



**HAL**  
open science

## Les elements de poutre en elasticite lineaire de la bibliotheque MODULEF

Catherine Compe, Paul-Louis George, Bernard Rousselet, Marina Vidrascu

► **To cite this version:**

Catherine Compe, Paul-Louis George, Bernard Rousselet, Marina Vidrascu. Les elements de poutre en elasticite lineaire de la bibliotheque MODULEF. [Rapport de recherche] RR-0562, INRIA. 1986. inria-00075992

**HAL Id: inria-00075992**

**<https://inria.hal.science/inria-00075992>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. (1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

N° 562

### **LES ÉLÉMENTS DE POUTRE EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE DE LA BIBLIOTHÈQUE MODULEF**

Catherine COMPE  
Paul-Louis GEORGE  
Bernard ROUSSELET  
Marina VIDRASCU

Septembre 1986

LES ELEMENTS DE POUTRE EN ELASTICITE LINEAIRE  
DE LA BIBLIOTHEQUE MODULEF

THE LINEAR ELASTIC BEAM ELEMENTS  
OF THE MODULEF LIBRARY

Catherine COMPE  
Paul-Louis GEORGE  
Bernard ROUSSELET  
Marina VIDRASCU

Septembre 1986

## LES ELEMENTS DE POUTRE EN ELASTICITE LINEAIRE DE MODULEEF

### Résumé

Ce document décrit les éléments de poutre de la bibliothèque MODULEEF, régis par les hypothèses de l'élasticité linéaire (déplacements infinitésimaux...)

Ces éléments au nombre de 4, se présentent comme suit :

- 2 éléments de barre, assimilables à des poutres dans le plan et l'espace, soumises à des efforts de traction-compression.

- 2 éléments de poutre :

- poutre dans le plan soumise à une charge de flexion et de traction-compression.

- poutre dans l'espace chargée en torsion, traction-compression, flexions dans les deux plans principaux de ses sections.

Ce document donne une description technique de chaque élément et quelques exemples d'utilisation.

### Abstract

This document describes the beam elements of the MODULEEF library, for the hypotheses of linear elasticity (infinitesimal displacements...)

Those elements, to the number of 4, present themselves as :

- 2 "truss" elements : beams only subjected to tractive or compressive forces, in a plane or in space.

- 2 "beam" elements :

- beam subjected to traction, compression or flexion in a plane.

- beam subjected to traction, compression, flexion or torsion in space.

This document gives a technical description of each element and some examples of utilisation.

# PLAN

1. Modélisation des énergies pour les quatre problèmes types.	
1.1. Remarque.	<i>page 1</i>
1.2. La traction-compression.	<i>page 1</i>
1.3. La torsion.	<i>page 2</i>
1.4. La flexion $xy$ .	<i>page 2</i>
1.5. La flexion $xoz$ .	<i>page 3</i>
2. Passage aux formulations variationnelles.	
2.1. Cas statique.	<i>page 4</i>
2.2. Cas dynamique.	<i>page 5</i>
3. Les éléments finis utilisés.	
3.1. Interpolation P1-LAGRANGE.	<i>page 6</i>
3.2. Interpolation P3-HERMITE.	<i>page 6</i>
4. L'élément SEGM 2BAR: Poutre plane en traction-compression.	
4.1. Le problème.	<i>page 7</i>
4.2. Passage aux quantités élémentaires.	<i>page 7</i>
4.3. Exemple d'utilisation.	<i>page 9</i>
5. L'élément SEGM 3BAR: Poutre dans l'espace en traction-compression.	
5.1. Le problème.	<i>page 13</i>
5.2. Passage aux quantités élémentaires.	<i>page 13</i>
5.3. Exemple d'utilisation.	<i>page 13</i>
6. L'élément SEGM 2POR: Poutre plane en traction-compression, flexion.	
6.1. Le problème.	<i>page 16</i>
6.2. Passage aux quantités élémentaires.	<i>page 17</i>
6.3. Exemple d'utilisation.	<i>page 18</i>
7. L'élément SEGM 3POR: Poutre dans l'espace en traction-compression, flexion, torsion.	
7.1. Le problème.	<i>page 21</i>
7.2. Passage aux quantités élémentaires.	<i>page 23</i>
7.3. Exemple d'utilisation.	<i>page 25</i>
8. Fiches techniques.	<i>Annexe</i>

Bibliographie

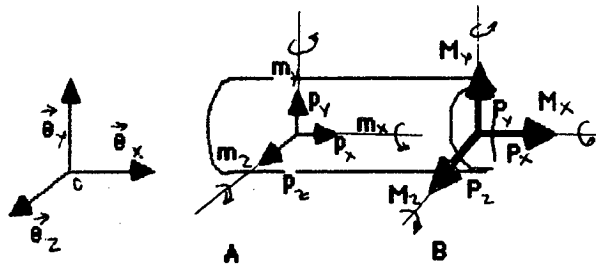
## 1. MODELISATION DES ENERGIES DES QUATRE PROBLEMES TYPES.

Ce paragraphe ne fait que rappeler les résultats du rapport de recherche *Formulation variationnelle, Approximation et Implémentation des problèmes de barre et poutres bi- et tri-dimensionnelles*, (M. BERNADOU) concernant les poutres en élasticité linéaire sans cisaillement.

### 1.1. Remarque.

Dans l'exposé qui suit l'espace euclidien est rapporté à un repère orthonormé fixe  $(0, e_x, e_y, e_z)$ , le repère naturel.

L'axe  $(0, e_x)$  coïncide avec la ligne moyenne de la poutre, les plans  $(0, e_x, e_y)$  et  $(0, e_x, e_z)$  contiennent les axes principaux d'inerties des sections orthogonales à la ligne moyenne.



Les champs de déformations sont constants sur chaque section.

Les déplacements, constants sur les sections orthogonales sont notés  $u = (u_x, u_y, u_z)$ ; les angles de rotations des sections sont notés  $\theta = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ .

Les efforts distribués sur la ligne moyenne sont notés  $p = (p_x, p_y, p_z)$ , de même les moments distribués sont notés  $m = (m_x, m_y, m_z)$ .

Les efforts et moments appliqués à l'extrémité B sont notés  $P_B = (P_x, P_y, P_z)$  et  $M_B = (M_x, M_y, M_z)$ .

### 1.2. La traction-compression.

Les efforts sont du type  $p_x e_x$  distribué sur la ligne moyenne et  $P_x e_x$  appliqué à l'extrémité B. Le tenseur des contraintes se réduit au seul terme non nul  $\sigma_{xx}$ . La loi de comportement est donnée par  $\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$  (E: module de Young) avec  $\epsilon_{xx} = du_x/dx$ .

L'énergie potentielle :  $J_1(u_x) = \int_{AB} 1/2 * S * E * (du_x/dx)^2 dx - \int_{AB} p_x u_x dx - P_x(B) u_x(B)$

L'énergie cinétique :  $Jc_1(u_x) = \int_{AB} 1/2 * s * \rho * (du_x/dt)^2 dx$

L'effort normal :  $N(x) = \iint_S \sigma_{xx} dydz = S * E * du_x/dx$

avec E : Module de Young , S : Section ,  $\rho$  : masse volumique.

### 1.3. La torsion.

La distribution de charges se réduit à un moment distribué sur la ligne moyenne :  $m_x \vec{e}_x$  et un moment appliqué à l'extrémité B :  $M_x(B) \vec{e}_x$ .

L'énergie potentielle :  $J_2(\theta_x) = \int_{AB} 1/2 * G * (d\theta_x/dx)^2 dx - \int_{AB} m_x \theta_x dx - M_x(B) \theta_x(B)$

L'énergie cinétique :  $Jc_2(\theta_x) = \int_{AB} 1/2 * I * \rho * (d\theta_x/dt)^2 dx$

Le moment de torsion :  $M(x) = G * d\theta_x/dx$

avec G : Rigidité à la torsion,  $\rho$  : masse volumique, I : Moment d'inertie par rapport au centre de gravité des sections.

### 1.4. La flexion dans le plan $(o, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .

Les résultantes des efforts appliquées sont du type :

- $p_y \vec{e}_y$  ,  $m_z \vec{e}_z$  effort et moment distribués sur la ligne moyenne.
- $P_y(B)$  ,  $M_z(B)$  effort et moment appliqués à l'extrémité B.

Le terme non nul du tenseur des contraintes est  $\sigma_{xx}$ . La loi de comportement est donnée par :  $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$ . L'ensemble des efforts provoque une déformation de la poutre dans le plan  $(o, e_x, e_y)$  définie par un champ déplacement  $u_y$  des particules de la ligne moyenne et une rotation  $\theta_z$  des sections orthogonales à la ligne moyenne.

$\varepsilon_{xx}$  est approximé par  $-y d^2 u_y / dx^2$  ,  $\theta_z$  par  $du_y / dx$ .

L'énergie potentielle :  $J_3(u_y) = \int_{AB} 1/2 E I_z (d^2 u_y / dx^2)^2 dx - \int_{AB} m_z du_y / dx dx$   
 $- M_z(B) (du_y / dx)_B - \int_{AB} P_y u_y dx - P_y(B) u_y(B)$

L'énergie cinétique :  $Jc_3(u_y) = \int_{AB} 1/2 *s*p*(du_y/dt)^2 dx$

Le moment de Flexion:  $M_y(x) = \iint_S -\sigma_{xx} y dydz = E I_z (d^2 u_y / dx^2)$

Avec E : Moment de flexion, p : masse volumique, I<sub>z</sub> : Inertie principale sur z,

S: Section.

L'énergie cinétique de rotation est négligée.

### 1.5. La flexion dans le plan (o, $\vec{e}_x, \vec{e}_z$ ).

Les résultantes des efforts appliqués sont du type :

- $P_z e_z, m_y e_y$  effort et moment distribués sur la ligne moyenne.
- $P_z(B), M_y(B)$  effort et moment appliqués à l'extrémité B.

Le terme non nul du tenseur des contraintes est  $\sigma_{xx}$ . La loi de comportement est

donnée par :  $\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$ . L'ensemble des efforts provoque une déformation de la poutre dans le plan (o,  $e_x, e_z$ ) définie par un champ déplacement  $u_z$  des particules de la ligne moyenne et une rotation  $\theta_y$  des sections orthogonales à la ligne moyenne.  $\epsilon_{xx}$  est approximé par  $-z d^2 u_z / dx^2$ ,  $\theta_y$  par  $-du_z / dx$ .

L'énergie potentielle :  $J_4(u_z) = \int_{AB} 1/2 E I_y (d^2 u_z / dx^2)^2 dx + \int_{AB} m_y du_z / dx dx +$   
 $M_y(B) (du_z / dx)_B - \int_{AB} P_z u_z dx - P_z(B) u_z(B)$

L'énergie cinétique :  $Jc_4(u_z) = \int_{AB} 1/2 *s*p*(du_z/dt)^2 dx$

Le moment de Flexion:  $M_z(x) = \iint_S \sigma_{xx} z dydz = - E I_y (d^2 u_z / dx^2)$

avec E : Moment de flexion, p : masse volumique, I<sub>z</sub> : Inertie principale sur z,

S: Section.

L'énergie cinétique de rotation est négligée.



## 2. PASSAGE AUX FORMULATIONS VARIATIONNELLES.

### 2.1. Problème statique.

Le principe de la stationnarité de l'énergie potentielle conduit aux quatre formulations variationnelles suivantes :

- Poutre en traction-compression :

Soit  $V = \{v \in H^1[A,B]; v(A)=0\}$ , étant donné  $u_x(A) \in \mathbb{R}$ ,  $P_x(B) \in \mathbb{R}$ ,  $p_x \in L^2[A,B]$ ,  
trouver  $u_x - u_x(A) \in V$  tel que  $\forall v \in V$ ,  $\int_{AB} E S du_x/dx dv/dx dx = \int_{AB} p_x v dx + P_x(B)v(B)$

- Poutre en torsion :

Soit  $V = \{\theta \in H^1[A,B]; \theta(A)=0\}$ , étant donné  $\theta_x(A) \in \mathbb{R}$ ,  $M_x(B) \in \mathbb{R}$ ,  $m_x \in L^2[A,B]$ ,  
trouver  $\theta_x - \theta_x(A) \in V$  tel que  $\forall \beta \in V$ ,  $\int_{AB} G d \theta_x/dx d\beta/dx dx = \int_{AB} m_x \beta dx + M_x(B) \beta(B)$

- Poutre en flexion dans le plan (o,ex,ey) :

Soit  $V = \{v \in H^2[A,B]; v(A)=0; v'(A)=0\}$ , étant donnés  $u_y(A) \in \mathbb{R}$ ,  $u_y'(A) \in \mathbb{R}$ ,  
 $P_y(B) \in \mathbb{R}$ ,  $M_z(B) \in \mathbb{R}$ ,  $p_y \in L^2[A,B]$ ,  $m_z \in L^2[A,B]$  trouver  $u_y - u_y(A) - (x-x_A)u_y' \in V$   
tel que  $\forall v \in V$ ,  $\int_{AB} E I_z d^2u_y/d^2x d^2v/d^2x dx = \int_{AB} p_y v dx + P_y(B)v(B) + \int_{AB} m_z dv/dx dx + M_z(B)(dv/dx)_B$

- Poutre en flexion dans le plan (o,ex,ez) :

Soit  $V = \{v \in H^2[A,B]; v(A)=0; v'(A)=0\}$ , étant donnés  $u_z(A) \in \mathbb{R}$ ,  $u_z'(A) \in \mathbb{R}$ ,  
 $P_z(B) \in \mathbb{R}$ ,  $M_y(B) \in \mathbb{R}$ ,  $p_z \in L^2[A,B]$ ,  $m_y \in L^2[A,B]$ , trouver  $u_z - u_z(A) - (x-x_A)u_z' \in V$   
tel que  $\forall v \in V$ ,  $\int_{AB} E I_y d^2u_z/d^2x d^2v/d^2x dx = \int_{AB} p_z v dx + P_z(B)v(B) - \int_{AB} m_y dv/dx dx - M_y(B)(dv/dx)_B$

avec E: Module de Young, S: Section,  $I_y, I_z$ : Inerties principales selon  $e_y$  et  $e_z$ , G: Rigidité à la torsion.

### 2.2. Le cas dynamique.

La solution des problèmes dynamiques est cherchée sous la forme  $f(t)u(x)$  avec  $f(t) = e^{j\omega t}$ . Le principe de Hamilton conduit simplement à rajouter aux formations variationnelles précédentes les termes provenant de l'énergie cinétique:

Poutre en traction-compression:  $-1/2 \omega^2 \int_{AB} S \rho u_x^2 dx$

Poutre en torsion :  $-1/2 \omega^2 \int_{AB} I \rho \beta_x^2 dx$

Poutre en flexion dans (o,ex,ey):  $-1/2 \omega^2 \int_{AB} S \rho u_y^2 dx$

Poutre en flexion dans (o,ex,ez):  $-1/2 \omega^2 \int_{AB} S \rho u_z^2 dx$

(Les energies cinétiques de rotation provenant des flexions sont négligées.)

### 3. LES ELEMENTS FINIS UTILISES ET LEUR IMPLEMENTATION.

Les problèmes, relatifs aux quatre éléments de poutre sont traités par la méthode des éléments finis, à partir des formulations variationnelles précédentes.

On introduit donc une triangulation  $\mathcal{T}_h$ , dont l'élément générique est noté  $T$ .  $\mathcal{T}_h$  recouvre l'ensemble des éléments à étudier.

$$\mathcal{T}_h = \cup_{i=1, m} T_i \text{ avec } T_i = [a_{i-1}, a_i] \quad a_0=A \text{ et } a_m=B.$$

Deux types d'éléments finis sont utilisés dans les paragraphes qui suivent: ils correspondent aux interpolations de type P1 LAGRANGE et P3 HERMITE.

#### 3.1. L'élément de type P1 LAGRANGE.

L'espace  $U_h$  associé à cet élément est défini par :

$$U_h = \{ v \in C^0(\mathcal{T}_h), v|_{T_i} \in P_1(T_i) \} \quad a_{i-1} \longleftrightarrow a_i$$

Les inconnues issues de la discrétisation sont , sur  $T_i$  :  $v(a_{i-1})$  et  $v(a_i)$ .

Cet élément a pour polynomes de base:  $1-x; x$ .

L'estimation de l'erreur est en  $O(h)$ .

#### 3.2. L'élément de type P3 HERMITE.

L'espace  $U_h$  associé à cet élément est défini par :

$$U_h = \{ v \in C^1(\mathcal{T}_h), v|_{T_i} \in P_3(T_i) \} \quad a_{i-1} \longleftrightarrow a_i$$

Les inconnues issues de la discrétisation sont , sur  $T_i$  :  $v(a_{i-1}), v(a_i), v'(a_{i-1}), v'(a_i)$ .

Cet élément a pour polynomes de base:  $(1-\lambda)^2(2\lambda+1); \lambda^2(3-2\lambda); \lambda(1-\lambda)^2; -\lambda^2(1-\lambda)$ . (avec  $\lambda = (x-a_i)/l_i$  et  $l_i = a_i - a_{i-1}$ ).

L'estimation de l'erreur est en  $O(h)$ .

#### 4. L'ÉLÉMENT SEGM 2BAR. (Poutre plane en traction-compression)

##### 4.1. Le problème.

Cet élément permet de calculer les déformations d'un treillis de barres chargées en traction-compression dans un plan. Le problème est résolu par la méthode des éléments finis à partir de la formulation variationnelle correspondante du §2. On utilise l'élément fini de type P1 LAGRANGE, l'espace  $U_h$  qui lui est associé, et la triangulation  $Th$  définis au chapitre 3.

On note  $\Gamma_0$  l'ensemble des points où sont connus les déplacements,  $\Gamma_1$  l'ensemble des points où sont appliqués les forces  $P_x$ . La triangulation  $Th$  recouvre tout le treillis à étudier.

Sur chaque élément  $T$ , les énergies sont exprimées dans le repère local correspondant. (cf §1.1). Le problème, déduit de la formulation variationnelle du §1.2. devient :

Soit  $V_h = \{v \in U_h, v \text{ vérifie les conditions aux limites sur } \Gamma_0\}$ ,  $p_x \in \mathbb{R}$ , trouver  $u \in V_h$ , tel que :

$$\forall v \in V_h \quad \sum_{T \in Th} \int_T S E \, dv/dx \, du/dx \, dx = \sum_{T \in Th} \int_T v \, p_x \, dx + \sum_{X \in \Gamma_1} P_x(X) v(X)$$

En dynamique, on rajoute au premier terme de l'égalité:  $-\omega^2 \sum_{T \in Th} \int_T S \rho v \, u \, dx$

Notations:

$$P = [1-x; x] \quad DP = [-1; 1] \quad {}^tDL_i = [u(a_{i-1}); u(a_i)] \quad ; T = [a_{i-1}, a_i] \quad ; l = a_i - a_{i-1};$$

$${}^tU = [u; u'] \quad {}^tF = [p_x; 0] \quad {}^tG_i = [P_x(a_{i-1}); P_x(a_i)] \quad {}^tDP = (1/l) [{}^tP, {}^tDP]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & SE \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \rho S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \end{bmatrix}$$

##### 4.2. Passage aux quantités élémentaires.

Dans le repère naturel :

La matrice élémentaire de rigidité  $Kn^e$  provient du terme  $\int_T S E \, dv/dx \, du/dx \, dx$

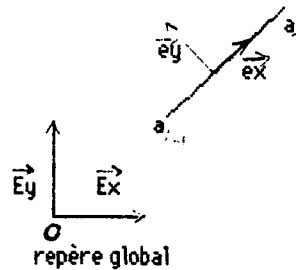
qui peut se mettre sous la forme  ${}^tDL_i \, Kn^e \, DL_i$  avec  $Kn^e = \int_T {}^tDP \, B \, DP \, dx$ .

La matrice élémentaire de masse  $Mn^e$  provient du terme  $\int_T S \rho v u dx$  qui peut se mettre sous la forme  ${}^tDL_i Mn^e DL_i$  avec  $Mn^e = \int_T {}^tDF A DF dx$ .

Le second membre provient du terme  $\int_T v p_x dx + \sum_{x \in T \cap \Gamma_1} P_x(X) v(X)$  qui peut se mettre sous la forme  ${}^tFn^e DL_i$  avec  ${}^tFn^e = {}^tF \int_T C DF dx + G_i$ .

L'effort normal  $N$ , de part l'interpolation en P1 Lagrange, est constant sur tout  $T_i$ . On a  $N = B U = B DF DL_i$ . Le tableau élémentaire des contraintes  $Cn^e$  est donné par :  $Cn^e = B DF$ .

Dans un repère global :



Il est plus général de connaître les déplacements et les efforts appliqués dans un repère global. (Notamment dès que l'on s'intéresse à un treillis de barres.) Si on note  $\alpha_i$  l'angle que fait  $[a_{i-1}, a_i]$  avec l'axe global  $(O, E_x)$ ,  $DL_{Gi}$  l'expression des degrés de liberté,  $F_g$  et  $G_g$  les coordonnées des forces appliqués dans le repère global :

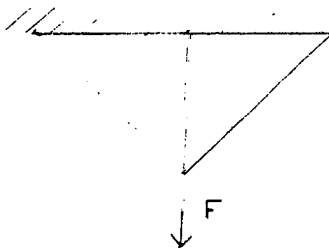
$DL_{Gi} = [v_{x_{a_{i-1}}}, v_{y_{a_{i-1}}}, v_{x_{a_i}}, v_{y_{a_i}}]$ ,  ${}^tF_g = [p_{g_x}, p_{g_y}, 0, 0]$ ,  ${}^tG_g = [P_x(a_{i-1}), P_y(a_{i-1}), P_x(a_i), P_y(a_i)]$ , on a alors :  $DL_i = DL_{Gi} {}^tP_i$ ,  $F = P_i F_g$ ,  $G = P_i G_g$ . Les matrices élémentaires deviennent :

- Matrice de rigidité :  $K^e = {}^tP_i K_n^e P_i$
- Matrice de masse :  $M^e = {}^tP_i M_n^e P_i$
- Le second membre :  $F^e = {}^tP_i F_n^e$
- Le tableau élémentaire des contraintes :  $C^e = C_n^e P_i$

### 4.3. Un exemple d'utilisation.

On étudie un treillis de 3 barres.

Les différentes étapes du préprocesseur *savoir* : *mailler, interpoler, données, calcul, résolution, et contrainte* sont données ci-dessous à titre d'exemple. (Se reporter à la brochure 108 : Utilisation conversationnelle de Modulf.)



reponse : MAILLAGE

```

'POIN
  10      4
$  NOP    Noref(NOP)    X(NOP).    Y(NOP). $
   1      1    -.100000E+01  0.000000E+00
   2      2     0.000000E+00  0.100000E+01
   3      1     0.100000E+01  0.000000E+00
   4      1     0.000000E+00  0.000000E+00

'MANU
  10      1      3
   2      1      1      2
   2      1      3      2
   2      1      4      2
$ IMPRE NIVEAU NE
$ TYPE NUDSD NS1 NS2
$ TYPE NUDSD NS1 NS2
$ TYPE NUDSD NS1 NS2

'SAUV
  10      1      0
NOPO.SD
$ IMPRE NINOPO NTNPO
$ NOM DU FICHIER
'F
  
```

resultat : INTERPOLER

```

  0
  2      1      0
  2      0
ELAS
  1
SEGM 2BAR
  0
NOPO.SD
  1
MAIL.SD
  1
COOR.SD
  1
  0      0
$ NOMBRE DE FONCTIONS INTERPRETEES
$ NDIM  NDSN  NBSDC
$ NNR    NBLC
$ NOM DE LA BIBLIOTHEQUE
$ NTYED DU SD      1
$ LE NOM DES ELEMENTS DROITS
$ NTYEC DU SD      1
$ NOM DU FICHIER
$      ET NIVEAU DE LA SD NOPO
$ NOM DU FICHIER
$      ET NIVEAU DE LA SD MAIL
$ NOM DU FICHIER
$      ET NIVEAU DE LA SD COOR
$ NTMAIL  NTCOOR
  
```

reponse : DONNEES

FORC.SD

1 1

MILI.SD

1 1

\$ DONNEES RELATIVES A LA S.D. FORC \$

FORC 5 4  
0.00000000D+00  
0.40000000D+05

\$ NOM TYPE NBREMOT  
\$ FORC( 1)  
\$ FORC( 2)

FX FY

1  
0 0 0 1 0 0  
2 0 1 1

\$ NDSM  
0 0  
\$ NOSD NFRO NOPT ITRAIT  
\$ NTABL IADR

\$ CONTENU

FORC 1

\$ DONNEES RELATIVES A LA S.D. MILI \$

MILI 5 4  
0.10000000D+11  
0.10000000D-03

\$ NOM TYPE NBREMOT  
\$ MILI( 1)  
\$ MILI( 2)

E S

0 1 0 0 0 0  
1 0 1 1

0 0  
\$ NOSD NFRO NOPT ITRAIT  
\$ NTABL IADR

\$ CONTENU

MILI 1

reponse : RESOLUTION PAR CHOLESKY

MAIL.SD

1  
1 5 2

TAE.SD

1  
1

BDCL.SD

1  
0

B.SD

1  
0

\$ NOM DU FICHER  
\$ ET NIVEAU DE LA SD MAIL  
\$ NDSM NTYP ND  
\$ NOM DU FICHER  
\$ ET NIVEAU DE LA SD TAE  
\$ 1 SI BDCL EST UTILISE , 0 SINON  
\$ NOM DU FICHER  
\$ ET NIVEAU DE LA SD BDCL  
\$ 1 SI CL. EN RL. EXISTE  
\$ NOM DU FICHER  
\$ ET NIVEAU DE LA SD B  
\$ IMPREB

reponse : CALCUL

MAIL.SD  
 1  
 COOR.SD  
 1  
 TAE.SD  
 1  
 0  
 0  
 1  
 MILI.SD  
 1  
 1  
 FORC.SD  
 1  
 2  
 0  
 0 1 1 1  
 :RIE 0

\$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD MAIL  
 \$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD COOR  
 \$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD TAE  
 \$ NTTAE  
 \$ 1 SI POBA EST UTILISEE , 0 SINON  
 \$ 1 SI MILI EST UTILISEE , 0 SINON  
 \$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD MILI  
 \$ 1 SI FORC EST UTILISEE , 0 SINON  
 \$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD FORC  
 \$ NPROV  
 \$ NTHELA  
 \$ IOPT(+)  
 \$ NOM DU TABLEAU DES CL ET NOMBRE DE CL

resultats : ( B.SD )

NOEUD	DL	DL GLOBAL	LE (LES)	CAS DE CHARGE
1	1	1	1	0.000000E+00
	2	2	2	0.000000E+00
2	1	3	3	0.000000E+00
	2	4	4	0.234315E-01
3	1	5	5	0.000000E+00
	2	6	6	0.000000E+00
4	1	7	7	0.000000E+00
	2	8	8	0.000000E+00



resultats : CONTRAINTES

ELEMENT : 1 SEGM2BAR SOUS-DOMAIN 1  
POINT : 1 -.5000000 .5000000  
1 TENSION 0.1171573D+05  
CP1 0.1171573D+05 CP2 0.7450581D-08  
DP 0.1000000D+01 0.0000000D+00

ELEMENT : 2 SEGM2BAR SOUS-DOMAIN 1  
POINT : 1 0.0000000E+00 .5000000  
1 TENSION 0.2343146D+05  
CP1 0.2343146D+05 CP2 0.7450581D-08  
DP 0.1000000D+01 0.0000000D+00

ELEMENT : 3 SEGM2BAR SOUS-DOMAIN 1  
POINT : 1 .5000000 .5000000  
1 TENSION 0.1171573D+05  
CP1 0.1171573D+05 CP2 0.7450581D-08  
DP 0.1000000D+01 0.0000000D+00

## 5. L'ELEMENT SEGM 3BAR. (Barre en traction-compression dans l'espace.)

### 4.1. Le problème.

Cet élément permet de connaître les déformations d'un treillis de barres chargées en traction-compression dans l'espace. On suit la même démarche que pour l'élément 2BAR: La formulation du problème est l'analogie dans l'espace.

### 4.2. Passage aux quantités élémentaires.

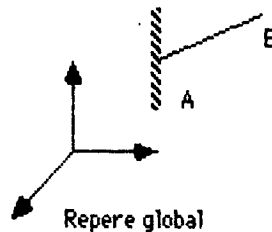
Se reporter au §3.2.; seule la matrice de changement de base  $P_i$  diffère:

$$P_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & z_i \end{bmatrix} \quad (x_i, y_i, z_i) \text{ sont les cosinus directeurs de l'axe de chaque } T_i.$$

L'expression des déplacements et des efforts appliqués dans le repère global tient compte de la composante en z.

### 4.3. Un exemple d'utilisation.

On considère une barre à orientation quelconque, fixée à une extrémité, et vibrant dans l'espace.



On s'intéresse à la première pulsation propre,  $\omega$ . Analytiquement, elle est donnée

par:  $\omega^2 = (\pi / 2)^2 * (E / (M)) / L^2$

avec M: masse volumique, L: longueur de la barre, E: module de Young.

Application numérique :  $E=70000$ ,  $M=1$ ,  $L^2=7 \cdot 10^7$ , d'où  $\omega^2 = 2.46 \cdot 10^{-3}$ .

Sous Modulef :

Avec un maillage à 2 noeuds, on obtient  $\omega^2 = 3 \cdot 10^{-3}$ , avec un maillage à 5 noeuds,  $\omega^2 = 2.48 \cdot 10^{-3}$ . L'appel du préprocesseur *setout* et ses différentes étapes sont donnés ci-dessous, à titre d'exemple, pour le maillage à 2 noeuds. (cf brochure 108: utilisation conversationnelle de Modulef.)

Reponse : MAILLAGE

POIN

10	2				
\$ NOP	NOREF	X	Y	Z	?
1	1			0.000000E+00	
2	3			0.300000E+04	

\$ IMPRE NPOINT	\$
0.000000E+00	0.000000E+00
0.500000E+04	0.600000E+04

MANU

10	1	1	
2	1	1	2

\$ IMPRE NIVEAU NE
\$ TYPE NUUSD NS1 NS2

SAUV

10	1	0
----	---	---

\$ IMPRE NINOPO NTNPO
\$ NOM DU FICHIER

BARRE.SD

F

Reponse : INTERPOLER

0			
3	1	0	
2	0		
2	0		

\$ NOMBRE DE FONCTIONS INTERPRETEES
\$ NDIM NDSD NBSDC
\$ NNR NBSC
\$ NNR NBLC
\$ NOM DE LA BIBLIOTHEQUE
\$ NTYED DU SD 1
\$ LE NOM DES ELEMENTS DROITS
\$ NTYEC DU SD 1
\$ NOM DU FICHIER
\$ ET NIVEAU DE LA SD NOPO
\$ NOM DU FICHIER
\$ ET NIVEAU DE LA SD MAIL
\$ NOM DU FICHIER
\$ ET NIVEAU DE LA SD COOR
\$ NMAIL NTCOOR

ELAS

1

SEGM 3BAR

0

BARRE.SD

1

MAIL.SD

1

COOR.SD

1

0 0

Reponse : DONNEES

FORC.SD

1 1

MILI.SD

1 1

\$ DONNEES RELATIVES A LA S.D. FORC \$

FORC	5	6
0.000000000D+00		
0.000000000D+00		
0.000000000D+00		

\$ NOM TYPE NBREMOT
\$ FORC( 1)
\$ FORC( 2)
\$ FORC( 3)

Fx Fy Fz

1					
0	0	0	1	0	0
3	0	1	1		

\$ NDSM
0 0
\$ NOSD NFRO NOPT ITRAIT
\$ NTABL IADR

FORC 1

\$ DONNEES RELATIVES A LA S.D. MILI \$

MILI	5	8
0.100000000D+01		
0.360000000D+03		
0.700000000D+05		
0.360000000D+03		

\$ NOM TYPE NBREMOT
\$ MILI( 1)
\$ MILI( 2)
\$ MILI( 3)
\$ MILI( 4)

M S E S

1	0	0	0	0	0
1	0	1	1		

\$ CONTENU

0 0
\$ NOSD NFRO NOPT ITRAIT
\$ NTABL IADR

MILI 1

Reponse : LIMITE

MAIL.SD  
 1  
 BDCL.SD  
 1  
 0  
 1 3 5  
 1 1 VN  
 1 2 VN  
 1 3 VN  
 0.0000000D+00  
 0.0000000D+00  
 0.0000000D+00  
 0  
 1  
 2 2  
 2  
 2  
 1  
 2  
 2  
 2  
 2  
 2  
 2  
 2  
 2  
 3  
 0.0000000D+00  
 0.5000000D+01  
 -0.3000000D+01  
 0.0000000D+00  
 0.6000000D+01  
 -0.5000000D+01

Conditions de blocage a une extremite, vibrations uniquement selon l'axe de la barre d au deux conditions aux limites en relation lineaire

Reponse : ASSEMBLAGE

1  
 MUAM.SD  
 1  
 1  
 1  
 MUAR.SD  
 2  
 1  
 MAIL.SD  
 1  
 2  
 BDCL.SD  
 1  
 1  
 B.SD  
 1  
 1 5 3  
 TAE.SD  
 1

Reponse : PROPRE

5  
 MJAM.SD  
 1  
 MUAR.SD  
 2  
 100  
 1  
 BDCL.SD  
 1  
 VVPR.SD  
 1  
 1  
 0.0000000E+00

\$ NOM DU FICHER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD MAIL  
 \$ NOM DU FICHER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD BDCL  
 \$ NTBDCL  
 \$ ICONST NBFR NTYP  
 \$ REF DL MNEMO  
 \$ REF DL MNEMO  
 \$ REF DL MNEMO  
 \$ VALEUR  
 \$ VALEUR  
 \$ VALEUR  
 \$ 1 SI SD NDL1  
 \$ 1 SI CL EN RL  
 \$ NCLRL NMTRL  
 \$ NBRE DE TERMES PUIS NOEUD OU DL  
 \$ NBRE DE TERMES PUIS NOEUD OU DL  
 \$ NBRE DE TERMES PUIS NOEUD OU DL  
 \$ NBRE DE TERMES PUIS NOEUD OU DL  
 \$ NBRE DE TERMES PUIS NOEUD OU DL  
 \$ NBRE DE TERMES PUIS NOEUD OU DL  
 \$ NBRE DE TERMES PUIS NOEUD OU DL  
 \$ NBRE DE TERMES PUIS NOEUD OU DL  
 \$ NBRE DE TERMES PUIS NOEUD OU DL  
 \$ NBRE DE TERMES PUIS NOEUD OU DL  
 \$ NBRE DE TERMES PUIS NOEUD OU DL  
 \$ NBRE DE TERMES PUIS NOEUD OU DL  
 \$ COEFFICIENT OU VALEUR  
 \$ COEFFICIENT OU VALEUR  
 \$ COEFFICIENT OU VALEUR  
 \$ COEFFICIENT OU VALEUR  
 \$ COEFFICIENT OU VALEUR  
 \$ COEFFICIENT OU VALEUR

\$ 1 SI MASSE EXISTE  
 \$ NOM DU FICHER CONTENANT MUA  
 \$ ET NIVEAU  
 \$ NCOOST  
 \$ 1 SI RIGIDITE EXISTE  
 \$ NOM DU FICHER CONTENANT MUA  
 \$ ET NIVEAU  
 \$ NCOOST  
 \$ NOM DU FICHER CONTENANT MAIL  
 \$ ET NIVEAU  
 \$ NCLRL  
 \$ NOM DU FICHER CONTENANT BDCL  
 \$ ET NIVEAU  
 \$ 1 SI SECOND MEMBRE EXISTE  
 \$ NOM DU FICHER CONTENANT B  
 \$ ET NIVEAU  
 \$ NDSM NTYP ND  
 \$ NOM DU FICHER CONTENANT TAE  
 \$ ET NIVEAU

\$ METHODE : SECINV  
 \$ NOM DU FICHER MUA  
 \$ ET NIVEAU MASSE  
 \$ NOM DU FICHER MUA  
 \$ ET NIVEAU RIGIDITE  
 \$ ND  
 \$ NCL  
 \$ NOM DU FICHER BDCL  
 \$ ET NIVEAU  
 \$ NOM DU FICHER VVPR  
 \$ ET NIVEAU SORTIE  
 \$ NROOT  
 \$ TETA

**6. L ELEMENT SEGM 2POR.**(Poutre plane en traction-compression, flexion)

**6.1. Le problème.**

Cet élément permet de connaître les déformations d'un treillis de poutres chargées en traction-compression et en flexion dans un plan. Le problème est résolu par la méthode des éléments finis à partir des formulations variationnelles correspondantes du §2. On utilise l'élément fini de type P1 LAGRANGE, l'espace  $U1_h$  associé pour interpoler le déplacement résultant de la traction-compression, l'élément de type P3 HERMITE, l'espace  $U3_h$  associé pour interpoler les déplacements de flexion et la triangulation  $Th$  définis au chapitre 3. ( $Th$  recouvre tout le treillis.)

Sur chaque élément  $T$ , les déplacements et forces appliqués sont exprimées dans le repère local correspondant. (cf §1.1).

On note  $\Gamma_{t0}$  l'ensemble des points où sont connus les déplacements locaux en  $x$ ,  $\Gamma_{t1}$  l'ensemble des points où sont appliqués les forces  $P_x$ ,  $\Gamma_{f0}$  l'ensemble des points où est connu le déplacement en  $y$  ou la rotation,  $\Gamma_{f1}$  l'ensemble des points où est appliqué une force  $P_y$  ou un moment de flexion  $M_z$ .

En utilisant les formulations variationnelles §2.1. et §2.2., le problème devient:

Soit  $V1_h = \{v \in U1_h, v \text{ vérifie les conditions aux limites sur } \Gamma_{t0}\}$ ,  $P_x \in \mathbb{R}, p_x \in \mathbb{R}$ , et soit

$V3_h = \{v \in U3_h, v \text{ vérifie les conditions aux limites sur } \Gamma_{f0}\}$ ,  $p_y \in \mathbb{R}, P_y \in \mathbb{R}, M_z \in \mathbb{R}$ ,

$m_z \in \mathbb{R}$ , trouver  $u \in V1_h, v \in V3_h$  tel que :  $\forall u1 \in V1_h \forall v1 \in V3_h$

$$\underbrace{\sum_{T \in Th} S E (du1/dx)(du/dx) dx}_{(1)} + \underbrace{\sum_{T \in Th} I E (d^2v/dx^2)(d^2v1/dx^2)dx}_{(2)} = \underbrace{\sum_{T \in Th} v p_x dx}_{(3)}$$

$$\underbrace{\sum_{T \in Th} v1 p_y dx}_{(3)} + \underbrace{\sum_{T \in Th} (dv1/dx) m_z dx}_{(3)} + \underbrace{\sum_{T \cap \Gamma_{t1}} P_x u1}_{(3)} + \underbrace{\sum_{T \cap \Gamma_{f1}} P_y v1}_{(3)} + \underbrace{\sum_{T \cap \Gamma_{f1}} M_z (dv1/dx)}_{(3)}$$

En dynamique, on rajoute au premier terme de l'égalité les 2 expressions :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\omega^2 \sum_{T \in Th} S \rho u u1 dx \\ -\omega^2 \sum_{T \in Th} S \rho v1 v dx \end{array} \right.$$

Notations:

$$P = [1-x; x] \quad DP = [-1; 1]$$

$$Q = [(1-x)^2(2x+1); x^2(3-2x); 1(1-x)^2x; -1(1-x)x^2]$$

$$DQ = [6x(x-1); -6x(x-1); 1(x-1)(3x-1); 1x(3x-2)]$$

$$D^2Q = [6(2x-1); 6(1-2x); 21(3x-2); -21(1-3x)]$$

$${}^tDL_i = [u(a_{i-1}); u(a_i); v(a_{i-1}); v(a_i); v'(a_{i-1}); v'(a_i)] ;$$

$${}^tU = [u; v; u'; v'] \quad {}^tF = [p_x; p_y; 0; m_2; 0]$$

$${}^tG_i = [Px(a_{i-1}); Px(a_i); Py(a_{i-1}); Py(a_i); Mz(a_{i-1}); Mz(a_i)]$$

$${}^tDP = \begin{bmatrix} 1/l {}^tP & 0 & 1/l DP & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l {}^tQ & 0 & 1/l DQ & 0 & 1/l^2 D^2Q \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ES & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \rho S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**6.2. Passage aux quantités élémentaires.**

Dans le repère naturel :

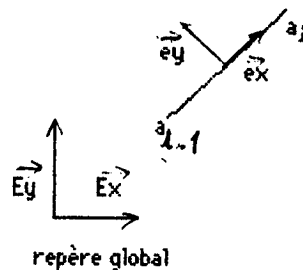
La matrice élémentaire de rigidité  $Kn^e$  provient du terme 1 + 2 (cf 6.1) qui peut se mettre sous la forme  ${}^tDL_i Kn^e DL_i$  avec  $Kn^e = \int_T {}^tDP B DP dx$ .

La matrice élémentaire de masse  $Mn^e$  provient des termes 4 (cf 6.1) qui peuvent se mettre sous la forme  ${}^tDL_i Kn^e DL_i$  avec  $Mn^e = \int_T {}^tDP A DP dx$ .

Le second membre provient des termes 3 (cf 6.1) qui se mettent sous la forme

$${}^tF_n^e DL_i \text{ avec } {}^tF_n^e = {}^tF \int_T C D^2 P dx + G_i.$$

Dans un repère global :



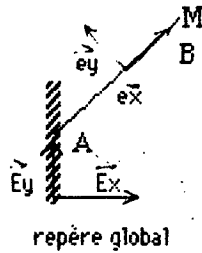
Il est plus intéressant de connaître les déplacements et les efforts appliqués dans un repère global. (On rappelle que  $v'_{aj}$  approxime l'angle de rotation des sections selon l'axe perpendiculaire au plan; cette valeur n'est donc pas affectée par le changement de base.) Si on note  $\alpha_i$  l'angle que fait  $[a_{i-1}, a_i]$  avec l'axe global  $(o, Ex)$  et  $DL_{Gi} = [v_{x_{ai-1}}, v_{y_{ai-1}}, \theta_{ai-1}, v_{x_{ai}}, v_{y_{ai}}, \theta_{ai}]$ ,  ${}^tF_g = [p_{gx}, p_{gy}, 0, m_z, 0]$ ,  ${}^tG_g = [P_x(a_{i-1}), P_y(a_{i-1}), M_z(a_{i-1}), P_x(a_i), P_y(a_i), M_z(a_i)]$ , l'expression des degrés de liberté et des forces appliquées dans le repère global,  $P_i$  la matrice de changement de base,  $N_i$  la matrice de permutation ordonnant les degrés de liberté par noeud, on a alors:  $DL_i = N_i^{-1} P_i DL_{Gi}$ ,  $F = N_i^{-1} P_i F_g$ ,  $G_i = N_i^{-1} P_i G_g$ . Les matrices élémentaires deviennent:

- Matrice de rigidité:  $Ke = {}^tP_i {}^tN_i^{-1} K_n^e N_i^{-1} P_i$
- Matrice de masse :  $Me = {}^tP_i {}^tN_i^{-1} M_n^e N_i^{-1} P_i$
- Le second membre:  $Fe = {}^tP_i {}^tN_i^{-1} F_n^e$

$$P_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 6.3. Un exemple d'utilisation.

On considère une poutre encastree en A, sur laquelle est appliquee un moment de flexion  $M_z(B)$  à son extremité B.



La solution analytique est connue :  $u_y = Mz(B)/(2 E I_z) x^2$ , dans le repère naturel. ( $u_x = 0$  : il n'y a pas d'effort de traction-compression.) Les différentes étapes pour la résolution sous Modulf sont données ci-dessous, à titre d'exemple.

```

*Reponse : MAILLAGE
*POIN
  10      2
$  NOP  NOREF(NOP)  X(NOP).  Y(NOP).  $
  1      1      0.000000E+00  0.000000E+00
  2      2      0.000000E+00  0.200000E+02
*LIGN
  10      1
$  NOLIG NOELIG NEXTR1 NEXTR2 NOREFL NFFRON  RAISON $
  1      11      1      2      3      0      0.100000E+01
*BARRE
  10      1      1      1      1
$ IMPRE NIVEAU NUUSD NBRELI NS1L
$ LISTE DES LIGNES DU CONTOUR :
  1
*SAUV
  10      1      0
$ IMPRE NINOPO NTNPO
$ NOM DU FICHIER
  F

*Reponse : INTERPOLER
  0
  2      1      0
  2      0
ELAS
  1
SEGM 2POR
  0
NOPO.SD
  1
MAIL.SD
  1
COORD.SD
  1
  0      0
$ NOMBRE DE FONCTIONS INTERPRETEES
$ NDIM  NDSD  NBSDC
$ NNR  NBLC
$ NOM DE LA BIBLIOTHEQUE
$ NTYED DU SD      1
$ LE NOM DES ELEMENTS DROITS
$ NTYEC DU SD      1
$ NOM DU FICHIER
$ ET NIVEAU DE LA SD NOPO
$ NOM DU FICHIER
$ ET NIVEAU DE LA SD MAIL
$ NOM DU FICHIER
$ ET NIVEAU DE LA SD COOR
$ NTMAIL  NTCOOR

*Reponse : LIMITE
MAIL.SD
  1
BDCL.SD
  1
  0
  1      3      5
  1      1  VN
  1      2  VN
  1      3  VN
0.0000000D+00
0.0000000D+00
0.0000000D+00
  0
  0
$ NOM DU FICHIER
$ ET NIVEAU DE LA SD MAIL
$ NOM DU FICHIER
$ ET NIVEAU DE LA SD BDCL
$ NTBDCL
$ ICONST  NBFR  NTYP
$ REF  DL  MNEMO
$ REF  DL  MNEMO
$ REF  DL  MNEMO
$ VALEUR
$ VALEUR
$ VALEUR
$ 1 SI SD NDL1
$ 1 SI CL EN RL
  
```



Reponse : DONNEES

FORC.SD

1 1

MILI.SD

1 1

\$ DONNEES RELATIVES A LA S.D. FORC \$

FORC 5 6  
0.000000000D+00  
0.000000000D+00  
0.100000000D+02

\$ NOM TYPE NBREMOT  
\$ FORC( 1)  
\$ FORC( 2)  
\$ FORC( 3)

FX FY MZ

1  
0 0 0 1 0 0  
2 0 1 1

\$ NDSM  
0 0  
\$ NOSD NFRO NOPT ITRAIT  
\$ NTABL IADR

\$ CONTENU

FORC 1

\$ DONNEES RELATIVES A LA S.D. MILI \$

MILI 5 6  
0.700000000D+05  
0.700000000D+05  
0.360000000D+03

\$ NOM TYPE NBREMOT  
\$ MILI( 1)  
\$ MILI( 2)  
\$ MILI( 3)

E I S

0 1 0 0 0 0  
1 0 1 1

0 0  
\$ NOSD NFRO NOPT ITRAIT  
\$ NTABL IADR

\$ CONTENU

MILI 1

Reponse : CALCUL

MAIL.SD

1

COOR.SD

1

TAE.SD

1

0

0

1

MILI.SD

1

1

FORC.SD

1

2

0

0 1 1 0

:RIE 0

\$ NOM DU FICHER  
\$ ET NIVEAU DE LA SD MAIL  
\$ NOM DU FICHER  
\$ ET NIVEAU DE LA SD COOR  
\$ NOM DU FICHER  
\$ ET NIVEAU DE LA SD TAE  
\$ NTTAE  
\$ 1 SI POBA EST UTILISEE , 0 SINON  
\$ 1 SI MILI EST UTILISEE , 0 SINON  
\$ NOM DU FICHER  
\$ ET NIVEAU DE LA SD MILI  
\$ 1 SI FORC EST UTILISEE , 0 SINON  
\$ NOM DU FICHER  
\$ ET NIVEAU DE LA SD FORC  
\$ NPROV  
\$ NTHELA  
\$ IOPT(\*)  
\$ NOM DU TABLEAU DES CL ET NOMBRE DE CL

Reponse : RESOLUTION

MAIL.SD

1

1 5 3

TAE.SD

1

1

BDCL.SD

1

0

B.SD

1

10

\$ NOM DU FICHER  
\$ ET NIVEAU DE LA SD MAIL  
\$ NDSM NTYP ND  
\$ NOM DU FICHER  
\$ ET NIVEAU DE LA SD TAE  
\$ 1 SI BDCL EST UTILISE , 0 SINON  
\$ NOM DU FICHER  
\$ ET NIVEAU DE LA SD BDCL  
\$ 1 SI CL. EN RL. EXISTE  
\$ NOM DU FICHER  
\$ ET NIVEAU DE LA SD B  
\$ IMPREB

**7. L'ELEMENT SEGM 3POR.**(Poutre en traction-compression,torsion,flexion dans l'espace.)

**7.1. Le problème.**

Cet élément permet de connaître les déformations d'un treillis de poutres chargées en traction-compression, torsion et flexions dans les plans principaux, dans l'espace. Le problème est résolu par la méthode des éléments finis à partir des formulations variationnelles correspondantes du §2. On utilise l'élément fini de type P1 LAGRANGE, l'espace  $U1_h$  associé pour interpoler le déplacement résultant de la traction-compression et de la torsion, l'élément de type P3 HERMITE, l'espace  $U3_h$  associé pour interpoler les déplacements des flexions et la triangulation  $Th$  définis au chapitre 3. ( $Th$  recouvre tout le treillis.)

Sur chaque élément  $T$ , les déplacements et forces appliqués sont exprimées dans le repère local correspondant. (cf §1.1).

On note  $\Gamma_{tr0}$  l'ensemble des points où sont connus les déplacements locaux en  $x$ ,  $\Gamma_{tr1}$  l'ensemble des points où sont appliqués les forces  $P_x$ ,  $\Gamma_{fy0}$  l'ensemble des points où est connu le déplacement en  $y$  ou la rotation autour de  $z$ ,  $\Gamma_{fy1}$  l'ensemble des points où est appliqué une force  $P_y$  ou un moment de flexion  $M_z$ , de même  $\Gamma_{to0}$  et  $\Gamma_{to1}$  pour la torsion,  $\Gamma_{fz0}$  et  $\Gamma_{fz1}$  pour les déplacements et efforts provenant de la flexion dans le plan  $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ . (cf §1.1)

En utilisant les quatre formulations variationnelles §2. le problème devient:

Soit  $V1_h = \{v \in U1_h, v \text{ vérifie les conditions aux limites sur } \Gamma_{tr0}\}$ ,  $P_x \in \mathbb{R}, p_x \in \mathbb{R}$ ,

Soit  $V3_{yh} = \{v \in U3_h, v \text{ vérifie les conditions aux limites sur } \Gamma_{fy0}\}$ ,  $p_y \in \mathbb{R}, P_y \in \mathbb{R}, M_z \in \mathbb{R}, m_z \in \mathbb{R}$ ,

Soit  $V1'_h = \{\beta \in U1_h, \beta \text{ vérifie les conditions aux limites sur } \Gamma_{to0}\}$ ,  $M_x \in \mathbb{R}, m_x \in \mathbb{R}$ ,

Soit  $V3_{zh} = \{v \in U3_h, v \text{ vérifie les conditions aux limites sur } \Gamma_{fz0}\}$ ,  $p_z \in \mathbb{R}, P_z \in \mathbb{R}, M_y \in \mathbb{R}, m_y \in \mathbb{R}$ ,

trouver  $u_x \in V1_h, u_y \in V3_{yh}, u_z \in V3_{zh}, \theta \in V1'_h$  tel que :



$$\begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ek & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ey & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \\
 A &= \begin{bmatrix} pS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & pI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ek & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Ey & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

**7.2. Passage aux quantités élémentaires.**

Dans le repère naturel :

La matrice élémentaire de rigidité  $Kn^e$  provient des termes 1 (cf 7.1) qui peuvent se mettre sous la forme  $DL_1 Kn^e tDL_1$  avec  $Kn^e = \int_T t D^p B D^p dx$ .

La matrice élémentaire de masse  $Mn^e$  provient des termes 3 (cf 7.1) qui

peuvent se mettre sous la forme  $DL_i K_n^e {}^tDL_i$  avec  $Mn^e = \int_T {}^tDP A DP dx$ .

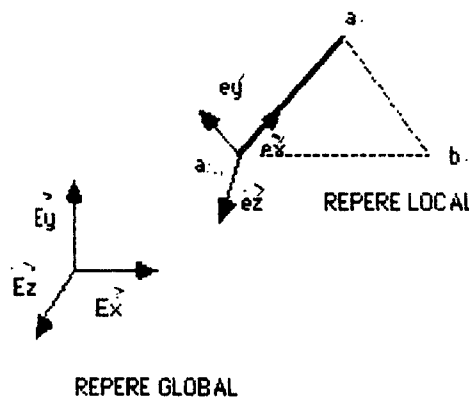
Le second membre provient des termes 2 (cf 7.1) qui se mettent sous la forme  ${}^tFn^e {}^tDL_i$  avec  ${}^tFn^e = {}^tF \int_T C DP dx + G_i$ .

On calcule d'autre part l'effort normal N, le moment de torsion  $M_x$  et les deux moments de flexions  $M_y$  et  $M_z$ , pour chaque  $T_i$ , en leur point milieu. On a l'égalité:  $[N, M_x, M_y, M_z] = D DP DL_i = Cn^e DL_i$ . Cne est le tableau élémentaire des contraintes.

Dans le repère global :

Il est plus général de connaître les déplacements et les efforts appliqués dans un repère global.

Rappelons que  $\theta = [\theta, -\alpha_z, \alpha_y]$  représente les angles de rotation des sections autour des trois axes locaux,  $u = [u_x, u_y, u_z]$  représente les déplacements des centres de gravité des sections (cf §1). La décomposition des efforts de flexions dans les 2 plans principaux implique la donnée d'un troisième point "b<sub>i</sub>" pour chaque élément  $T_i$  de la triangulation. Ce point permet en effet de définir les 3 axes locaux (cf §1.1) et le repérage des plans principaux. La données des inerties principales  $I_y$  et  $I_z$  prend alors un sens dans le repère local.



Le repère local est défini de la manière suivante:

Posons  $b_i = [x_{b_i}, y_{b_i}, z_{b_i}]$ ;  $T_i = [a_{i-1}, a_i]$ ; avec dans le repère global:

$a_{i-1} = [x_{a_{i-1}}, y_{a_{i-1}}, z_{a_{i-1}}]$ ;  $a_i = [x_{a_i}, y_{a_i}, z_{a_i}]$ ;  $l_i$  = longueur de  $T_i$ .

-  $\vec{e}_x = (e_{x_x}, e_{x_y}, e_{x_z})$  est le vecteur unitaire porté par l'axe de l'élément  $T_i$ .

-  $\vec{e}_y = (e_{y_x}, e_{y_y}, e_{y_z})$  est le vecteur unitaire porté par la direction  $a_{i-1}b_i$  si cette direction est perpendiculaire à  $e_x$ , ou le vecteur unitaire porté par  $a_{i-1}a_i + \lambda a_{i-1}b_i$

avec  $\lambda = -(a_i - 1a_i)^2 / a_{i-1} a_i a_{i-1} b_i$ .

-  $\vec{e}_2 = (e_{2x}, e_{2y}, e_{2z})$  est perpendiculaire à  $e_x$  et  $e_y$  de manière à former un trièdre direct.

On note  $Co$  la matrice  $3 \times 3$  des coefficients directeurs :  ${}^tCo = [{}^t e_x, {}^t e_y, {}^t e_z]$ ;  $Ni$  la matrice booléenne de permutation rangeant les degrés de libertés noeuds par noeuds et  $Pi$  la matrice de changement de base:

$$DLi = \{ux(a_{i-1}); uy(a_{i-1}); uz(a_{i-1}); \theta(a_{i-1}); -uz'(a_{i-1}); uy'(a_{i-1}); ux(a_i); uy(a_i); uz(a_i); \theta(a_i); -uz'(a_i); uy'(a_i)\} = Ni DLi$$

$$Pi = \begin{bmatrix} Co & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Co & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Co & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Co \end{bmatrix}$$

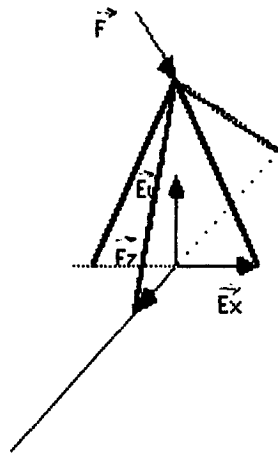
On a alors:  $DL_i = DL_{Gi} {}^t P_i N_i^{-1}$ ;  $F = N_i^{-1} P_i F_g$ ;  $G = N_i^{-1} P_i G_g$ . Les matrices élémentaires deviennent:

- Matrice de rigidité:  $Ke = {}^t P_i {}^t N_i^{-1} Kn^e N_i^{-1} P_i$
- Matrice de masse :  $Me = {}^t P_i {}^t N_i^{-1} Mn^e N_i^{-1} P_i$
- Le second membre:  $Fe = {}^t P_i {}^t N_i^{-1} Fn^e$
- Le tableau élémentaire des contraintes:  $Ce = Cn^e P_i$

(Remarque : On a  $ly + lz = 1$ . On choisit donc sous modulef de ne pas rentrer la données l.)

### 7.3. Un exemple d'utilisation.

On considère le treillis de 3 poutres dans l'espace décrit ci dessus, soumis à une force  $F$ . On s'intéresse aux différents déplacements qui en résultent.



Résolution sous Modulef : Appel de satout et des différentes étapes : mailler, interpoler, donnees, limites, calcul, resolution (cf brochure 108: utilisation conversationnelle de Modulef.)

On vérifie ensuite l'équilibre du système en calculant les forces et moment de réaction par l'appel de foinax (cf brochure 108)

' reponse : MAILLAGE

' POIN

10	9					\$ IMPRE NPOINT	\$
\$	NOP	NOREF	X	Y	Z ?		
	1	1		0.200000E+01		0.000000E+00	0.000000E+00
	2	1		-.200000E+01		0.000000E+00	0.000000E+00
	3	1		0.000000E+00		0.200000E+01	0.000000E+00
	4	1		0.000000E+00		-.200000E+01	0.000000E+00
	5	2		0.000000E+00		0.000000E+00	0.200000E+01
	6	3		0.100000E+01		0.000000E+00	0.100000E+01
	7	3		-.100000E+01		0.000000E+00	0.100000E+01
	8	3		0.000000E+00		0.100000E+01	0.100000E+01
	9	3		0.000000E+00		-.100000E+01	0.100000E+01

' MANU

10	1	8				\$ IMPRE NIVEAU NE
						\$ TYPE NUDSD NS1 NS2
	2	1	1	6		\$ TYPE NUDSD NS1 NS2
	2	2	2	7		\$ TYPE NUDSD NS1 NS2
	2	3	3	8		\$ TYPE NUDSD NS1 NS2
	2	4	4	9		\$ TYPE NUDSD NS1 NS2
	2	1	6	5		\$ TYPE NUDSD NS1 NS2
	2	2	7	5		\$ TYPE NUDSD NS1 NS2
	2	3	8	5		\$ TYPE NUDSD NS1 NS2
	2	4	9	5		\$ TYPE NUDSD NS1 NS2

' SAUV

10	1	0				\$ IMPRE NINOPO NTNOPO
NOPO.SD						\$ NOM DU FICHER

' F

reponse : INTERPOLER

0  
 3 4 0  
 3 0  
 3 0  
 ELAS  
 1  
 SEGM 3POR  
 0  
 1  
 SEGM 3POR  
 0  
 1  
 SEGM 3POR  
 0  
 1  
 SEGM 3POR  
 0  
 1  
 NOPO.SD  
 1  
 MAIL.SD  
 1  
 COOR.SD  
 1  
 0 0

reponse : LIMITE

MAIL.SD  
 1  
 BDCL.SD  
 1  
 0  
 1 6 5  
 1 1 VN  
 1 2 VN  
 1 3 VN  
 1 4 VN  
 1 5 VN  
 1 6 VN  
 0.000000D+00  
 0.000000D+00  
 0.000000D+00  
 0.000000D+00  
 0.000000D+00  
 0.000000D+00  
 0  
 0

reponse : CALCUL

MAIL.SD  
 1  
 COOR.SD  
 1  
 TAE.SD  
 1  
 0  
 0  
 1  
 MILI.SD  
 1  
 1  
 FORC.SD  
 1  
 2  
 0  
 0 1 1 1  
 :RIE 0

\$ NOMBRE DE FONCTIONS INTERPRETEES  
 \$ NDIM NDS NBSDC  
 \$ NNR NBSC  
 \$ NNR NBLC  
 \$ NOM DE LA BIBLIOTHEQUE  
 \$ NTYED DU SD 1  
 \$ LE NOM DES ELEMENTS DROITS  
 \$ NTYEC DU SD 1  
 \$ NTYED DU SD 2  
 \$ LE NOM DES ELEMENTS DROITS  
 \$ NTYEC DU SD 2  
 \$ NTYED DU SD 3  
 \$ LE NOM DES ELEMENTS DROITS  
 \$ NTYEC DU SD 3  
 \$ NTYED DU SD 4  
 \$ LE NOM DES ELEMENTS DROITS  
 \$ NTYEC DU SD 4  
 \$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD NOPO  
 \$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD MAIL  
 \$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD COOR  
 \$ NTMAIL NTCOOR

\$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD MAIL  
 \$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD BDCL  
 \$ NTBACL  
 \$ ICONST NBFR NTYP  
 \$ REF DL MNEMO  
 \$ REF DL MNEMO  
 \$ REF DL MNEMO  
 \$ REF DL MNEMO  
 \$ REF DL MNEMO  
 \$ REF DL MNEMO  
 \$ REF DL MNEMO  
 \$ VALEUR  
 \$ VALEUR  
 \$ VALEUR  
 \$ VALEUR  
 \$ VALEUR  
 \$ VALEUR  
 \$ 1 SI SD NDL1  
 \$ 1 SI CL EN RL

\$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD MAIL  
 \$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD COOR  
 \$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD TAE  
 \$ NTTAE  
 \$ 1 SI POBA EST UTILISEE , 0 SINON  
 \$ 1 SI MILI EST UTILISEE , 0 SINON  
 \$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD MILI  
 \$ 1 SI FORC EST UTILISEE , 0 SINON  
 \$ NOM DU FICHIER  
 \$ ET NIVEAU DE LA SD FORC  
 \$ NPROV  
 \$ NTHELA  
 \$ IOPT(+)  
 \$ NOM DU TABLEAU DES CL ET NOMBRE DE CL



reponse : DONNEES

FORC.SD

1 1

MILI.SD

1 4

\$ DONNEES RELATIVES A LA S.D. FORC \$

FORC 5 12  
 0.20000000D+02  
 0.00000000D+00  
 -0.20000000D+02  
 0.00000000D+00  
 0.00000000D+00  
 0.00000000D+00

\$ NOM TYPE NBREMOT  
 \$ FORC( 1)  
 \$ FORC( 2)  
 \$ FORC( 3)  
 \$ FORC( 4)  
 \$ FORC( 5)  
 \$ FORC( 6)

FX FY FZ MX MY MZ

1  
 0 0 0 1 0 0  
 2 0 1 1

\$ CONTENU

\$ NDSM

0 0

\$ NOSD NFRO NOPT ITRAIT

\$ NTABL IADR

FORC 1

\$ DONNEES RELATIVES A LA S.D. MILI \$

MIL1 5 16  
 0.30000000D+01  
 0.00000000D+00  
 0.10000000D+01  
 0.62400000D+05  
 0.64800000D+04  
 0.36000000D+03  
 0.60000000D+08  
 0.70000000D+05

\$ NOM TYPE NBREMOT  
 \$ MIL1( 1)  
 \$ MIL1( 2)  
 \$ MIL1( 3)  
 \$ MIL1( 4)  
 \$ MIL1( 5)  
 \$ MIL1( 6)  
 \$ MIL1( 7)  
 \$ MIL1( 8)

PTX PTY PTZ IY IZ S G E

MIL2 5 16  
 -0.30000000D+01  
 0.00000000D+00  
 0.10000000D+01  
 0.62400000D+05  
 0.64800000D+04  
 0.36000000D+03  
 0.60000000D+08  
 0.70000000D+05

\$ CONTENU

\$ NOM TYPE NBREMOT

\$ MIL2( 1)  
 \$ MIL2( 2)  
 \$ MIL2( 3)  
 \$ MIL2( 4)  
 \$ MIL2( 5)  
 \$ MIL2( 6)  
 \$ MIL2( 7)  
 \$ MIL2( 8)

PTX PTY PTZ IY IZ S G E

MIL3 5 16  
 0.00000000D+00  
 0.30000000D+01  
 0.10000000D+01  
 0.62400000D+05  
 0.64800000D+04  
 0.36000000D+03  
 0.60000000D+08  
 0.70000000D+05

\$ CONTENU

\$ NOM TYPE NBREMOT

\$ MIL3( 1)  
 \$ MIL3( 2)  
 \$ MIL3( 3)  
 \$ MIL3( 4)  
 \$ MIL3( 5)  
 \$ MIL3( 6)  
 \$ MIL3( 7)  
 \$ MIL3( 8)

PTX PTY PTZ IY IZ S G E

MIL4 5 16  
 0.00000000D+00  
 -0.30000000D+01  
 0.10000000D+01  
 0.62400000D+05  
 0.64800000D+04  
 0.36000000D+03  
 0.60000000D+08  
 0.70000000D+05

\$ CONTENU

\$ NOM TYPE NBREMOT

\$ MIL4( 1)  
 \$ MIL4( 2)  
 \$ MIL4( 3)  
 \$ MIL4( 4)  
 \$ MIL4( 5)  
 \$ MIL4( 6)  
 \$ MIL4( 7)  
 \$ MIL4( 8)

PTX PTY PTZ IY IZ S G E

4 0 0 0 0 0  
 1 0 1 1

\$ CONTENU

\$ NOSD NFRO NOPT ITRAIT

\$ NTABL IADR

MIL1 1

2 0 1 1

\$ NOSD NFRO NOPT ITRAIT

\$ NTABL IADR

MIL2 1

3 0 1 1

\$ NOSD NFRO NOPT ITRAIT

\$ NTABL IADR

MIL3 1

4 0 1 1

\$ NOSD NFRO NOPT ITRAIT

\$ NTABL IADR

MIL4 1

reponse : RESOLUTION par CHOLESKY

MAIL.SD				\$ NOM DU FICHER
1				\$ ET NIVEAU DE LA SD MAIL
1	5	6		\$ NDSM NTYP ND
TAE.SD				\$ NOM DU FICHER
1				\$ ET NIVEAU DE LA SD TAE
1				\$ 1 SI BDCL EST UTILISE , 0 SINON
BDCL.SD				\$ NOM DU FICHER
1				\$ ET NIVEAU DE LA SD BDCL
0				\$ 1 SI CL. EN RL. EXISTE
B.SD				\$ NOM DU FICHER
1				\$ ET NIVEAU DE LA SD B
10				\$ IMPREB

foinxx

\*\*\*\*\*

APPEL DE FOINRE : ( CALCUL DES FORCES D'INTERFACE ET DE REACTION )

\*\*\*\*\*

— CHOIX DU DOMAINE :

- 1 : TOUS LES ELEMENTS
- 2 : ELEMENTS COMPRIS ENTRE N1 ET N2
- 3 : ELEMENTS DONT LES NUMEROS SERONT DONNES
- 4 : ELEMENTS APPARTENANT A UN OU PLUSIEURS SOUS-DOMAINES

4

— NOMBRE DE SOUS-DOMAINES A CHOISIR ( LINDIC ) ?

4

— TABLEAU DES NUMEROS DES 4 S-D CHOISIS ?

1 2 3 4

— NOM DU FICHER DE LA S.D.E. MAIL ?

MAIL.SD

— NOM DU FICHER DE LA S.D.E. TAE ?

\*\* TABLEAUX ELEMENTAIRES

TAE.SD

— NOM DU FICHER DE LA S.D.E. B ? (SEQUENTIELLE)

\*\* DEPLACEMENTS,...

B.SD

— NOM DU FICHER DE LA S.D.S. B ? (SEQUENTIELLE)

\*\* CONTIENDRA LES FORCES

BF.SD

— NOMBRE DE DL PAR NOEUD CONSTANT (OUI-NON) ?

0

— PARAMETRE D'IMPRESSION DE LA S.D.S. B ?

10

— SORTIE SUR ECRAN (OUI-NON) ?

N

— NOM DU FICHER D'ECRITURE ?

EF.IMP

— POUR VISUALISER LES FORCES D'INTERFACE ET DE REACTION  
APPELEZ TRAVXX

**ELASTICITE**  
**ELAS SEGM 2BAR**  
( B ROUSSELET )



repère global

Espace :  $R^2$

Problème : Barre en traction-compression.

Inconnues : déplacements en x , en y dans le repère global.

Code : 200028

Code géométrique : 2

Interpolation : P1 Lagrange pour les deux déplacements.

Un type de noeud : les 2 sommets

2 degrés de liberté par noeud : la valeur des déplacements . ( mnémo 'VN ' )

Element de référence : le segment unité

Points et noeuds sont identiques.

Les points sont définis par leurs coordonnées.

Pas de tableau associé.

Bloquage : déplacements = valeur SD BDCL.

conditions de blocage en relation linéaire . SD BDCL.

**DONNEES** : ( en double précision)

Matrice de **MASSE** : ( partie MILI , *Données Surfaiques* )

ρ masse volumique

S section

Matrice de **RIGIDITE** : ( partie MILI , *Données Surfaiques* )

E module d'Young

S section

**SECOND MEMBRE** : ( partie FORC ) NDSM cas de charge

termes de surface : ( *Données Surfaiques* )

effort uniformément réparti

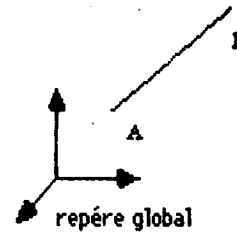
$F(i,j)$  : les  $i$  cas de charge ( $i=1, \text{NDSM}$ )  
les  $j$  composantes ( $j=1,2$ )

termes de bord : ( *Données ponctuelles* )

effort ponctuel

$f(i,j)$  : les  $i$  cas de charge  
les  $j$  composantes ( $j=1,2$ )

**ELASTICITE**  
**ELAS SEGM 3BAR**



Espace :  $R^3$

Problème : Barre en traction-compression.

Inconnues : Déplacements en x, y et z dans le repère global.

Code : 200029

Code géométrique : 2

Interpolation : P1 Lagrange pour les trois déplacements.

Un type de noeud : les 2 sommets

3 degrés de liberté par noeud : la valeur des déplacements .( mnémo 'VN ' )

Element de référence : le segment unité

Points et noeuds sont identiques.

Les points sont définis par leurs coordonnées.

Pas de tableau associé.

Bloquage : déplacements = valeur SD BDCL.

conditions de blocage en relation linéaire . SD BDCL.

**DONNEES** : ( en double précision )

Matrice de **MASSE** : ( partie MILI , *Données Volumiques* )

$\rho$  masse volumique

S section

Matrice de **RIGIDITE** : ( partie MILI , *Données Volumiques* )

E module d'Young

S section

**SECOND MEMBRE** : ( partie FORC ) NDSM cas de charge

termes de volumè : ( *Données Volumiques* )

effort uniformément réparti

F(i,j) : les i cas de charge ( i=1,NDSM )

les j composantes ( j=1,3)

termes de bord : ( *Données Ponctuelles* )

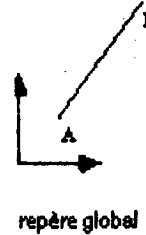
effort ponctuel

f(i,j) : les i cas de charge  
les j composantes ( j=1,3)

**ELASTICITE**

**ELAS SEGM 2POR**

( PL GEORGE M VIDRASCU J VAZAILLES )



Espace :  $R^2$

Problème : traction-compression, flexion dans le plan.

Inconnues : déplacement en x et en y, rotation de la section.

Code : 200027

Code géométrique : 2

Interpolation :

- P1 Lagrange pour le déplacement engendré par l'effort de traction-compression.
- P3 Hermite pour les déplacements engendrés par les efforts de<sup>n</sup> flexion.

Un type de noeud : les 2 sommets

3 degrés de liberté par noeud (mnémo 'VN):

- Les déplacements en x et en y.
- La rotation de la section.

Element de référence : le segment unité

Points et noeuds sont identiques.

Les points sont définis par leurs coordonnées.

Pas de tableau associé.

Blocage : déplacements et rotation = valeur SD BDCL.

conditions de blocage en relation linéaire . SD BDCL.

**DONNEES** : ( en double précision )

Matrice de **MASSE** : ( partie MILI , *Données Surfaiques* )

$\rho$  : masse volumique.  
I : Inertie.  
S : Section.

Matrice de **RIGIDITE** : ( partie MILI , *Données Surfaiques* ) ,

E : module d'Young.  
I : Inertie.  
S : Section.

**SECOND MEMBRE** : ( partie FOAC ) NDSM cas de charge

termes de surface : ( *Données Surfaiques* )

effort et moment uniformément répartis.

Pour le ième cas de charge (  $i=1, \text{NDSM}$  )

- F(i,j) : Les j composantes (  $j=1,2$  ) de l'effort.
- M(i) : La composante du moment.

termes de bord : ( *Données Ponctuelles* )

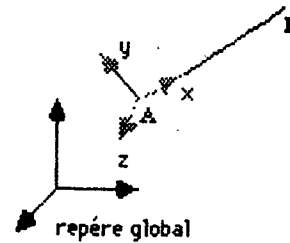
effort et moment ponctuels.

Pour le ième cas de charge (  $i=1, \text{NDSM}$  )

- F(i,j) : Les j composantes (  $j=1,2$  ) de l'effort.
- M(i) : La composante du moment.



**ELASTICITE**  
**ELAS SEGM 3POR**



**Espace** :  $R^3$

**Problème** : traction-compression, torsion, flexions dans les plans principaux.

**Inconnues** : Au nombre de 6, elles peuvent se présenter comme

- un vecteur déplacement : Ces 3 composantes sont les déplacements dans le repère global.
- un vecteur rotation : Sa décomposition dans le repère local\* donne les angles de rotation de la section autour des 3 axes naturels .

**Code** : 200062

**Code géométrique** : 2

**Interpolation** :

- **P1** Lagrange pour le déplacement engendré par l'effort de traction-compression.
- **P1** Lagrange l'angle de rotation engendré par l'effort de torsion.
- **P3** Hermite pour les déplacements issus des efforts de flexion .

**Un type de noeud** : les 2 sommets

6 degrés de liberté par noeud (mnémo 'VN):

- Les 3 composantes du vecteur déplacement.
- Les 3 composantes du vecteur rotation.

**Element de référence** : le segment unité

Points et noeuds sont identiques.

Les points sont définis par leurs coordonnées.

Pas de tableau associé.

**Blocage** : déplacements et rotations = valeur SD BDCL.  
conditions de blocage en relation linéaire . SD BDCL.

**DONNEES** : ( en double précision)

Matrice de **MASSE** : ( partie MILI , *Données Volumiques* )

$\rho$  : masse volumique.  
PTX,PTY,PTZ : point supplémentaire permettant la  
définition du repère naturel.  
 $I_y$  : Inertie principale sur l'axe naturel  $y$   
 $I_z$  : Inertie principale sur l'axe naturel  $z$   
S : Section.

Matrice de **RIGIDITE** : ( partie MILI , *Données Volumiques* )

PTX,PTY,PTZ : point supplémentaire permettant la  
définition du repère naturel.  
 $I_y$  : Inertie principale sur l'axe naturel  $y$   
 $I_z$  : Inertie principale sur l'axe naturel  $z$   
S : Section.  
G : Rigidité à la torsion.  
E : module d'Young.

**SECOND MEMBRE** : ( partie FORC ) NDSM cas de charge

termes de volume : ( *Données Volumiques* )

effort et moment uniformément répartis.

Pour le ième cas de charge (  $i=1,NDSM$  )

- $F(i,j)$  : Les  $j$  composantes (  $j=1,3$  ) de l'effort.
- $M(i,j)$  : Les  $j$  composantes (  $j=1,3$  ) du moment.

termes de bord : ( *Données Ponctuelles* )

effort et moment ponctuels.

Pour le ième cas de charge (  $i=1,NDSM$  )

- $F(i,j)$  : Les  $j$  composantes (  $j=1,3$  ) de l'effort.
- $M(i,j)$  : Les  $j$  composantes (  $j=1,3$  ) du moment.

**\*REMARQUE** : Les inerties principales et la rigidité à la torsion sont données dans le repère naturel de la poutre, d'où la nécessité d'un troisième point permettant la définition des trois axes locaux .

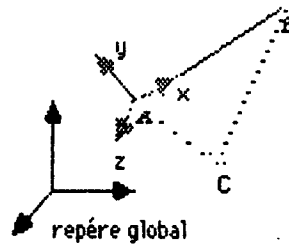
- Les 2 noeuds A et B permettent la définition de l'axe naturel  $x$ .

- Le plan  $xy$  local est défini par la donnée du troisième point C fourni par MILI. Deux cas se présentent :

- AC est perpendiculaire à AB. L'axe naturel  $y$  est porté par la direction AC.

- AC n'est pas perpendiculaire à AB; la direction  $y$  est portée par le vecteur  $AB + \lambda AC$  avec  $\lambda = -AB^2/AC \cdot AB$ .

- L'axe  $z$  forme un trièdre direct avec les 2 autres axes.



## **BIBLIOGRAPHIE.**

M. BERNADOU: *"Formulations variationnelles, approximations et implémentation des problèmes de poutres et de barres bi- et tri- dimensionnelles."* Rapport de recherche . 1986.

M. VIDRASCU : *"Description du calcul des contraintes par élément"*. Brochure Modulef n°90, Juillet 1984.

P.L. GEORGE, A. PERRONET, M. VIDRASCU : *"Integration d'un nouvel élément fini"*. Brochure Modulef n°95, Février 1983.

P.L. GEORGE: *"Utilisation conversationnelle de Modulef"*. Brochure Modulef n° 108, Avril 86.

F. BAY, A. PERRONET, M. VIDRASCU : *Construction de la structure de données SDCL, décrivant les conditions aux limites forcées"* Brochure Modulef n°18, Mars 86.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

