la solution de (5.10) si et seulement si $\vec{v}$ est solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \dfrac{1}{\sigma}\, \vec{rot}\ \vec{rot}\ \vec{v} = \dfrac{1}{\sigma}\, \vec{f} - \left(\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \dfrac{1}{\sigma}\, \vec{rot}\ \vec{rot}\ \vec{u}\right) = \vec{g} \\[2ex] \gamma_\tau(\vec{rot}\ \vec{v}) + T(\gamma_t\ \vec{v}) = 0 \\[2ex] \vec{v}(x,y,z,0) = \vec{u}_0(x,y,z) - \vec{u}(x,y,z,0) = \vec{v}_0(x,y,z). \end{cases}$$

Autrement dit, nous cherchons $\vec{v}$ solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{v}}{dt} + A\ \vec{v} = \vec{g} \\[2ex] \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

D'après le lemme 5.2, $\vec{g} \in C^1(0,T;H)$, et grâce à la condition de raccord (5.11) :

$$\gamma_\tau(\mathrm{rot}\ \vec{v}_0) + T(\gamma_t\ \vec{v}_0) = [\gamma_\tau(\vec{rot}\ \vec{u}_0) + T(\gamma_t\ \vec{u}_0)] - [\gamma_\tau(\vec{rot}\ \vec{u}(0)) + T(\gamma_t\ \vec{u}(0))]$$

$$= \vec{\phi}(0) - \vec{\phi}(0) = 0$$

Donc, puisque $\vec{u}_0 \in H(\vec{rot}\ \vec{rot},\ \Omega_+)$, $\vec{v}_0 \in D(A)$.

Le théorème 5.1 nous permet d'appliquer le théorème de Hille-Yosida, ce qui nous assure de l'existence d'une solution classique, et une seule, au problème (5.12) :

$$\vec{v} \in C^1(0,T;H) \cap C^0(0,T;\ D(A))$$

et donc le problème (5.1) admet une solution unique

$$\vec{u} = \vec{v} + L\vec{\phi} \in C^1(0,T;\ L^2(\Omega)^3) \cap C^0(0,T;\ H(\vec{rot}\ \vec{rot},\ \Omega))$$

□

V.3 - EXISTENCE ET UNICITE DE SOLUTIONS FAIBLES

Pour définir la notion de solution faible, nous écrivons la formulation variationnelle en espace de notre problème. Pour cela, nous supposerons seulement :

$$(5.13)\qquad \left|\begin{array}{l} \vec{u}_0 \in L^2(\Omega) \\ \vec{f} \in \mathcal{D}'(0,T;\ H(\vec{rot},\ \Omega)') \\ \vec{\phi} \in \mathcal{D}'(0,T;\ H^{-\frac{1}{2}}(div,\ \Gamma)) \end{array}\right.$$

Nous appellerons solution faible de (5.1) une fonction

$$(5.14)\qquad \vec{u} \in C^0(0,T;\ L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0,T;\ H(\vec{rot},\ \Omega))$$

et vérifiant, pour toute fonction $\vec{v} \in H(\vec{rot},\ \Omega)$:

$$(5.15)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\ (\vec{u}(t),\ \vec{v})_\sigma + a(\vec{u}(t),\ \vec{v}) + b(\gamma_t\ \vec{u}(t);\ \gamma_t\ \vec{v}) \\ \qquad\qquad\qquad = \langle f(t),\ \vec{v} \rangle + \langle \vec{\phi}(t),\ \gamma_t\ \vec{v} \rangle_\Gamma \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{array}\right.$$

Bien entendu, toute solution forte est solution faible.

Pour établir l'existence de solutions faibles, nous procéderons en deux temps : supposant d'abord les données régulières, nous établirons des estimations a priori sur la solution forte de (5.1). L'existence, pour des données moins régulières, d'une solution faible, s'en déduira par passage à la limite.

LEMME 5.3 :

Supposons que les données $(\vec{u}_0, \vec{f}, \vec{\phi})$ vérifient les hypothèses (5.10) et la condition de raccord (5.11).

Alors, la solution forte $\vec{u}$ donnée par le théorème (5.2) vérifie les estimations a priori :

$$\|\vec{u}\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq C_1 |\vec{u}_0|_\sigma + C_2 \{ \|\vec{f}\|_1 + \|\vec{\phi}\|_1 \} + C_3 \{ \|\vec{f}\|_2 + \|\vec{\phi}\|_2 \} \tag{5.16}$$

$$\|\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{u}\|_{L^2(0,T;H)} \leq C_4 |\vec{u}_0|_\sigma + C_5 \{ \|\vec{f}\|_1 + \|\vec{\phi}\|_1 \} + C_6 \{ \|\vec{f}\|_2 + \|\vec{\phi}\|_2 \} \tag{5.17}$$

où l'on a posé :

$$\|\vec{f}\|_p = \|\vec{f}\|_{L^p(0,T,H(\vec{\mathrm{rot}},\, \Omega)')} \qquad p = 1,\ 2,$$

$$\|\vec{\phi}\|_p = \|\vec{\phi}\|_{L^p(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div},\, \Gamma))} \qquad p = 1,\ 2.$$

et ou les constantes C_k ne dépendent que de σ_*.

Démonstration

Les calculs qui suivent sont justifiés par la régularité de $\vec{u}$.

Multiplions scalairement l'équation (5.1) par $\sigma\vec{u}$. Il vient, après intégration en espace :

$\forall\, t \geq 0,$ $$\left(\frac{du}{dt}, \vec{u} \right)_\sigma + (\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}, \vec{u}) = (\vec{f}, \vec{u})_\sigma$$

or,

$$(\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}, \vec{u}) = (\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}, \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}) - \langle \gamma_\tau(\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}), \gamma_t\ \vec{u} \rangle$$
$$= |\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}|_0^2 + b(\gamma_t\ \vec{u}, \gamma_t\ \vec{u}) - \langle \vec{\phi}, \gamma_t\ \vec{u} \rangle$$

Et donc, utilisant la propriété de σ :

$$\frac{1}{2}\, \sigma_* \frac{d}{dt} |\vec{u}|^2 + |\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}|_0^2 + b(\gamma_t \vec{u}, \gamma_t\ \vec{u}) \leq (\vec{f}, \vec{u}) + \langle \vec{\phi}, \gamma_t\ \vec{u} \rangle$$

Intégrant en temps il vient, par la continuité des traces :

$$\frac{1}{2}\sigma_* \frac{d}{dt}|\vec{u}|^2 + \int_0^t |\vec{rot}\, u(s)|^2\, ds + \int_0^t b(\gamma_t\, \vec{u}(s), \gamma_t\, \vec{u}(s))\, ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\sigma_* |\vec{u}_0|^2 + \int_0^t \|\vec{f}\|_{H(\vec{rot},\Omega)'} \|\vec{u}\|_{H(\vec{rot},\Omega)} ds + \int_0^t \|\vec{\phi}\|_{div,\Gamma} \|\vec{u}\|_{H(\vec{rot},\Omega)} ds$$

Nous posons alors :

$$\forall\, s \in [0,T] : \quad m(s) = \|\vec{f}(s)\|_{H(\vec{rot},\Omega)'} + \|\vec{\phi}(s)\|_{div,\,\Gamma}$$

Nous majorons $\int_0^t m(s)\, |\vec{rot}\, \vec{u}(s)|_0\, ds$ par :

$$\frac{1}{2}\int_0^t m(s)^2\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t |\vec{rot}\, \vec{u}(s)|^2\, ds$$

et tenons compte de la positivité de b. Il vient :

$$\frac{1}{2}\sigma_* |\vec{u}(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t |\vec{rot}\, \vec{u}(s)|^2\, ds \leq \frac{1}{2}\sigma_* |\vec{u}_0|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t m(s)^2\, ds + \int_0^t m(s)\, |\vec{u}(s)|\, ds$$

Nous utilisons alors une version généralisée du lemme de Gronwall, démontrée dans GOLDMAN [10].

LEMME 5.4

Soit F une fonction continue positive sur [0,T], m une fonction positive de $L^1(0,T)$, C une constante strictement positive, α un réel, $0<\alpha<1$.

On suppose :

$$\forall\, t \in [0,T] \quad F(t) \leq C + \int_0^t m(s)\, F(s)^\alpha\, ds$$

Alors

$$F(t) \leq \left[C^{1-\alpha} + (1-\alpha)\int_0^t m(s)\, ds\right]^{1/1-\alpha} \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

Nous obtenons alors :

$$|\vec{u}(t)|_0^2 \leq \frac{1}{\sqrt{\sigma_*}}\left[\, |\vec{u}_0|_\sigma^2 + \int_0^T |m(s)|^2\, ds\,\right]^2 + \frac{1}{\sigma_*}\int_0^T |m(s)|\, ds\Big]$$

C'est l'estimation (5.16). Nous en déduisons :

$$\int_0^T |\vec{rot}\ \vec{u}(s)|^2 ds \leq |\vec{u}_0|_\sigma^2 + \frac{1}{2}\int_0^T |m(s)|^2 ds + \|\vec{u}\|_{L^\infty(0,T;H)} \int_0^T |m(s)|\, ds$$

qui mène facilement à l'estimation (5.17). □

Ces estimations nous conduisent à l'existence d'une solution faible. C'est le :

THEOREME 5.3

Sous les hypothèses :

(5.18)
$$\begin{cases} \vec{u}_0 \in L^2(\Omega)^3 \\ \vec{f} \in L^2(0,T;\ H(\vec{rot},\ \Omega)') \\ \vec{\phi} \in L^2(0,T;\ H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div},\ \Gamma)) \end{cases}$$

le problème (5.15) admet une solution faible et une seule :

$$\vec{u} \in C^0(0,T;L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0,T;\ H(\vec{rot},\ \Omega))$$

Cette solution vérifie les estimations (5.16) et (5.17).

Démonstration

A étant maximal monotone, D(A) est dense dans H (BREZIS [3]). On peut donc trouver une suite $\vec{u}_0^n \in D(A)$, vérifiant :

$$\vec{u}_0^n \longrightarrow \vec{u}_0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega)^3$$

De même, il existe

$$\vec{f}_n \in C^1(0,T;\ L^2(\Omega)^3)$$

tel que

$$\vec{f}_n \longrightarrow \vec{f} \qquad \text{dans } L^2(0,T;\ H(\vec{rot},\ \Omega)').$$

Enfin, il existe une suite $\vec{\phi}_n$:

$$\left| \begin{array}{l} \vec{\phi}_n \in C^2(0,T;\ H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div},\ \Gamma)) \\ \vec{\phi}_n(0) = 0 \end{array} \right.$$

telle que :

$$\vec{\phi}_n \longrightarrow \vec{\phi} \qquad \text{dans } L^2(0,T;\ H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div},\ \Gamma))$$

Les fonctions $(\vec{u}_0^n,\ \vec{f}_n,\ \vec{\phi}_n)$ vérifient les hypothèses du théorème 5.2, avec une condition de raccord homogène :

$$\gamma_\tau(\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_0^n) + T(\gamma_t\ \vec{u}_0^n) = 0 = \vec{\phi}_n(0)$$

Le problème (5.1) avec ces données admet donc une solution forte unique, notée $\vec{u}_n$.

Utilisant la linéarité de l'équation, il est facile de vérifier, grâce aux estimations (5.16) et (5.17), que $\vec{u}_n$ est une suite de Cauchy dans $C^0(0,T;L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0,T;H(\vec{\mathrm{rot}},\Omega))$.

Il existe donc un élément $\vec{u} \in C^0(0,T;L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0,T;H(\vec{\mathrm{rot}},\ \Omega))$, tel que :

$$\lim \vec{u}_n = \vec{u}$$

$\vec{u}_n$ étant, en particulier, solution faible de (5.1), vérifie donc (5.15). Nous pouvons passer à la limite dans (5.15), ce qui prouve que $\vec{u}$ est solution faible de (5.1) pour les données $(\vec{u}_0,\ \vec{f},\ \vec{\phi})$.

L'unicité est une conséquence immédiate des estimations a priori (5.16) et (5.17), et de la linéarité.

□

Il n'est pas inutile d'insister sur l'importance du théorème 5.3. D'une part, ses hypothèses correspondent à une situation physique plus raisonnable qu'au théorème 5.2. D'autre part, et c'est là le point important, la formulation variationnelle (5.15) sera le point de départ d'une étude numérique, utilisant une approximation spatiale par éléments finis.

Remarque On peut également établir un résultat d'existence, et d'unicité, sous les hypotèses :

$$\left|\begin{array}{l} \vec{u}_0 \in L^2(\Omega)^3 \\ \vec{f} \in L^1(0,T;L^2(\Omega)^3) \\ \vec{\phi} = 0 \end{array}\right.$$

On a alors l'estimation :

$$\left|\begin{array}{ll} \|\vec{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} & \leq C\,(\|\vec{u}_0\|_\sigma + \|\vec{f}\|_1) \\ \|\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} & \leq C\,(\|\vec{u}_0\|_\sigma + \|\vec{f}\|_1) \end{array}\right.$$

□

Pour conclure cette partie, donnons un résultat de régularité :

THEOREME 5.4

Sous les hypothèses du théorème 5.3, on suppose de plus que :

(5.19)
$$\left|\begin{array}{l} \vec{u}_0 \in H(\vec{\mathrm{rot}},\Omega) \\ \vec{f} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^3) \\ \vec{\phi} \in W^{1,1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div},\Gamma)) \end{array}\right.$$

alors la solution faible $\vec{u}$ de (5.1) vérifie :

(5.20)
$$\left|\begin{array}{l} \vec{u} \in C^0(0,T;H(\vec{\mathrm{rot}},\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)^3) \\ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^3) \end{array}\right.$$

$\vec{u}$ vérifie également les estimations suivantes, (où les constantes ne dépendent que de σ et T) :

(5.21)
$$\|\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq C_1\|\vec{u}_0\|_{H(\vec{\mathrm{rot}},\Omega)} + C_2\,(\|\vec{f}\|_1 + \|\vec{\phi}\|_1) + C_3\,(\|\vec{f}\|_2 + \|\vec{\phi}\|_2) + C_4\,\|\frac{d\vec{\phi}}{dt}\|_1$$

(5.22) $$\|\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3))} \leq C_5 \|\vec{u}_0\|_{H(\vec{rot},\Omega)} + C_6(\|\vec{f}\|_1 + \|\vec{\phi}\|_1) + C_7 (\|\vec{f}\|_2 + \|\vec{\phi}\|_2) + C_8 \|\frac{d\vec{\phi}}{dt}\|_1$$

(5.23) $$\|\vec{rot}\,\vec{rot}\,\vec{u}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega)^3)} \leq C_9\|\vec{u}_0\|_{H(\vec{rot},\Omega)} + C_{10}(\|\vec{f}\|_1 + \|\vec{\phi}\|_1) + C_{11}(\|\vec{f}\|_2 + \|\vec{\phi}\|_2) + C_{12}\|\frac{d\vec{\phi}}{dt}\|_1$$

<u>Démonstration</u>

Nous nous contenterons d'établir les estimations a priori (5.21) à (5.23) lorsque les données $(\vec{u}_0, \vec{f}, \vec{\phi})$ vérifient les hypothèses du théorème 5.2. Il est facile de conclure par densité, de la même façon qu'au théorème 5.3.

Nous multiplions l'équation par $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$, et intégrons en espace :

$$\int_\Omega \sigma\,|\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}|^2 + \int_\Omega \vec{rot}\,\vec{rot}\,\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \int_\Omega \vec{f}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$$

Par la formule de Green :

$$\int_\Omega \vec{rot}\,\vec{rot}\,\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = a(\vec{u}, \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}) - \langle\gamma_\tau(\vec{rot}\,\vec{u}), \gamma_t\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\rangle$$

Mais,

$$\gamma_\tau(\vec{rot}\,\vec{u}) = \vec{\phi} - T(\gamma_t\,\vec{u}).$$

D'où nous tirons :

$$\int_\Omega \vec{rot}\,\vec{rot}\,\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,a(\vec{u}, \vec{u}) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,b(\gamma_t\,\vec{u}, \gamma_t\,\vec{u}) - \langle\vec{\phi}, \gamma_t\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\rangle.$$

Nous avons donc :

$$|\frac{d\vec{u}}{dt}|_\sigma^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,[a(\vec{u}(t); \vec{u}(t)) + b(\gamma_t\,\vec{u}(t); \gamma_t\vec{u}(t))] = (\rho(t), \frac{d\vec{u}}{dt}) + \langle\vec{\phi}(t), \frac{d}{dt}\,\gamma_t\vec{u}\rangle$$

Nous intégrons en temps cette égalité, entre 0 et t. Une intégration par partie sur le dernier terme donne :

$$\int_0^t \langle\vec{\phi}(s), \frac{d}{dt}\,\gamma_t\vec{u}(s)\rangle\,ds = \langle\vec{\phi}(t), \gamma_t\vec{u}(t)\rangle - \langle\vec{\phi}(0), \gamma_t\,\vec{u}_0\rangle - \int_0^t \langle\frac{d\vec{\phi}}{dt}, \gamma_t\,\vec{u}(s)\rangle\,ds$$

Utilisant ensuite l'hypothèses sur σ, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\left[a(\vec{u}(t),\vec{u}(t)) + b(\gamma_t\,\vec{u}(t);\gamma_t\,\vec{u}(t))\right] + \sigma_* \int_0^t \left|\frac{d\vec{u}}{dt}(s)\right|^2 ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[a(\vec{u}_0,\vec{u}_0) + b(\gamma_t\,\vec{u}_0,\gamma_t\,\vec{u}_0)\right] +$$

$$\|\vec{\phi}_0\|_{div,\Gamma}\,\|\gamma_t\,\vec{u}_0\|_{rot,\Gamma} + \|\vec{\phi}(t)\|_{div,\Gamma}\,\|\gamma_t\,\vec{u}(t)\|_{rot,\Gamma}$$

$$+\int_0^t |\vec{f}(s)|_{L^2(\Omega)^3}\,\left|\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{L^2(\Omega)^3} ds + \int_0^t \left\|\frac{d\vec{\phi}}{dt}\right\|_{div,\Gamma}\|\gamma_t\,\vec{u}(s)\|_{rot,\Gamma}\,ds$$

Nous majorons les termes du second membre grâce au théorème de traces :

$$\int_0^t \left\|\frac{d\vec{\phi}}{dt}\right\|_{div,\Gamma}\|\gamma_t\,\vec{u}\|_{rot,\Gamma}\,ds \leq \int_0^t \left\|\frac{d\vec{\phi}}{dt}\right\|_{div,\Gamma}(|\vec{u}| + |\vec{rot}\,\vec{u}|)\,ds \leq$$

$$\leq \|\vec{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)}\left\|\frac{d\vec{\phi}}{dt}\right\|_1 + \int_0^t \left\|\frac{d\vec{\phi}}{dt}\right\|_{div,\Gamma}(|\vec{u}| + |\vec{rot}\,\vec{u}(s)|\,ds\,)$$

De même, avec l'inégalité de Young :

$$\int_0^t |\vec{f}(s)|\;\left|\frac{d\vec{u}}{dt}(s)\right|\,ds \leq \frac{\sigma_*}{2}\int_0^t \left|\frac{d\vec{u}}{dt}\right|^2 ds + \frac{1}{2\sigma^*}\int_0^t |\vec{f}(s)|^2\,ds$$

$$\|\gamma_t\,\vec{u}(t)\|_{rot,\Gamma} \leq |\vec{u}(t)| + |\vec{rot}\,\vec{u}(t)| \leq \|\vec{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)} + |\vec{rot}\,\vec{u}|$$

En reportant, nous aboutissons à l'inégalité :

$$\frac{1}{2}|\vec{rot}\,\vec{u}(t)|^2 + \frac{\sigma_*}{2}\int_0^t \left|\frac{d\vec{u}}{dt}\right|^2 \leq \frac{1}{2}|\vec{rot}\,\vec{u}_0|^2 + \frac{1}{2}\,b(\gamma_t\vec{u}_0,\gamma_t\vec{u}) + \|\vec{\phi}(0)\|_{div,\Gamma}\|\gamma_t\vec{u}_0\|_{rot,\Gamma} +$$

$$+\|\vec{\phi}(t)\|_{div,\Gamma}\,|\vec{rot}\,\vec{u}| + \left[\|\vec{\phi}(t)\|_{div,\Gamma} + \left\|\frac{d\vec{\phi}}{dt}\right\|_1\right]\|\vec{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} +$$

$$+\int_0^t \left\|\frac{d\vec{\phi}}{dt}(s)\right\|_{div,\Gamma}|\vec{rot}\,\vec{u}(s)|\,ds + \frac{1}{2\sigma_*}\int_0^t |\vec{f}(s)|^2 ds.$$

Nous pouvons alors majorer $\|\vec{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)}$ par (5.16), ainsi que

$\|\vec{\phi}(0)\|_{div,\Gamma}$ et $\|\vec{\phi}(t)\|_{div,\Gamma}$ par $C\,\|\vec{\phi}\|_{W^{1,1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(div,\Gamma))}$.

Le lemme de Gronwall généralisée (lemme 5.4) nous conduit alors à l'estimation (5.21). En reportant nous obtenons (5.22). Enfin, pour l'inégalité (5.23), nous écrivons :

$$\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u} = \vec{f} - \sigma \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \in L^2$$

(5.23) découle alors de (5.22). □

Remarque : Le théorème (5.4) est précisément le "bon" résultat qui nous permet de conclure notre programme. Sous les hypothèses (5.18) et (5.19) (malheureusement plus fortes que (3.14)) nous appliquons le théorème (4.15) à la solution $\vec{u}$ (5.1). Nous avons alors une solution du problème initial (3.7).

VI - CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons décrit et analysé une formulation des Equations de Maxwell en dimension 3, adaptée aux modèles issus de la prospection pétrolière.

L'aspect essentiel de cette étude consiste à utiliser la solution (connue analytiquement) des équations dans l'air pour réduire le problème au seul demi-espace conducteur.

Du point de vue théorique, une question est restée en suspens : l'existence d'une solution au problème dans tout l'espace, sous les hypothèses les plus générales.

Par contre, grâce aux théorèmes 5.3 (existence de solution faibles) et (4.4) (expression calculable du couplage à l'interface), nous avons réuni tous les ingrédients préalables à une résolution numérique.

Nous décrirons un schéma de discrétisation tridimensionnel dans un prochain rapport, mais sa mise en œuvre effective n'est pas envisagée dans l'immédiat pour des raisons de coût. Nous avons donc étudié des modèles dont la géométrie particulière permet des simplifications. Ce sont, par ordre de complexité :

- un milieu possédant une symétrie de révolution autour d'un axe vertical, la source étant une boucle de courant autour de cet axe. Grâce aux symétries on montre que le champ électrique se réduit à sa composante orthoradiale, qui ne dépend plus que des variables r et z. Le problème devient bidimensionnel. Sa formulation variationnelle s'obtient aisément à partir de celle que nous avons présentée. Par contre, avec un choix judicieux des espaces d'approximation, la résolution numérique reste celle utilisée pour le modèle 2D.

- un cas plus intéressant est celui d'un milieu infini et homogène dans une direction, mais excité par une source quelconque. Le problème est vraiment tridimensionnel, mais on peut tirer parti de la propriété d'invariance en effectuant une transformation de Fourier dans cette direction. Pour chaque valeur du nombre d'onde, nous devons résourdre un problème vectoriel ne dépendant que de deux variables d'espace. Ici encore, la formulation

variationnelle est une conséquence de l'étude générale. La résolution numérique est plus délicate : les composantes transverses du champ sont discontinues. Nous utilisons donc des espaces de discrétisation adaptés. La taille importante du problème numérique rend nécessaire l'utilisation de méthodes performantes pour la résolution des grands systèmes linéaires.

Enfin, nous souhaitons également apporter une réponser à certaines questions, d'ordre mathématique, qui n'ont pas été abordées dans ce rapport.

- étudier la continuité de la solution vis-à-vis de la distribution de conductivité. Il s'agit là d'un premier pas en direction du problème inverse.

- définir une notion d'énergie pour les systèmes étudiés, et en particulier évaluer quelle partie de l'énergie "passe dans l'air".

- justifier l'approximation quasistatique présentée au chapitre 1. Si possible quantifier l'erreur commise en fonction du paramètre ε.

- étudier la formulation du problème en terme du champ magnétique. L'avantage d'une telle formulation est que ce champ est toujours à divergence nulle, donc régulier.

Tous ces travaux feront l'objet de rapports ultérieurs.

****

VII - REFERENCES

[1] BAMBERGER A.,
"Approximation de la diffraction d'ondes élastiques. Une nouvelle approche". (I), (II), (III).
Rapports internes de l'Ecole Polytechnique n°91, 96, 98. (1983).

[2] BENDALI A.,
"Problèmes aux limites extérieur et intérieur pour le système de Maxwell en régime harmonique".
Rapport interne de l'Ecole Polytechnique n°50 (1980).

[3] BREZIS H.,
"Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications".
Masson (1983).

[4] COGGON J.H.,
"Electromagnetic and electrical modelling by the finite element method".
Geophysics, Vol. 44, (1971).

[5] DAUTRAY R., LIONS J.L.,
"Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques".
Masson (1984).

[6] DUCUING J., LAVAL G.,
"Matière et Rayonnement".
Cours de Physique, Ecole Polytechnique (1981).

[7] DUVAUT G., LIONS J.L.,
"Les Inéquations en Mécanique et en Physique".
Dunod (1972).

[8] GIRAULT V., RAVIART. P.A.,
"Finite Elements Approximations of the Navier-Stokes Equations".
Lecture Notes in Mathematics n°749, Springer Verlag (1979).

[9] GIROIRE J.,
"Formulation variationnelle par équations intégrales de problèmes aux limites extérieurs".
Rapport interne de l'Ecole Polytechnique n°6 (1976).

[10] GOLDMAN Y.,
"Etude mathématique et numérique d'un modèle de propagation du champ électrique dans une expérience de prospection géophysique".
Thèse de 3ème cycle. Université Paris IX (1985).

[11] GOLDMAN M., STOYER C.,
"Finite difference calculations of the transient field of an axially symmetric earth for vertical magnetic dipole exitation".
Geophysics Vol. 48 (1983).

[12] HOMMANN G.,
"Three dimensionnal induced polarization and electromagnetic modeling".
Geophysics, Vol. 35 (1975).

[13] JOHNSHON C., NEDELEC J.C.,
"On the coupling of boundary integral and finite element methods".
Math. Comp. 35 n°152, (1980).

[14] LEE K., PRIDMORE D., MORRISON H.,
"A hybrid three dimensionnal electromagnetic modeling scheme".
Geophysics Vol. 46 (1981).

[15] LEE K., MORRISSON H.,
"A numerical solution for the electromagnetic scattering by a two dimensional inhomogeneity".
Geophysics Vol. 50 (1985).

[16] NEDELEC J.C.
"Mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$".
Numer. Math. 35 (1980).

[17] ORISTAGLIO M., HOHMANN G.,
"Diffusion of an electromagnetic field in a 2D earth. A finite difference approach".
Geophysics Vol. 49 (1984).

[18] PAQUET L.,
"Problèmes mixtes pour le système de Maxwell".
Annales Faculté des Sciences, Toulouse, IV (1982).

[19] PRIDMORE D., HOHMANN G., WARDS S., SILL W.,
"An investigation of finite element modeling for electrical and electromagnetic data in 3 dimensions".
Geophysics Vol. 46 (1981).

[20] SAN FILIPPO W., HOHMANN G.,
"Integral Equation Solution for the Transient Electromagnetic response of a three-dimensionnal body in a conductive half space".
Geophysics Vol. 50 (1985).

[21] SCHWARTZ L.,
"Théorie des Distributions".
Herrmann (1966).

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique