



**HAL**  
open science

# Une methode multigrille pour la resolution des equations de Navier-Stokes compressible en deux dimensions par des elements finis

F. Angrand, P. Leyland

► **To cite this version:**

F. Angrand, P. Leyland. Une methode multigrille pour la resolution des equations de Navier-Stokes compressible en deux dimensions par des elements finis. RR-0593, INRIA. 1986. inria-00075961

**HAL Id: inria-00075961**

**<https://inria.hal.science/inria-00075961v1>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. (1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

N° 593

### **UNE MÉTHODE MULTIGRILLE POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES COMPRESSIBLE EN DEUX DIMENSIONS PAR DES ÉLÉMENTS FINIS**

**Françoise ANGRAND  
Pénélope LEYLAND**

**Décembre 1986**

**Une méthode multigrille pour la résolution des équations  
de Navier-Stokes compressible en deux dimensions  
par des éléments finis**

**A multigrid method for solving by finite elements  
the two-dimensional Navier-Stokes equations  
for a compressible flow**

**Françoise ANGRAND, Pénélope LEYLAND**



PAPIER RECUPERÉ ET RECYCLE

**Résumé** :

Une méthode multigrille globale est appliquée à la résolution des équations de Navier-Stokes pour un écoulement compressible. On discrétise selon une approximation par éléments finis. La méthode itérative de base, dont on cherche à accélérer la convergence, est un schéma d'ordre deux de type Lax-Wendroff semi-explicite (prédicteur-correcteur). Des résultats pour un écoulement transsonique autour d'un NACA 0012 sont présentés.

**Summary** :

A global multigrid method is used to solve the 2-dimensional Navier-Stokes equations for a compressible flow using a finite element approximation. The iterative part of the algorithm uses a two step Lax-Wendroff type integration. Results are given over the NACA 0012 airfoil in the transonic case.

## 1. Introduction

Le développement de méthodes, qui augmentent les performances des codes servant à résoudre les problèmes actuels de l'aérodynamique interne et externe, est devenu essentiel devant la complexité des applications. Les méthodes multigrilles ont été introduites surtout pour accélérer la convergence des algorithmes de résolution numérique des équations aux dérivées partielles de type elliptique [5], [6], [7]. Les applications qui nous intéressent ici, sont modélisées par un système d'équations de type hyperbolique, ou mixte hyperbolique-parabolique, non-linéaires : le système des équations d'Euler ou le système des équations de Navier-Stokes pour des écoulements compressibles respectivement. La méthodologie multigrille (MG) a pu être adaptée, en différences finies [8] [3], aux équations hyperboliques pour les applications nous concernant, et s'est montrée efficace.

L'idée de base de la méthode MG consiste à utiliser plusieurs niveaux de discrétisation, où les itérations d'une méthode itérative de base (MIB) sur le problème à résoudre sur la grille fine, sont couplées avec des itérations de l'équation de correction sur des grilles plus grossières. L'efficacité de la méthode dépend des choix de la MIB, des niveaux de discrétisation, des équations de correction, des opérations d'interpolation de ces corrections lors du passage des grilles grossières aux grilles fines, et surtout du choix optimal des maillages.

En différences finies, ces niveaux s'obtiennent d'une façon directe à partir d'une grille fine donnée. Par exemple, il suffit de supprimer un point sur deux dans chaque direction pour obtenir une grille grossière  $\Omega_H$  d'une grille plus fine  $\Omega_h$ , ( $H=2h$ ).

En éléments finis triangulaires cette construction nécessite réflexion : la façon la plus évidente est de partir d'un maillage grossier bien choisi, bien adapté à la géométrie et aux critères physiques du problème. Ensuite, on divise chaque triangle (en 2-dimensions) en 4 sous-triangles, (chaque tétraèdre en 16 sous-tétraèdres en 3D).

Pour des systèmes elliptiques, le calcul des corrections sur  $\Omega_H$  présente l'avantage d'amortir les basses fréquences de l'erreur [5] ; les composantes hautes fréquences doivent être amorties par la structure interne de la MIB.

Ici, nous travaillons dans un contexte pseudo-instationnaire, avec un système de type hyperbolique-parabolique. L'hyperbolicité du système permet la propagation plus rapide des basses fréquences sur la grille grossière ; la MIB doit être alors très adaptée pour que la méthodologie MG soit efficace.

Dans un premier rapport [1], E. Perez a développé un code multigrille pour la résolution des équations d'Euler en 2D par la méthode des éléments finis, utilisant une approximation spatiale de type Galerkin centré avec une viscosité artificielle d'ordre deux et d'ordre quatre intégrée comme terme régularisant des équations, avec une intégration en temps du système discrétisé par une méthode Runge-Kutta multi-pas. Ce schéma est donc très proche de celui employé par A. Jameson et T. Baker [13], en différences finies.

Partant de cette approche, nous construisons un code pour la résolution des équations de Navier-Stokes en 2D. Nous employons un schéma d'ordre deux de type Lax-Wendroff, avec une intégration en temps de type prédictor-correcteur. Ce schéma est polyvalent Euler/Navier-Stokes [9], et utilise une viscosité artificielle, précise à l'ordre deux, très différente qui ne perturbe pas directement les équations de départ. Le schéma de Lax-Wendroff en question ne semblait pas alors adapté aux méthodes multigrilles, (pas d'amortissement direct des hautes fréquences), bien qu'il reste très proche des équations physiques. Toutefois, nous avons obtenu d'excellents résultats avec ce schéma dans le cadre des équations de Navier-Stokes, pour des nombres de Reynolds relativement faibles (<2000). Essentiellement, ceci est dû à la viscosité physique qui permet de maîtriser les oscillations générées pour les différentes grilles.

## 2. La méthode itérative de base

Le système d'équations de Navier-Stokes compressible s'écrit sous forme de lois de conservations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} W \, dx \, dy = - \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ + \text{conditions aux limites,} \end{array} \right. \quad (1),$$

où  $\Omega$  dénote le domaine en question,  $\partial\Omega$  son bord ;  $\vec{F}$  représente les flux à travers la surface,  $d\vec{s}$  le vecteur de l'élément surfacique. En 2D on a

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{u} \\ \rho e \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho \vec{u} \\ \rho u \otimes u + p - \frac{1}{Re} \underline{\tau} \\ \rho e \vec{u} + \underline{\sigma} : u + \frac{\gamma}{Pr} \nabla e \end{pmatrix}$$

où  $e$  est l'énergie totale, qui pour un gaz parfait peut s'écrire

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2.$$

$\vec{u}$  est le vecteur vitesse,  $\rho$  la densité,  $p$  la pression.

$\underline{\sigma}$  est le tenseur des contraintes,

$$\underline{\sigma} := -p \delta_{ij} + \underline{\tau},$$

où  $\underline{\tau}$  est celui des déformations, qui s'écrit pour une loi de comportement

de Stokes de viscosité cinétique  $\mu$

$$\tau_{ij} := \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{u} \cdot \delta_{ij}$$

Re et Pr sont les nombres de Reynolds et de Prandtl, respectivement.

## 2.1 Discrétisation explicite

On considère une triangulation  $\mathcal{T}_h$  du discrétisé  $\Omega_h$  de  $\Omega$ .

(1) peut s'écrire sous la forme variationnelle pour chaque temps  $t \in (0, T)$  :

$$A_h(u_h) = a(t; u_h, \phi_h) = \langle f, \phi_h \rangle \text{ pour tout } u_h \text{ et pour tout } \phi_h \in V_h^4,$$

où  $V_h$  est l'espace fonctionnel de l'approximation par des éléments finis de type  $P_1$ , soit :

$$V_h = \{ \phi \in C^0(\bar{\Omega}_h) / \phi|_T \in P_1, \forall T \in \mathcal{T}_h \}$$

$P_1$  est l'ensemble des polynômes de degré  $\leq 1$ .

L'approximation par discrétisation en espace de type Galerkin s'écrit :

$$\iint_{\Omega_h} \frac{\partial W}{\partial t} \phi_h \, dx dy = \iint_{\Omega_h} \vec{F} \cdot \nabla \phi_h \, dx dy - \int_{\partial \Omega_h} \vec{F} \cdot \vec{ds} \quad \forall \phi_h \in V_h \quad (2)$$

Le schéma global de discrétisation est un schéma de type Lax-Wendroff explicite d'ordre deux, avec discrétisation en temps à deux pas [10] ; le premier membre de (2) devient pour la matrice de masse usuelle :

$$\iint_{\Omega_h} \left[ \frac{W_h^{n+1} - W_h^n}{\Delta t} \right] \phi_h \, dx dy$$

Dans ce travail, on choisit une matrice de masse diagonalisée, ce qui revient à introduire un opérateur de projection  $\Sigma_0$  [10] dans la dérivée en temps :

$$\frac{1}{\Delta t} \iint_{\Omega_h} \Sigma_0 [W_h^{n+1} - W_h^n] \Sigma_0 \phi_h \, dx dy$$

Les variables sont calculées en termes de flux dans cette approche conservative. Un choix possible consiste à prendre comme zone d'intégration associée au noeud  $i$ , son volume de contrôle polygonal (en 2D) construit en prenant le centre de gravité des triangles voisins (Fig. 1).

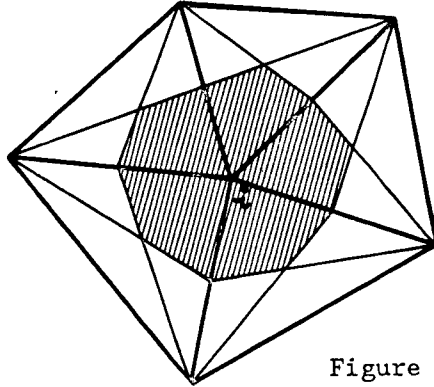


Figure 1

Pour chaque noeud  $i$ , on considère la fonction de base  $\phi_i^h$  de support  $w_i^h$ , où

$$w_i^h = \begin{cases} U & \text{T} \\ \text{(T} \in \mathcal{T}_h, i \in \text{T)} \end{cases},$$

$$\text{et } \begin{cases} \phi_i(j) = 1, i=j ; \\ \phi_i(j) = 0, \forall i \neq j. \end{cases}$$

Le premier membre de (2) s'écrit donc pour chaque noeud  $i$  :

$$\frac{\text{aire}(w_i^h)}{3} \frac{W^{n+1}(i) - W^n(i)}{\Delta t(i)} = L_h(W^n) \quad (3)$$

## 2.2 Schéma à 2-pas

L'intégration en temps du modèle semi-discrétisé (2), vers un état stationnaire est effectué par un schéma de type 2-pas Richtmyer :

(i) étape prédicteur, d'une estimation d'une fonction  $W^P$  constante par triangle ( $P_0$ )

$$W^P(T) = \frac{1}{\text{aire}(T)} \left( \iint_T W^n \, dx dy - \alpha \Delta t \int_{\partial T} \vec{F}(W^n) \cdot \vec{n} \, d\sigma \right)$$



(ii) étape correcteur :  $W^{n+1} \in V_h^4$ ,  $\forall \phi_h \in V_h^4$  :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_h} \Sigma_o \frac{W^{n+1} - W^n}{\Delta t} \Sigma_o \phi_h \, dx dy &= C_1 \iint_{\Omega_h} \vec{F}(W^n) \cdot \nabla \phi_h \, dx dy \\ &+ C_2 \iint_{\Omega_h} \vec{F}(W^P) \cdot \nabla \phi_h \, dx dy \quad (ii_1) \\ &- \int_{\partial \Omega_h} \phi_h (\vec{F}(\bar{W}) \cdot \vec{n}) \, d\sigma \quad (ii_2) \\ &+ \chi \iint_{\Omega_h} f(W^n) \langle \nabla W^n, \nabla \phi_h \rangle \, dx dy \quad (ii_3) \end{aligned}$$

$\bar{W}$  est une estimation de  $W$  aux bords, [9].

$C_1$  et  $C_2$  sont des constantes.

Le terme (ii<sub>3</sub>) est un terme de viscosité artificielle.

(ii<sub>1</sub>) donne après intégration du flux  $\vec{F}$  du flux  $F$  et  $G$ , avec des termes visqueux  $R$  et  $S$  (en 2D) :

$$\begin{aligned} (ii_1) &= \beta_1 \iint_{\Omega_h} \left( F(W^n) \frac{\partial \phi_h}{\partial x} + G(W^n) \frac{\partial \phi_h}{\partial y} \right) \, dx dy \\ &+ \beta_2 \iint_{\Omega_h} \left( F(W^P) \frac{\partial \phi_h}{\partial x} + G(W^P) \frac{\partial \phi_h}{\partial y} \right) \, dx dy \\ (ii_2) &- \frac{1}{Re} \iint_{\Omega_h} \left( R \frac{\partial \phi_h}{\partial x} + G \frac{\partial \phi_h}{\partial y} \right) \, dx dy \\ &+ \frac{1}{Re} \int_{\partial \Omega_h} \phi_h (R n_x + S n_y) \, d\sigma. \end{aligned}$$

On prend les valeurs  $\alpha = 1 + \sqrt{5}/2$ ,  $\beta_1 = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha}$ ,  $\beta_2 = \frac{1}{2\alpha}$ , [12].

Les conditions initiales sont remplacées en initialisant par l'écoulement uniforme, les conditions aux bords sont prises en compte en partie par le terme (ii<sub>2</sub>). Sur le corps, la condition d'adhérence est implantée de la manière suivante : la pression dans  $\bar{W}$  est déduite de  $W^n$ , par extrapolation à partir de ses valeurs internes, d'après l'équation de quantité de mouvement.

L'usage d'une viscosité artificielle nécessite quelques remarques.  $\chi$  est un paramètre à ajuster. Le terme d'intégration est choisi précis à l'ordre deux. Cette viscosité artificielle est bien adaptée dans la résolution des équations d'Euler. Elle réduit les oscillations et localise bien les chocs. Pour les équations de Navier-Stokes, elle joue essentiellement le même rôle pour les zones où la viscosité physique ne joue pas un rôle prépondérant (hors couche limite...). En tout cas, elle

ne joue nullement le rôle d'un terme de régularisation de résidus, comme dans le cas où l'on ajoute un terme d'ordre deux plus un terme d'ordre quatre à la discrétisation lors de l'approximation de Galerkin [1]. La viscosité artificielle doit être adaptée à la méthode itérative de base et à la méthodologie multigrille. Il existe également une viscosité interne au MIB dépendant des maillages utilisés, aussi un compromis entre l'efficacité, la stabilité et un lissage excessif de la solution doit être trouvé.

Dans le schéma Galerkin centré employé par Perez, on retrouve (3) où  $L_h(W^n)$  est remplacé par un terme  $L_h(W^n) + D_h(W^n)$ , où  $D_h$  représente des termes de régularisation elliptique. L'intégration en temps  $W^n \rightarrow W^{n+1}$  s'effectue par un schéma de type Runge-Kutta d'ordre 4, où à chaque pas intermédiaire  $k$  : ( $W^0 = W^n$ )

$$W^k = W^0 - \alpha_k \Delta t R_h(W^{k-1})$$

avec un résidu

$$R_h(W^k) = L_h(W^k) + D_h(W^0) \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Les  $\alpha_k$  sont choisis de telle sorte que la stabilité du schéma RK4 soit bien cohérente avec l'amortissement des hautes fréquences de l'erreur [3].

$\Delta t$  représente un pas de temps local, le  $(\Delta t)$ -optimal croît avec la "taille" de la grille, " $\Delta x$ ",  $\Delta x \sim h/\sqrt{2}$ , où  $h$  est l'incrément spatial de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . La combinaison avance en temps + méthode MG devrait alors donner des résultats satisfaisants de convergence : - par exemple, si la discrétisation était de type différence finies, et si la taille des cellules " $h$ " devient " $2h$ " à chaque descente de niveau de grille jusqu'à la plus grossière, alors un pas d'avance en temps sur chaque grille donne une avance totale de  $(2K-1) \Delta t_h$  sur la plus fine, où  $K$  est égal au nombre de grilles utilisées.

### 3. La méthode multigrille

Nous allons résoudre (1) par une méthode MG non-linéaire pour des éléments finis. Les différentes grilles sont obtenues par une suite de triangulations  $(\mathcal{T}_h)$  du domaine  $\Omega$ , construites par division uniforme d'une triangulation initiale. Cette première grille, la plus grossière,  $\Omega_H$ , comporte un nombre réduit de noeuds et de triangles, tout en restant bien adaptée au problème physique en question.

Considérons la discrétisation la plus fine de  $\Omega$ ,  $\Omega_h$ . Le système discrétisé à résoudre sur  $\Omega_h$  s'écrit à chaque pas de temps :

$$A_h(W_h) = a(t ; W_h, \phi_h) = 0$$

où l'opérateur  $A_h$  est décrit dans le §2.

Lorsque l'on prend  $W_h$  solution approchée de (2), on définit l'erreur commise par

$$v_h = \hat{W}_h - W_h$$

où  $\hat{W}_h$  est la solution exacte de (2).

On appelle résidu de  $W_h$

$$r_h(W_h) = A_h(\hat{W}_h) - A_h(W_h)$$

Cette équation de correction est ensuite discrétisée sur une grille plus grossière  $\Omega_H$  de la façon suivante :

$$A_H(v_H) = I_h^H r_h(W_h). \quad (4)$$

$A_h$  est l'approximation de  $A_h$  sur  $\Omega_H$ .

$I_h^H$  dénote l'opérateur de restriction de  $\Omega_h$  dans  $\Omega_H$ . Ici c'est une simple injection, les noeuds de  $\Omega_H$  sont tous des noeuds de  $\Omega_h$ . On définit aussi :

$$v_H = \hat{W}_H - I_h^H W_h \quad (5)$$

L'équation (4) de correction sur  $\Omega_H$ , a donc comme terme source le résidu de la grille plus fine. Sa résolution donne une approximation  $W_H$ , qui à l'étape  $n$  du cycle d'itérations globales, est transférée à la grille  $\Omega_h$  en tant que correction  $v_h^n$ . Ces corrections ne modifient pas la précision de la solution sur  $\Omega_h$ , et leurs calculs accélèrent la convergence de la MIB.

Nous prenons donc comme équation à résoudre sur  $\Omega_H$ , à l'étape  $n$  d'itérations,

$$\begin{aligned} A_H(W_H^n) &= A_H(I_h^H W_h^n) - I_h^H [A_h(W_h^n)] \\ &= r_h^H(W_h^n) \end{aligned} \quad (6),$$

définissant des termes de "source" ( $r_h^H$ ) qui jouent le rôle de l'erreur relative par rapport aux grilles ( $\Omega_h, \Omega_H$ ). Les corrections sur  $\Omega_h$  sont obtenues par interpolation ( $I_h^H$ ) du calcul sur  $\Omega_H$  (6) :

$$c_h^n = I_H^h (W_H^n - I_h^H W_h^n).$$

Les opérateurs  $(I_H^h)$  d'interpolation de la grille  $\Omega_H$  à la grille  $\Omega_h$  s'expriment ici simplement comme des opérateurs d'interpolation linéaires (éléments finis de type  $P_1$ , avec  $\Omega_H \subset \Omega_h$ ,  $V_H \subset V_h$ ).

Le nouveau vecteur  $W_h^n$  sur  $\Omega_h$  est donc

$$W_h^{\text{nouveau}} = W_h^{\text{ancien}} + I_H^h (W_H^n - I_h^H W_h^n).$$

((5), (6) et (7) représentent le "Full Approximation Scheme" - FAS - de Brandt [5] pour des méthodes multigrilles non-linéaires).

### 3.1 Algorithme MG

Le cycle classique MG-3 grilles,  $h$ ,  $H-1$ ,  $H$ , comporte les étapes suivantes :

- i) initialisation d'une solution sur  $\Omega_{H-1}$ ,  $W_h^0 = W^n$  ;
- ii) injection sur  $\Omega_{H-1}$ ,  $W_h^n \rightarrow W_{H-1}^n$ .  
Résolution de la MIB pour obtenir  $W_{H-1}^{n,m}$ , après  $m$  itérations de la MIB
- iii) injection sur  $\Omega_H$  ;  
Résolution de  $A_H(W_H^{n,m}) = r_{H-1}^H(W_{H-1}^{n,m})$ , on obtient  $W_H^{n,m,p}$  ; après  $p$  itérations de la MIB.
- iv) interpolations successives de  $H$  à  $H-1$  à  $h$  pour obtenir
 
$$W_h^n = W_h^n + v_h^n,$$
 puis calcul de  $W_h^n$  à  $W_h^{n+1}$  par avance en temps de la MIB dans  $\Omega_h$ .
- v) retour à (ii).

### 3.2 Algorithme FMG

Pour améliorer les performances de MG, la phase d'initialisation est remplacée par un schéma Full-Multigrille (FMG), qui accélère le schéma global et stabilise la solution :

- a)  $n_1$  itérations sur  $\Omega_H$  en tant que monogrille :

$$(W^0) \rightarrow (W_H^0) \rightarrow W_H^{n_1}.$$

b) Réinitialisation de la solution  $W_H^{n_1}$  sur la grille (H-1) :

$$I_H^{H-1}(W_H^{n_1-1}) + Z_{H-1} = W_{H-1}^0,$$

où  $Z_{H-1}$  est une fonction de la grille (H-1).

c)  $n_2$  cycles multigrille entre  $\Omega_H$  et  $\Omega_{H-1}$

d) Réinitialisation de  $(W_{H-1}^{n_1+n_2})$  sur la grille  $\Omega_h$  par (b).

e)  $n_3$  cycles multigrille entre les 3 grilles  $\Omega_h, \Omega_{H-1}, \Omega_H$ .

Le choix de  $n_1, n_2, n_3$ , de l'opérateur de réinitialisation, et des opérateurs  $I_h^H$ , repose surtout sur des considérations pratiques : les méthodes MG non-linéaires pour des systèmes hyperboliques ont très peu de développement théoriques. Sur  $\Omega_H$ , la taille des éléments du maillage limite assez rapidement la convergence vers la solution, nous prenons donc  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ . Un peu près de 80 % du travail effectué dans la partie (e) du schéma : son efficacité dépend alors du fait que  $n_3$  ne doit pas être trop grand. Sa valeur optimale dépend aussi du nombre de points de la grille fine, (ici, 3176,  $n_3 = 200$ ), et il est difficile de comparer ce nombre de "cycles" avec des "itérations" monogrille.

Nous prenons ici un candidat évident pour  $Z_{H-1}$  qui représente l'interpolée du résidu relatif du cycle précédent ; l'opérateur de réinitialisation reste un point primordial du schéma FMG, et d'autres opérations doivent être étudiées.

#### 4. Résultats

Nous présentons dans ce rapport des résultats du schéma appliqué au cas test d'un écoulement transsonique autour d'un NACA 0012. Les maillages qui forment les différentes grilles sont obtenues par division uniforme d'un premier maillage de 215 noeuds, et de 386 éléments. Un zoom sur la grille fine est montré dans la Figure 2. Dans un rapport ultérieur, nous montrerons des résultats du même type de schéma, modifié pour des maillages adaptatifs, où les grilles successives sont construites par raffinement local.

Les résultats obtenus avec ce code sont limités par la qualité médiocre de la géométrie multigrille : le naca 0012 est "anguleux", même pour le maillage fin de 3176 noeuds, (fig.(2a)); le raffinement initial est également fait d'une façon excessivement géométrique. Sur un maillage

plus régulier et adapté, la solution est forcément plus régulière et elle converge plus, (la figure 2b montre un tel maillage pour Navier-Stokes, et la figure 3 montre une solution convergée sur ce maillage). Ce défaut de géométrie se reflète dans les résultats, comme on peut le constater dans les figures 4 et 5, quelque soit le schéma employé, multigrille ou monogrille, les résultats sont identiques par construction. Nous pouvons donc comparer, en tenant compte de ces limites, la régularité et la compatibilité des résultats du schéma multigrille, (Fig. 5a et 5b), avec le schéma "monogrille" (Fig. 4a et 4b) ; c'est à dire le schéma full-multigrille avec la MIB de type Lax-Wendroff sur les trois grilles fines avec le schéma Lax-Wendroff sur la grille fine en tant que maillage unique). On constate que la solution est plus uniformément proche de la solution stationnaire dans le cas FMG (cf : les figures 5) à résidu égal, et elle est relativement plus régularisée que son équivalente monogrille.

Les figures 6a) b) c) présentent les courbes de convergence correspondantes ; le schéma FMG présente une convergence rapide, après le stade d'intitialisation. Ici, nous avons arrêté le nombre de cycles de ce stade selon le critère de stationnarité et saturation de la solution, ( $n_1 \sim 100$ ,  $n_2 \sim 200$ ), avec 200 cycles multigrille pour la partie finale ( $n_3 = 200$ ). La figure 6c) montre un autre type de réinitialisation des résidus entre chaque étape du schéma FMG ( $z_{H-1} \neq 0$ ) ; à la place d'une simple interpolation de la solution calculée sur la grille précédente, on interpole également la correction apportée par le résidu de cette dernière solution au résidu de la solution à calculer. Il semblerait intéressant d'optimiser cette manipulation de réinitialisation pour minimiser le travail à refaire pour converger au même point que l'étape précédente dans chaque stade du schéma FMG. Enfin, la figure 6d) donne à titre comparatif le schéma FMG pour  $n_1 = n_2 = 100$ ,  $n_3 = 200$  et le schéma "monogrille" sur la grille fine.

La mise en oeuvre de ce code sur le Multics DPS 7-80 nécessite une compilation en "large array", ce qui entraîne une pagination interne lors de l'exécution. Par contre, l'exécution du schéma Lax-Wendroff sur la grille fine en tant que programme "monogrille", n'est pas freinée par ce problème qui vient essentiellement des boucles d'interpolation et de réinitialisation introduites pour la méthode multigrille. De ce fait, nous n'avons pas pu obtenir un gain de temps CPU notable entre le schéma Lax-Wendroff "monogrille" pour des résidus égaux ( $O(10^{-4})$ ). Le schéma FMG pour  $n_1 = n_2 = n_3 = 200$  prend 10 heures de temps CPU (la puissance du calculateur est environ 1 Mips). On peut donc estimer les 200 cycles MG à un coût de 9 heures (pour les calculs correspondants à 6b) et 6c)), alors

que le coût du schéma monogrille s'estime à 11 heures pour 750 itérations (6a). La vitesse de convergence est donc de l'ordre de quatre fois plus rapide en MG qu'en monogrille ce qui donnerait un rapport d'efficacité d'ordre deux dans un contexte informatique qui éviterait la pagination.

Les figures 7a) b) c) montrent les résultats obtenus sur un autre cas de calcul,  $M_\infty = 2.0$  et  $Re = 106$ . Le résultat est très correct, (compte tenu du fait que le maillage n'est nullement adapté à ce cas de calcul), et nous permet de conclure que ce code FMG donne une bonne résolution des équations de Navier-Stokes pour des écoulements compressibles. Il est efficace et souple.

## 5. Conclusion

Les méthodes multigrilles non-linéaires, couplées avec une méthode itérative de base performante, montrent un gain de convergence et de régularisation de la solution pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes compressible. Nous avons montrés ici qu'un schéma multigrille, utilisant des maillages obtenus par division uniforme et globale, en éléments finis couplé avec un schéma Lax-Wendroff comme méthode itérative, est un excellent solveur pour les équations de Navier-Stokes.

Le code développé ici est limité par des problèmes de place mémoire et un maillage initial médiocre, mais on peut le faire évoluer vers une méthodologie MG locale adaptative, qui résoudra partiellement ces difficultés. D'autre part, il est à noter que la structure des données des différentes grilles n'est pas optimale : les différents niveaux sont stockés bout à bout, ce qui permet une programmation directe du schéma dans le cadre de division uniforme entre chaque niveau, mais nécessite une place mémoire excessive. Ce code n'est donc pas adapté au CRAY-1, alors que le code "monogrille" ne présente pas les mêmes problèmes de stockage. Pour ces deux raisons, une restructuration des données géométriques et de la programmation de la méthode multigrille est à reconsidérer en fonction de la machine à utiliser. Il est clair qu'en éléments finis, malgré une certaine optimisation dans ce domaine, les codes multigrilles resteront toujours coûteux en occupation mémoire quelque soit la "gymnastique" informatique utilisée par rapport à leurs homologues "monogrilles". Dans un rapport ultérieur [11], l'approche avec raffinement local sera présentée : le schéma multigrille est adapté aux maillages raffinés dans des zones d'intérêt physique de la solution.

En conclusion, l'approche multigrille avec un solveur de base de type Lax-Wendroff, est très adapté à la résolution directe des équations de Navier-Stokes, sans introduire des termes de régularisation interne de la solution.



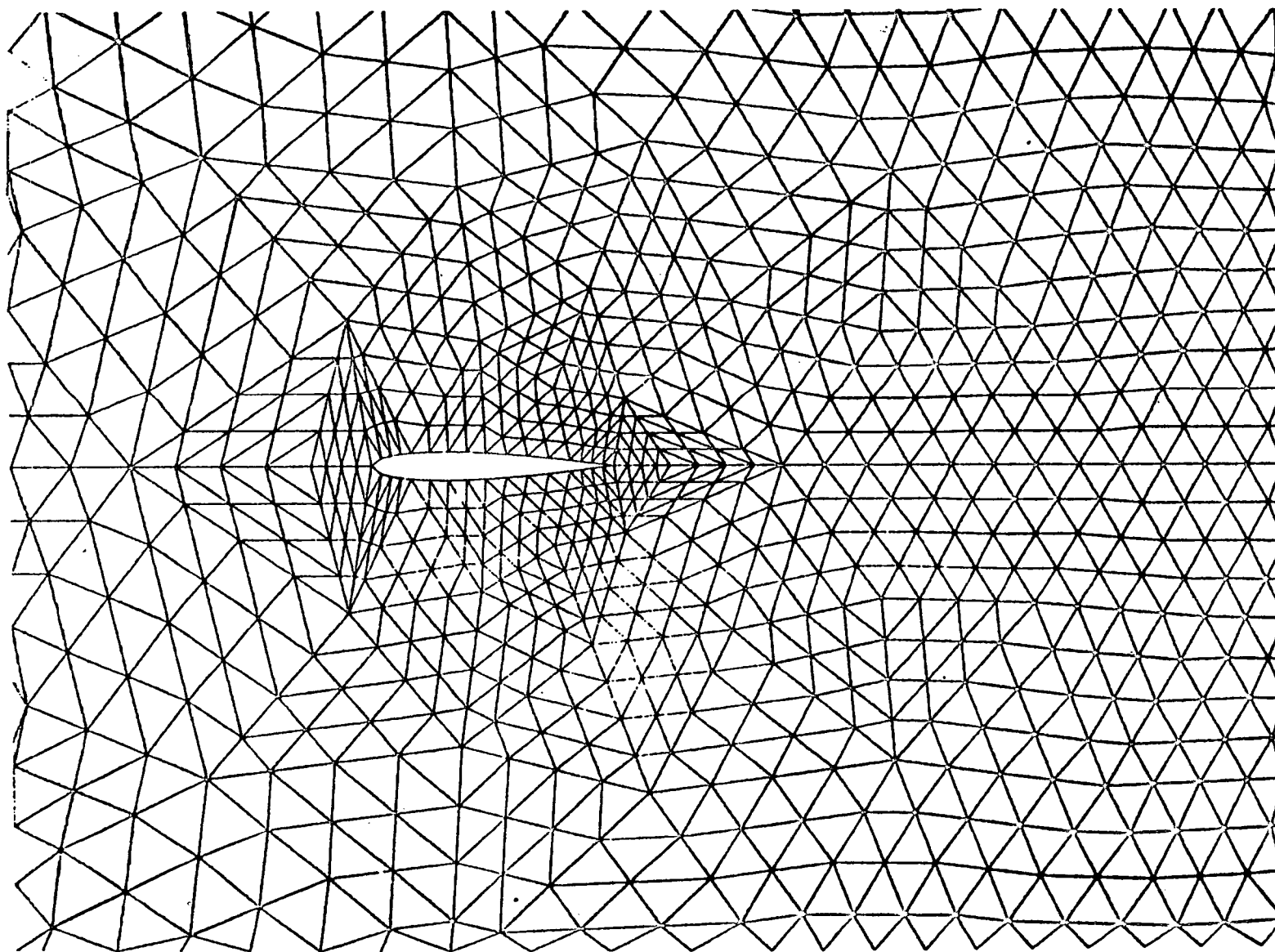


Figure 2

La grille fine de la géométrie multigrille - 3176 noeuds, 6176 éléments.

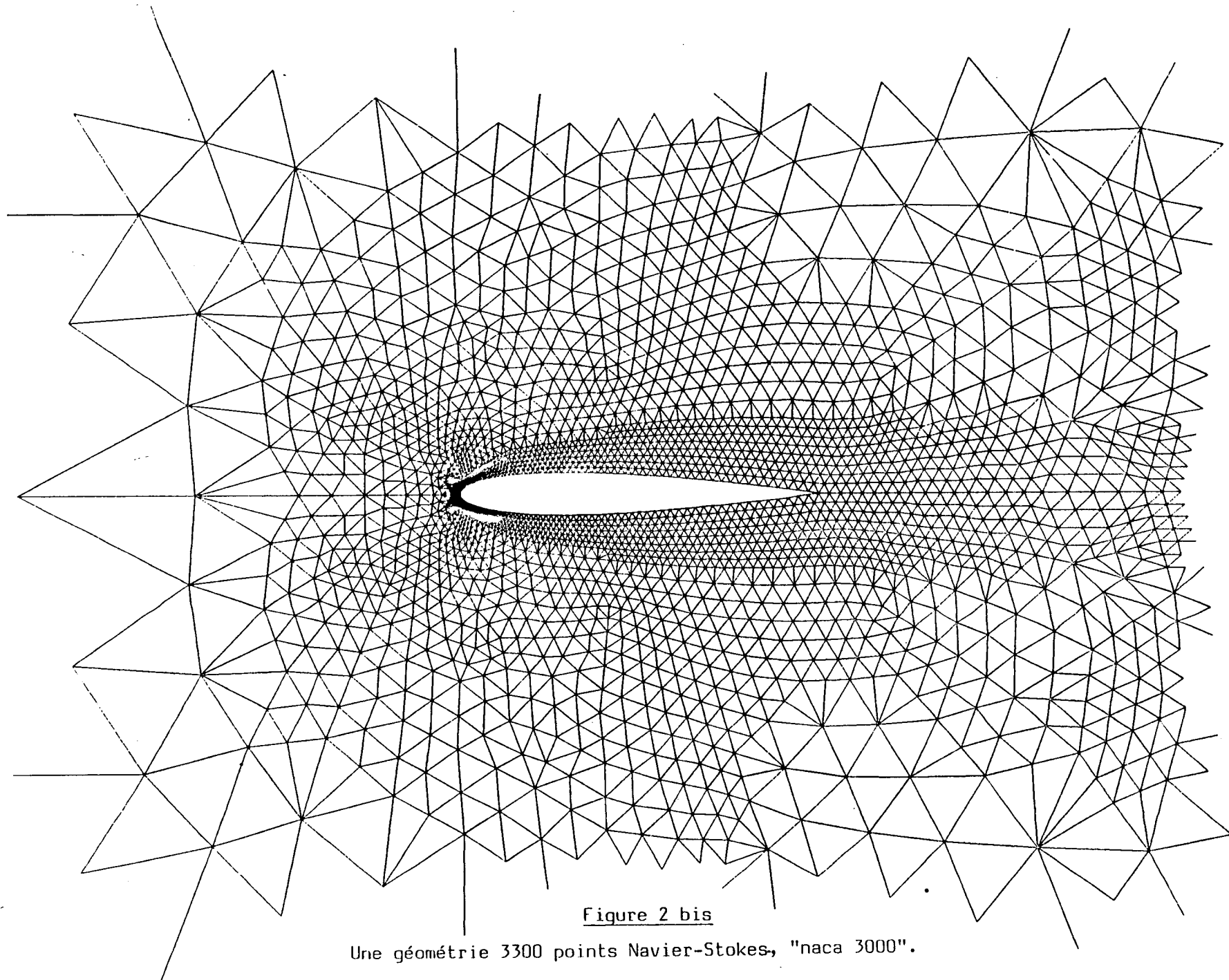


Figure 2 bis

Une géométrie 3300 points Navier-Stokes, "naca 3000".

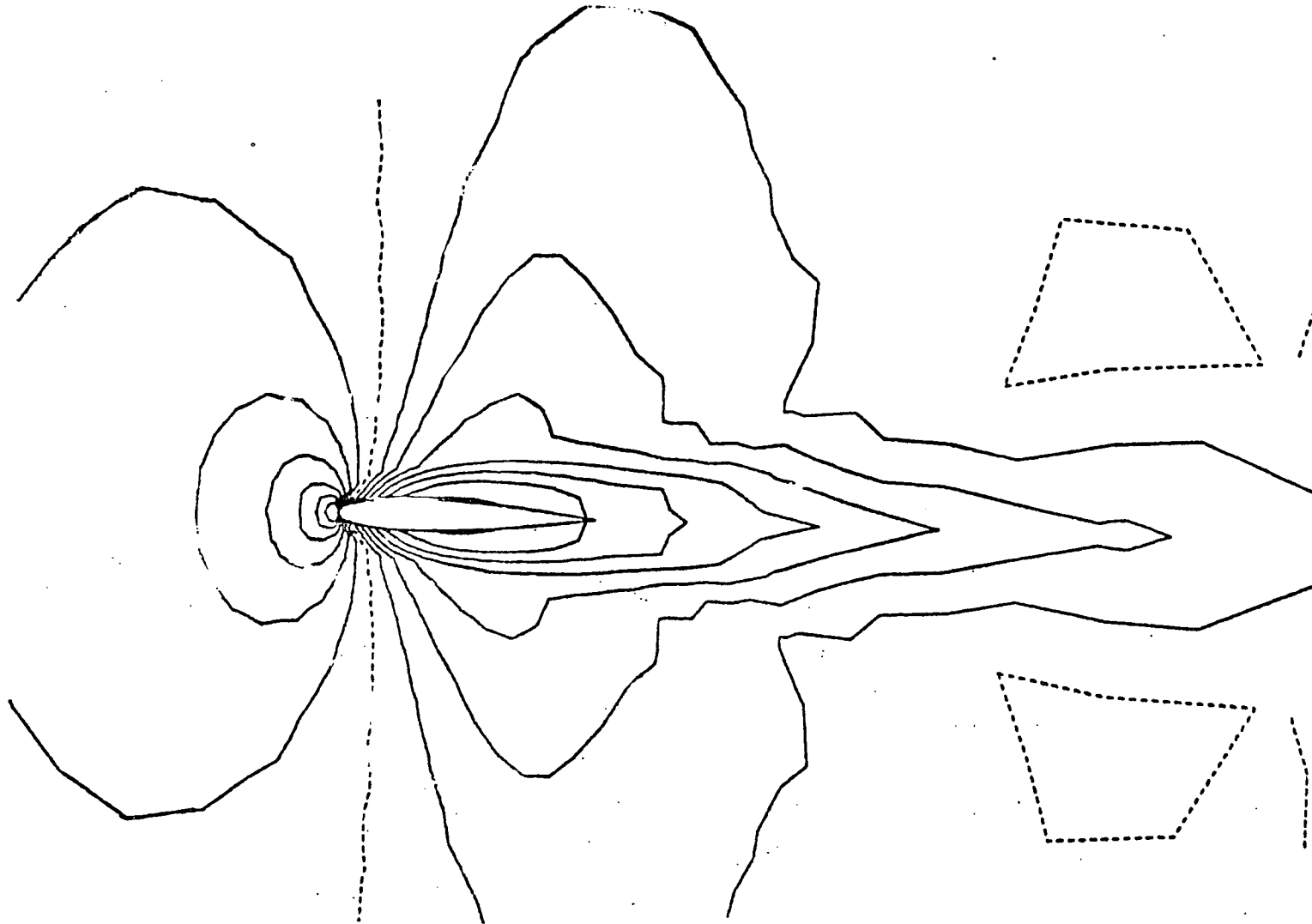


Figure 3

Lignes d'iso-densité, solution convergée (3000 itérations) calculées par le schéma Lax-Wendroff sur naca 3000.

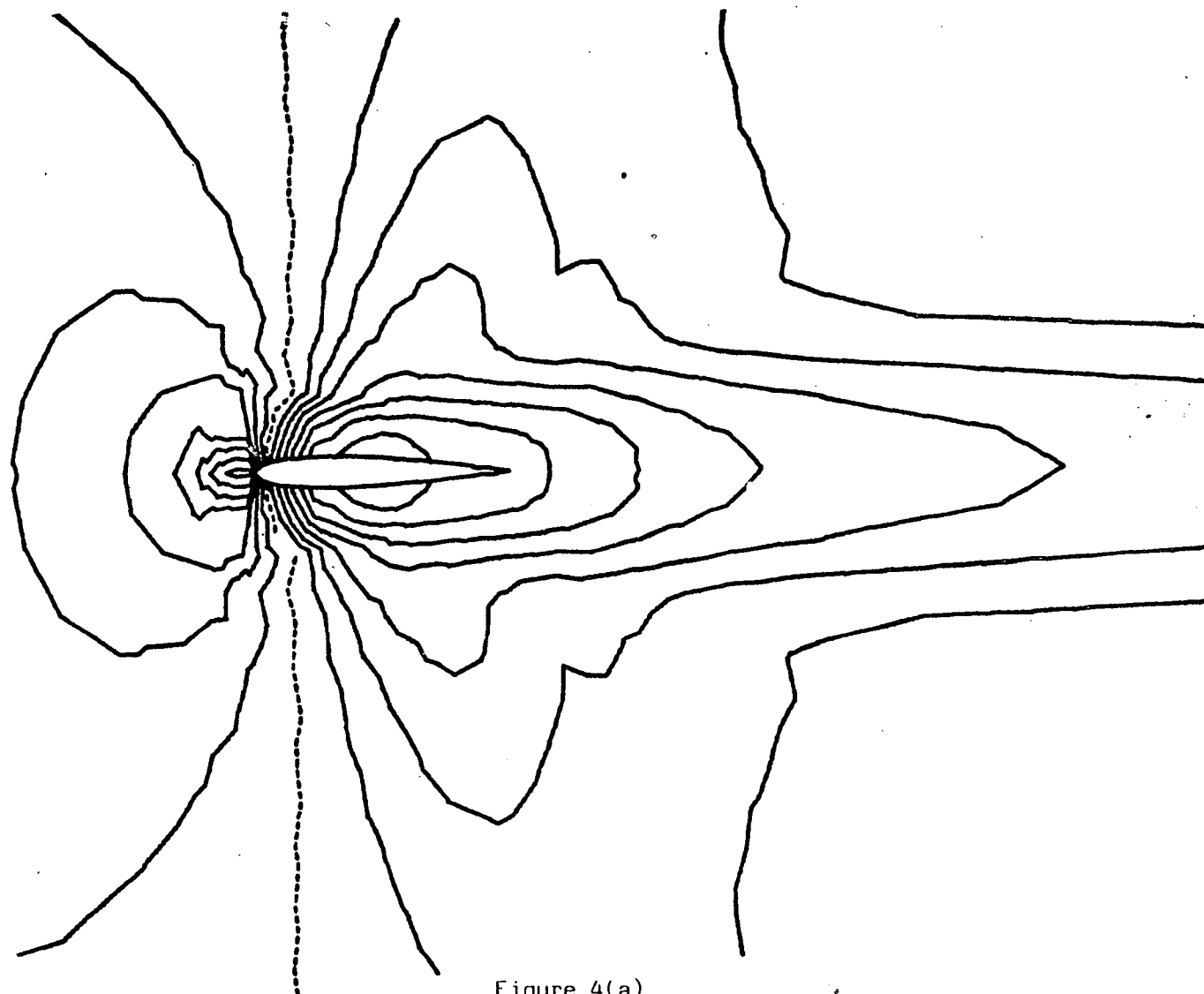


Figure 4(a)

Le schéma Lax Wendroff sur la grille fine (Fig. 2), 680 itérations, lignes d'iso-densité  $m_\infty = 0.85$ ,  
Re = 500. Résidu =  $0.37 \cdot 10^{-3}$

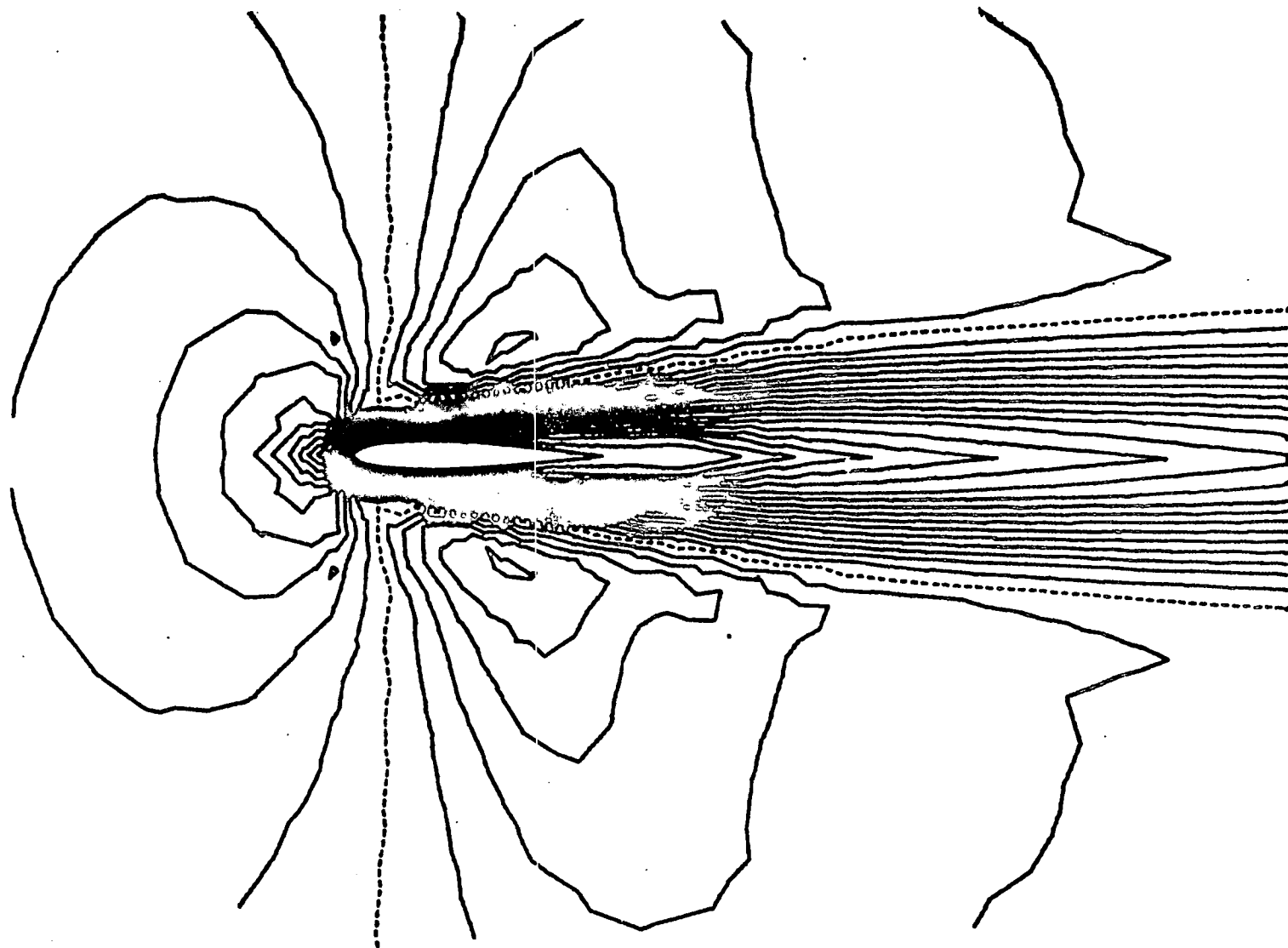


Figure 4(b)

lignes d'isomach  $m_{\infty} = 0.85$  ,  $Re = 500$

Schéma Lax-Wendroff sur la grille fine à 680 itérations.

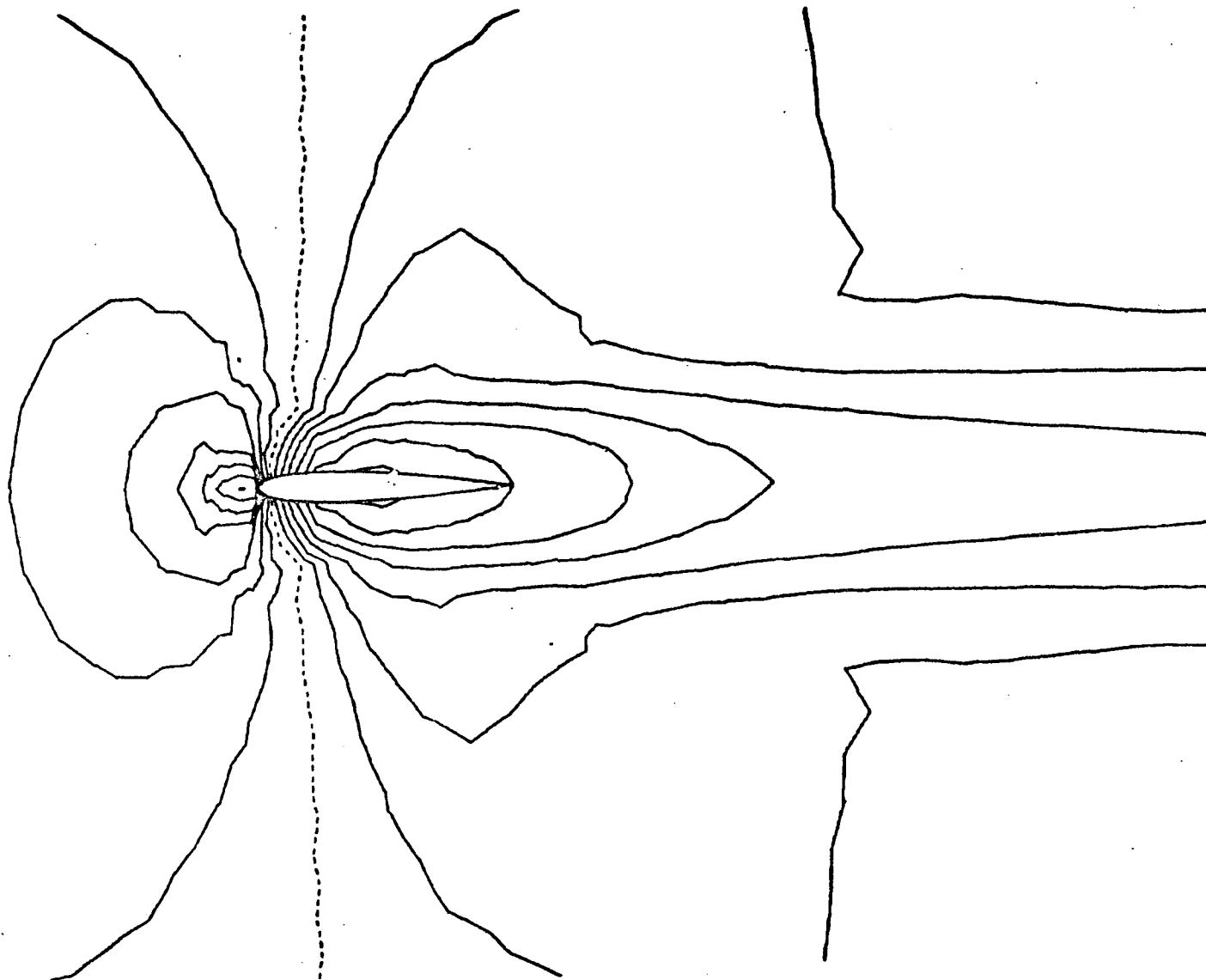


Figure 5(a)

lignes d'iso-densité schéma FMG 100 + 200 + 200 Résidu =  $0.27 \cdot 10^{-3}$   
Re = 500  $m_\infty = .85$

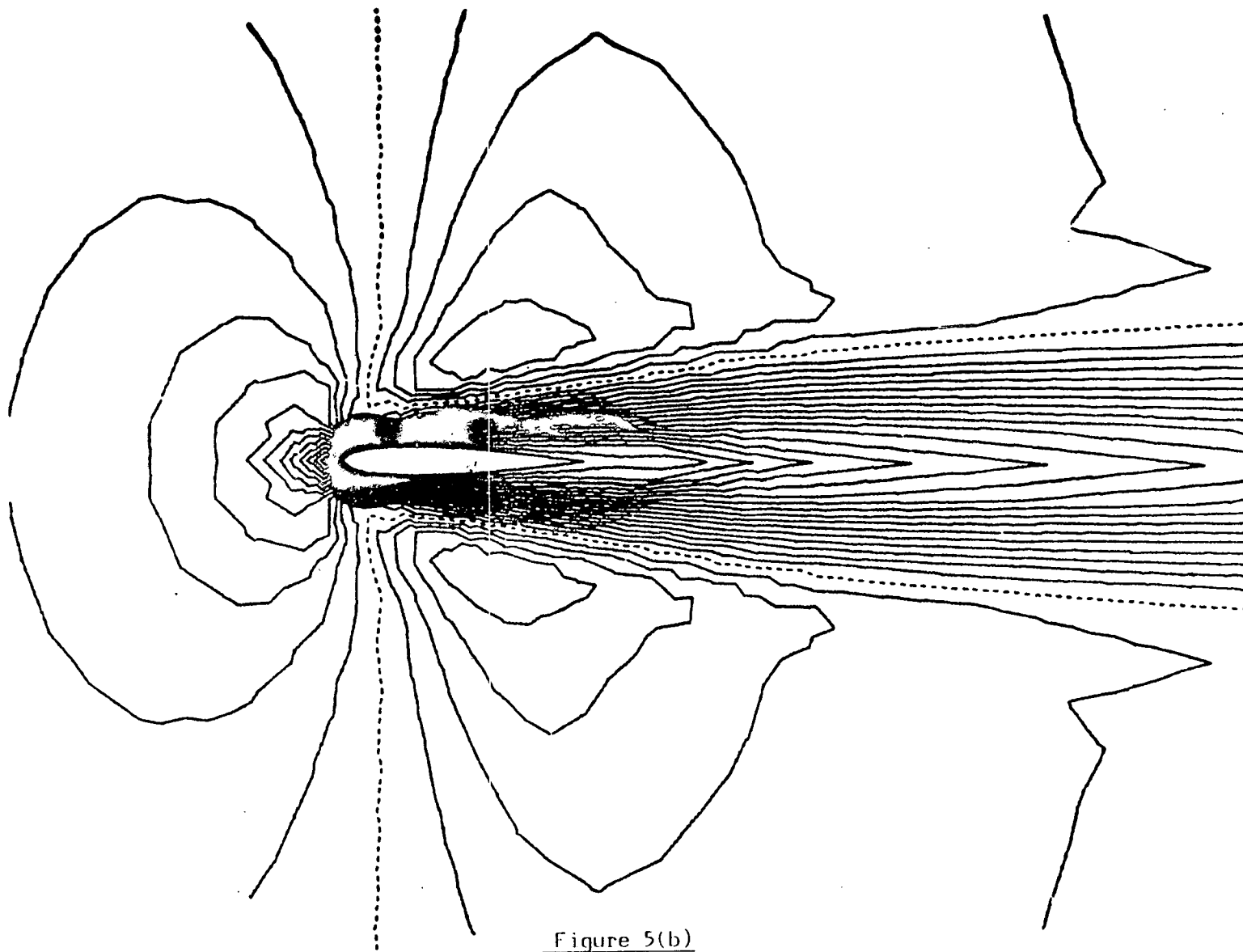


Figure 5(b)

Lignes d'isomach Schéma FMG 100 + 200 + 200 Résidu  $0.27 \cdot 10^{-3}$   
Re = 500  $m_{\infty} = 0.85$

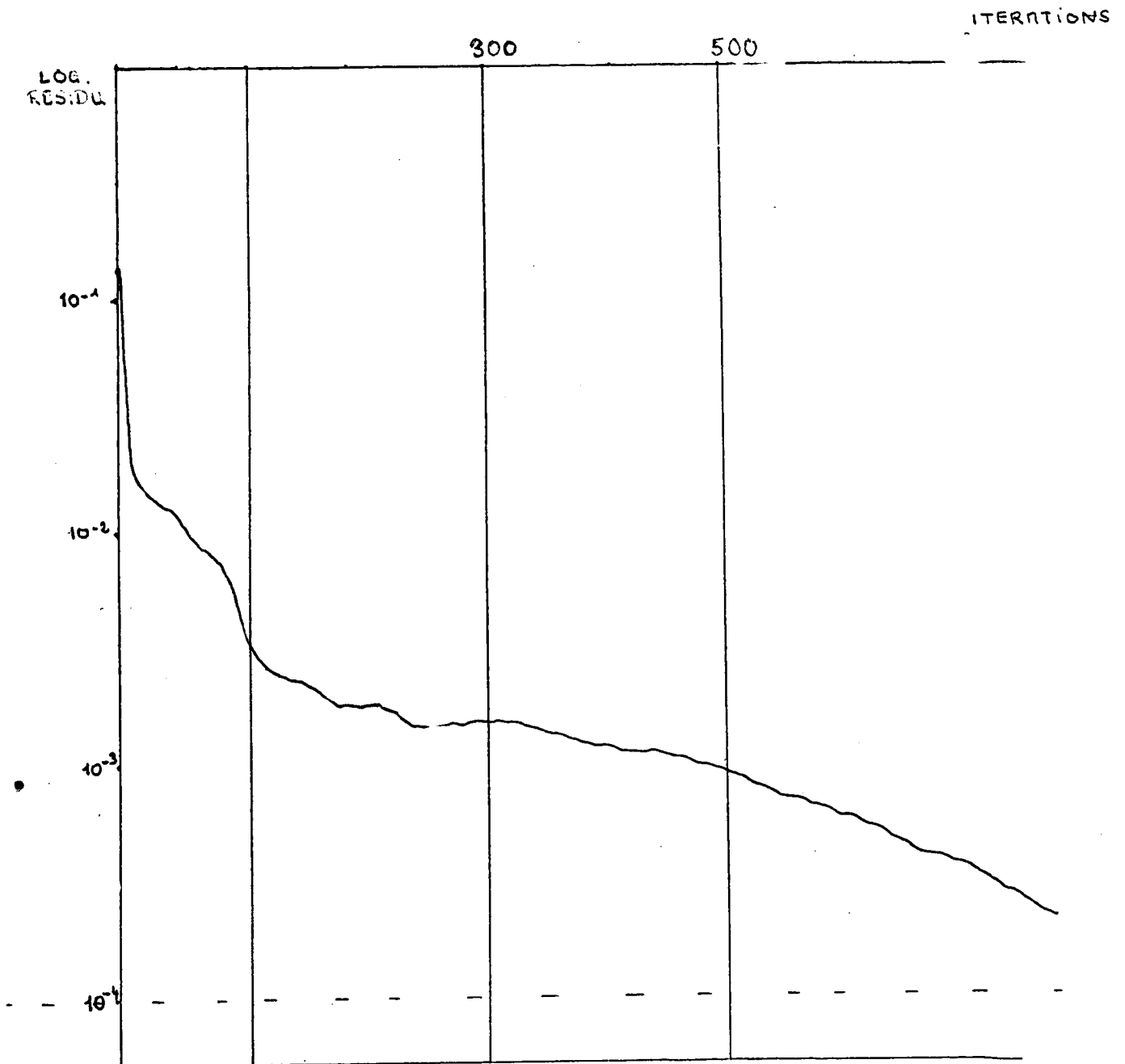


Figure 6(a)

Courbe de convergence - Schéma Lax Wendroff sur la grille fine  
 $m_{\infty} = 0.85$ ,  $Re = 500$



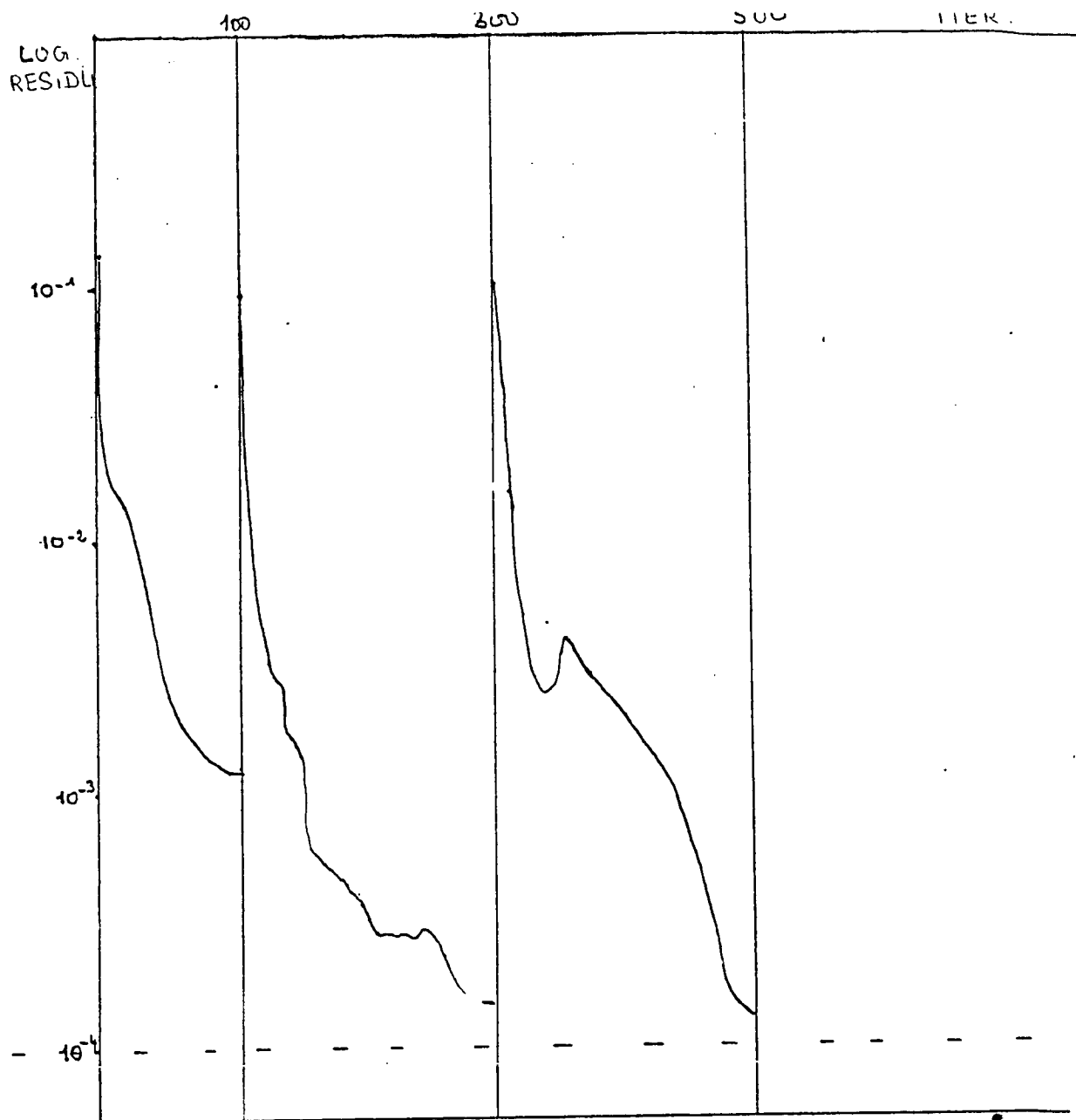


Figure 6(b)

Courbe de convergence FMG.

$m_{\infty} = 0.85$     $Re = 500$

100 + 200 + 200

Résidu  $\sim O(10^{-4})$

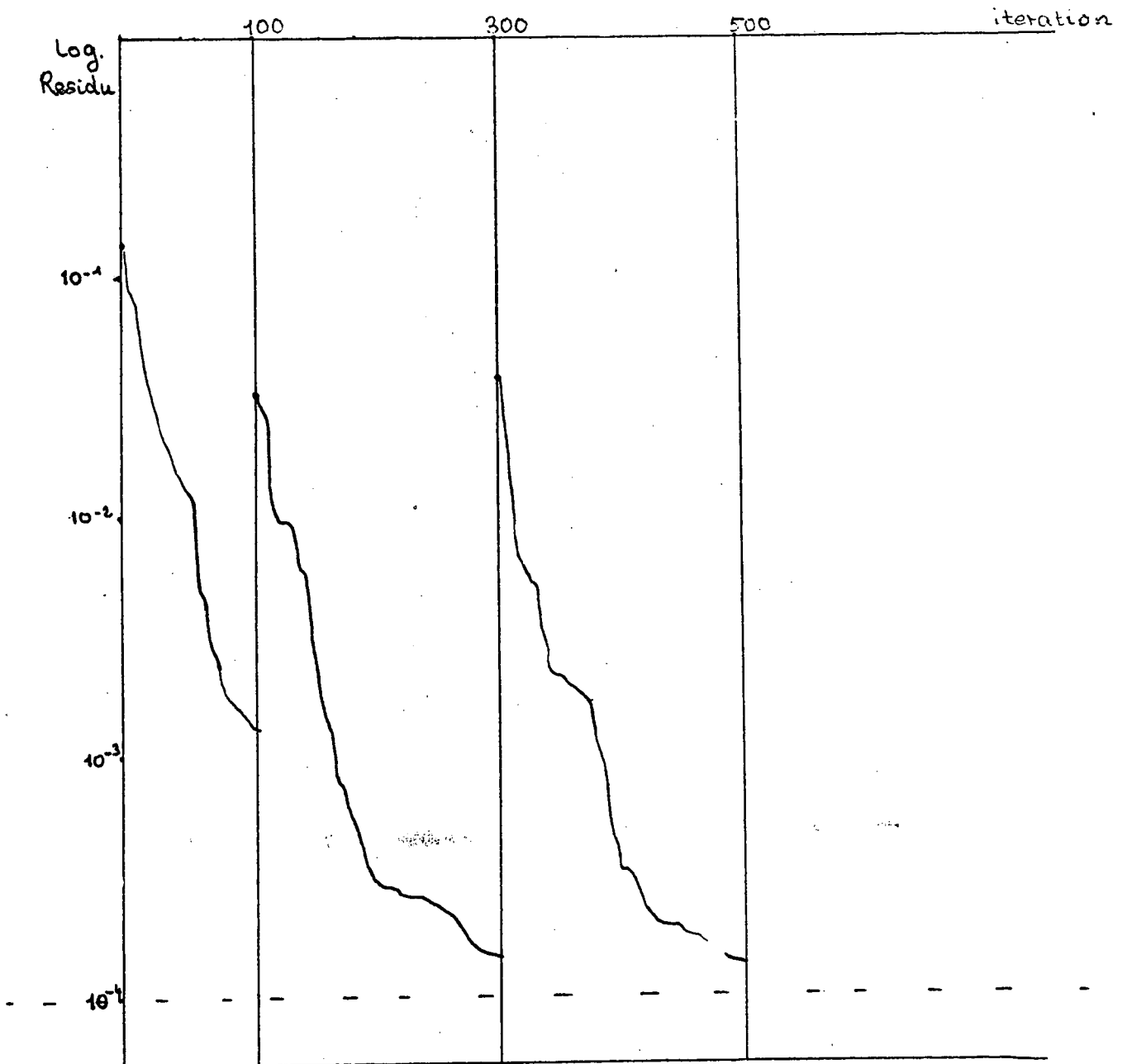


Figure 6(c)

Courbe de convergence FMG avec correction des résidus à la réinitialisation  
 100 + 200 + 200  $m_0 = .85$   $Re = 500$ .

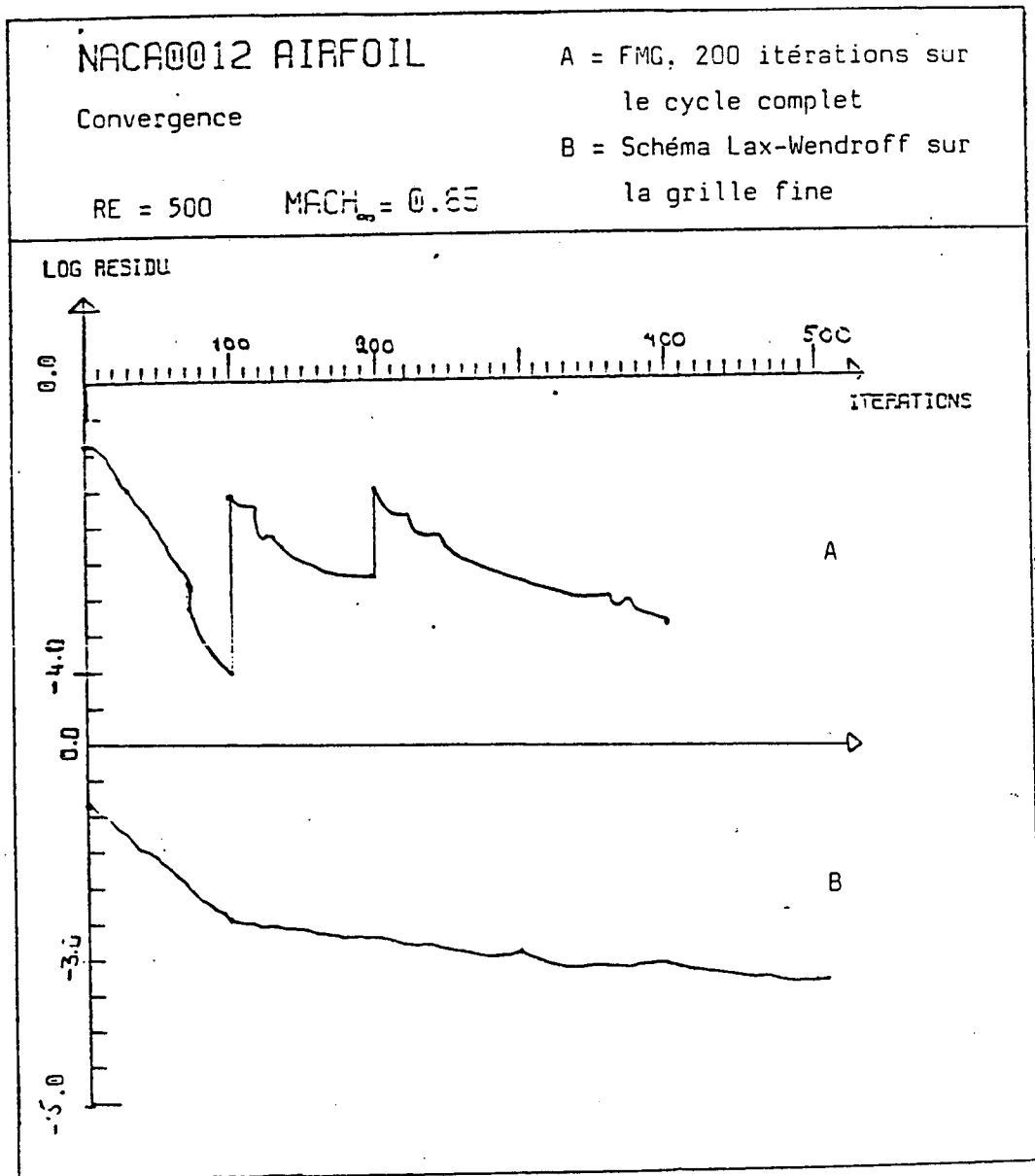


Figure 6(d)

FMG 100 + 100 + 200

Lax-Wendroff monogrid

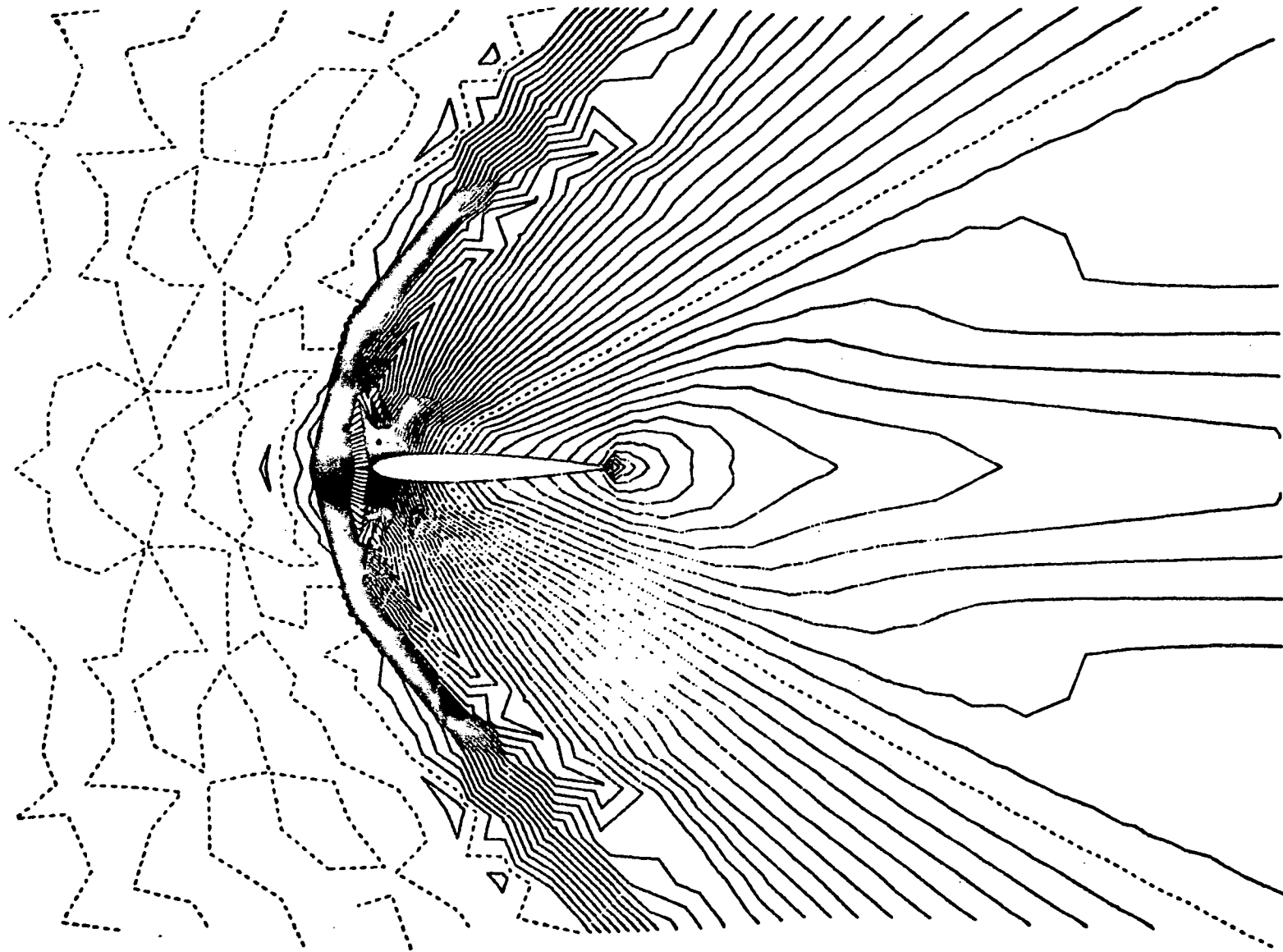


Figure 7(a)

Mach 2,  $Re = 106$

Lignes d'iso-densité

FMG sur la géométrie de la Fig.

100 + 200 + 200

Résidu =

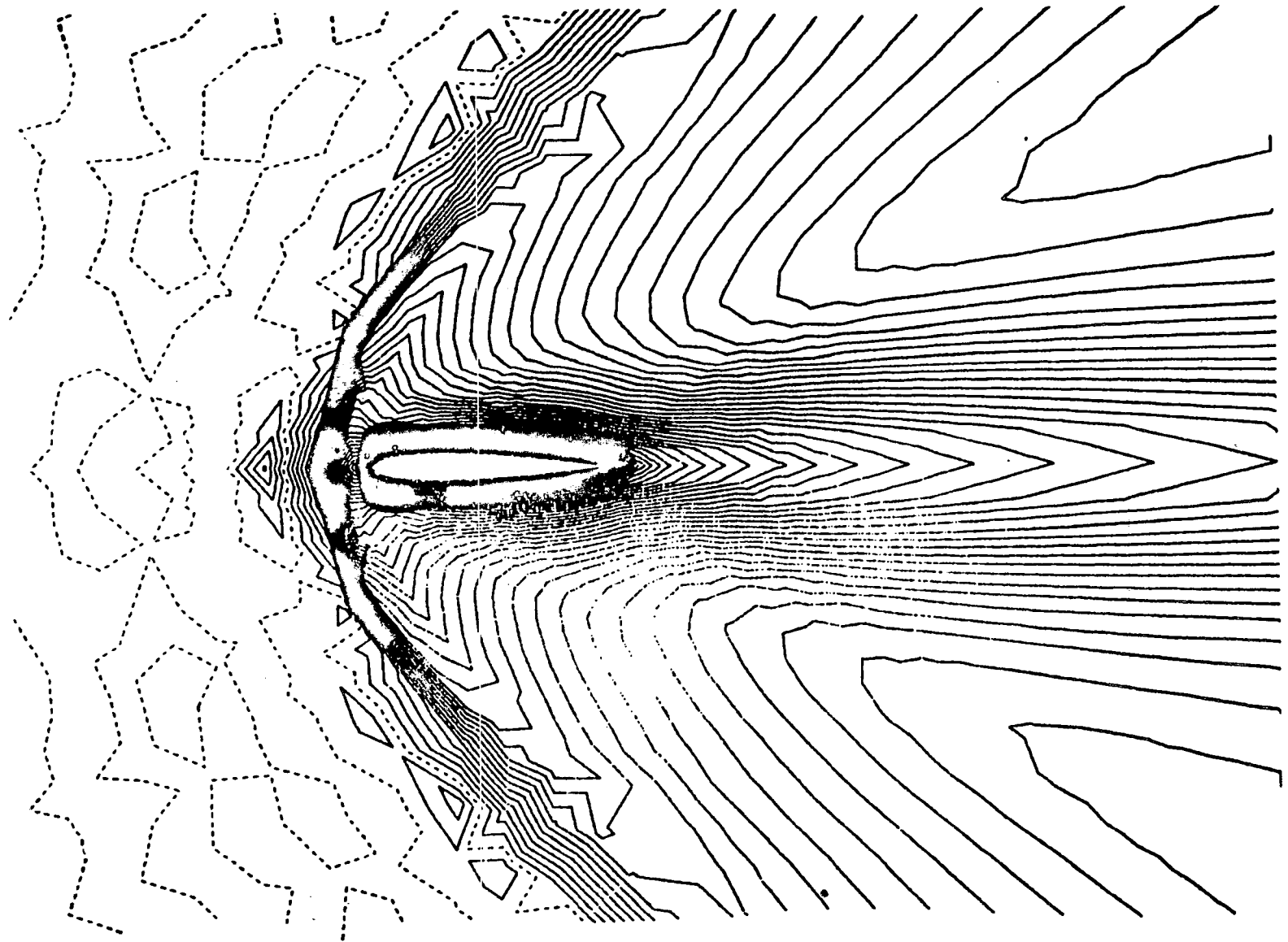


Figure 7(b)

Mach 2,  $Re = 106$  Lignes d'isomach FMG sur la géométrie de la Fig. 100 + 200 + 200  
Résidu =

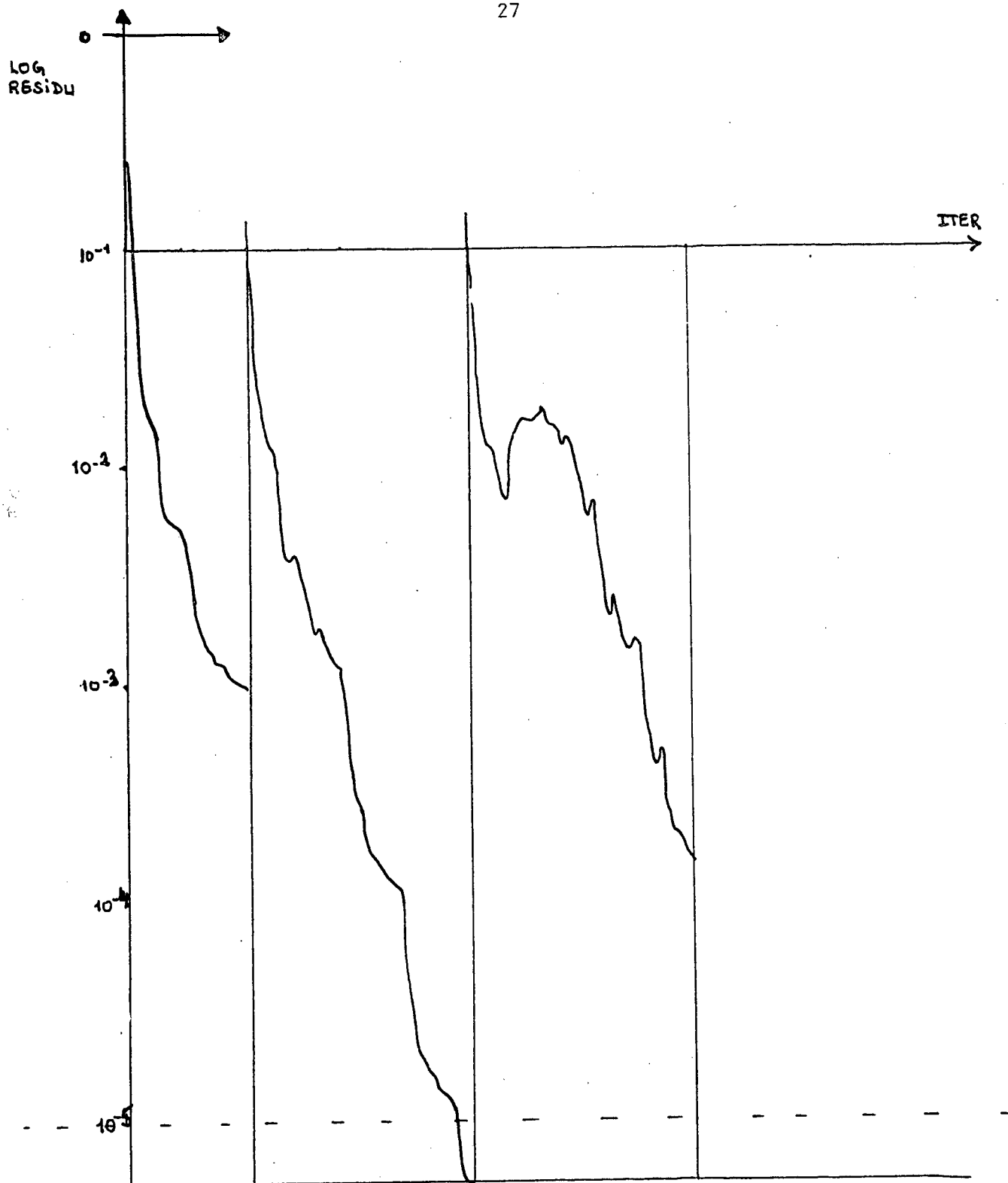


Figure 7(c)

FMG  $m_{\infty} = 2.0$ ,  $Re = 106$ . Courbe de convergence 100 + 200 + 200 itérations  
 Résidual final  $\sim 0(10^{-4})$ .

- [1] PEREZ, E. Finite element and multigrid solution of the two dimensional Euler equations. Rapport INRIA n° : 442. Septembre 1985.
- [2] PEREZ, E. PERIAUX, J. ROSENBLUM, J.P. STOUFFLET, B. Adaptive Full-Multigrid Finite Element Methods for Solving the Two-Dimensional Euler Equations. IC10 NMFD, Pékin (Chine), 1986.
- [3] JAMESON, A. BAKER, T.J., "Multigrid solution of the Euler equations for aircraft configurations". AIAA 22ne Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada. AIAA Paper 84-0093. January 1984.
- [4] BAKER, T.J., JAMESON, A. A novel finite element method for the calculation of inviscid flow over a complete aircraft. 6me Colloque International de la simulation d'écoulements par éléments finis. Antibes juin 1986.
- [5] BRANDT, A. Multi-level adaptative solutions to boundary value problems. Math. Comp. 91. 1977.
- [6] HACKBUSH, W. Multigrid Methods and Applications. Springer Series in Computational Mathematics n°4. Springer-Verlag 1985.
- [7] STUBEN, K. TROTTEBERG, U. Multigrid Methods : Fundamental Algorithms, Model Problem Analysis and App Iterations. Proc. Köln nov 1981. Lecture Notes in Math. 960 Springer. 1982.
- [8] VAN ALBADA, G.D. VAN LEER, B. and ROBERTS, W.W. (1982). A comparative study of computational methods in cosmic gasdynamics. Astron. Astrophys. 108, 76-84.
- [9] ANGRAND, F. Viscous perturbation for the compressible Euler equations. Applications to the numerical simulation of compressible viscous flows.  
Gamm Workshop sur les écoulements de fluides compressibles. Nice Decembre 1985.
- [10] ANGRAND, F. DERVIEUX, A. Some explicite triangular finite element schemes for the Euler equations. Vol. 4, 749-764 (1984).
- [11] Rapport INRIA à paraître.
- [12] LERAT, A. PEYRET, R. 3-D calculation of transsonic viscous flows by an implicit method. 6th AIAA Comp. Fl. Dyn. Conf. Denvers. July 1983.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

