



HAL
open science

Schema multigrille dynamique pour la simulation d'écoulements de fluides visqueux compressibles

F. Angrand, P. Leyland

► **To cite this version:**

F. Angrand, P. Leyland. Schema multigrille dynamique pour la simulation d'écoulements de fluides visqueux compressibles. RR-0659, INRIA. 1987. inria-00075894

HAL Id: inria-00075894

<https://inria.hal.science/inria-00075894>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCOUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. (1) 39 63 55 11

Collection

Rapports de Recherche

N° 659

**SCHÉMA
MULTIGRILLE DYNAMIQUE
POUR LA SIMULATION
D'ÉCOULEMENTS DE FLUIDES
VISQUEUX COMPRESSIBLES**

Françoise ANGRAND
Pénélope LEYLAND

Avril 1987

**SCHEMA MULTIGRILLE DYNAMIQUE POUR LA SIMULATION D'ECOULEMENTS
DE FLUIDES VISQUEUX COMPRESSIBLES**

**SIMULATION OF COMPRESSIBLE FLOW
USING A DYNAMICAL MULTIGRID SCHEME WITH ADAPTED MESHES.**

Françoise ANGRAND

Pénélope LEYLAND

INRIA - Rocquencourt

Résumé :

Un schéma multigrille non-linéaire est étudié pour résoudre des écoulements en aérodynamique bidimensionnelle. Les différents niveaux de grilles sont construits à partir d'un critère de raffinement local dépendant de la solution calculée. Ce schéma s'est révélé plus efficace que celui obtenu sur un seul maillage (la grille la plus fine). Il s'agit donc d'un schéma multigrille de type "full" multigrille pour la partie d'initialisation, avec une méthode itérative de base de type Lax-Wendroff, pour des éléments finis, couplée avec la technique des maillages adaptatifs. Les cas tests présentés ont été calculés sans viscosité artificielle.

Summary :

Some aerodynamic test cases in two dimensions are developed using a non-linear multigrid scheme combined with adapted meshes following the physical solution. The final solution is automatically smoothed, compared to an usual approximate solution obtained by a one mesh scheme, without using artificial viscosity techniques.

1. Introduction

L'approche multigrille en différences finies, couplée avec des méthodes itératives de base bien adaptées aux équations à résoudre, s'est montrée très efficace pour des problèmes d'aérodynamique moderne [1], [2]. Elle a donné des résultats satisfaisants également en éléments finis [3], [4], [5], [6].

La technique des multigrilles présente deux aspects : l'accélération de la résolution itérative, (efficacité en convergence itérative), et l'efficacité dans le raffinement des maillages (convergence de l'approximation). Nous désignerons par multigrilles globales les algorithmes dans lesquels les différentes grilles sont obtenues par division uniforme, permettant ainsi des interpolations évidentes lors des transferts d'information d'une grille à l'autre. Cette technique de raffinement est coûteuse en place mémoire, ainsi qu'en temps de calcul, puisqu'elle n'est plus, au delà de la grille grossière, adaptée à la solution physique à calculer. De grandes zones, peu importantes pour la solution exacte, se trouvent subdivisées, alors que d'autres zones nécessitant plus de précision ne sont pas suffisamment raffinées. Cependant dans le contexte de maillage non-structuré, cette méthode, simple à mettre en oeuvre et dont l'interprétation des transferts est aisée, a donné des résultats encourageants pour la résolution des équations d'Euler, [4], [5], ou la résolution des équations de Navier-Stokes [6], par une méthode d'éléments finis. La grille fine qui résulte de cette construction manque de précision, et donc l'efficacité réelle de la méthodologie multigrille globale est donc discutable.

Or, la flexibilité géométrique des éléments triangulaires permet des processus de raffinement local : les triangulations qui en résultent, ont leurs noeuds respectifs accessibles par adressage indirect. L'approche globale doit alors être modifiée. Pour avoir des interpolations linéaires entre les diverses grilles, ces triangulations doivent être déduites par raffinements successifs d'un maillage initial déjà bien adapté au cas de calcul. La génération de ce maillage initial est très importante : peu de points, mais bien répartis, la géométrie bien respectée ... etc. A partir de ce maillage initial, et de sa solution correspondante, la grille suivante est construite selon une technique de sous-maillage adapté, et

donc elle est différente selon chaque cas de calcul, (équations d'Euler ou de Navier-Stokes, régime transsonique ou supersonique, capture de chocs ou de tourbillons, angle d'incidence du corps, ... etc). Les niveaux de grille suivants sont construits par la même technique. Les triangulations successives ainsi obtenues dépendent non seulement de la géométrie et d'une estimation a priori des zones critiques du domaine de calcul, mais aussi de la solution. De grandes zones restent souvent non divisées, (loin du corps en aval ou loin des chocs..., par exemple), et dans ces régions non raffinées la technique multigrille doit être réduite à des calculs de type monogrille. Des schémas numériques adaptés à chaque zone sont donc envisagés et conduisent à des schémas multigrilles de type "dynamique". Ceci raccorde la méthodologie multigrille à celle des maillages adaptatifs.

2. La méthodologie multigrille

Nous présentons dans ce paragraphe le schéma multigrille que nous employons, et la manière de le coupler avec la méthode de maillages adaptatifs. Cela constitue l'idée de base du schéma multigrille local que nous développons actuellement. Nous employons ici un schéma multigrille non-linéaire de type "Full Approximation Storage" - FAS - [7], avec une phase d'initialisation par l'approche "Full Multigrid iteration" - FMG - [8]. L'approximation spatiale est de type éléments finis. Les différents niveaux de discrétisation sont obtenus par des raffinements successifs d'un maillage grossier déjà bien adapté au cas de calcul.

Nous nous intéressons au calcul de solutions stationnaires d'un système instationnaire : l'intégration en temps du modèle semi-discretisé tend vers ces solutions. La philosophie multigrille pour ces problèmes pseudo-instationnaires [6] repose sur le choix d'un schéma instationnaire comme méthode itérative de base, (MIB), le cycle multigrille remplaçant l'itération en temps dans un algorithme monogrille.

Cette méthode itérative de base, pour les cycles multigrilles et pour les itérations internes à chaque niveau, est un schéma de Lax-Wendroff, d'ordre deux, de type Galerkin centré, pour l'approximation spatiale, et multi-pas en temps (prédicteur / correcteur). Ce schéma s'est montré performant pour la résolution des équations de Navier-Stokes ou d'Euler [9], [10]. En différences finies, les schémas de Lax-Wendroff se sont montrés utiles dans des algorithmes multigrilles [2], [25].

2.1. Historique

Le développement de méthodes multigrilles appliquées à des problèmes instationnaires et hyperboliques ont donné lieu à peu de résultats théoriques, contrairement aux systèmes elliptiques [7], [8]. Cependant elles ont eu un certain succès dans la recherche des solutions dynamiques des systèmes de lois de conservation, lorsqu'on emploie des techniques de continuation [11], [12]. Dans ce contexte, les différents niveaux correspondent à des séries de paramétrisations, qui définissent des arcs, de plus en plus rapprochées.

D'autre part, des schémas multigrilles combinés à des méthodes multi-pas en temps de type Runge-Kutta, ont été utilisés également avec succès pour déterminer des solutions stationnaires de systèmes régis par les équations d'Euler [1], [14], [15]. Dans ce cas, un modèle semi-discrétisé en espace est construit en écrivant les lois de conservation sous forme intégrale sur chaque cellule de la discrétisation spatiale. L'intégration en temps vers un état stationnaire de ce modèle s'effectue ensuite par un schéma de type "time-stepping" pseudo-instationnaire, implicite ou explicite. Le pas de temps optimal augmente avec la taille caractéristique de la discrétisation spatiale. La combinaison de la méthode multigrille et du schéma "time-stepping" devrait alors assurer la convergence. Cette philosophie donne de bons résultats en différences finies, [14], [15], où les différents niveaux de discrétisation sont construits d'une façon évidente, (un point sur deux, une ligne sur deux, dans chaque direction ...).

Il faut aussi mentionner les méthodes multigrilles, dites algébriques, dans lesquelles les niveaux successifs sont déduits algébriquement de la grille fine : ce qui permet de concevoir plus facilement des méthodes s'appliquant à des maillages non-structurés [3], [5], [24].

L'idée de base d'un algorithme multigrille est la suivante : des corrections sont calculées sur une grille grossière, la solution est approchée sur la grille fine. Les opérations d'interpolation et de restriction de ces corrections (solutions sur les différents niveaux) sont simplifiées dans le cas où les noeuds de la grille la plus grossière sont systématiquement des noeuds des grilles suivantes, (grilles emboîtées).

Pour des éléments finis, combinés à une méthode de raffinement local, la construction de la méthode multigrille est plus complexe ; ici, nous avons employé un générateur de maillage non structuré pour la grille grossière, les grilles suivantes sont construites par la technique de maillages adaptatifs décrite plus haut.

2.2. Equations et résolution sur une grille

Les systèmes à résoudre sont de la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dW}{dt} + L(W) = 0 \quad \text{sur } \Omega \in \mathbb{R}^d \\ + \text{conditions aux bords} \\ + \text{conditions initiales} \end{array} \right.$$

L est un opérateur différentiel aux dérivées partielles, non-linéaire de non-linéarité en général quadratique.

On considère une triangulation $\{\mathcal{T}_h\}$ de Ω . Soit Ω_h , le domaine discrétisé de Ω par cette triangulation. L'approximation de Galerkin de (1) par des éléments finis P_1 s'écrit

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_h} \frac{W^{n+1} - W^n}{\Delta t_h} \cdot \phi_h \, dx dy = \int_{\Omega_h} \vec{L}_h(W^n) \cdot \nabla \phi_h \, dx dy \\ \int_{\partial \Omega_h} (\vec{L}_h(\bar{W}^n) \cdot \vec{n}) \phi_h \, d\sigma \\ \forall \phi_h \in V_h \\ V_h = \{ \phi \in C^0(\bar{\Omega}_h) / \phi|_T \in P_1, \forall T \in \mathcal{T}_h \} \end{array} \right.$$

On dénote par L_h l'opérateur discrétisé de L , qui comprend aussi les termes de dissipation artificielle éventuels. Δt_h représente un pas de temps local, \bar{W}^n est une estimation de W^n calculée aux bords, qui prend en compte les conditions limites.

Partant de (2) on peut construire un schéma prédicteur/correcteur de type Lax-Wendroff, qui est une approximation centrée en espace avec avance en temps à deux pas.

(2) s'écrit sous la forme d'un étape prédicteur :

$$(3) \quad W^P(T) = \frac{1}{\text{aire}(T)} \left\{ \iint_T W^n \, dx dy - \alpha \Delta t \int_{\partial T} \vec{L}_h(W^n) \cdot \vec{n} \, d\sigma \right\} \forall T \in \mathcal{T}_h$$

et d'une étape correcteur :

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \iint_{\Omega_h} \Sigma_0 \frac{W^{n+1} - W^n}{\Delta t} \Sigma_0 \phi_h \, dx dy &= c_1 \iint_{\Omega_h} \vec{L}_h(W^n) \cdot \nabla \phi_h \, dx dy \\ &+ c_2 \iint_{\Omega_h} \vec{L}_h(W^P) \cdot \nabla \phi_h \, dx dy \\ &- \int_{\partial \Omega_h} \phi_h (\vec{L}_h(\bar{W}) \cdot \vec{n}) \, d\sigma \\ &+ \chi \iint_{\Omega_h} f(W^n) \langle \nabla W^n, \nabla \phi_h \rangle \, dx dy \end{aligned} \right.$$

$\forall \phi_h \in V_h$

Le dernier terme est un terme de viscosité artificielle, où χ est un coefficient, qui localise les chocs et ajoute un peu de dissipation supplémentaire aux termes visqueux de l'opérateur L_h . Ce terme n'est pas une perturbation des équations de départ, (1), et n'agit pas exactement comme un terme de régularisation de résidu.

2.3. Construction d'une suite de triangulations emboîtées

Les différents niveaux de discrétisation de Ω seront dénotés par $\Omega_H, \Omega_{H-1}, \dots, \Omega_h$, du plus grossier au plus fin. La triangulation $\{\mathcal{T}_H\}$ de Ω_H est générée par un mailleur automatique à partir des données géométriques du problème [16] et d'une estimation des zones critiques à raffiner, certaines zones et lignes de points étant choisies naturellement.

Une première solution de (1) est calculée sur Ω_H par le schéma de Lax-Wendroff, avec un coefficient de viscosité artificielle non-négligeable en raison du faible nombre de points du maillage. A partir de cette première solution, Ω_{H-1} est construite en raffinant les zones critiques : chocs, variations de densité.... Pour un écoulement autour d'un profil d'aile NACA0012, dans un cas transsonique, ce sont essentiellement les zones autour du corps et dans son sillage qui sont raffinées. Dans un cas supersonique, ce sont les zones autour du choc décollé à l'avant, d'interaction couche-limite/choc, et du sillage qui deviennent importantes. Déjà au niveau du maillage grossier, ces zones sont définies et les triangles y sont moins grossiers (voir Fig 1 : le maillage grossier, cas transsonique ; et Fig 2 : cas supersonique). Après calcul d'une solution intermédiaire sur Ω_{H-1} , un maillage plus fin est

obtenu à partir de cette nouvelle solution. Les critères de raffinement local dépendent des variations des quantités physiques : norme du gradient du Mach (supersonique), produit vectoriel vitesse-gradient du Mach (couche-limite), variations de l'entropie (chocs)...etc. Les différents triangles du niveau grossier que l'on cherche à raffiner par ces critères sont ainsi divisés en deux ou en quatre. Cette division n'est pas forcément faite sur tous les triangles du maillage grossier. Le maillage ainsi obtenu est ensuite complété afin de ne pas créer des éléments non-conformes. Pour plus de détails sur ces techniques, on peut se référer à [21], [22].

2.4. Méthode multigrille à 2 grilles

Rappelons ici le cycle classique de deux grilles - (Ω_H, Ω_h) . Il s'agit de résoudre (1) sur la grille fine, Ω_h , avec des corrections calculées sur la grille grossière Ω_H . On a alors

$$(5) \quad \begin{aligned} L_h(W) &= 0 \text{ sur } \Omega_h \\ \text{et } W &= W_h^n + v_h. \end{aligned}$$

W_h^n est la solution approchée, calculée par n-itérations d'une méthode itérative de base de résolution de (1) sur Ω_h . v_h est l'erreur.

L'équation de correction sur Ω_H s'écrit :

$$(6) \quad L_H(I_H^h W_h^n + v_H) - L_H(I_H^h W_h^n) = I_H^h r_h(W_h^n).$$

I_H^h est l'opérateur de restriction de Ω_h dans Ω_H ; pour des triangulations emboîtées, I_H^h est une simple injection : chaque noeud de Ω_H est un noeud de Ω_h .

La correction v_H peut être définie comme

$$(7) \quad v_H = W_H - I_H^h W_h^n.$$

avec l'équation suivante à résoudre sur Ω_H pour définir W_H :

$$(8) \quad L_H(W_H) = L_H(I_H^h W_h^n) - I_H^h [L_h(W_h^n)]$$

Sur Ω_H , Δt_H est relativement plus grand, le nombre de noeuds est moindre, les calculs sont moins nombreux par itération, et la convergence vers l'état stationnaire (où $L(W) = 0$) est plus rapide. Après résolution de (8), W_H est transféré en tant que correction, (7), sur Ω_h par interpolation linéaire :

$$(9) \quad W_h^{\text{nouveau}} = W_h^{\text{ancien}} + I_h^H (W_H - I_H^h W_h^n).$$

$\{I_h^H\}$ sont les opérateurs d'interpolation des valeurs calculées aux noeuds de \mathcal{T}_H à \mathcal{T}_h .

La matrice pour un cycle complet multigrille - injection, correction, interpolation - avec ν itérations de la MIB par cycle s'écrit symboliquement

$$(10) \quad M_h^H = \{ \text{Id} - I_h^H L_H^{-1} I_h^h \} L_h^\nu$$

(L_h représente aussi la matrice interne de la MIB).

Par analogie avec le cas elliptique, une vitesse de convergence peut être estimée par

$$\rho(M_h^H) \sim \|M_h^H\|_V$$

$\|\cdot\|_V$ - norme d'un espace fonctionnel adéquat pour la discrétisation de (1) et les solutions approchées des solutions stationnaires de (1).

Le cycle 2-grilles multigrille, se résume :

- (a) On effectue quelques itérations d'une MIB sur Ω_h pour résoudre (2).
On obtient W_H^h .
- (b) On calcule $\Omega_h(W_H^h)$.
On projette par I_h^h sur Ω_H .
On obtient l'équation (8).
On résout cette équation de correction avec (Δt_H) par la MIB.
- (c) On interpole le résultat de (b).
On obtient ainsi une correction sur Ω_h .
- (d) On effectue quelques itérations de la MIB avec (Δt_h) pour obtenir W_h^{n+1} .

L'extension à plusieurs grilles est évidente : la philosophie reste la même, les équations de correction sont résolues sur les grilles les plus grossières ; leurs solutions sont interpolées pour corriger le calcul de la solution sur la grille fine.

Le stade d'initialisation (a) est remplacé par l'algorithme "Full Multigrid" - FMG.

(a₁) On résoud (2) sur Ω_H par intégration en temps selon (3) et (4), jusqu'à une solution $W_H^{n_1}$. On réinitialise sur Ω_{H-1} par

$$(11) \quad I_{H-1}^H W_H^{n-1} + f_{H-1} = W_{H-1}^0$$

où f_{H-1} représente la correction apportée à $W_H^{n_1}$ par les conditions limites données sur Ω_{H-1} .

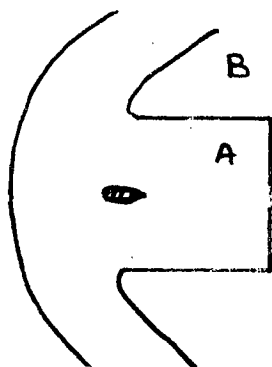
(a₂) On résoud le système (2) par la méthode multigrille avec deux-grilles développée ci-dessus, avec n_2 -cycles, jusqu'à une valeur petite du résidu ($L(W_H^{n_2}) - 0$). Cette solution est ensuite réinitialisée sur Ω_n par (11),

(a₃) On effectue le cycle complet multigrille avec 3 grilles pendant n_3 -itérations.

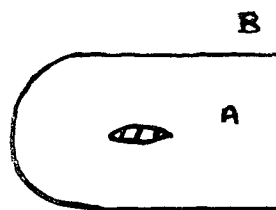
En pratique le résidu $L(W_H^{n_1})$ stagne assez rapidement à $0(10^{-3})$, ($n_1 \sim 80$ itérations dans tous les cas présentés ici) à cause de Δt_H et de la viscosité interne du maillage. Cependant n_2 et n_3 doivent toujours être du même ordre, soit de l'ordre de 200 itérations en pratique pour un maillage fin de plus de 2000 noeuds.

3. La méthode multigrille locale

La construction successive de $\Omega_H, \Omega_{H-1} \dots \Omega_n$ par un raffinement local lié aux solutions intermédiaires modifie l'algorithme global FMG aux niveaux des interpolations et des réinitialisations (10), (11). Le raffinement se présente par zones avec une zone de raccordement en bordure, " ∂A " :



cas supersonique



cas transsonique

Les triangles de Ω_H se trouvent divisés en deux ou non-divisés dans la zone B et en quatre dans la zone A, selon le critère choisi pour sous-mailler. Ensuite un raccordement est effectué autour de A pour que \mathcal{T}_{H-1} soit une triangulation admissible (éléments finis conformes). Les opérateurs d'interpolation $\{I_{H-1}^H\}$ doivent être maniés différemment selon cette division, (la division en 3 est interdite). L'opération (11) de réinitialisation entre chaque étape du schéma FMG n'est effectuée qu'aux triangles raffinés. La précision du calcul de la solution $\{W_h\}$ est donc améliorée par cette technique de raffinement. L'intégration de cette technique dans le schéma multigrille permet de transférer des corrections précises, calculées sur des sous-maillages représentatifs, ce qui tend à optimiser l'approche multigrille. En différences finies, l'accélération du schéma multigrille par cette décomposition par zones avec raccordement pour les différents niveaux, a déjà fait ces preuves [13]. Le choix du maillage grossier de départ est crucial ; c'est à partir d'une solution approximative calculée sur celui-ci que les autres grilles seront construites.

L'algorithme de raffinement local combiné avec une méthode multigrille locale peut être présenté par les stades suivants :

STADE 1 : Construction d'une géométrie multigrille.

- (a) On génère un maillage grossier, (moins de 300 noeuds), avec une répartition des points adaptée au cas de calcul en question.
- (b) On calcule une solution stationnaire (convergée) par la MIB sur ce maillage. Un coefficient de viscosité artificielle χ non-nul est nécessaire pour assurer la convergence en raison du faible nombre de points.

- (c) On utilise une procédure de maillage adaptatif : en fonction de la solution (b) sur (a), les zones critiques (chocs, couche limite, ...etc) sont raffinées, (division non-uniforme par deux ou par quatre des triangles concernés). Un deuxième maillage est ainsi obtenu, (contenant de l'ordre de deux et demi à trois fois plus d'éléments que le premier).
- (d) On retourne en (b) pour obtenir une nouvelle solution sur (c), (la valeur du coefficient χ peut être réduite puisque le nouveau maillage est plus fin et mieux adapté) ; ensuite, (c) est effectué à nouveau pour définir une nouvelle grille plus fine.
- (e) On construit une structure de données pour la méthode multigrille locale, avec les triangulations successives stockées en pile et avec leur index de division par deux ou par quatre pour chaque raffinement.

STADE 2 : Schéma FMG local

- (a) On effectue n_1 itérations de la MIB sur la grille grossière en tant que monogrille jusqu'à convergence ; on obtient ainsi la solution "stationnaire" sur cette grille :

$$\{W^{(0)}\} \rightarrow \int dt \left[\begin{array}{c} \text{modèle} \\ \text{discrétisé} \end{array} \right]_H \rightarrow W_H^{n_1}$$

- (b) On initialise une solution sur la grille (H-1)

$$I_H^{H-1}(W_H^{n_1}) + G_H^{H-1}(W_H^{n_1}) \rightarrow W_{H-1}^{(0)}$$

où G_H^{H-1} est l'opération d'interpolation du résidu absolu de la solution $W_H^{n_1} \sim \min |W_H^v - W_H^{v-1}|$, plus un terme qui prend en compte les conditions limites aux noeuds supplémentaires de Ω_{H-1} .

- (c) On effectue n_2 cycles bigrilles entre Ω_{H-1} et Ω_H jusqu'à obtention d'une précision correcte de la solution.

$$W_{H-1}^{(0)} \rightarrow W_{H-1}^{n_2}$$

- (d) On réinitialise une solution initiale sur la grille suivante (plus fine).

(e) On effectue n_3 cycles trigrilles entre $\Omega_h, \Omega_{H-1}, \Omega_H$.

Remarques :

Chaque grille étant construite par raffinement local, les opérateurs d'interpolation $\{I_H^{H-1}\}$, d'initialisation $\{G_H^{H-1}\}$, $\{W_H\}$ sont différents pour chaque type de triangles, (division par deux ou par quatre entre chaque grille). De même, l'allocation des nouveaux noeuds n'étant pas forcément au milieu de chaque côté de l'ancien triangle de la grille précédente, il faut prendre certaines précautions dans l'estimation de ces interpolations linéaires, ainsi que dans le stockage des valeurs de la matrice L_h , (tableau de connexion). La précision supplémentaire apportée à la solution par l'accélérateur "multigrille" raffinement local est très appréciable (voir Paragraphe 4).

Sur le niveau le plus bas, le schéma devient "global" ; alors que pour les niveaux supérieurs, le calcul est "local", en effet lorsqu'il y a division par raffinement les opérations du schéma multigrille sont locales.

4. Résultats

Nous travaillons dans le cadre des équations de Navier-Stokes compressible pour (1), où L contient également les flux visqueux [6].

a) Présentation des figures

Les figures (2) à (6) illustrent les différents maillages utilisés pour construire les géométries multigrilles (référéncées "GEOMET 1 à 4"). Les grilles grossières (2) et (5) sont générées par un mailleur automatique développé sur mini-ordinateur (Appollo) par [16]. Le raffinement des zones critiques peut être contrôlé. Une limite supérieure du nombre de points pour cette grille grossière est fixée à 300 noeuds. Ce maillage initial est donc déjà adapté, au sens où la répartition des points est modifiée par une connaissance a priori des phénomènes. Ensuite, les niveaux supérieurs sont obtenus par la technique de raffinement local selon le critère de recherche des maxima de

$$\frac{(\vec{u} \cdot \nabla M + \vec{u} \wedge \nabla M) \cdot L}{\| \vec{u} \cdot \nabla M + \vec{u} \wedge \nabla M \|}$$

\vec{u} = vitesse, M = Mach, L = distance du point considéré au corps.

D'autres critères peuvent être utilisés pour améliorer ces raffinements. Cependant, bien que ces maillages ne soient pas optimaux, ils suffisent pour mieux calculer la solution avec un plus faible nombre de points pour la grille fine (entre 1000 et 2000 points), comparé à des maillages construits par division uniforme (environ 3200 points), [6]. Ceci est bien illustré par les figures suivantes (de 8 à 23), qui comparent les résultats de la méthode multigrille locale avec ceux obtenus par la méthode "globale", ([6]).

Liste des figures "géométrie"

- (2) zoom autour du NACA0012 :
grille grossière pour un cas transsonique
Mach , $M_{\infty} = 0.85$
Reynolds, $Re = 500$
nombre de noeuds, $ns = 233$
nombre de triangles, $nt = 428$
- (3) zoom autour du NACA0012 :
3ème niveau de raffinement local pour le même cas test (2)
 $ns = 1251$, $nt = 2412$
- (4) zoom du 4ème niveau sous le cas test (2)
 $ns = 3095$; $nt = 6042$
- (5a) zoom de la grille grossière, cas supersonique et domaine Ω à mailler
 $M_{\infty} = 2.0$
 $100 \leq Re \leq 2000$
 $ns = 286$; $nt = 534$
Remarque : les lignes de points en gras sont introduites pour demander un raffinement optimal dans les zones critiques : chocs, couche limite, trainée, lors de la construction de la première grille.
- (5b) Domaine à discrétiser.
- (6) grilles intermédiaire et fine pour un Mach égal à 2, à partir de (5).
 $ns2 = 734$; $nt2 = 1425$
 $ns3 = 1815$; $nt3 = 3539$.

- (7) Les solutions calculées par le solveur Navier-Stokes et utilisées pour construire les grilles des figures 6 sont présentées.

GEOMET 1 \equiv (2) + raffinement intermédiaire + (3), (3 grilles)

GEOMET 4 \equiv (2) + 2bis + (3) + (4), (4 grilles)

GEOMET 2 \equiv (5) + (6), (3 grilles)

GEOMET 3 \equiv (2) + raffinement local pour le cas test en incidence $\alpha = 3^\circ$. (3 grilles).

Résultats obtenus sur "GEOMET 1" en multigrille et la grille fine (3) en monogrille

- (8a) lignes d'isodensité.

Schéma FMG local, 100 cycles multigrille pour la phase tri-grilles.

Résidu = $0.27 \cdot 10^{-3}$; CFL = 0.7

temps CPU = 66 secondes sur CRAY -1S.

- (8b) Lignes d'isodensité

Schéma de Lax-Wendroff monogrille sur (3),

2000 itérations, Résidu = $0.22 \cdot 10^{-3}$; CFL = 0.4

temps CPU = 153 secondes sur CRAY - 1S.

- (9a) Lignes d'isomach, correspondant à (8a)

- (9b) Lignes d'isomach, correspondant à (8b).

- (10) Comparaisons des lignes d'isodensité entre :

Schéma de Lax-Wendroff Navier-Stokes sur la grille fine après 3000 itérations, (279 secondes CRAY), puis après 1000 itérations (86 secondes sur CRAY), et le schéma FMG local à 100 cycles trigrilles (66 secondes sur CRAY).

- (11) Lignes d'isodensité et d'isomach,

Schéma FMG local.

100 + 100 + 240 cycles (123 secondes sur CRAY)

- (12) Lignes d'isodensité et d'isomach.

Schéma FMG local.

200 + 200 + 400 cycles (279 secondes sur CRAY)

- (13) Schéma de Lax-Wendroff sur la grille fine ;

solution obtenue après 3000 itérations.

- (14) Schéma FMG local : Résultat optimal avec

100 + 100 + 100 cycles (66 secondes sur CRAY)

Une comparaison entre (11), (12), (13) et (14) montre que 100 cycles en phase trigrille, après une initialisation de 100 itérations sur la grille grossière plus 100 cycles bigrilles entre les deux premières grilles, suffisent pour atteindre une solution approchée qui est convergée et précise.

- (15) Courbe de convergence. Schéma FMG local
- (16) Courbe de convergence. Schéma Lax-Wendroff sur la grille fine.

Ces résultats, obtenus avec une grille fine ayant peu de points, (1251 points) sont très compétitifs comparables à ceux calculés sur des maillages plus importants (également adaptatifs) par des schémas de type monogrille [23].

Sur cette même géométrie le cas test suivant donne d'excellents résultats :

- (17) $M_\infty = 0.85$ et $Re = 1000$
lignes d'isodensité et d'isomach, 64 secondes sur CRAY 1-S
- (18) Courbe de convergence pour le cas test ($Re = 1000$)

Résultats obtenus sur "GEOMET 4"

$M_\infty = 0.85$, $Re = 500$, $CFL = 0.7$, $\chi = 0.0$

- (19) lignes d'isodensité et isomach
Schéma FMG local, 20 + 30 + 50 + 50 cycles.
- (20) Courbe de convergence.

Résultats obtenus sur "GEOMET 2"

- (21) lignes d'isodensité et d'isomach, $M_\infty = 2.0$, $Re = 1000$,
 $\chi = 0.0$; schéma FMG local, 100 + 100 + 100 cycles,
- (22) Courbe de convergence.

Résultats obtenus sur "GEOMET 4" (incidence non-nulle)

$M_\infty = 0.85$, $Re = 500$, $\alpha = 3^\circ$
grille fine $n_s = 1383$, $n_t = 4308$, $\chi = 0.0$, $CFL = 0.7$

(23) lignes d'isodensité et d'isomach.

(24) Courbe de convergence.

b) Conclusion sur les résultats

L'utilisation de maillages adaptatifs pour construire la géométrie multigrille donne une précision supplémentaire à la solution approchée par ces techniques de multigrilles locales. Leur génération même est néanmoins à revoir, les critères de raffinement utilisés génèrent parfois des irrégularités qui ne sont pas assez régularisées par le processus d'uniformisation a posteriori. Cependant, les géométries que nous avons construites ici donnent d'excellents résultats : ce qui est également dû à la souplesse du schéma full multigrille local.

Les solutions présentées ici montrent que 100 cycles trigrilles, après 100 itérations sur la grille grossière, plus 100 cycles bigrilles sont suffisants pour atteindre une solution précise. Cette solution (14) est équivalente à un calcul d'environ 2000 itérations par le schéma Lax-Wendroff en tant que schéma monogrille sur la grille fine ((8b) (9b) et (13)). Cela correspond à un gain réel de l'ordre de 2.5 en temps CPU. Le gain en efficacité de calcul est de l'ordre de 5.6. En effet, un cycle de la 3ème phase FMG locale correspond à un calcul de $\{2 + \frac{2}{2.7} + \frac{1}{4.5}\} \sim 2,96$ flux de référence. On appelle flux de référence le calcul d'une itération sur la grille fine par le schéma de Lax Wendroff. Cela correspond à une étape prédicteur, une étape correcteur avec des calculs de flux (F_x, G_y) de viscosité physique et de conditions limites. 100 cycles en trigrilles représentent environ 80% du travail de calcul, donc le coût total est de l'ordre de 360 flux de référence pour le schéma FMG local. Ceci équivaut à un calcul monogrille de 2000 itérations (un flux Lax-Wendroff par itération). Les résultats "FMG local" diminuent sensiblement les inconvénients dûs aux maillages rencontrés par le code "FMG global" [6] : grille fine précise, de faible encombrement mémoire, solution rapidement convergée... etc. Par rapport aux schémas monogrilles, ce schéma donne des résultats analogues à des calculs sur des maillages plus fins, avec un gain appréciable en temps de calcul [23].

La méthode est donc très efficace, elle est aussi assez souple : nous avons testé des cas tests très différents sur des maillages ayant relativement peu de points, avec des résultats très encourageants aussi bien pour la précision de la solution que pour sa convergence.

Le code est actuellement utilisé pour des mach compris entre .5 et 3 et des Reynolds inférieurs à 2000, à cause de la limitation de la discrétisation des géométries (occupation mémoire) et l'absence de viscosité artificielle, ($\chi = 0.0$). Nous prolongerons donc cette étude pour augmenter la plage d'utilisation. Nous envisageons, par exemple, de prendre des MIB différentes pour résoudre les équations de Navier-Stokes.

5. Perspectives

Nous avons constaté que la méthode multigrille tolère l'utilisation de nombre de Courant, CFL, plus élevé que son homologue monogrille ; la fiabilité de la méthode donne des critères de stabilité plus souples [1], [18].

L'adressage des noeuds entre les grilles est indirect (maillages non-structurés, non-emboîtés...) et doit être amélioré. L'optimisation de l'algorithme multigrille local passe obligatoirement par une restructuration des données géométriques (noeuds/triangles), couplée avec le stockage des variables. Actuellement les différents niveaux sont rangés selon leur division : non-division, division par deux avec identification de la numérotation des triangles créés, division par quatre avec identification du triangle central créé.

Une méthode plus optimale serait la suivante :

- chaque $T \in \mathcal{T}_k$ possède une indice supplémentaire α , tel que :

$\alpha = 1$ si T n'est pas divisé

$\alpha = 2$ si T est divisé en 2 triangles

$\alpha = 3$ si T est divisé en 4 triangles.

- si $\alpha \neq 1$, $T \rightarrow \{T_j\} \in \mathcal{T}_{k+1}$, $\{j = 1,2 \text{ ou } j = 1,2,3,4\}$ en coordonnées locales.

La géométrie est donc remaniée par pile, avec renumérotation des triangles pour le stockage. Ainsi la triangulation \mathcal{T}_{H-1} est stockée de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{l} -1) \text{ la grille grossière } \mathcal{T}_H \\ -2) \{T \in \mathcal{T}_{H-1}, \alpha=2\} \\ \quad \{T \in \mathcal{T}_{H-1}, \alpha=3\} \end{array} \right\} = \mathcal{T}_{H-1}$$

On itère le processus pour les triangulations plus fines. Seuls sont donc stockés en mémoire les noeuds/triangles nouveaux à chaque niveau de raffinement. Un tableau d'adressage relie ces triangles à leur origine. Les variables physiques par niveau doivent aussi porter cette adresse : ceci permet de les dimensionner au nombre de noeuds courants, (ou de triangles ou de segments... selon la quantité en question). On peut citer à ce titre les travaux de Bank [19], et de Rivara [20].

D'autres solveurs doivent être envisagés pour pouvoir prendre en compte des écoulements à nombre de Reynolds plus élevés. Une viscosité artificielle compatible avec la résolution numérique d'un écoulement visqueux pour les cas considérés doit être intégrée à ces schémas centrés. Sinon, une autre approche serait d'introduire une autre approximation spatiale.

L'approche locale permet de considérer des schémas différents selon le niveau dans la hiérarchie des grilles : par exemple, un schéma explicite rapide sur la grille fine couplé à une méthode implicite sur les grilles grossières. On réduirait ainsi le nombre de pas de calculs et on améliorerait la stabilité. Les possibilités de décomposition en zones, de schémas différents par niveau, d'optimisation de la structure des données, et les avantages des maillages adaptatifs montrent que l'algorithme dynamique peut devenir encore plus avantageuse pour des calculs bi-dimensionnels.

Les techniques dites "locales", ou "dynamiques", permettent aussi de considérer d'autres algorithmes de résolution que celui de FMG. Par exemple, on peut citer l'algorithme de DC ("Defect Correction") -correction des résidus- qui est l'analogue local de (7), (9) et (11), où $\{L_h(W)\}$ est calculé par une méthode itérative d'ordre un, et $\{L_H(W)\}$ par une méthode stable d'ordre 2 [17]. La décomposition en zones (fig.1) s'adapte directement à de tels schémas [8]. La combinaison FMG + DC + décomposition en zones semble être un algorithme fiable et intéressant à tester en éléments finis.

6. Conclusion

L'algorithme full multigrille local est performant, souple, efficace et robuste. Nous avons présenté dans le paragraphe 5 les possibilités ouvertes pour cette méthode. Son utilisation pour des calculs tridimensionnels passe par la restructuration des données géométriques (occupation mémoire).

La gestion des triangulations successives, leur régularisation optimale sont la clé des résultats obtenus. La construction d'un système expert qui part du maillage initial et qui arrive à la solution approchée par le schéma FMG local en deux dimensions est en cours.

D'autres solveurs doivent être envisagés : approximation spatiale décentrée, viscosité artificielle pour des nombres de Reynolds élevés, ainsi que des schémas différents selon les niveaux (explicite rapide sur la grille fine, implicite sur les niveaux grossiers),...etc.

Références :

- [1] JAMESON A., BAKER T.J., Multigrid solution of the Euler equations for aircraft configurations. AIAA 22nd Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada. AIAA Paper 84-0093 - January 1984.
- [2] NI R.H., A Multiple Grid Scheme for Solving the Euler Equations. AIAA Journal - Vol. 20 - NO. 11 - November 1982.
- [3] LOHNER R., Finite Elements in CFD : what lies ahead World Congress on Computational Mechanics. Austin September 1986.
- [4] PEREZ E., Finite element and multigrid solution of the two dimensional Euler equations. Rapport INRIA n° 442 - Septembre 1985.
- [5] PEREZ E., PERIAUX J., ROSENBLUM J.P., STOUFFLET B., Adaptive Full-Multigrid Finite Element Methods for Solving the Two-Dimensional Euler Equations. IC10 NMF, Pékin (Chine) 1986.
- [6] ANGRAND F., LEYLAND P., Une méthode multigrille pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles en deux dimensions par des éléments finis. Rapport de recherche INRIA n° 593 - Décembre 86.
- [7] BRANDT A., Multi-level adaptative solutions to boundary value problems. Math. Comp. 91, 1977.
- [8] HACKBUSH W., Multigrid Methods and Applications. Springer Series in Computational Mathematics n°4, Springer-Verlag 1985.
- [9] ANGRAND F., DERVIEUX A., Some explicit triangular finite element schemes for the Euler equations. Vol. 4, 749-764, 1984.

- [10] ANGRAND F., Viscous perturbation for the compressible Euler equations. Applications to the numerical simulation of compressible viscous flows.
Gamm Workshop sur les écoulements de fluides compressibles. Nice
Décembre 1985.
- [11] KELLER H.B., "Multiple Steady State for Taylor Vortex Flows.
GAMNI-SMAI-INRIA. Journées solutions multiples sur ordinateur en
mécanique des fluides et liquides. Rocquencourt Mai 1986.
- [12] KELLER H.B., Numerical Solutions of Bifurcation and non-linear
problems. Application of bifurcation theory. ed : Rabonowitz.
Academic Press, 359-384, 1977.
- [13] USAB W.J., MURMAN E.M., Embedded mesh Solutions of the Euler
Equations Using a Multiple Grid Method. AIAA 83 - 1946-CP - July
1983.
- [14] JAMESON A., Multigrid Algorithms for Compressible Flow
Calculations. MAE Report Nr 1743 - October 1985.
- [15] TURKEL E., VAN LEER B., Flux Vector Splitting and Runge-Kutta
Methods for the Euler Equations. ICASE Report Nr 84-27 - June
1984.
- [16] HECHT F., SALTEL E., Rapport INRIA - à paraître.
- [17] HEMKER P.W., KOREN B., A non-linear multigrid method for the
steady Euler equations GAMM. Workshop on Compressible Euler
Flows. Rocquencourt - June 1986.
- [18] LALLEMAND M.H., Etude de stabilité d'un schéma de Runge-Kutta ;
application à des Techniques Multigrilles en Eléments Finis
Décentrés. Rapport de recherche INRIA - à paraître.
- [19] BANK R.E., SHERMAN A.H., An adaptative multi-level method for
elliptic boundary value problems. Computing 26, 91-105, 1981.
- [20] RIVARA M.C., Algorithms for refining triangular grids suitable
for adaptive and multigrid techniques. Int. Journ. Num. Meth.
Eng. Vol 20, 745-756, 1984.
- [21] POULETTY C., Génération et Optimisation de maillages en éléments
finis, Application à la résolution de quelques équations en
mécanique des fluides. Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole
Centrale de Paris, Décembre 1985.

- [22] PALMERIO B., Self adaptive F.E.M. algorithms for the Euler equations. Rapport de recherche INRIA Sophia-Antipolis n° 338 - 1985.
- [23] Proceedings of the Gamm Workshop on Numerical Simulation of Compressible Navier-Stokes Flows, Nice Décembre 1985. Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vieweg (to appear)
- [24] BAKER T.J., JAMESON A., A novel finite element method for the calculation of inviscid flow over a complete aircraft. 6ème Colloque International de la simulation d'écoulements par éléments finis. Antibes juin 1986.
- [25] JOHNSON G.M., Convergence Acceleration of Viscous Flow Computations. NASA TM 83039 - October 1983.

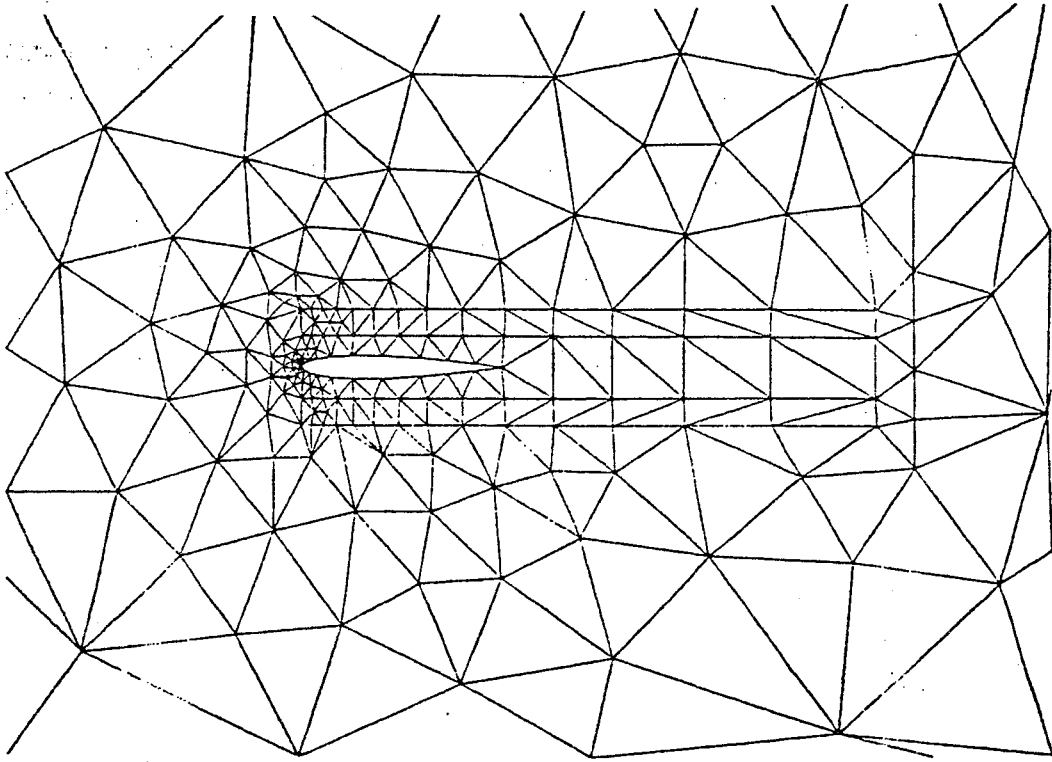


Figure 2 : $ns = 233$ $nt = 428$

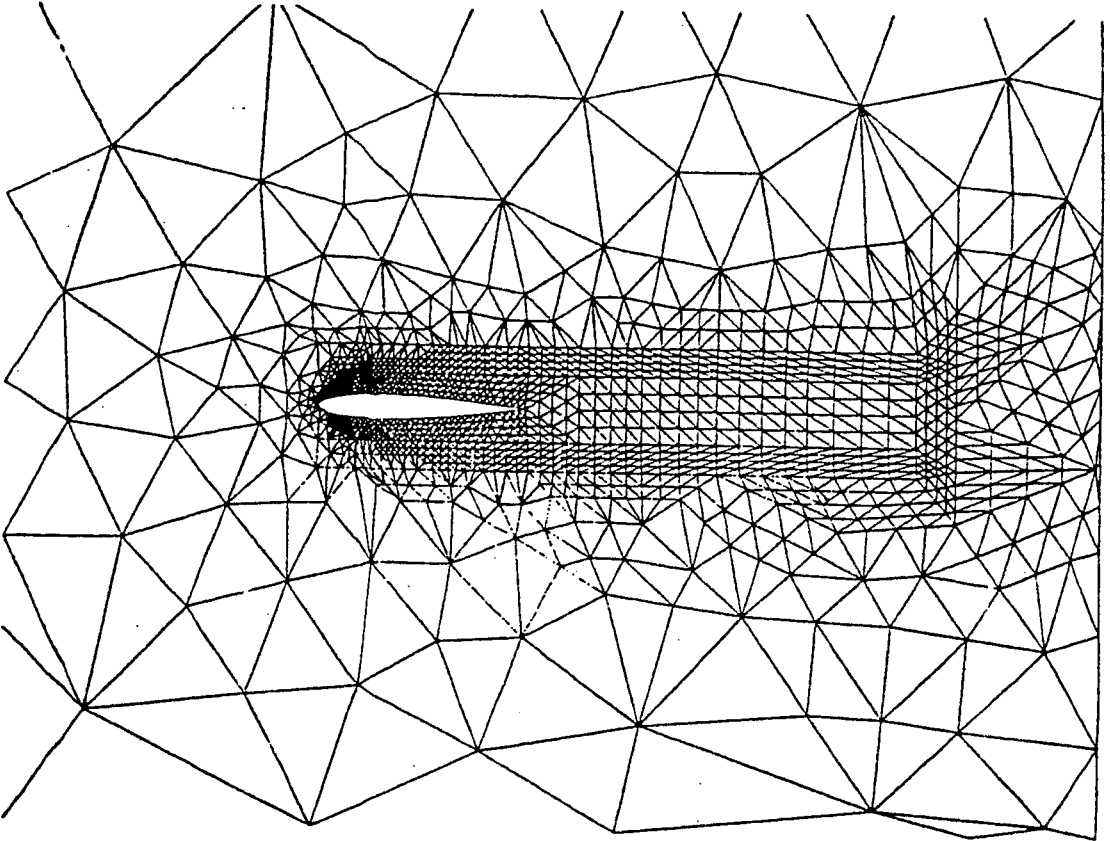


Figure 3 : ns = 1251 nt = 2412

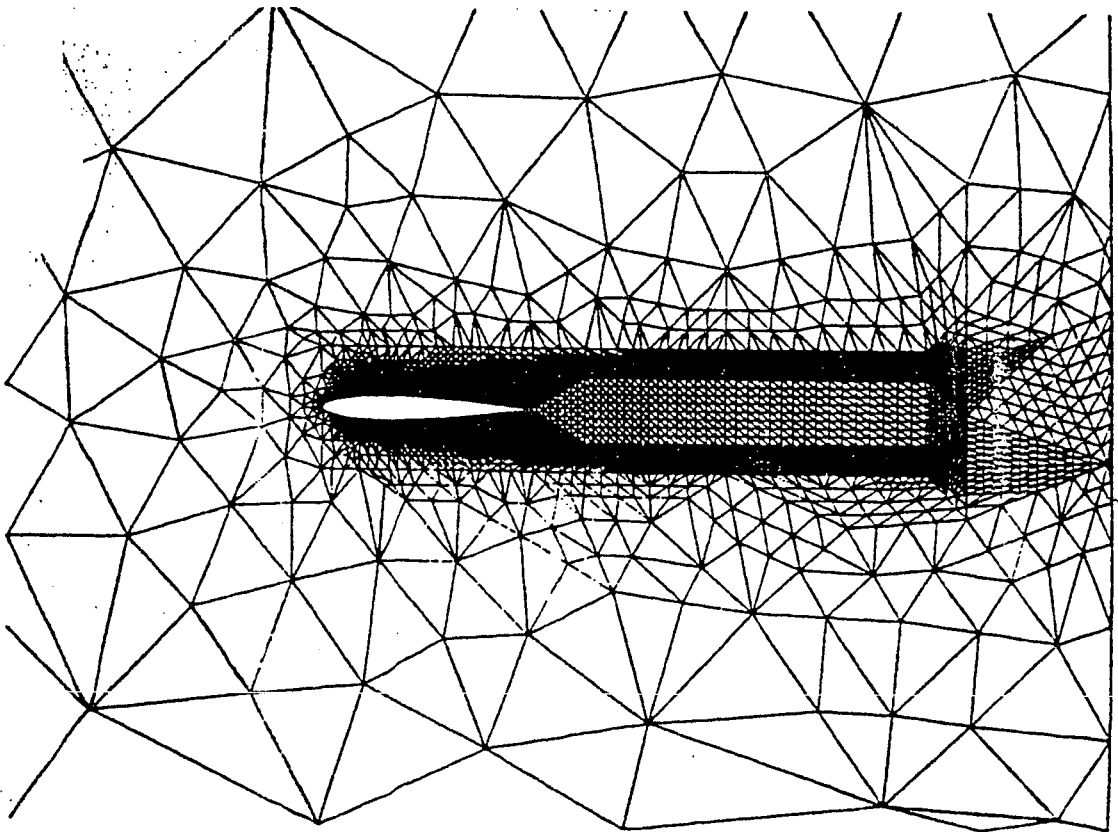
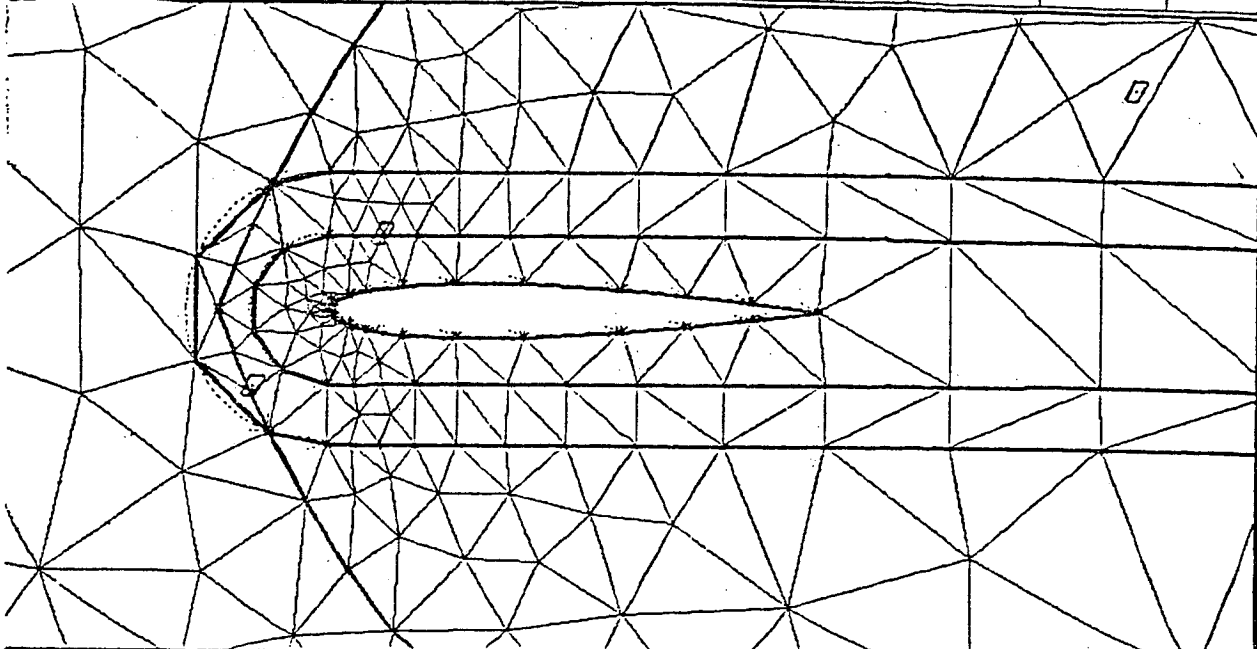


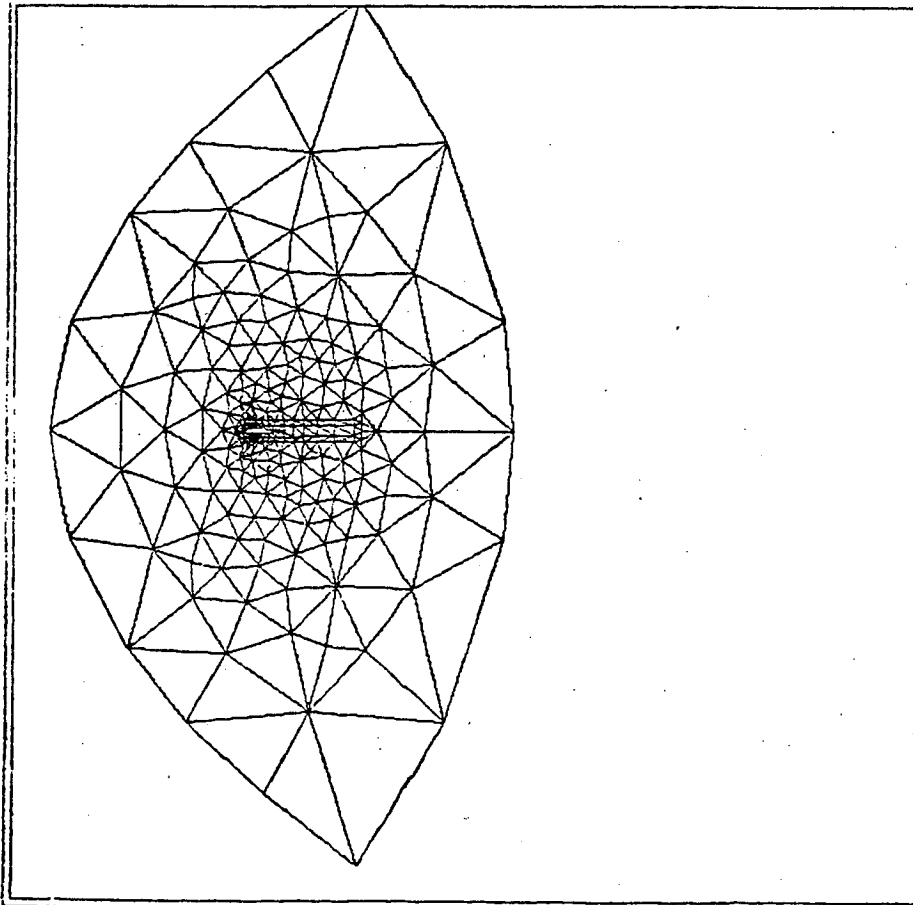
Figure 4 : ns = 3095 nt = 6042



ZOOM
ZOOM
TRAN
ECH
DRAFE
C MA
PULL
PUSH
VOIR
9.3055E
1 2
5 6
9 8
- .
C I
. PI
AC E
Lg ds

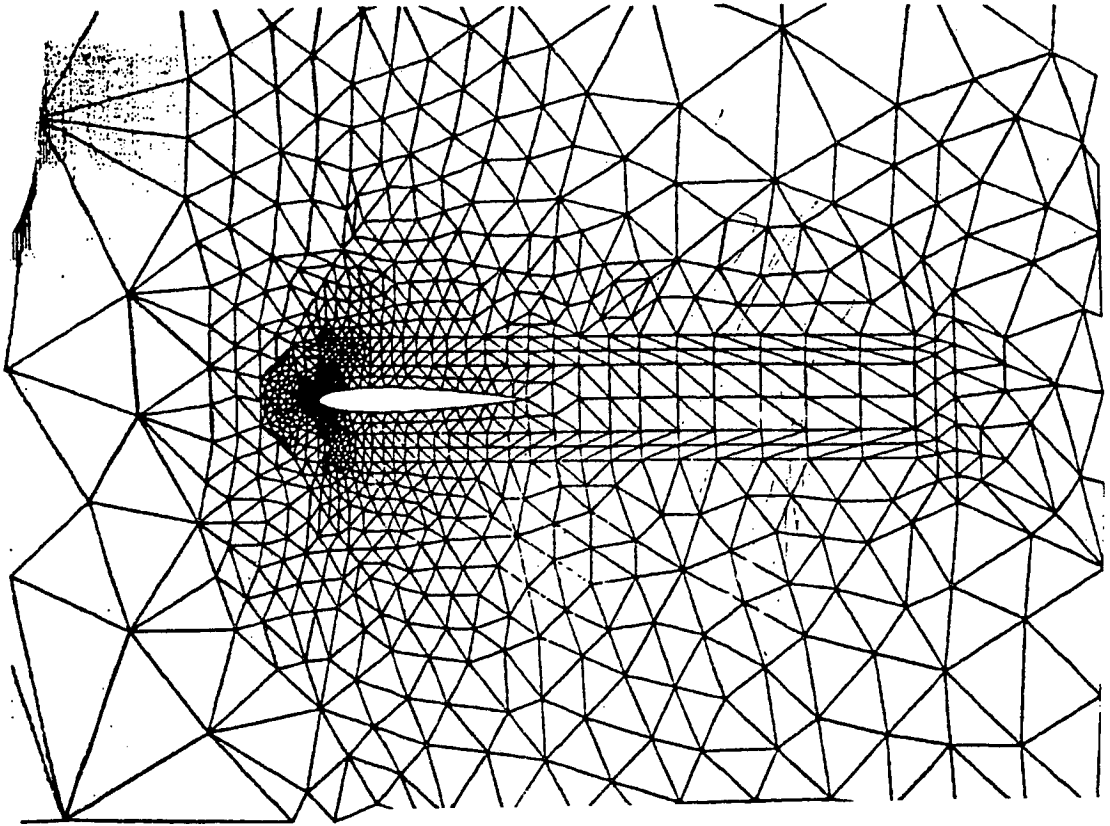
TRIANGLE	>SOUS_DOM	ENSEMBLE	ARC	SEGMENT	P_TABLETTE	PT_XY	QLCONQ	>+ PR
----------	-----------	----------	-----	---------	------------	-------	--------	-------

(a) ns = 286 nt = 534



PROCESS 5 ON EST A DROITE DE LA LIGNE 32 LA 1ere LIGNE DE LA COMPOSANTE 267 EST INVERSEE COEF SUR H LOCAL= 2.500000 GETXY	PROCESS 5 CPU TIME: 0.458. REAL TIME \$ COPIE
Command:	

(b) domaine entier Ω_h
Figures 5



ns = 732 nt = 1425

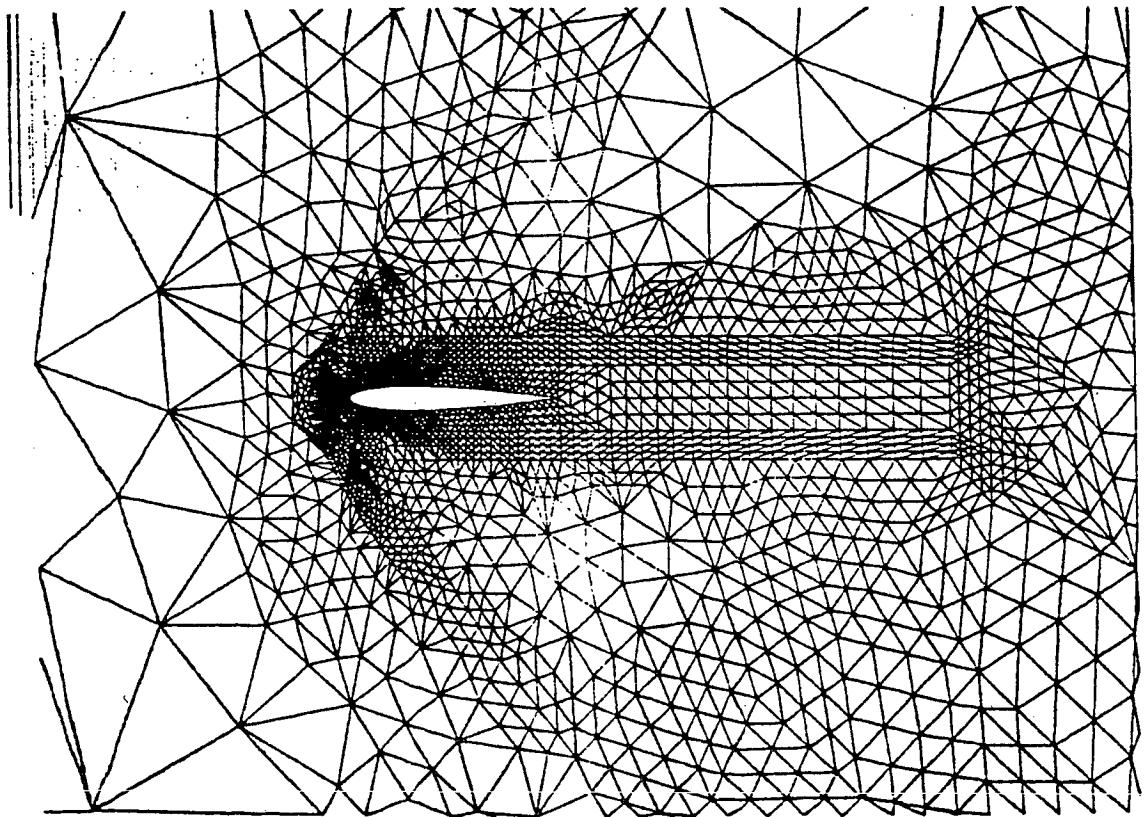
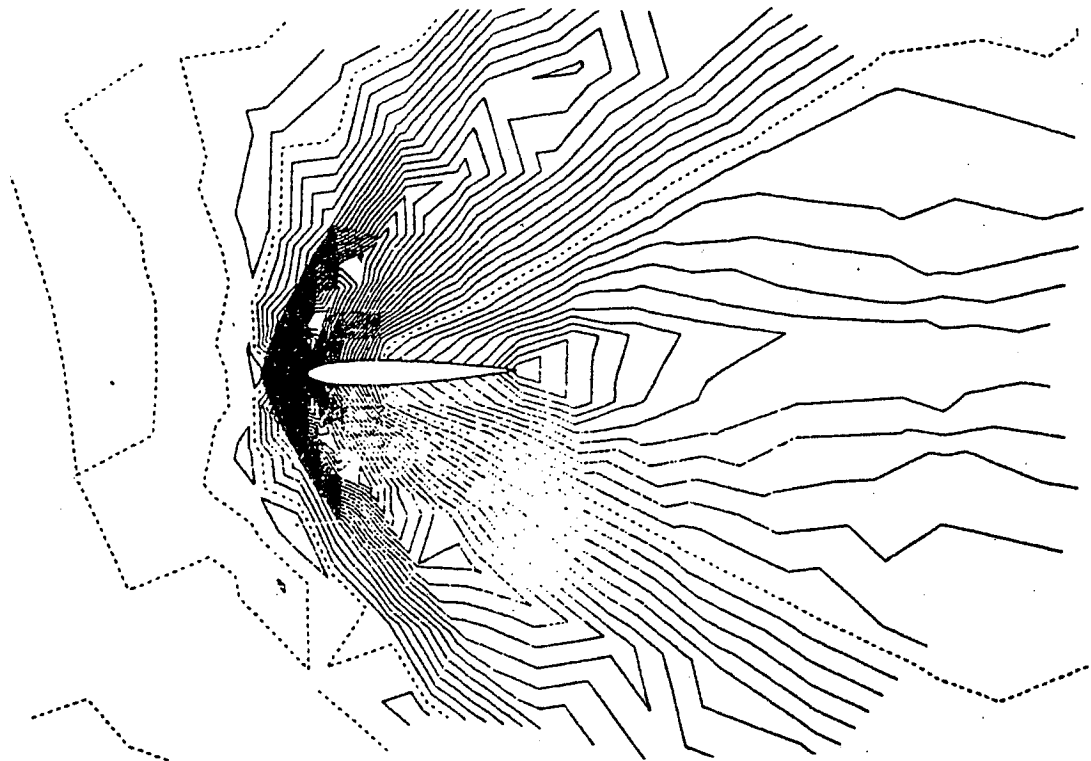
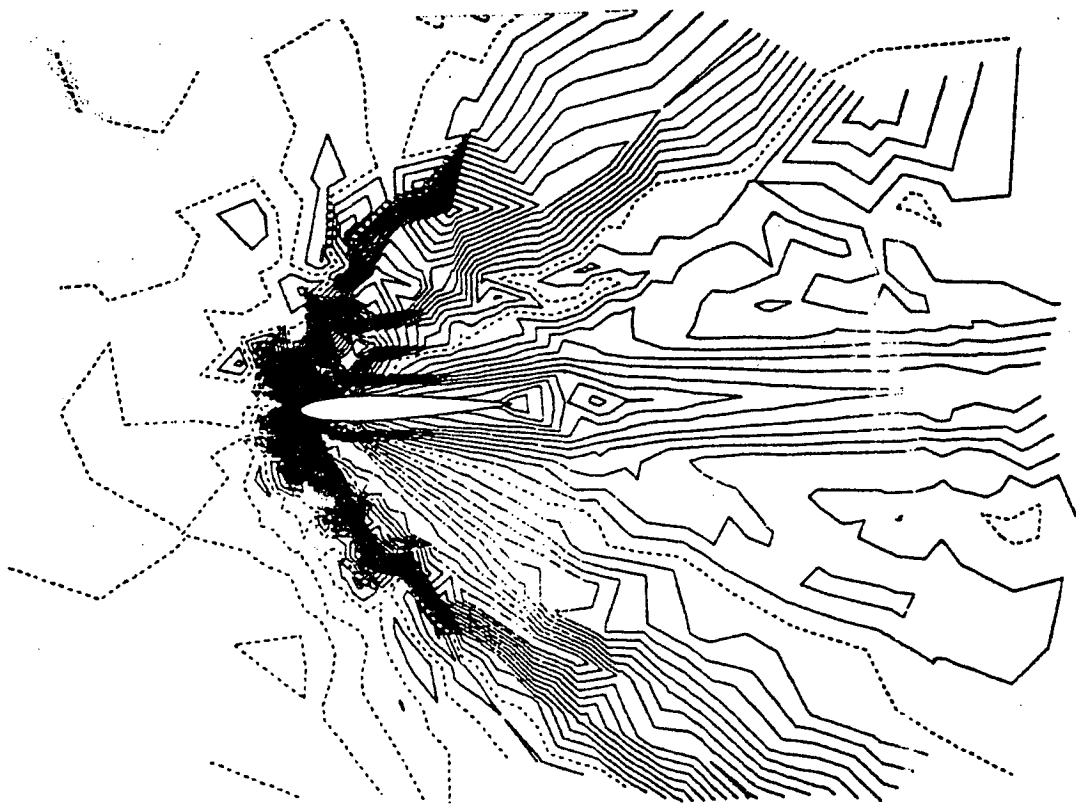


Figure 6 : ns = 1815 nt = 3539



$kt = 3000$; $chi = 0.4$.
Solution calculée sur le naca "grossier"
(figure 5a), $ns = 286$



$kt = 2000$; $chi = 0.0$
Solution calculée sur le naca "intermédiaire"
(Figure 6), $ns = 734$

Figures 7

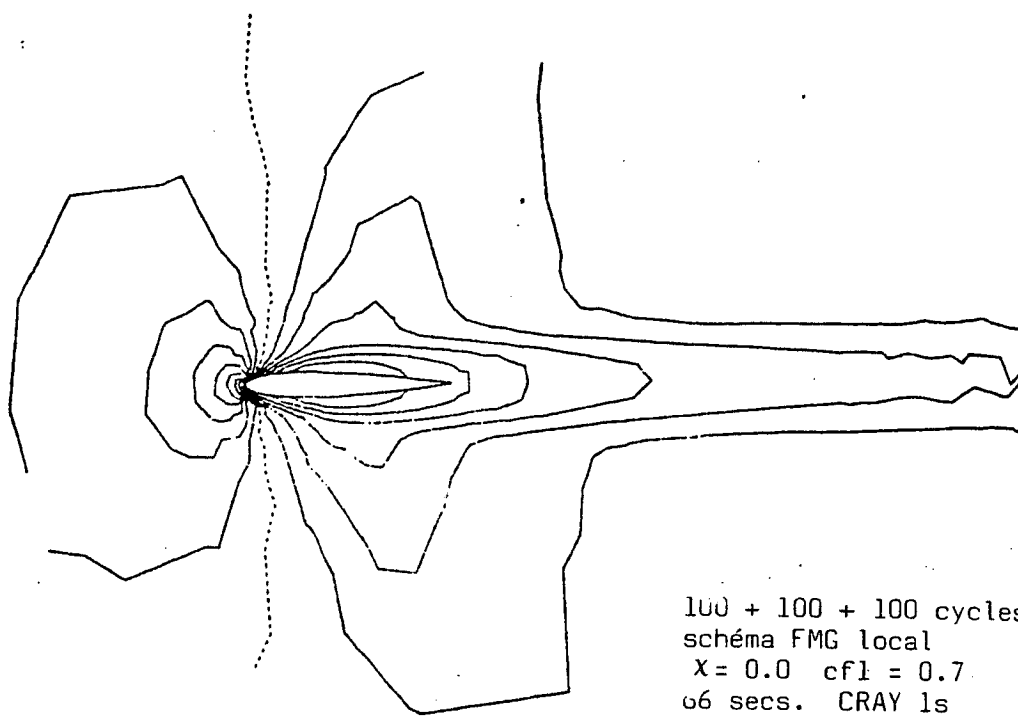


Figure 8a

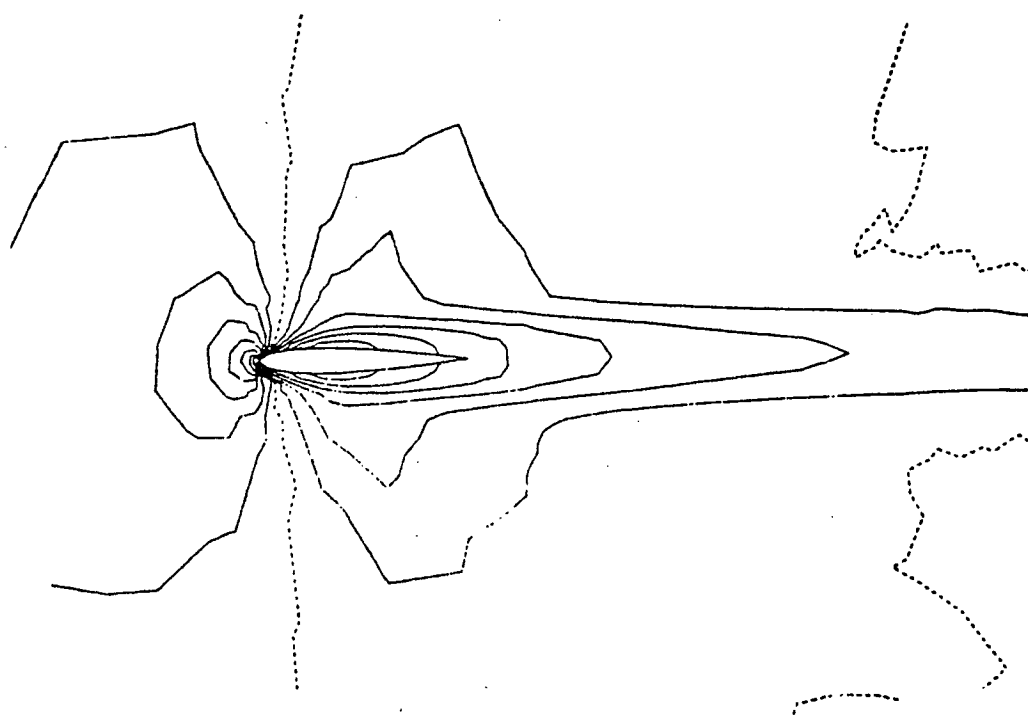


Figure 8b

2000 itérations
Schéma monogridle
Lax-Wendroff vectorisé
 $X = 0.0$ $cfl = 0.4$
153 secs. CRAY 1s

Figures 8

Comparaison lignes d'isodensité. $m_\infty = 0.85$. $Re = 500$

(a) Schéma FMG local sur GEOMET 1

(b) Schéma Lax-Wendroff vectorisé sur la grille fine GEOMET 1

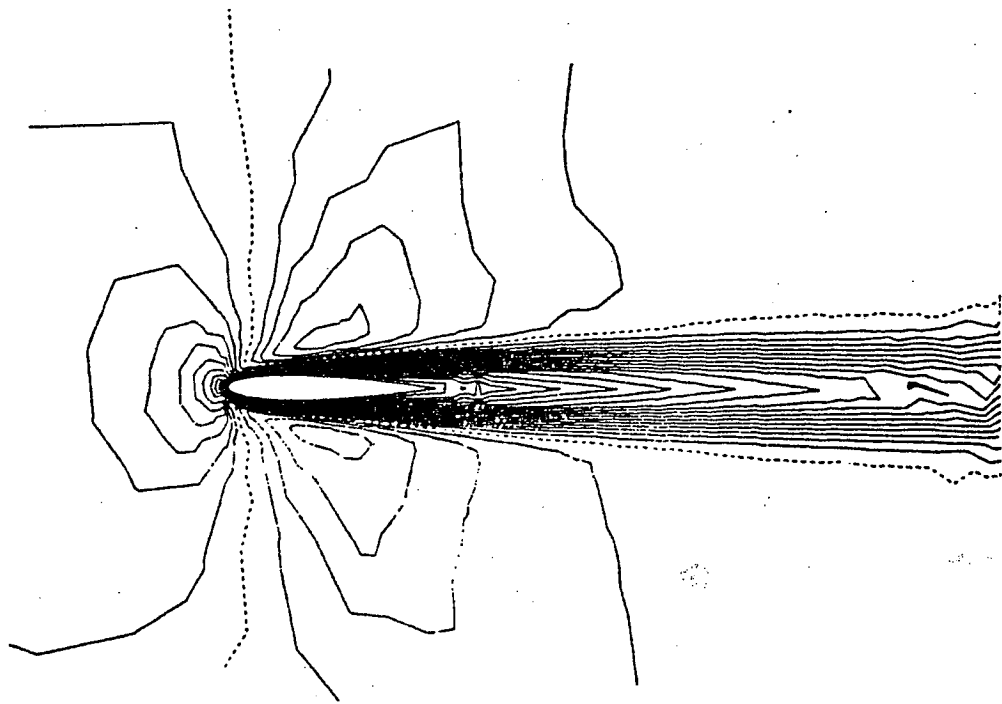


Figure 9a :

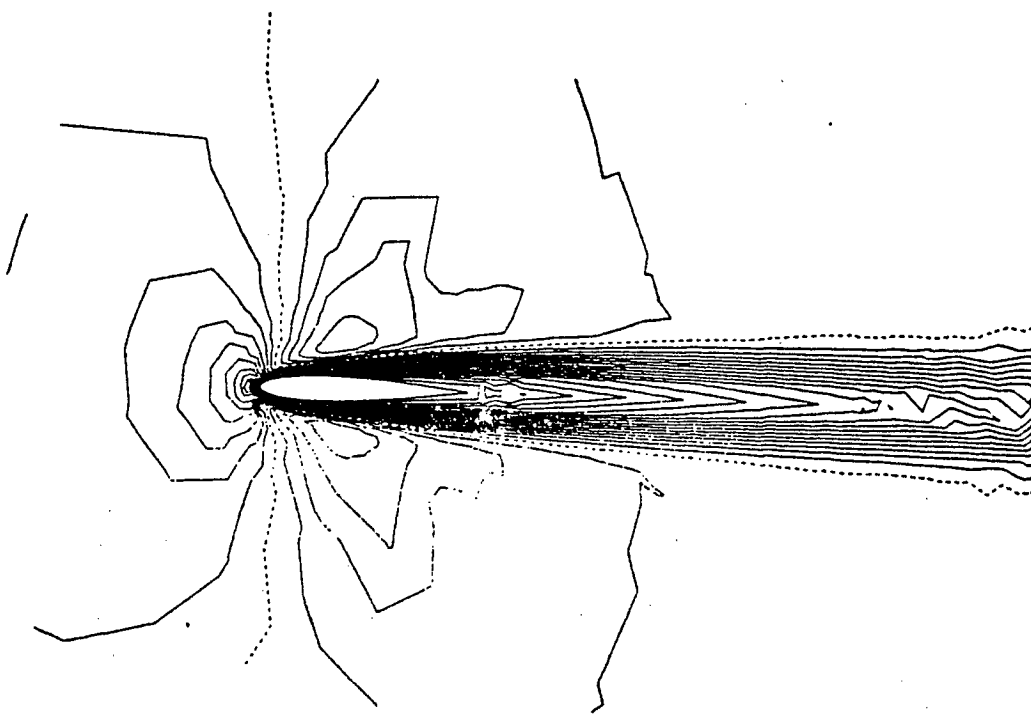


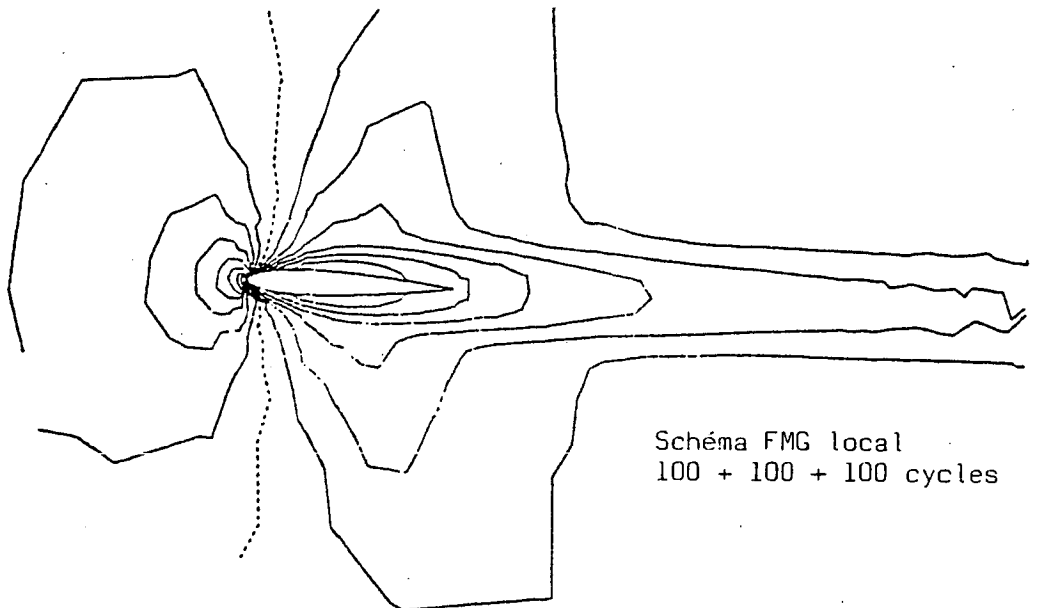
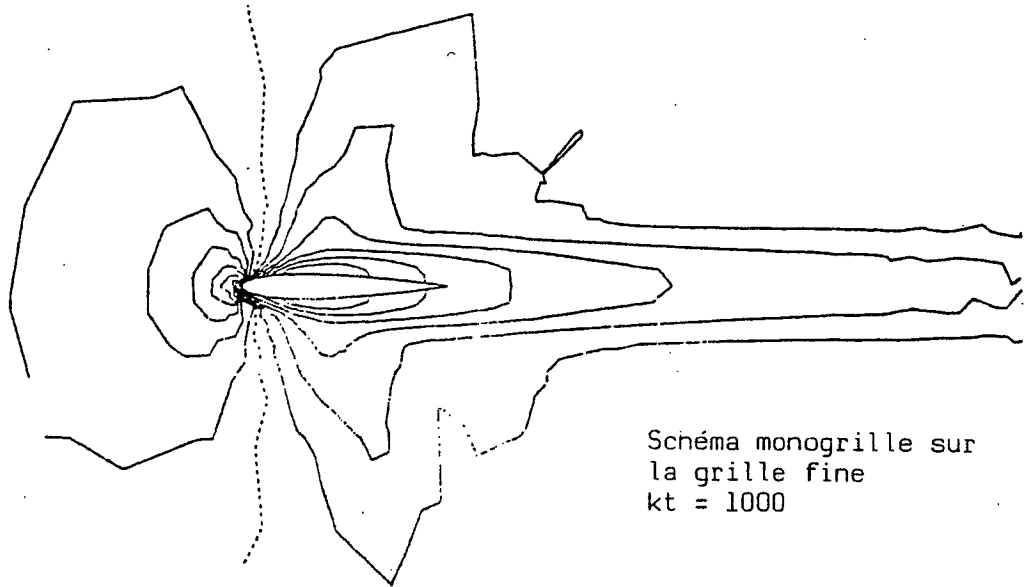
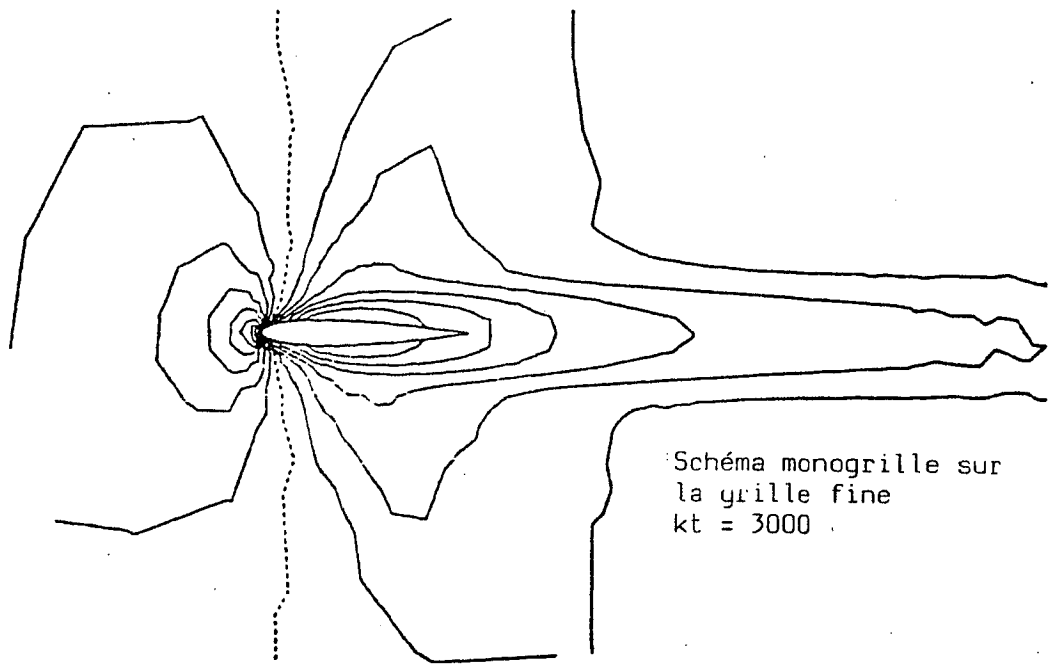
Figure 9b

Figures 9

Comparaison lignes d'isomach. $m_\infty = 0.85$, $Re = 500$

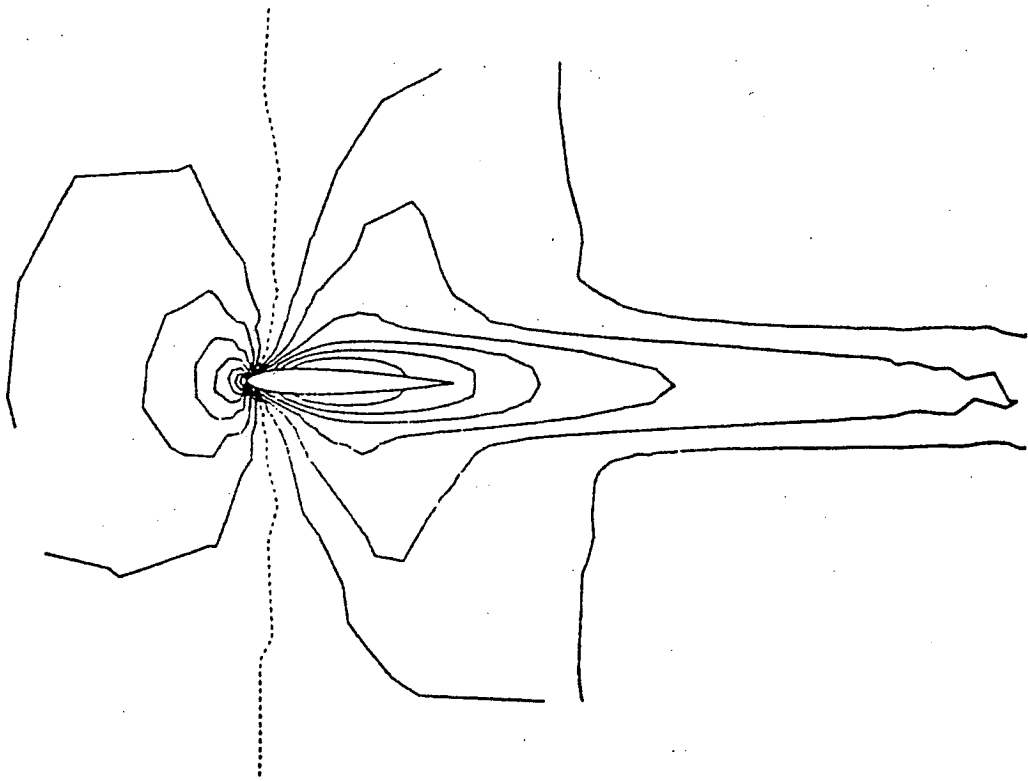
(a) Schéma FMG local 100 + 100 + 100 cycles

(b) Schéma Lax-Wendroff en monogrille à 2000 itérations

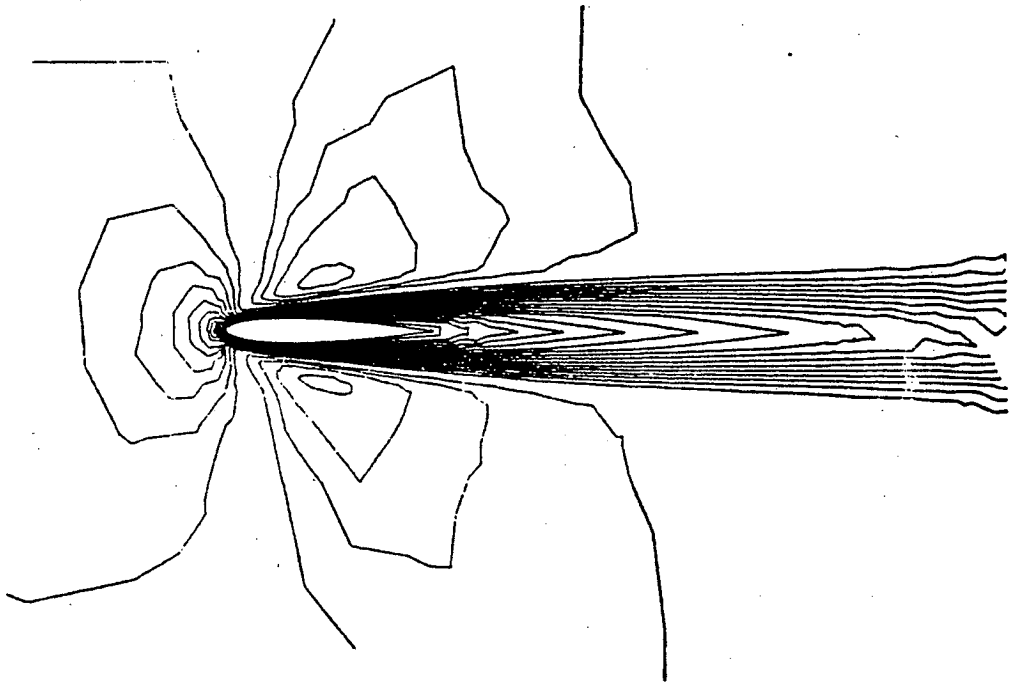


Figures 10

Comparaison lignes d'isodensité $m_\infty = 0.85$, $Re = 500$



lignes d'isodensité

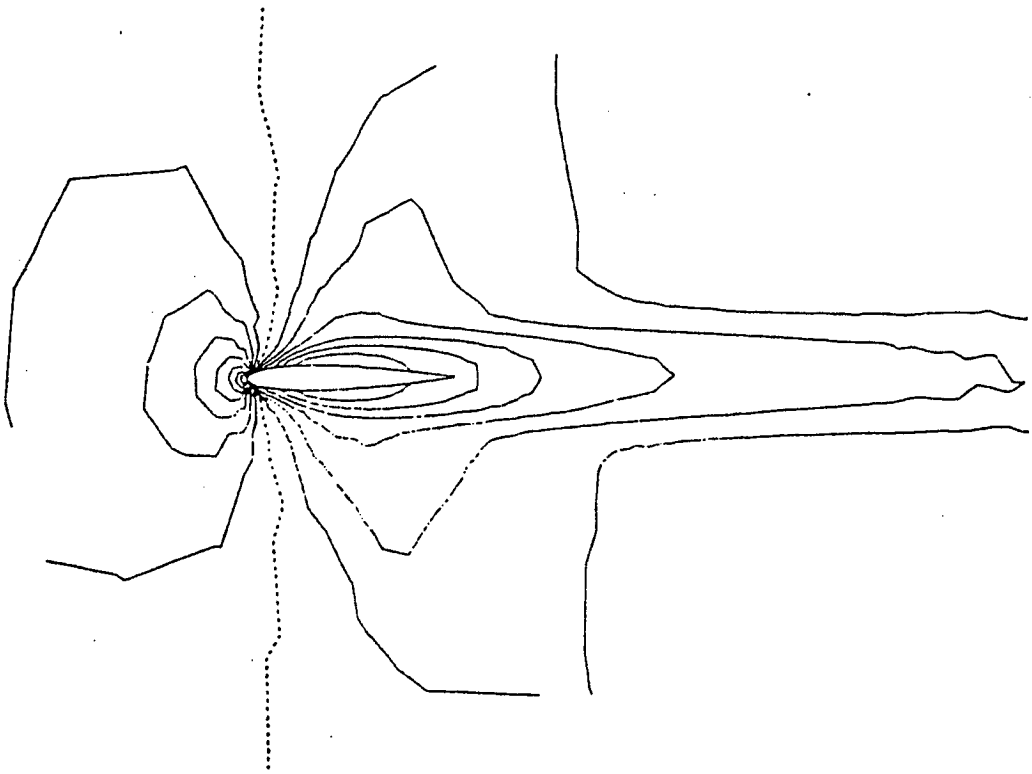


lignes d'isomach

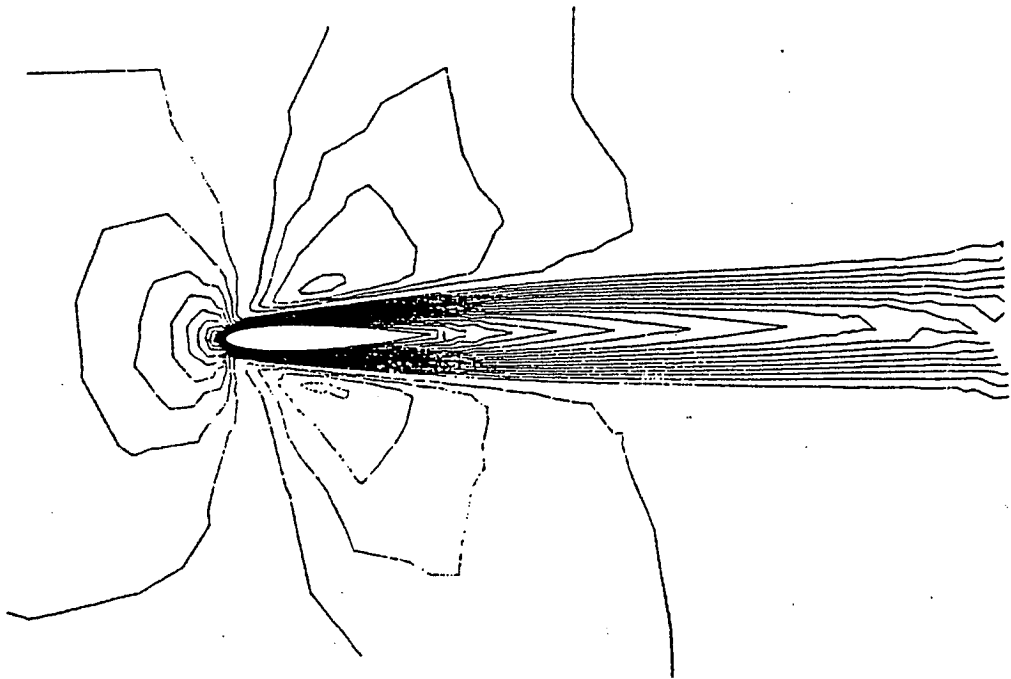
Figures 11

Schéma FMG local, 100 + 100 + 240 cycles

$m_\infty = 0.85$, $Re = 500$

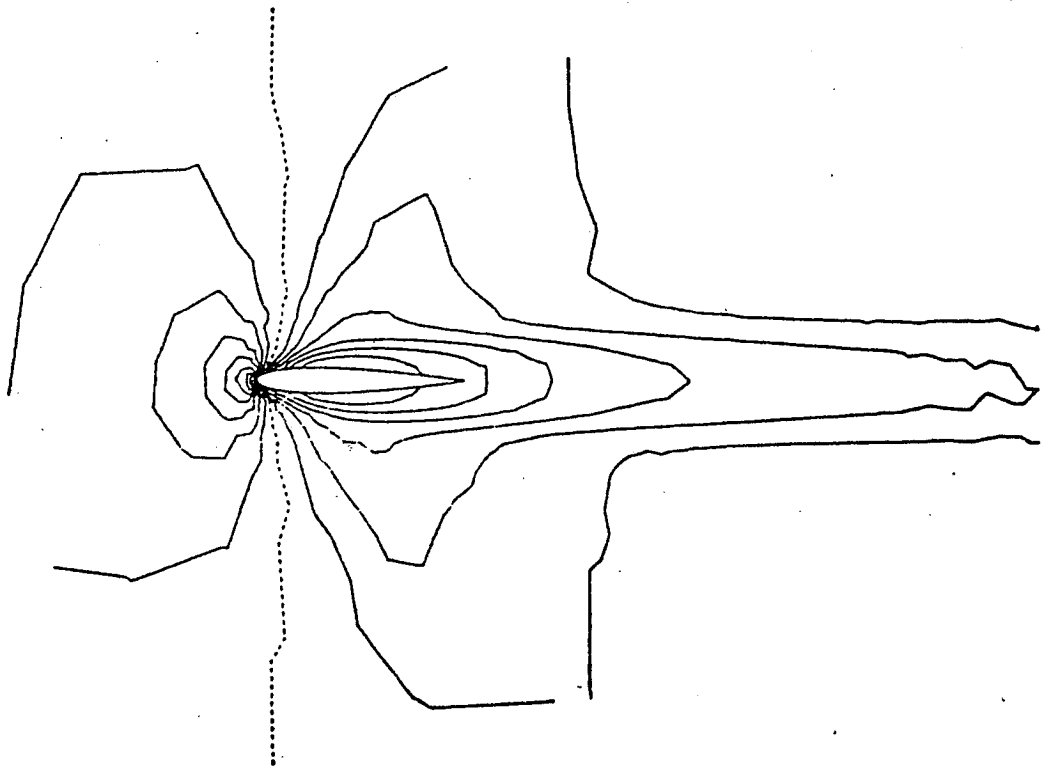


lignes d'isodensité

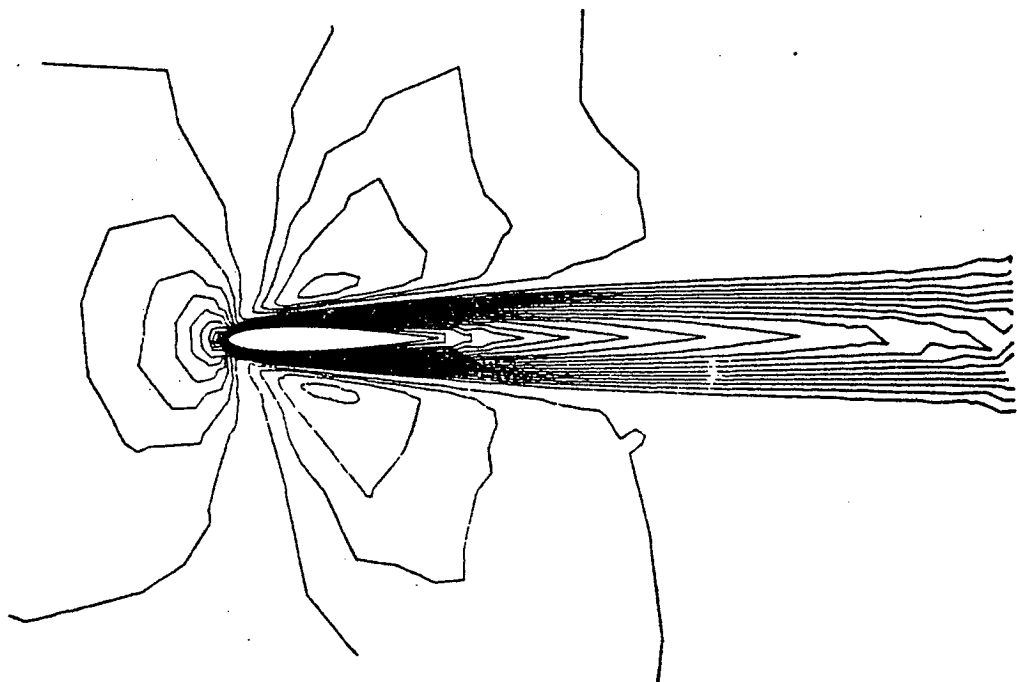


lignes d'isomach

Figures 12
Schéma FMG local 200 + 200 + 400 cycles
 $m_\infty = 0.85$, $Re = 500$



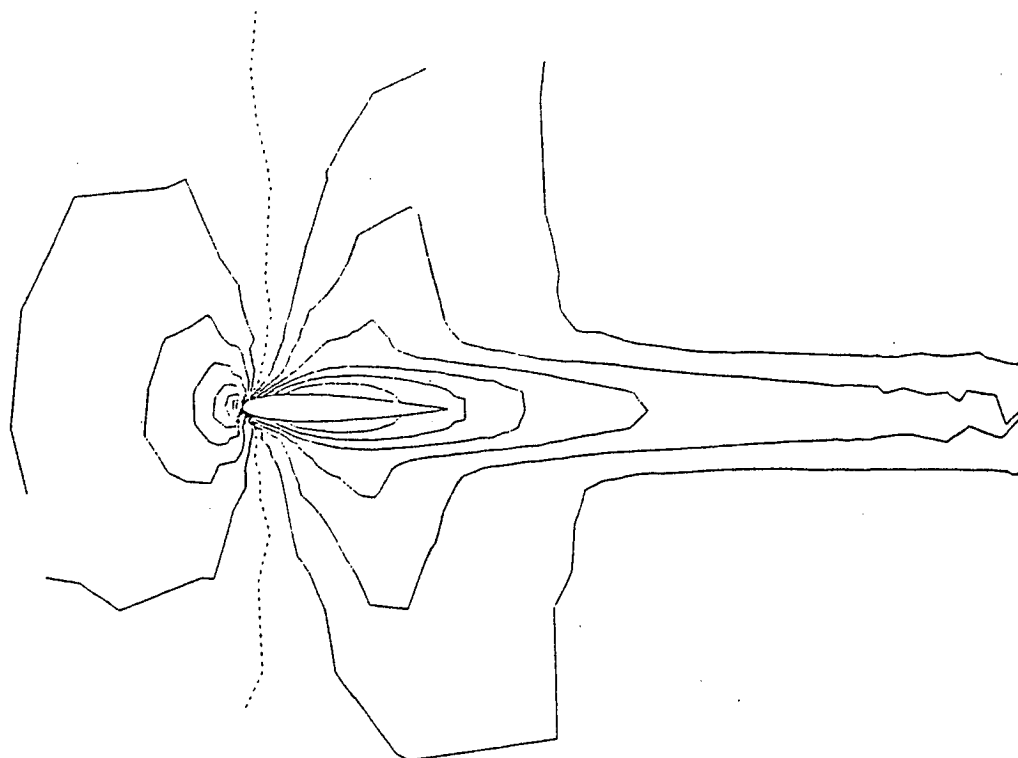
lignes d'isodensité



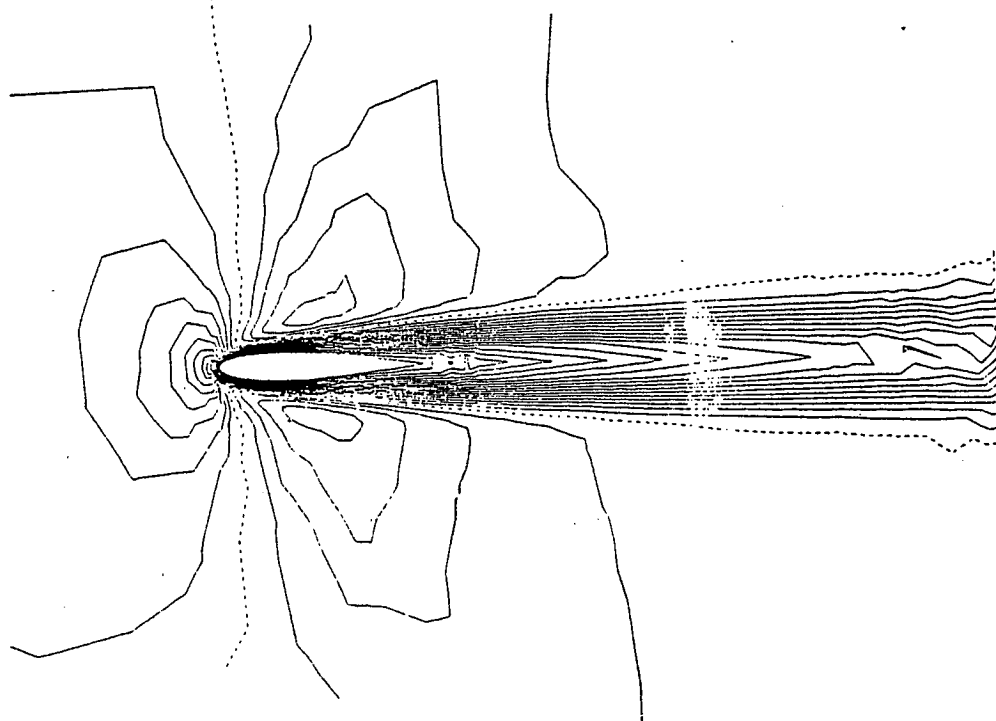
lignes d'isomach

Figures 13

Schéma Lax-Wendroff Navier Stokes sur la grille fine (1251 ns)
itération 3000 $m^{\infty} = 0.85$, $Re = 500$



lignes d'isodensité



lignes d'isomach

Schéma FMG local 100 + 100 + 100 cycles
 $m_\infty = 0.85$, $Re = 500$

Figures 14

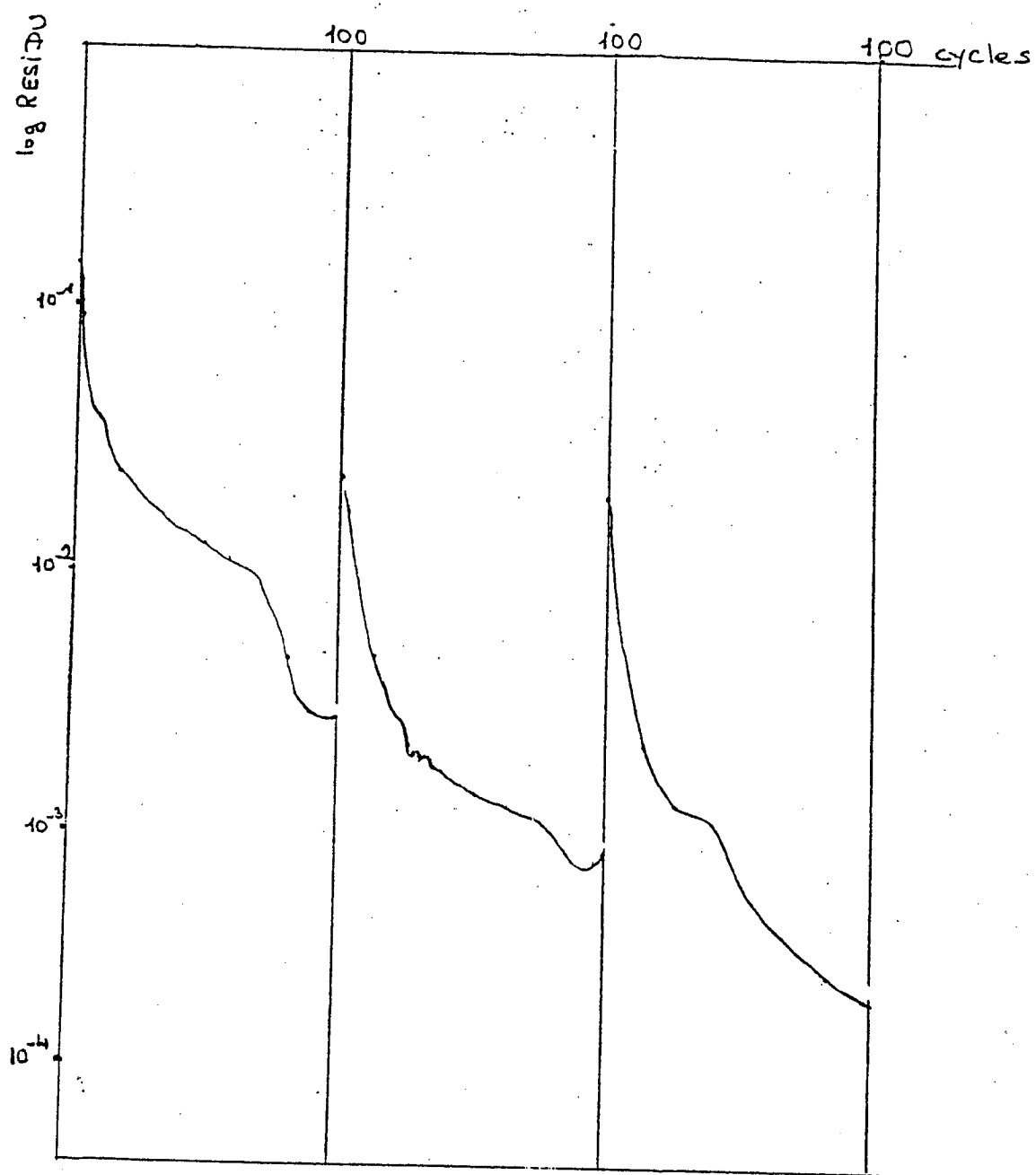


Figure 15
 Courbe de convergence

FMG local

Résidu au cycle 300 = $2.5077 \cdot 10^{-4}$

$m_\infty = 0.85$

Re = 500

X = 0.0

cfl = 0.7

66 sec. CRAY 1-S

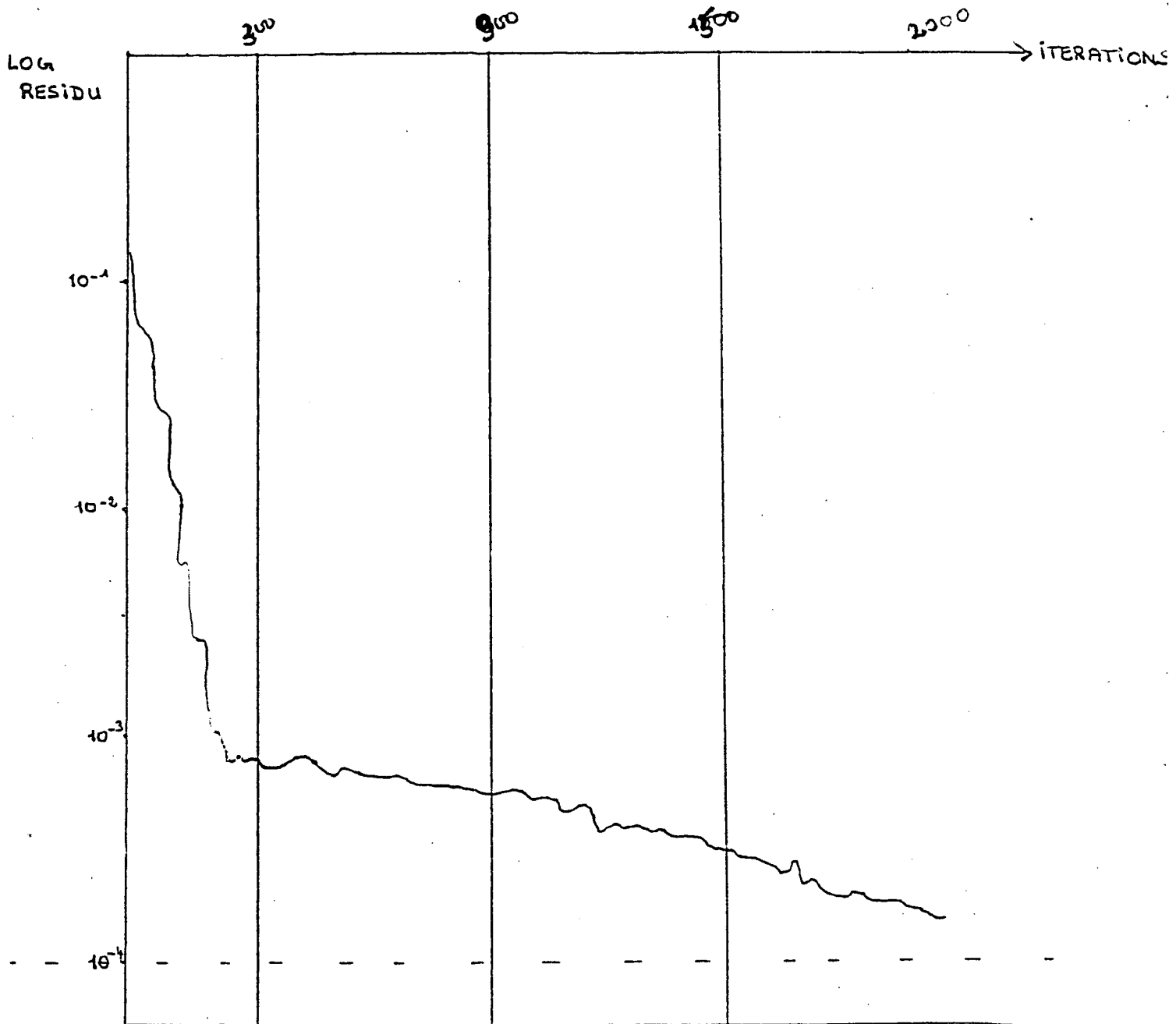


Figure 16

LAX-WENDROFF sur la grille fine. $m_b = 0.85$ $Re = 500$.
 $x = 0.0$ $cfl = 0.4$ 153 secs. CRAY 1-S

NAVIER-STOKES COMPRESSIBLE

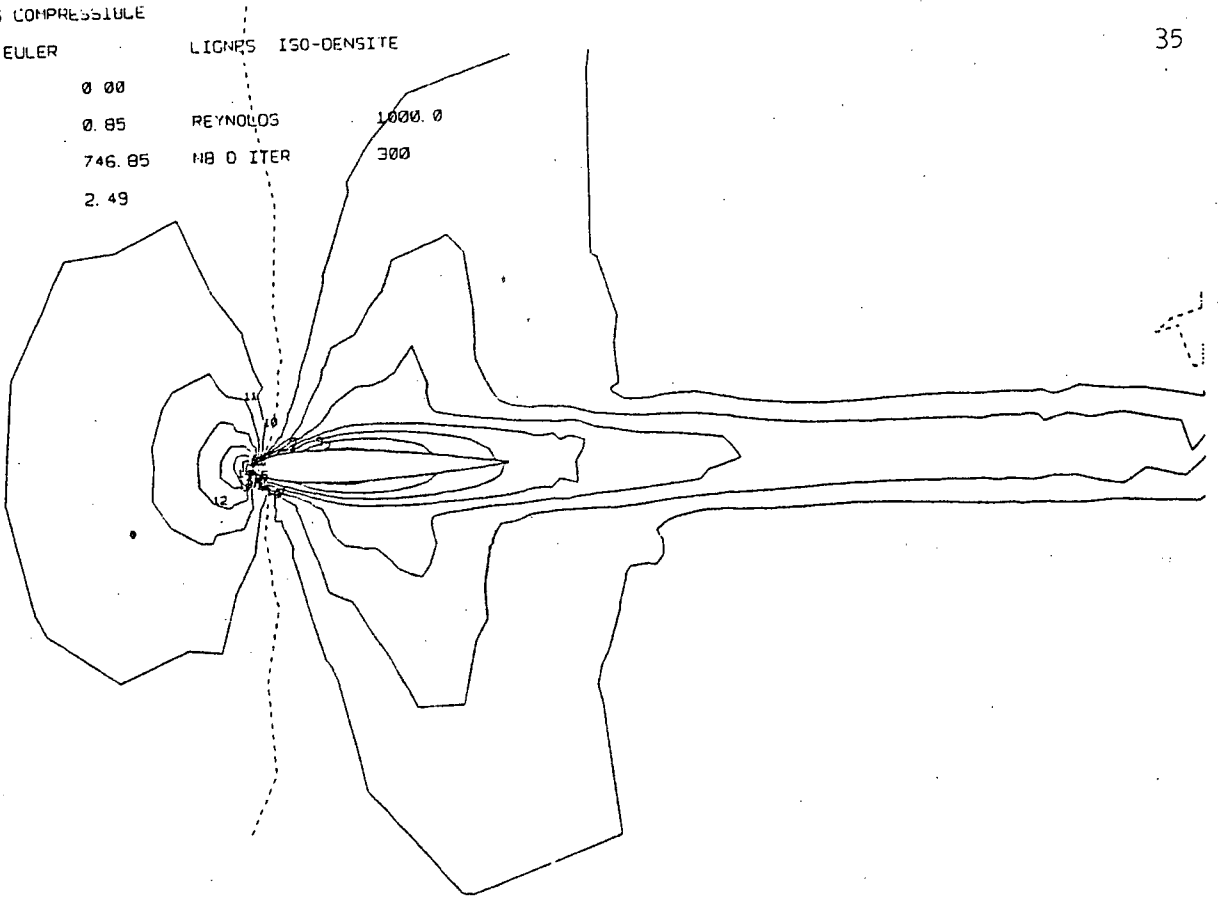
NAVIER AVEC EULER

LIGNES ISO-DENSITE

INCIDENCE 0.00
 MACH INFINI 0.85
 TEMPS 746.85
 PAS DE TEMPS 2.49

REYNOLDS 1000.0
 NB D ITER 300

ISO VALEUR
 1 0.60
 2 0.65
 3 0.70
 4 0.75
 5 0.80
 6 0.85
 7 0.90
 8 0.95
 9 1.00
 10 1.05
 11 1.10
 12 1.15
 13 1.20
 14 1.25
 15 1.30
 16 1.35
 17 1.40



NAVIER-STOKES COMPRESSIBLE

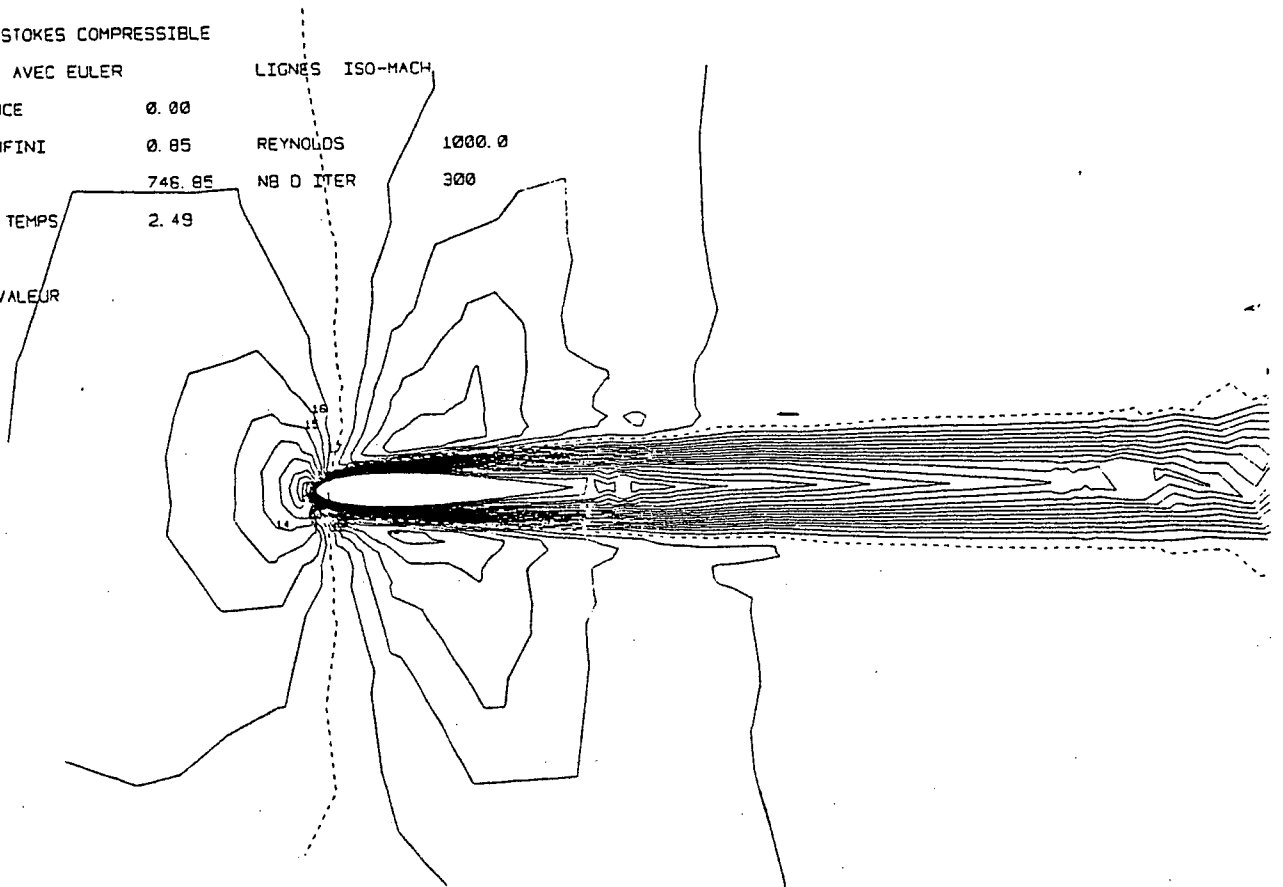
NAVIER AVEC EULER

LIGNES ISO-MACH

INCIDENCE 0.00
 MACH INFINI 0.85
 TEMPS 746.85
 PAS DE TEMPS 2.49

REYNOLDS 1000.0
 NB D ITER 300

ISO VALEUR
 1 0.80
 2 0.85
 3 0.90
 4 0.95
 5 1.00
 6 1.05
 7 1.10
 8 1.15
 9 1.20
 10 1.25
 11 1.30
 12 1.35
 13 1.40
 14 1.45
 15 1.50
 16 1.55
 17 1.60
 18 1.65
 19 1.70
 20 1.75
 21 1.80
 22 1.85
 23 1.90



Figures 17

Schéma FMG local 100 + 100 + 100 cycles
 $m_\infty = 0.85, Re = 1000$

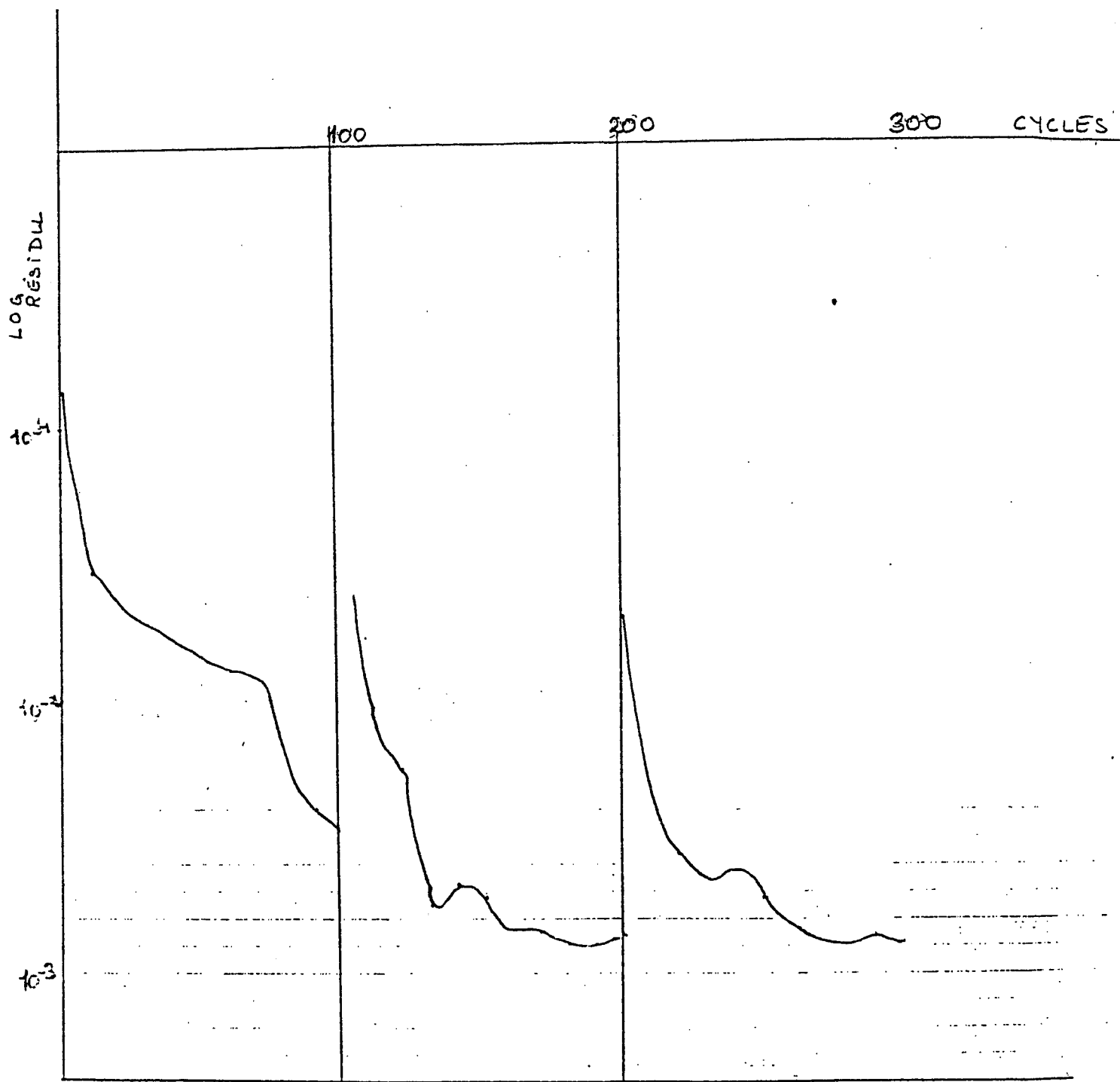
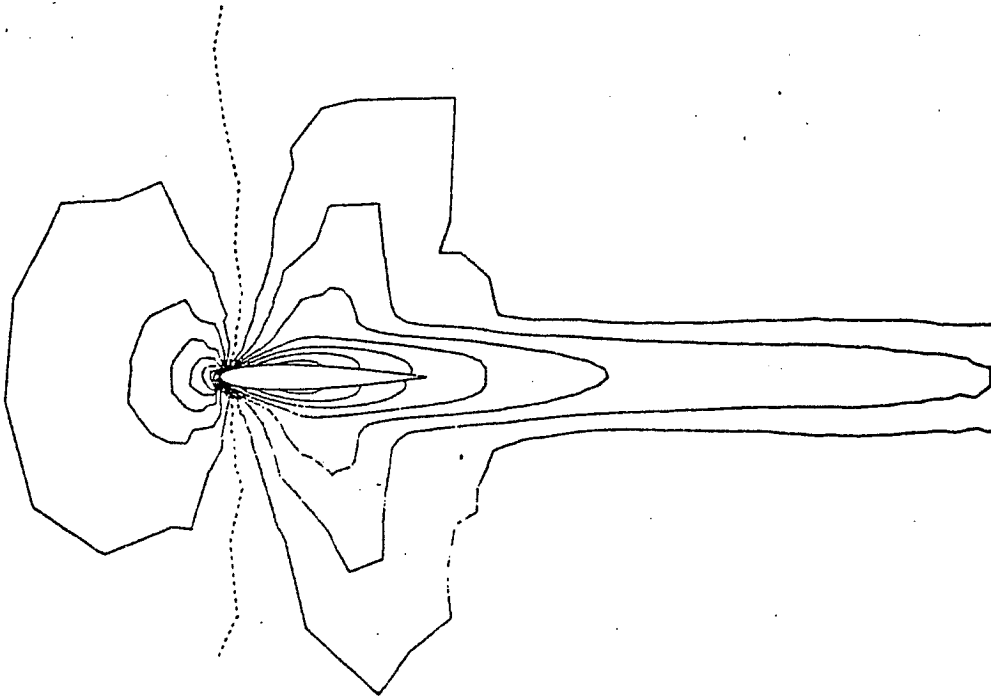


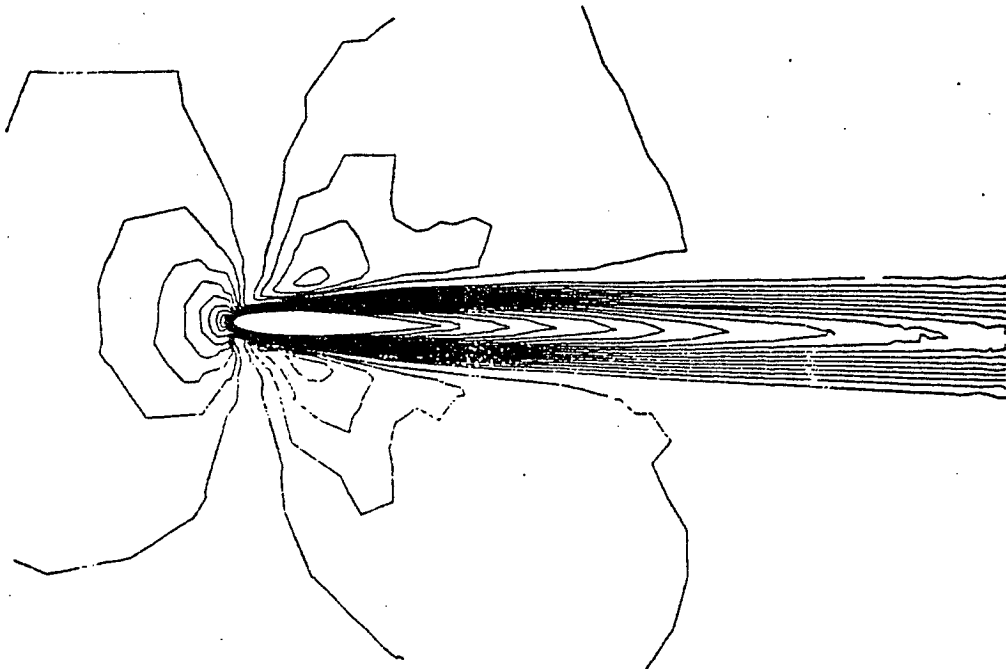
Figure 18

$m_\infty = 0.85$, $Re = 1000$, $cfl = 0.7$, $x = 0.0$

64 secs. CRAY 1S



lignes d'isodensité



lignes d'isomach

Figures 19

Schéma FMG local. 4 grilles. 20 + 30 + 50 + 50 cycles
 $m_\infty = 0.85$, $Re = 500$

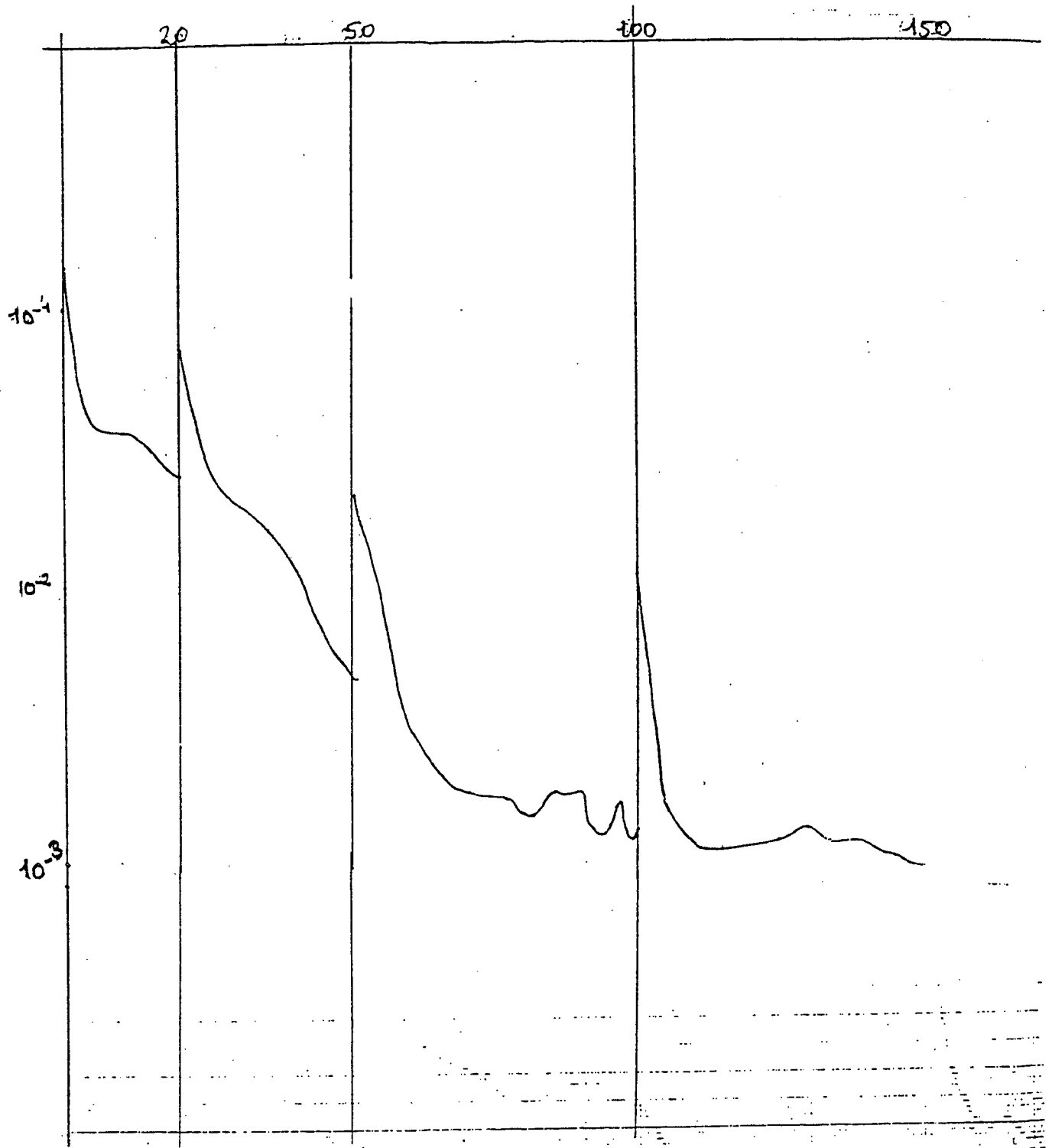
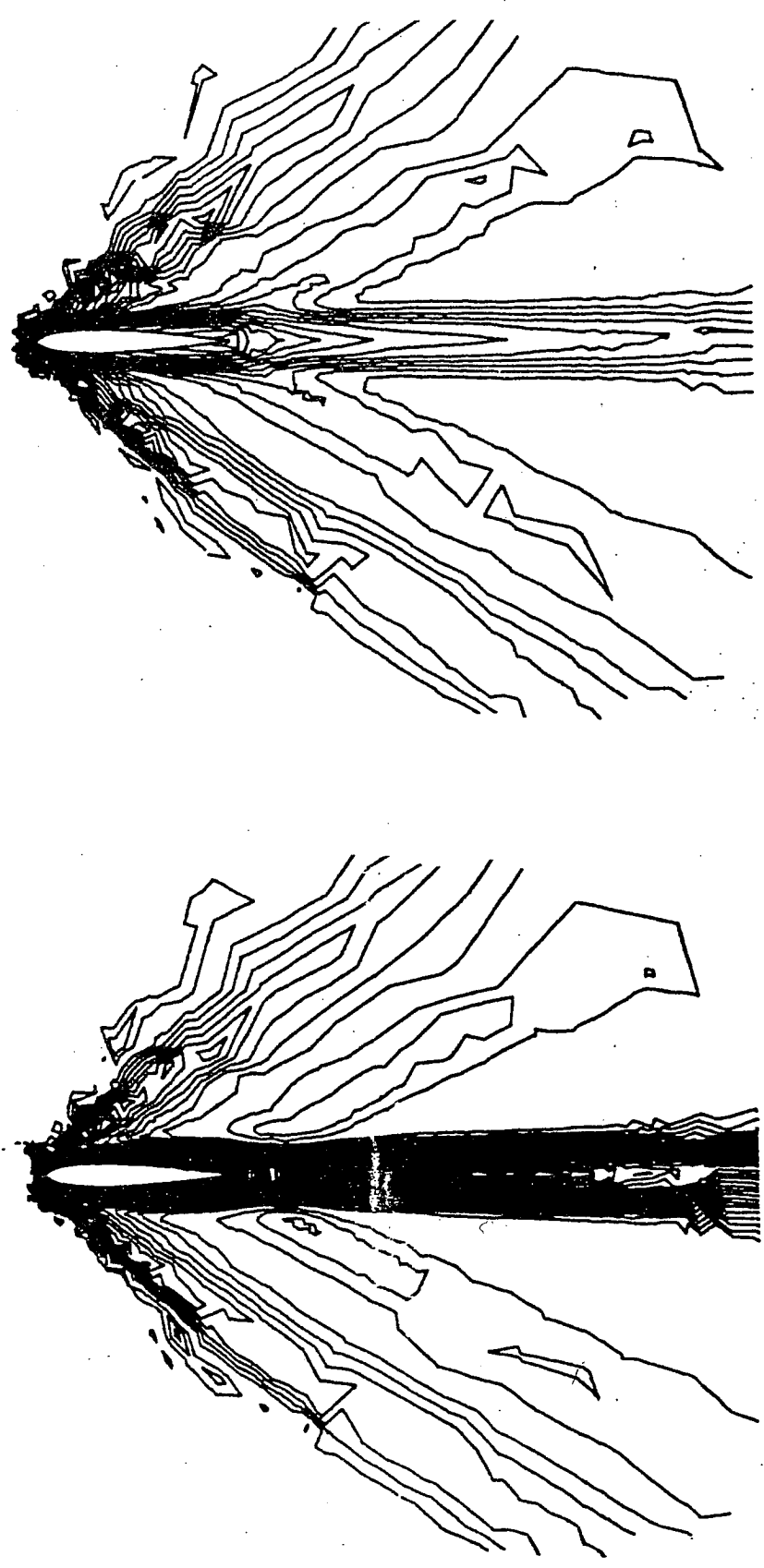


Figure 20

FMG local 20 + 30 + 50 + 50 (4 grilles)
 $m_\infty = 0.85$ Re = 500



Figures 21
Lignes d'isodensité et d'isomach, $m_\infty = 2.0$,
 $Re = 1000$, $x = 0.0$; schema FMG local,
100 + 100 + 100 cycles

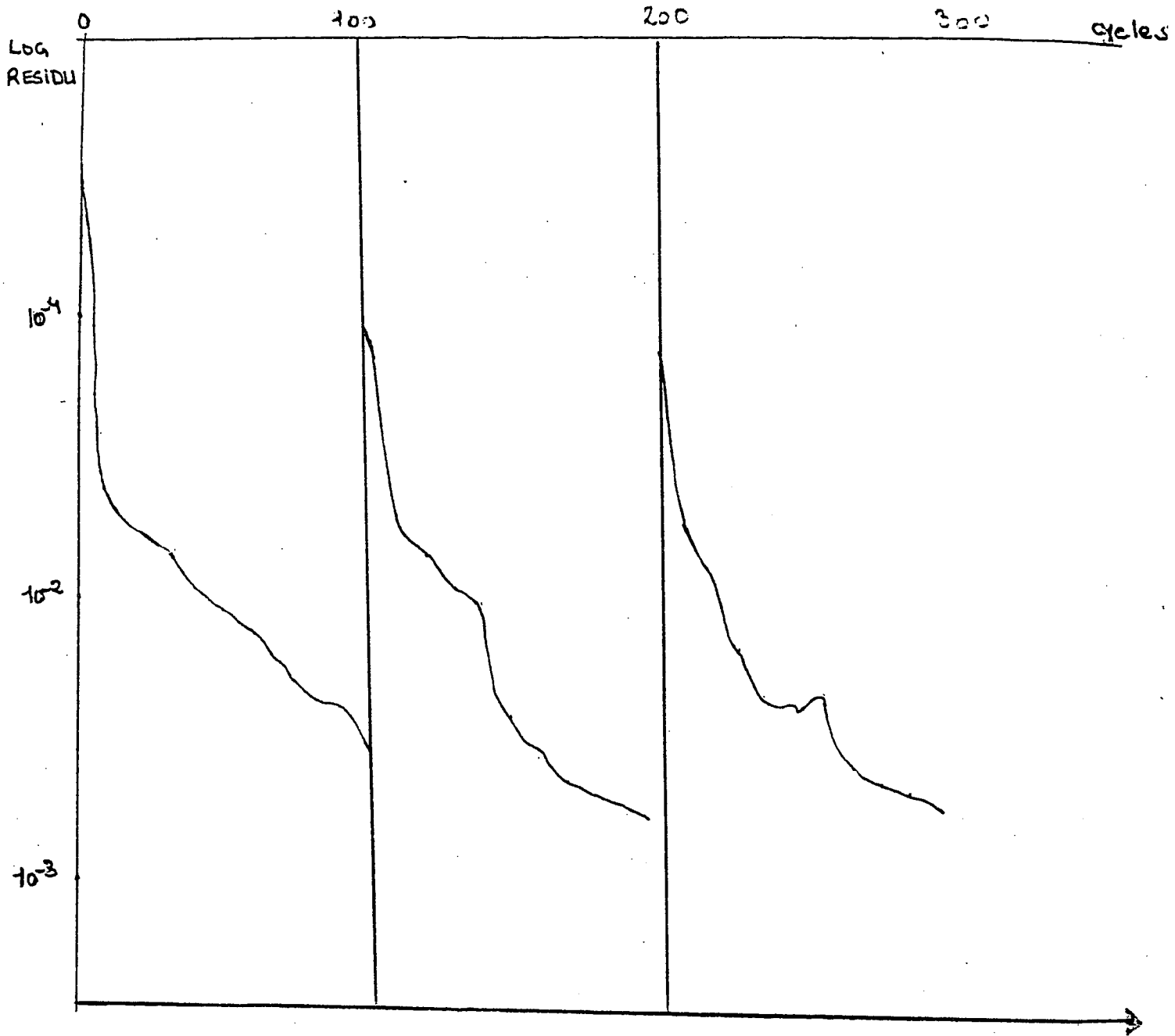
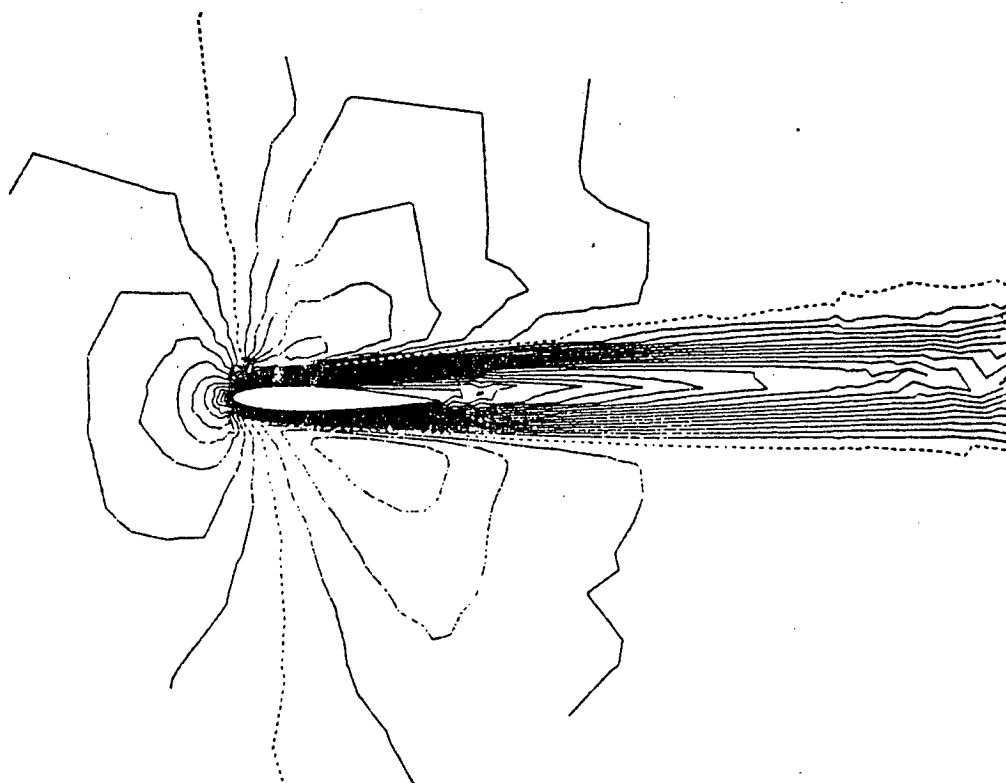
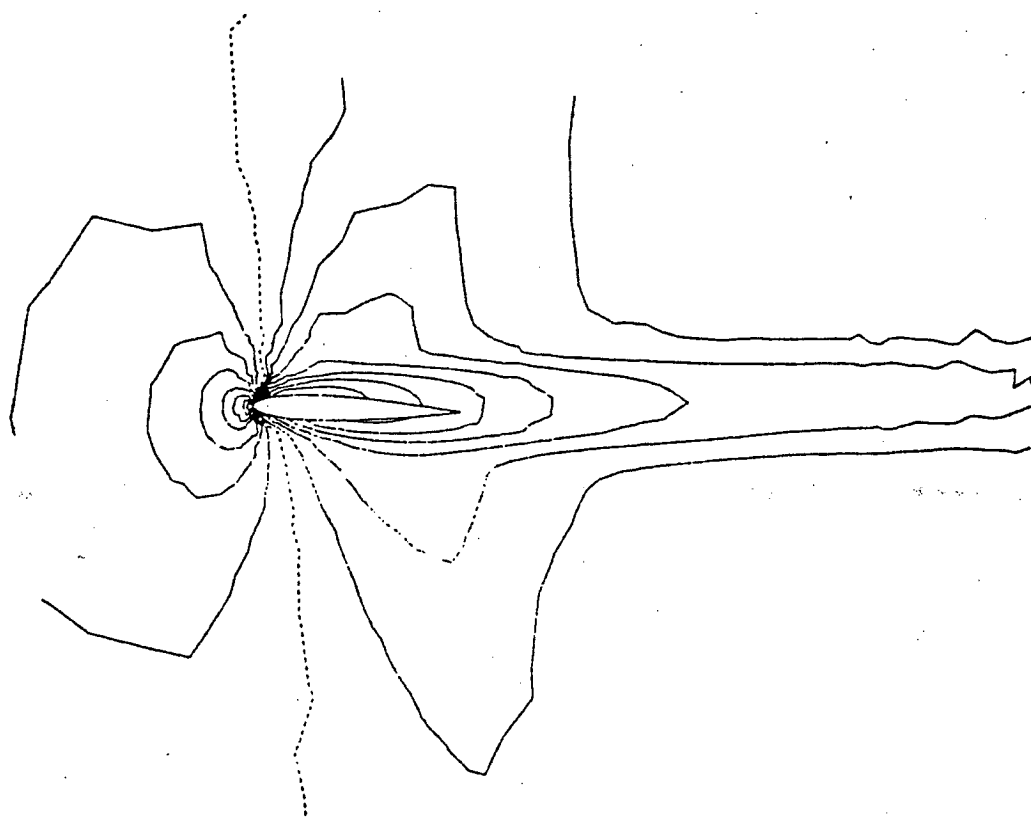


Figure 22

$m_{\infty} = 2.0$, $Re = 1000$ FMG local 100 + 100 + 100
 64 secs. CRAY



lignes d'isodensité et isomach : NACA en incidence,
 $m_\infty = 0.85$, $Re = 500$, $\alpha = 3^\circ$

Figures 23

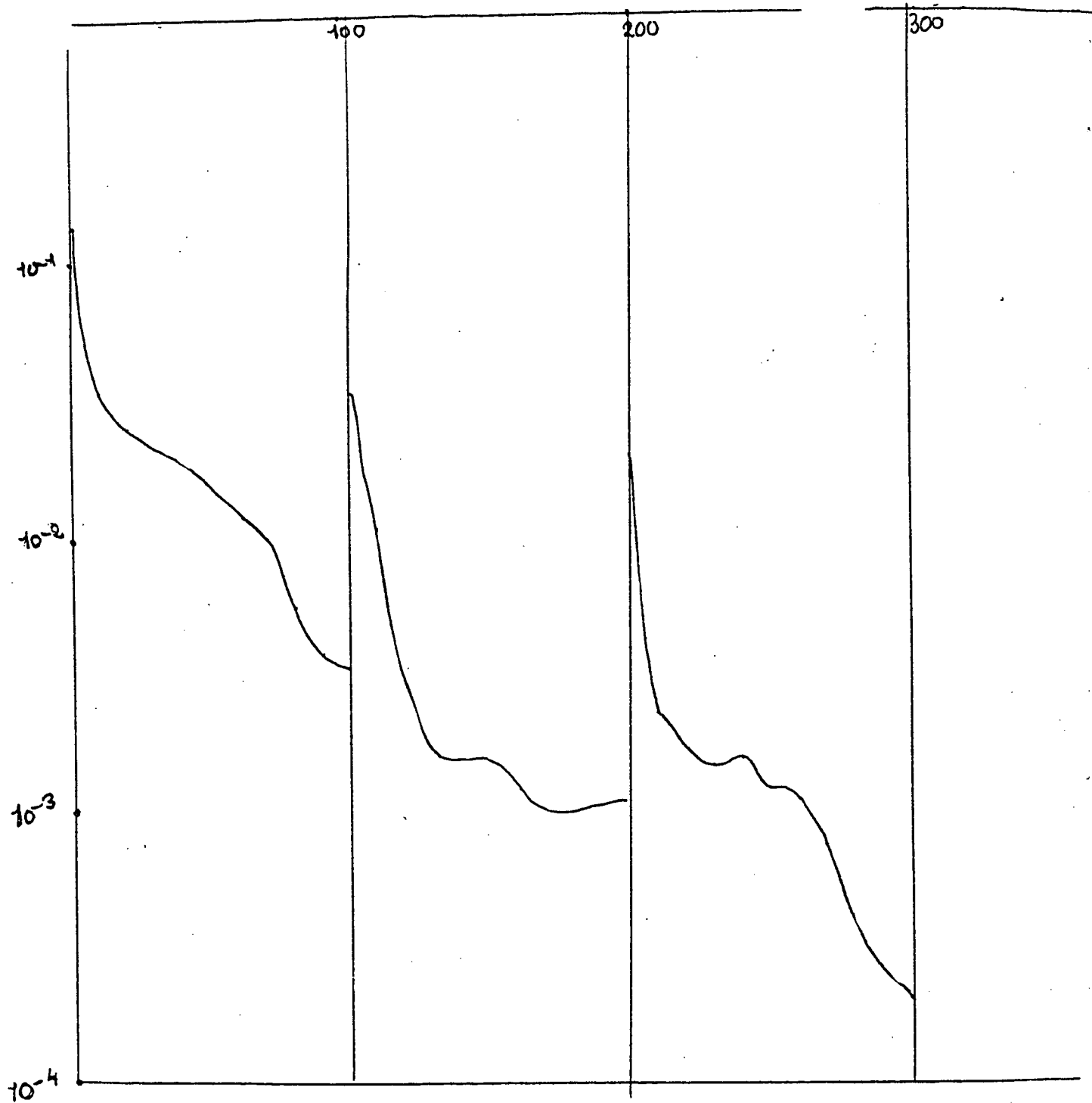


Figure 24

$m_{\infty} = 0.85$, $Re = 500$, $\alpha = 3^{\circ}$ Schéma FMG local

72 secs CRAY 1-S

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

0

1

2

3

4

5

6