



HAL
open science

Une approche pour la synthèse et l'analyse de la commande des robots manipulateurs rigides

Claude Samson

► **To cite this version:**

Claude Samson. Une approche pour la synthèse et l'analyse de la commande des robots manipulateurs rigides. [Rapport de recherche] RR-0669, INRIA. 1987. inria-00075884

HAL Id: inria-00075884

<https://inria.hal.science/inria-00075884>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-RENNES

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tél. (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 669

**UNE APPROCHE POUR
LA SYNTHÈSE ET L'ANALYSE
DE LA COMMANDE DES ROBOTS
MANIPULATEURS RIGIDES**

Claude SAMSON

Mai 1987

Campus Universitaire de Beaulieu
35042 - RENNES CÉDEX
FRANCE
Téléphone: 99 36 20 00
Télex: UNIRISA 950 473 F
Télécopie: 99 38 38 32

UNE APPROCHE POUR LA SYNTHÈSE ET L'ANALYSE DE LA COMMANDE DES ROBOTS MANIPULATEURS RIGIDES

Claude SAMSON

Publication Interne n° 356

226 Pages

Avril 87

Résumé :

Ce rapport présente une approche unifiée du problème de commande bas-niveau des robots manipulateurs rigides. Il est scindé en deux parties.

La première se situe à la frontière des niveaux haut et bas de la commande des robots. Elle introduit et développe la notion de conditionnement des tâches robotiques vis à vis du problème de commande bas-niveau. L'importance de cette notion résulte du lien étroit existant entre le conditionnement de la tâche robotique et la possibilité de concevoir des commandes efficaces et numériquement bien conditionnées. L'approche conduit à une méthodologie pour vérifier et, le cas échéant, augmenter le degré de conditionnement d'une tâche robotique. Elle permet également d'aborder de façon originale et de traiter globalement les problèmes de singularités et de redondance des tâches robotiques.

La seconde partie se situe au niveau de l'algorithmique de commande. Elle présente une synthèse et une analyse d'une classe de commandes englobant la plupart des commandes actuellement opérationnelles dans l'industrie ou proposées dans la littérature. L'étude est menée dans le cadre des robots rigides équipés de moteurs électriques à courant continu. L'analyse est centrée sur les propriétés de robustesse de la commande et met en évidence les ingrédients essentiels d'une bonne commande. A cet égard les commandes basées sur l'utilisation de gains non-linéaires présentent des propriétés intéressantes d'autant plus qu'elles ne sont pas nécessairement complexes à mettre en oeuvre.

AN APPROACH FOR THE SYNTHESIS AND ANALYSIS
OF THE ROBOT MANIPULATOR'S CONTROL

Abstract :

This report presents a unified approach for the low-level control problem of robot manipulators. It contains two parts.

The first part lies between the high and low robot control levels. It introduces and develops the concept of robot task conditioning in relation to the low level control problem. The importance of this concept results from the close link existing between the task conditioning and the possibility of deriving efficient and numerically well conditioned controls. The approach leads to a methodology for verifying and improving, when necessary, the conditioning of a robot task. It also leads to an original way of introducing and treating the problems of task singularities and task redundancy.

The second part lies at the design control level. It presents a synthesis and an analysis of a class of controls encompassing most of the controls which are operational in the industry or proposed in the literature. The study applies to rigid robot manipulators equipped with electric DC motors. The analysis focuses on the robustness properties of the control and points out the main ingredients of a good control. In this respect, controls using non linear gains seem to possess interesting properties, all the more as they are not necessarily complex to implement.



Je remercie:

Les membres des équipes Robotique de l'IRISA à Rennes et du centre INRIA à Sophia Antipolis pour les nombreuses discussions que nous avons eues et qui ont aidé à faire progresser ce rapport.

Monsieur Laurent BARATCHART, chercheur INRIA à Sophia Antipolis, qui m'a aidé à résoudre un point mathématique un peu délicat et m'a autorisé à reproduire une démonstration dont il est l'auteur (Annexe A du rapport).

Mademoiselle Dominique BLAISE, Madame Huguette BECHU et Monsieur Philippe LOUARN qui se sont chargés de la tâche difficile de saisie du rapport.

Claude SAMSON, mars 1987.

- Table des matières

Présentation générale	7
Partie 1 : Définition et conditionnement d'une tâche robotique	
1.1 Introduction	11
1.2 Fonctions ρ-admissibles	22
1.3 Tâches admissibles	27
1.4 Non-admissibilité et singularités d'une tâche	31
1.5 Exemples de tâches robotiques	33
1.5.1 Suivi de trajectoire dans l'espace des coordonnées articulaires du robot	33
1.5.2 Suivi de trajectoire dans un espace de coordonnées opérationnelles (cas non redondant)	33
1.5.3 Tâches basées sur l'utilisation de capteurs de proximité ou d'effort	38
1.6 Tâches redondantes. Utilisation de la redondance	58
1.6.1 Tâches redondantes	58
1.6.2 Utilisation de la redondance	61
1.6.3 Exemples de tâche redondante et de tâches secondaires	70
1.6.4 Réglage du transitoire de la tâche secondaire	80
1.7 Passage forcé par une singularité de la tâche	83
1.8 Modification d'une tâche pour augmenter son admissibilité	86
Annexe A : Equivalence entre P1 et P1'	93

Partie 2 : Synthèse et analyse de la commande

2.1	Introduction	99
2.2	Les équations du manipulateur	102
2.2.1	Equation des moteurs électriques	102
2.2.2	Equation des organes de transmission	102
2.2.3	Equation de la dynamique du corps du manipulateur	102
2.2.4	Equation des capteurs	103
2.2.5	Modèle du manipulateur pour la commande dans l'espace des coordonnées articulaires	103
2.2.6	Modèle du manipulateur dans l'espace de la tâche	105
2.3	Une structure de commande générale	105
2.3.1	Structure élémentaire de la commande	105
2.3.2	Commandes de type gradient	108
2.3.3	Commandes de type Newton	110
2.3.4	Expression générale de la commande	113
2.4	Rappel des diverses approches de commande dynamique	114
2.4.1	Commandes par découplage linéaire des équations du système dans l'espace de la tâche	115
2.4.2	Commandes en vitesse	119
2.4.3	Commandes adaptatives	125
2.4.4	Sliding Control	138
2.5	Analyse de stabilité d'une classe de systèmes non-linéaires	139
2.5.1	Introduction	139
2.5.2	Position du problème	139
2.5.3	Cas d'une équation linéaire invariante	142
2.5.4	Un théorème de stabilité	148
2.5.5	Deux résultats complémentaires	152
2.6	Application au problème de la commande des robots	154
2.6.1	Equation de l'erreur de poursuite	154
2.6.2	Conditions d'application du théorème de stabilité	155
2.6.3	Choix du gain $g(q, \dot{q}, t)$	160
2.6.4	Effets des erreurs de mesure b_q , $b_{\dot{q}}$ et b_e	164

2.7	Complément à l'analyse: conséquences des élasticités mécaniques, de la discrétisation de la commande et des retards dans les mesures	172
2.8	Rappel des points principaux de l'analyse	177
2.9	Utilisation de la condition de positivité de la matrice B dans les applications	179
	Annexe B : Démonstration du théorème de stabilité	195
	Annexe C : Un paramétrage "différentiel" de l'orientation de l'effecteur pour la commande dans l'espace des coordonnées opérationnelles	105
	Bibliographie	215

Présentation générale

L'objectif de ce rapport est d'essayer de définir une approche cohérente et unifiée pour la synthèse et l'analyse de commandes de robots.

Historiquement la commande des robots a été abordée de façon ponctuelle et compartimentée pour résoudre tel ou tel problème particulier sans que soit vraiment entrepris en parallèle un travail de synthèse pour dégager les principes généraux qui unifient l'ensemble des approches et solutions obtenues. C'est ainsi que commandes en vitesse, commandes par retour d'effort, commandes adaptatives, commandes par découplage linéaire,... peuvent apparaître dans la littérature comme autant de solutions, parfois antagonistes, pour réaliser diverses tâches robotiques elles-mêmes classées en plusieurs groupes. C'est ainsi que l'étude de la redondance d'une tâche robotique n'a principalement été abordée que dans un cadre cinématique et qu'il en est de même pour les tâches basées sur l'utilisation de capteurs de proximité ou d'effort. Au niveau de l'analyse, les études de stabilité et de robustesse ont surtout été entreprises, à quelques rares exceptions près, dans le cadre restrictif de la poursuite d'une trajectoire dans l'espace articulaire du robot. L'ensemble de ces points est repris dans le présent rapport et intégré au sein d'une approche unique générale de la commande de robots.

Le rapport est scindé en deux grandes parties. La première s'attache à caractériser mathématiquement la notion de tâche robotique et les propriétés qui font qu'une tâche est plus ou moins facile à réaliser. Le point de vue adopté et développé dans cette partie est que la plupart des tâches robotiques se ramène d'une façon ou d'une autre à un problème de positionnement des articulations du robot et que pour cette raison le problème de la commande peut généralement être exprimé en termes d'un problème de régulation où la grandeur à réguler est constituée des valeurs prises par une fonction vectorielle qui caractérise la tâche. Les variables de cette fonction sont d'une part les coordonnées articulaires du robot et d'autre part la variable temporelle qui sert à paramétrer l'évolution du ou des objectifs à atteindre. La trajectoire idéale du robot est celle qui annule cette fonction à tout instant. La notion de p -admissibilité d'une tâche est introduite et présentée comme un moyen de caractériser le conditionnement uniforme de la tâche pendant la durée d'exécution de celle-ci. L'étude de l'admissibilité d'une tâche permet déjà de se faire une idée des difficultés que pose son exécution avant même d'aborder le problème de commande. La notion de singularité d'une tâche est définie pour caractériser les tâches qui ne sont pas admissibles pendant toute la durée d'exécution initialement prévue. Elle généralise les notions classiques de singularités géométriques d'un robot et de singularités de représentation. Le concept d'admissibilité est ensuite appliqué à l'étude de plusieurs exemples de tâches robotiques. Parmi ces exemples une étude complémentaire est consacrée aux tâches basées sur l'utilisation de capteurs de proximité ou d'effort et des liens sont établis avec d'autres approches existantes. La caractérisation et l'utilisation de la redondance d'une tâche sont traitées dans le chapitre suivant avec quelques exemples commentés. Pour clore cette partie le problème du passage forcé par des singularités de la tâche est envisagé. Une alternative à cette

opération hasardeuse consiste à faire dès le départ en sorte que la tâche soit admissible et une méthode de régularisation des tâches non-admissibles est proposée.

La deuxième partie de ce rapport traite le problème de commande à proprement parler. L'étude est faite dans le cadre des robots rigides commandés par des moteurs électriques. Après avoir rappelé les équations de la dynamique des robots à partir desquelles l'analyse de la commande sera faite, une expression générale de la commande est proposée. Les principaux schémas de commande proposés dans la littérature sont passés en revue et leur unité de structure est mise en évidence. Un outil général d'analyse applicable à toute tâche robotique admissible et à toute commande appartenant à la classe précédemment définie est ensuite présenté. Le coeur de l'analyse est l'étude des solutions d'une classe d'équations différentielles non linéaires du second ordre. Cette analyse permet de déduire des conditions suffisantes de robustesse de la commande. Deux éléments essentiels pour la robustesse sont d'une part la taille des gains de commande et d'autre part la propriété de positivité d'une certaine fonction matricielle. La relation existant entre la taille des gains de commande et l'effort de modélisation consacré au niveau de l'élaboration de la loi de commande est explicitée. Il est suggéré par l'analyse qu'une alternative à l'utilisation de grands gains constants est l'utilisation de gains non-linéaires qui n'assument de grandes valeurs que lorsque cela est nécessaire. Une étude rapide des phénomènes qui tendent à s'opposer à l'utilisation de très grands gains vient compléter l'analyse. Pour terminer, les répercussions pratiques de la condition de positivité matricielle précédemment évoquée sont soulignées et illustrées par des exemples.

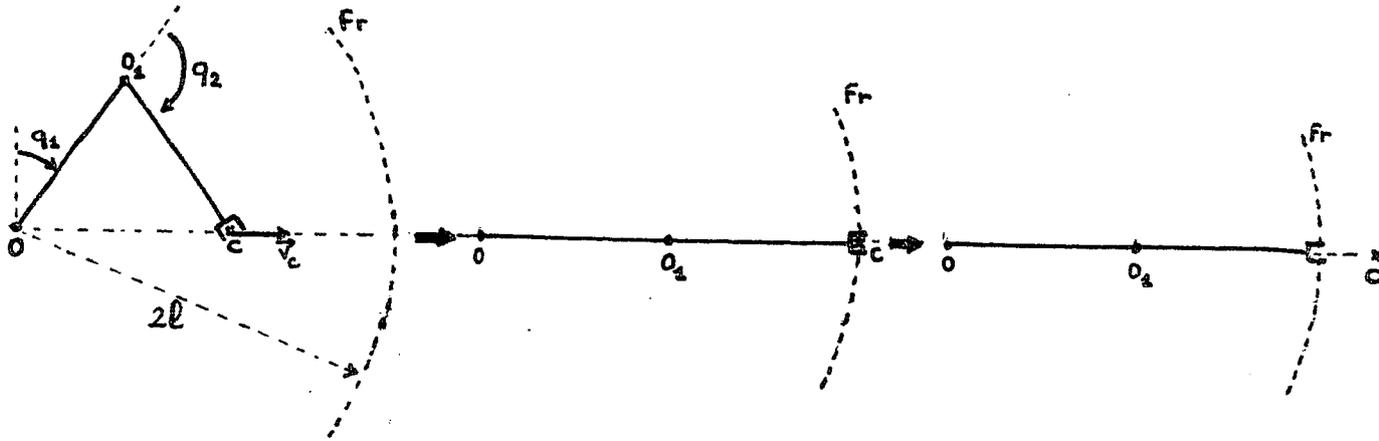
PARTIE I

Definition et conditionnement

d'une tâche robotique

1.1 Introduction

Avant de se préoccuper de la commande d'un robot, il faut déterminer la tâche que l'on veut lui faire accomplir. L'étape préalable de conception de la tâche robotique relève d'un niveau de décision supérieur qui doit conduire à traduire la tâche en termes mathématiques exploitables pour l'élaboration et ensuite l'évaluation de la commande "bas niveau". Cette opération de traduction est à la fois primordiale, parce qu'elle conditionne complètement l'utilisation future du robot, et délicate parce que non formalisable de façon précise. Elle est d'autant plus délicate que des formulations mathématiques a priori assez semblables peuvent dans certains cas conduire à de grandes différences de fonctionnement. Ce phénomène trahit généralement une certaine ambiguïté au niveau de la définition de la tâche qu'il conviendra le plus souvent d'éliminer en invoquant des considérations de robustesse de fonctionnement. Le prix de cette robustesse sera inéluctablement une dégradation des performances et de la précision dans certaines zones de travail. Il nous faut donc dès le départ prendre conscience qu'il existe des situations conflictuelles rendant le problème de commande difficile, sinon impossible, à résoudre de façon totalement satisfaisante. Illustrons cette remarque par un exemple. Supposons que le but recherché soit de minimiser la distance entre l'effecteur d'un manipulateur et une cible (supposée ponctuelle) dont on connaît la position à chaque instant. Tant que la cible reste dans l'espace atteignable par l'effecteur du robot le problème à traiter est un problème de poursuite. Lorsque la cible sort de l'espace de travail du robot, il n'est plus possible physiquement de réaliser la poursuite de la cible et la minimisation de la distance effecteur-cible devient un problème de pointage de l'effecteur dans la direction de la cible. La difficulté essentielle provient du fait que ces deux modes de fonctionnement, poursuite et pointage, ne sont pas physiquement raccordables. Il suffit pour s'en rendre compte de considérer le cas d'un manipulateur à deux degrés de liberté en rotation et d'une cible animée d'un mouvement linéaire uniforme dans une direction orthogonale à la frontière de l'espace atteignable par l'effecteur du robot (voir schéma ci-dessous).



instant : $t_1 - \Delta t$

situation : La cible C animée d'une vitesse \vec{v}_c est à l'intérieur de l'espace de travail du robot

mode de fonctionnement : poursuite

t_1

C arrive à la frontière de l'espace de travail

poursuite/pointage

$t_1 + \Delta t$

C est à l'extérieur de l'espace de travail

pointage

A l'intérieur de l'espace de travail :

$$2q_1 + q_2 = \pi$$

$$|OC| = 2l \sin q_1$$

$$\frac{d}{dt} |OC| = 2l \cos q_1 \dot{q}_1 = v_c \Rightarrow \dot{q}_1 = \frac{v_c}{2l \cos q_1}$$

A la frontière :

$$q_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dot{q}_1 = +\infty, \dot{q}_2 = +\infty$$

A l'extérieur de l'espace de travail :

$$q_1 = \frac{\pi}{2}, \dot{q}_1 = 0, \dot{q}_2 = 0$$

Pour réaliser parfaitement la tâche imposée, c'est-à-dire la poursuite puis le pointage de la cible, les vitesses \dot{q}_1 et \dot{q}_2 doivent donc devenir infinies à la frontière puis s'annuler instantanément, ce qui bien

sûr est irréalisable en pratique. Le seul moyen de s'en tirer consiste à modifier la tâche initiale en imposant d'abandonner la poursuite parfaite de la cible lorsque celle-ci se rapproche de la frontière. Ceci revient à dégrader la qualité de la poursuite et du pointage dans certaines zones de travail du manipulateur. Sans pousser plus loin le raisonnement il apparaît d'ores et déjà que le compromis qui sera choisi comportera nécessairement une part d'arbitraire.

Nous retiendrons pour l'instant de cet exemple que toute théorie ou analyse de la commande des robots, aussi complète soit-elle, ne peut servir à résoudre ou à corriger les problèmes conceptuellement mal posés. Pour cette raison, avant même d'aborder le problème de commande "bas niveau", il importe d'essayer de cerner les caractéristiques d'une tâche robotique bien conditionnée. Ce n'est que lorsque ces caractéristiques seront réunies qu'il sera possible de faire une analyse du problème de commande bas niveau. Une conséquence fâcheuse, mais incontournable, est qu'une telle analyse aura nécessairement les limitations de son cadre d'application. Elle cessera d'être applicable à l'instant où la tâche n'aura plus le conditionnement suffisant. Dans l'exemple de poursuite parfaite d'une cible, ce mauvais conditionnement apparaît lorsque la cible se rapproche trop de la frontière de l'espace atteignable par l'effecteur du robot. Nous aurons alors dans la pratique à faire face à deux alternatives : ou bien interrompre l'exécution de la tâche, ou bien laisser "courir" la commande, en prenant certaines précautions et en espérant que celle-ci possède encore de bonnes propriétés en dehors du cadre de l'analyse. Comme il sera dans ce dernier cas impossible de prévoir avec certitude l'effet de la commande, le risque pris devra au moins être justifiable par des arguments de robustesse de nature différente de ceux de l'analyse. Cette option concerne en particulier une classe importante de commandes que nous appellerons du "type gradient" pour les distinguer d'une autre classe de commande dite de "type Newton" idéalement plus performantes et plus sûres lorsque la tâche est bien conditionnée, mais moins robustes dans le cas contraire. Le conflit robustesse-performances, auquel nous ne pouvons décidément échapper, apparaît encore sous cette forme.

Tentons maintenant de préciser ce que nous entendons par formulation mathématique d'une tâche robotique. Notre idée est que dans la plupart des cas le désir de l'utilisateur se résume ou se ramène

i) soit à essayer de maintenir proche de zéro un vecteur $e(q,t)$ de dimension $(m \times 1)$ ($m \leq n$) où n est le nombre de degrés de libertés du robot,

Exemple :

$$e(q,t) = q - q_r(t)$$

où $\{q_r(t)\}$ est une trajectoire idéale prédéterminée dans l'espace des coordonnées articulaires

ii) soit à essayer de minimiser (maximiser) par rapport à la variable q une fonction de coût scalaire $h(q,t)$ susceptible d'évoluer dans le temps (d'où la présence de la variable t),

Exemple :

$$h(q,t) = \sum_{i=1}^l \frac{1}{d_i^2(q,t)}$$

où $d_i(q,t)$ est la distance d'un point du robot à un obstacle dont la position variable dans le temps est paramétrée par la variable t .

iii) soit à combiner les deux opérations précédentes.

Exemple :

a) maintenir nul le vecteur : $e(q,t) = x(q) - x_r(t)$

où : $x(q)$: vecteur de coordonnées $(m \times 1)$ ($m < n$) repérant la position de l'effecteur dans un repère cartésien fixe.

$\{x_r(t)\}$: trajectoire idéale de l'effecteur dans ce repère.

b) sous la contrainte précédente, minimiser

$$h(q,t) = \sum_{i=1}^l \frac{1}{d_i^2(q,t)}$$

de sorte à éviter autant que possible les obstacles.

Il existe des liens étroits entre ces diverses formulations. Par exemple, dans le cas où la fonction $h(q,t)$ est globalement convexe, minimiser cette fonction par rapport à q est équivalent à amener puis à maintenir proche de zéro le vecteur gradient $e(q,t) = \frac{\partial h}{\partial q}(q,t)$ de cette fonction.

Exemple :

$$\min_q |q - q_r(t)|^2 \Leftrightarrow q - q_r(t) = 0$$

De même si le vecteur $e(q,t)$ dérive d'une fonction positive $h(q,t)$ et si cette fonction est convexe en son minimum à l'instant t , maintenir $e(q,t)$ égal à zéro revient à minimiser la fonction $h(q,t)$.

Dans le cas général, il n'y a cependant pas équivalence entre « essayer de minimiser une fonction $h(q,t)$ » et « amener à zéro le vecteur gradient $e(q,t) = \frac{\partial h}{\partial q}(q,t)$ ». La raison est que dans le cas où la fonction $h(q,t)$ n'est pas globalement convexe et possède plusieurs minimums et maximums locaux, amener le vecteur gradient à zéro peut conduire à maximiser la fonction au lieu de la minimiser. La difficulté est bien connue en programmation linéaire. C'est à ce niveau que s'introduit la distinction

entre la méthode du gradient et la méthode de Newton [1]. Rappelons brièvement les avantages et les inconvénients de ces deux méthodes.

Méthode du gradient (en continu)

Soit $h(q)$ une fonction indépendante de la variable t qu'il s'agit de minimiser. Une façon d'implémenter la méthode du gradient consiste, à partir d'une valeur initiale $q(0) = q_0$, à faire varier q selon l'équation d'évolution suivante :

$$\dot{q} + \mu Q \frac{\partial h^T}{\partial q}(q) = 0 \quad (\mu > 0) \quad (1-1)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial q}(q) = \left[\frac{\partial h}{\partial q_1}(q), \dots, \frac{\partial h}{\partial q_n}(q) \right] \right)$$

où Q est une matrice positive.

En multipliant alors l'équation (1-1) à gauche par $\frac{\partial h}{\partial q}(q)$, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}(h(q)) = -\mu \frac{\partial h}{\partial q}(q) Q \frac{\partial h^T}{\partial q}(q) \leq 0 \quad (1-2)$$

Tant que $\frac{\partial h^T}{\partial q}(q) \neq 0$, $h(q)$ diminue. Cette décroissance s'arrête lorsque $\frac{\partial h^T}{\partial q}(q) = 0$, c'est à dire lorsque $h(q)$ a atteint un point stationnaire. Ce point stationnaire est un minimum si en ce point $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} > 0$.

Le choix le plus simple pour Q est la matrice identité I . Dans ce cas la méthode consiste simplement à imposer que q se déplace dans la direction opposée de celle du gradient $\frac{\partial h^T}{\partial q}(q)$ de la fonction $h(q)$.

L'avantage de cette méthode est qu'elle assure toujours la convergence vers un point (ou une région) où la valeur de la fonction est plus petite qu'au départ. Si de plus q se rapproche suffisamment près d'un minimum de la fonction alors q converge vers ce minimum.

L'inconvénient bien connu de la méthode est qu'à l'approche du minimum, la convergence peut être très lente : c'est le phénomène de vallée.

Une conséquence de ce phénomène est que la moindre perturbation $v(t)$, agissant au niveau de l'équation d'évolution (1-1), c'est-à-dire telle que :

$$\dot{q} + \mu Q \frac{\partial h^T}{\partial q}(q) = v(t) \quad (1-3)$$

peut entraîner de grands écarts du vecteur q et le maintenir loin du minimum.

Méthode de Newton

Une façon de remédier au phénomène de vallée inhérent à la méthode du gradient simple consiste à

corriger la direction de descente à l'aide de la matrice dérivée seconde de la fonction. Ceci revient à remplacer l'équation (1-1) par l'équation suivante :

$$\dot{q} + \mu \left[\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q) \right]^{-1} \frac{\partial h^T}{\partial q}(q) = 0 \quad (1-4)$$

Remarquons que cette équation peut également s'écrire :

$$\dot{e} + \mu e = 0 \quad (e = \frac{\partial h^T}{\partial q}) \quad (1-5)$$

et qu'elle entraîne la convergence exponentielle uniforme du vecteur de gradient vers 0, quelque soit la condition initiale de q_0 .

L'avantage de cette méthode est d'assurer un taux de convergence uniforme au voisinage du minimum, ainsi qu'une meilleure insensibilité aux perturbations.

Son inconvénient majeur est qu'elle assure la convergence vers un minimum seulement si la matrice $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q)$ est positive tout le long de la trajectoire de q . Dans le cas où cette matrice est initialement négative, q part dans la mauvaise direction, et la fonction $h(q)$ augmente.

Supposons maintenant que la fonction à minimiser $h(q,t)$ ne soit plus indépendante de la variable temporelle t .

Dans ce cas :

$$\frac{d}{dt}(h(q,t)) = \frac{\partial h}{\partial q}(q,t) \dot{q} + \frac{\partial h}{\partial t}(q,t) \quad (1-6)$$

et la méthode de gradient (1-1) ne conduit plus à la relation (1-2), mais à la relation :

$$\frac{d}{dt}(h(q)) = -\mu \frac{\partial h}{\partial q}(q,t) Q \frac{\partial h^T}{\partial q}(q,t) + \frac{\partial h}{\partial t}(q,t) \quad (1-7)$$

Il est clair que dans ce cas, si $\frac{\partial h}{\partial t}(q,t) \neq 0$, la méthode de gradient n'assure plus la convergence de q vers le minimum de $h(q,t)$. Il se peut même que si $\frac{\partial h}{\partial t}(q,t)$ varie très vite et si le coefficient μ n'est pas assez grand, q ne cesse de s'éloigner de ce minimum.

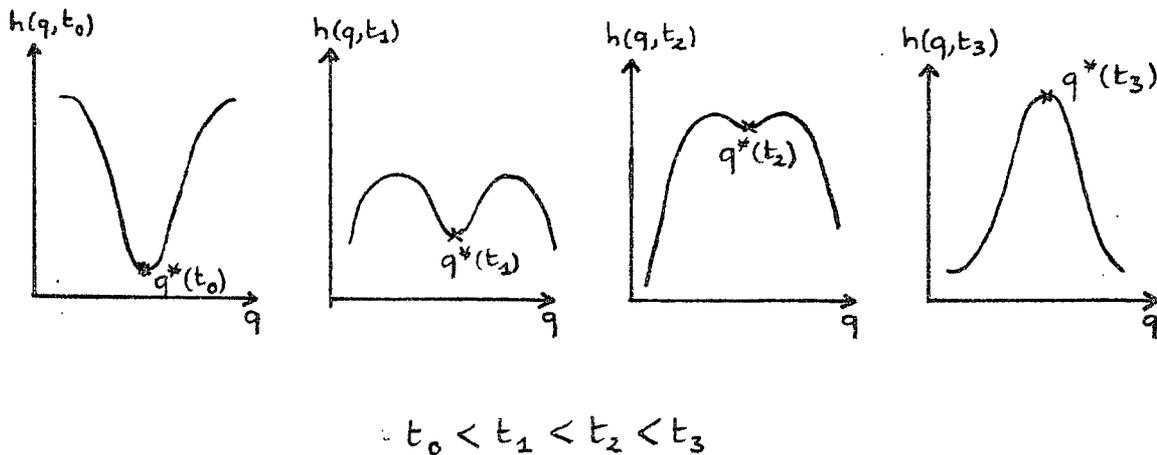
Si, par contre, nous imposons que q satisfasse la relation (1-5) : $\dot{e} + \mu e = 0$ qui s'écrit également :

$$\dot{q} + \mu \left[\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} \right]^{-1} \frac{\partial h^T}{\partial q} + \left[\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} \right]^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial h}{\partial q} \right] = 0 \quad (1-8)$$

nous obtenons une méthode de Newton modifiée qui assure la convergence puis le maintien de q au minimum de la fonction $h(q,t)$, tant que $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}$ reste positive.

Autrement dit un suivi parfait du minimum de la fonction $h(q, t)$ ne peut se faire qu'à l'aide de la matrice dérivée seconde $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}$, c'est-à-dire en utilisant une méthode de type Newton.

L'avantage précédent admet cependant une contrepartie à laquelle la méthode de gradient est beaucoup moins sensible. Supposons en effet que la fonction $h(q, t)$ se déforme au cours du temps de sorte que petit à petit, par continuité, le minimum local vers lequel nous avons convergé au départ se transforme en un maximum. Nous avons représenté cette évolution dans le schéma suivant :



La méthode de Newton permet de maintenir q égal au minimum $q^*(t)$ tant qu'en ce point la dérivée seconde $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}$ reste positive. A l'approche de l'instant t_3 où $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q^*(t), t)$ devient égal à zéro ($\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} = \frac{\partial e}{\partial q}$ devient singulière) la méthode de Newton est de moins en moins bien conditionnée numériquement et finit par exploser.

Par contre, du fait que la méthode de gradient n'utilise pas l'inverse de $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}$, elle continue d'être utilisable. Après l'instant t_3 , q part d'un côté ou de l'autre de $q^*(t_3)$ et tend à rejoindre un autre minimum de la fonction. En réalité q aura entamer ce mouvement avant l'instant t_3 puisque q ne coïncide pas exactement avec le minimum $q^*(t)$ pendant l'intervalle de temps $[t_0, t_3]$. Cette anticipation pourra même être plus rapide si une perturbation agit sur l'équation d'évolution de q .

Il n'est pas dur d'imaginer que les difficultés que nous venons d'évoquer se répercutent intégralement au niveau de la synthèse de la commande. Pour réaliser une tâche avec précision nous aurons envie d'utiliser une commande dérivant de la méthode de Newton. Cette commande pourra cependant dans certains cas ne pas avoir la robustesse d'emploi d'une commande plus simple dérivant de la méthode du gradient. Nous avons vu que cette différence de robustesse était liée à la forme de la fonction $h(q, t)$ que l'on désire minimiser. Plus précisément elle est liée aux variations de convexité de cette fonction au voisinage du minimum. Elle tend à disparaître dans le cas où la fonction se déforme "régulièrement" dans le temps et reste convexe (dans la variable q) dans un voisinage assez grand du minimum $q^*(t)$. Dans ce cas la tâche que doit accomplir le robot s'exprime en termes non équivoques pour le problème de commande : le but de la commande est d'amener q au minimum $q^*(t)$ qui se trouve au fond de la région convexe à laquelle appartient la position initiale q_0 et de l'y maintenir. La tâche consiste donc à réguler le vecteur gradient $\alpha(q, t) = \frac{\partial h}{\partial q}(q, t)$ autour du vecteur nul.

Nous sommes ainsi amenés à distinguer deux catégories de tâches robotiques : i) celles que nous qualifierons de bien conditionnées pour le problème de commande et qui se ramènent à un problème de régulation pendant toute la durée d'exécution de la tâche, et ii) celles qui n'appartiennent pas à la première catégorie et qui ne seront pas traitées pas dans ce rapport.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous attacherons, en vue de l'analyse de commande qui suivra, à formaliser la notion de bon conditionnement d'une tâche en la reliant aux propriétés que doit satisfaire la fonction vectorielle $e(q, t)$ (celle-ci dérivant ou non d'une fonction scalaire $h(q, t)$). Il incombera ensuite au concepteur de la commande de vérifier si la tâche qu'il veut réaliser est compatible ou non avec ces propriétés. Si cette compatibilité n'est pas acquise, le concepteur pourra s'il le désire modifier la tâche en conséquence.

Signalons pour clore cette introduction qu'il existe, heureusement pour la généralité de notre approche, des moyens de transformer une tâche reconnue mal conditionnée en une tâche "voisine" bien conditionnée. Pour illustrer cette possibilité, considérons le cas d'une fonction $h(q, t)$ que l'on désire minimiser et supposons que la matrice $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q, t)$ soit uniformément bornée mais non nécessairement positive. Il est toujours possible de "convexifier" (par rapport à la variable q) cette fonction en lui ajoutant un terme de la forme $1/2\lambda(t)|q - y(t)|^2$ où $\lambda(t)$ est une fonction scalaire positive et $y(t)$ une fonction vectorielle à valeurs dans \mathbb{R}_n . En effet la fonction $h'(q, t)$ ainsi obtenue s'écrit :

$$h'(q, t) = h(q, t) + \frac{1}{2}\lambda(t)|q - y(t)|^2 \quad (1-9)$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial q^2}(q, t) = \frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q, t) + \lambda(t)I \quad (1-10)$$

Il est clair qu'un choix adéquat de $\lambda(t)$ permet de rendre la matrice $\frac{\partial^2 h'}{\partial q^2}$ toujours positive au voisinage du point courant $q(t)$. Il reste alors à déterminer $y(t)$ de sorte que la contribution du coût ajouté demeure faible.

Montrons, en examinant un cas particulier simple, que cette modification de la tâche peut s'interpréter comme une façon de concilier les avantages respectifs des méthodes de gradient et de Newton dans le but de minimiser la fonction initiale $h(q, t)$.

Nous supposons pour simplifier que cette fonction est indépendante de la variable - t - ($h(q, t) = h(q)$). Soit λ une borne supérieure de la valeur absolue de la valeur propre la plus négative de $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q)$. Par définition de λ la matrice : $\frac{\partial^2 h'}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial q^2} + \lambda I$ est toujours définie positive (donc inversible). Imposons d'autre part à $y(t)$ de satisfaire l'équation :

$$\dot{y}(t) + \alpha y(t) = \alpha q(t) ; y(0) = q(0) \quad (\alpha > 0) \quad (1-11)$$

$y(t)$ est dans ce cas un vecteur filtré de $q(t)$. Plus α est grand, moins le filtrage est important et plus $y(t)$ ressemble à $q(t)$. Il résulte également de cette équation que si $q(t)$ converge vers un vecteur constant alors $y(t)$ converge vers le même vecteur.

Vérifions dans un premier temps que la méthode de gradient simple appliquée à la fonction $h'(q, t) = h(q) + \frac{1}{2} \lambda |q - y(t)|^2$ donne des résultats semblables à ceux obtenus en appliquant la même méthode à la fonction $h(q)$. En transposant l'équation (1-1) au cas de la fonction $h'(q, t)$, nous avons :

$$\dot{q} + \mu Q \frac{\partial h'}{\partial q}(q, t) = 0 \quad (a)(1-12)$$

soit encore :

$$\dot{q} + \mu Q \left[\frac{\partial h}{\partial q}(q) + \lambda(q - y) \right] = 0 \quad (b)(1-12)$$

Nous voyons déjà que la seule différence avec la méthode de gradient originale (donnée par la relation (1-1)) est l'addition du terme $\mu \lambda Q (q - y)$. Ce terme étant nul à l'instant $t = 0$, la valeur initiale de \dot{q} est inchangée.

En multipliant la relation (1-12-b) à gauche par $(\dot{q} - \dot{y})^T Q^{-1}$, nous obtenons :

$$\dot{q}^T Q^{-1} \dot{q} + \mu \dot{q}^T \frac{\partial h}{\partial q}(q) + \lambda (\dot{q} - \dot{y})^T Q^{-1} (q - y) - \dot{y}^T Q^{-1} [\dot{q} + \mu Q \frac{\partial h}{\partial q}(q)] = 0 \quad (1-13)$$

et en utilisant (1-11) et (1-12-b) dans cette relation :

$$\dot{y}^T Q^{-1} [\dot{q} + \mu Q \frac{\partial h}{\partial q}(q)] = -\lambda \alpha (q - y)^T Q^{-1} (q - y) \quad (1-14)$$

En rassemblant (1-13) et (1-14) nous obtenons finalement :

$$\frac{d}{dt}[\mu h(q) + \frac{\lambda}{2}(q-y)^T Q^{-1}(q-y)] = -\dot{q}^T Q \dot{q} - \lambda \alpha (q-y)^T Q^{-1}(q-y) \leq 0 \quad (1-15)$$

Il en résulte que \dot{q} , $(q-y)$ et par suite $\frac{\partial h^T}{\partial q}(q)$ tendent vers le vecteur nul. Donc si q converge q se stabilise en un point stationnaire de la fonction $h(q)$ (qui est un minimum de $h'(q,t)$) où celle-ci a une valeur plus petite qu'au départ. C'était le but recherché.

Appliquons maintenant la méthode de Newton à la fonction $h'(q,t)$. La relation (1-5) s'écrit :

$$\dot{e} + \mu e = 0 \quad (a)(1-16)$$

avec :

$$e(q,t) = \frac{\partial h^T}{\partial q}(q,t) = \frac{\partial h^T}{\partial q}(q) + \lambda(q-y(t)) \quad (b)(1-16)$$

D'où l'équation d'évolution de q :

$$\dot{q} + \mu \left(\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} + \lambda I \right)^{-1} \left[\frac{\partial h^T}{\partial q} + \lambda(q-y) - \frac{\lambda}{\mu} y \right] = 0 \quad (1-17)$$

Soit en utilisant (1-11)

$$\dot{q} + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} + \lambda I \right)^{-1} \left[\alpha \frac{\partial h^T}{\partial q} + (\mu - \alpha) e \right] = 0 \quad (1-18)$$

La matrice $\left(\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} + \lambda I \right)$ étant positive nous voyons déjà que la méthode ne possède plus les limitations de la méthode de Newton originale.

Remarquons aussi que pour $\alpha = \mu$:

$$\dot{q} + \mu \left(\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} + \lambda I \right)^{-1} \frac{\partial h^T}{\partial q} = 0 \quad (1-19)$$

La méthode de Newton appliquée à la fonction $h'(q,t)$ coïncide donc exactement dans ce cas avec une méthode mixte gradient-Newton appliquée à la fonction $h(q)$. Elle possède la robustesse de la méthode de gradient et en partie les performances de la méthode de Newton. En s'octroyant la liberté supplémentaire de faire tendre λ vers 0 lorsque $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q(t))$ positive, nous pourrions converger vers une méthode de Newton pure au voisinage du minimum.

Terminons avec le cas général où $\alpha \neq \mu$. En multipliant (1-18) à gauche par $\frac{\partial h}{\partial q}$ nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} [h(q)] = -\alpha \frac{\partial h}{\partial q} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} + \lambda I \right)^{-1} \left[\frac{\partial h}{\partial q} + \frac{1}{\alpha} (\mu - \alpha) e \right] \quad (1-20)$$

or d'après (1.16a) e converge exponentiellement vers 0 et par conséquent (sans entrer dans les détails d'une démonstration plus rigoureuse) :

$$\frac{d}{dt} [h(q)] \approx -\alpha \frac{\partial h}{\partial q} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} + \lambda I \right)^{-2} \frac{\partial h}{\partial q} \leq 0 \quad (1-21)$$

Cette dernière relation montre que q tend vers un point stationnaire de la fonction $h(q)$ qui est également un minimum de $h'(q,t)$.

1.2 fonctions ρ -admissibles

Soit $e(q,t)$ une application vectorielle de classe $C^k (k \geq 2)$ d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^n . Nous dirons que cette fonction est ρ -admissible sur l'ensemble $C_{\rho,T}$ pendant l'intervalle de temps $[0, T]$ si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

P_1 :

Il existe :

- . un intervalle $[0, T]$ de \mathbb{R}
- . une boule fermée B_ρ dans \mathbb{R}^n de centre 0 et de rayon $\rho \geq 0$
- . un ensemble $C_{\rho,T}$ dans Ω

tels que la fonction $F(q,t) = (f(q,t), t)$ est un difféomorphisme de classe C^k (bijection de classe C^k dont la réciproque est aussi de classe C^k) de $C_{\rho,T}$ sur $B_\rho \times [0, T]$.

Par difféomorphisme de $C_{\rho,T}$ sur $B_\rho \times [0, T]$, il faut bien sûr comprendre difféomorphisme d'un ouvert contenant $C_{\rho,T}$ sur un ouvert contenant $B_\rho \times [0, T]$.

L'intérêt de ce difféomorphisme est de permettre le changement de coordonnée $(q,t) \leftrightarrow (e,t)$ où (q,t) est un point de $C_{\rho,T}$ et e le point de B_ρ image par la fonction $e(q,t)$ du point (q,t) . Grâce à la propriété P_1 nous pouvons affirmer qu'étant donné un point initial $(q_0, 0)$ de $C_{\rho,T}$ et un chemin $e(t) (t \in [0, T])$ de classe C^k contenu dans B_ρ et tel que $e(0) = e(q_0, 0)$, il existe un chemin unique $q(t)$ de classe C^k tel que :

$$q(0) = q_0 \text{ et } \forall t \in [0, T] : e(q(t), t) = e(t)$$

De plus si $e_1(t)$ et $e_2(t)$ sont deux chemins quelconques (de classe C^k) dans B_ρ alors les deux chemins réciproques $q_1(t)$ et $q_2(t)$ dans la projection de $C_{\rho,T}$ sur \mathbb{R}^n sont tels que :

$$|q_1(t) - q_2(t)| \leq k |e_1(t) - e_2(t)| \quad (k > 0)$$

(F^{-1} est Lipschitz sur $B_\rho \times [0, T]$). Autrement dit si les chemins $e_1(t)$ et $e_2(t)$ sont « proches » l'un de l'autre, alors les deux chemins $q_1(t)$ et $q_2(t)$ sont également proches l'un de l'autre.

Il est trivial de vérifier que si une fonction $e(q,t)$ est ρ -admissible sur $C_{\rho,T}$ pendant $[0, T]$ elle est aussi ρ' -admissible sur $C_{\rho',T'}$ pendant $[0, T']$ avec $\rho' \leq \rho$, $T' \leq T$, $C_{\rho',T'} \subset C_{\rho,T}$.

Si une fonction $e(q,t)$ est 0-admissible sur $C_{0,T}$ pendant $[0, T]$, alors il existe $\rho > 0$ tel que $e(q,t)$ est ρ -admissible sur $C_{\rho,T} \supset C_{0,T}$ pendant $[0, T]$.

Remarquons que l'ensemble $C_{\rho,T}$ est une des composantes connexes de l'ensemble

$F^{-1}(B_{\rho} \times [0, T]) = e^{-1}(B_{\rho}) \cap \mathbb{R}^n \times [0, T]$. Soit $C'_{\rho, T}$ une autre composante connexe de $F^{-1}(B_{\rho} \times [0, T])$, le fait que $e(q, t)$ soit ρ -admissible sur $C_{\rho, T}$ pendant $[0, T]$ n'entraîne pas que $e(q, t)$ soit ρ -admissible sur $C'_{\rho, T}$ pendant $[0, T]$.

Si $e(q, t)$ est :

- ρ -admissible sur $C_{\rho, T}$ pendant $[0, T]$
- ρ' -admissible sur $C'_{\rho', T}$ pendant $[0, T]$

avec $\rho' > \rho$ et $C_{\rho, T} \cap C_{\rho', T} = \emptyset$ nous dirons que $e(q, t)$ est plus admissible sur le connexe $C_{\rho', T}$ que sur le connexe $C_{\rho, T}$ pendant $[0, T]$.

Etant donné un point initial $(q_0, 0)$ tel que $e(q_0, 0) \in B_{\rho}$, si pendant tout intervalle $[0, T]$ ($T < +\infty$), la fonction $e(q, t)$ est ρ -admissible sur un ensemble $C_{\rho, T}$ contenant le point $(q_0, 0)$, nous dirons que $e(q, t)$ est ρ -admissible sur $C_{\rho} = C_{\rho, T}$ pendant $[0, +\infty[$.

Un énoncé équivalent de la propriété P_1 mettant mieux en évidence les propriétés internes que vérifie la fonction $e(q, t)$ sur l'ensemble $C_{\rho, T}$ est le suivant :

$P'_1 (\Leftrightarrow P_1)$:

- (i) $C_{\rho, T}$ est une composante connexe de $F^{-1}(B_{\rho} \times [0, T])$
- (ii) $fr(C_{\rho, T}) \cap fr(\Omega) = \emptyset (\Rightarrow C_{\rho, T}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$)
- (iii) $\forall (q, t) \in C_{\rho, T}$:
 - a) $det[\frac{\partial e}{\partial q}(q, t)] \neq 0$
 - b) $|\frac{\partial e}{\partial q}(q, t)^{-1}| < m_{\rho, T} < +\infty$
 - c) $|\frac{\partial e}{\partial t}(q, t)| < m'_{\rho, T} < +\infty$

$|\cdot|$ désignant selon le cas la norme euclidienne ou la norme matricielle associée (norme spectrale), et $fr(A)$ la frontière de l'ensemble A .

L'équivalence des énoncés P_1 et P'_1 relève d'un résultat démontré en annexe. Ce résultat peut être vu comme une extension du théorème classique des fonctions implicites appliqué à la fonction $F(q, t) = (e(q, t), t)$. Le rôle du théorème des fonctions implicites transparaît d'ailleurs clairement au niveau de la propriété iii)a) qui signifie que la matrice jacobienne de la fonction $F(q, t)$ est régulière en tout point de $C_{\rho, T}$. En effet :

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial q}(X_0) & \frac{\partial e}{\partial t}(X_0) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (X = (q, t))$$

et par conséquent :

$$\det\left[\frac{\partial F}{\partial X}(X_0)\right] = \det\left[\frac{\partial e}{\partial q}(X_0)\right]$$

Pour fixer les idées illustrons la notion de fonction ρ -admissible par quelques exemples simples.

Exemple 1 : $\Omega = \mathbb{R} - \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \times \mathbb{R}$; $e(q, t) = \sin(q - t)$.

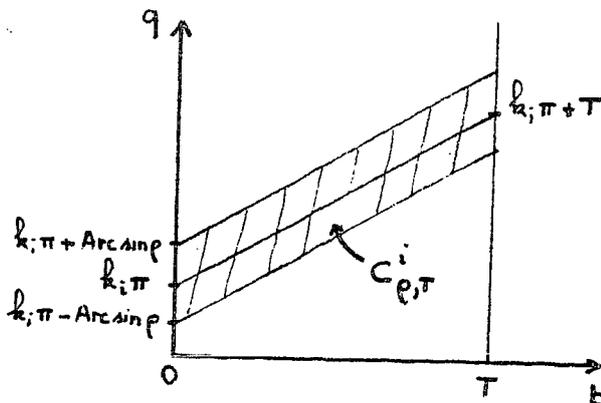
Pendant tout intervalle de temps $[0, T]$, cette fonction n'est admissible sur aucun ensemble. En effet, à $t = 0$ le point 0 n'admet pas d'antécédant dans Ω et la propriété ii) de P'_1 n'est pas satisfaite. Les autres propriétés de P'_1 sont pourtant satisfaites pour tous les ensembles $C_{\rho, T}^i$ tels que :

$$C_{\rho, T}^i = \{(q, t) \in \Omega \mid q = k_i \pi + t + \text{Arc sin } x, 0 \leq t \leq T, -1 < -\rho \leq x \leq \rho < 1, k_i \in \mathbb{Z}\}$$

Cet exemple particulier et quelque peu artificiel suffit à montrer comment la propriété de ρ -admissibilité dépend du domaine de définition de la fonction par l'intermédiaire de la propriété ii) de P'_1 .

Exemple 2 : $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $e(q, t) = \sin(q - t)$

C'est la même fonction que précédemment à la seule différence qu'elle est maintenant définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Les ensembles $C_{\rho, T}^i$ définis précédemment sont maintenant des fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la fonction $e(q, t)$ est ρ -admissible ($\rho < 1$) sur tout ensemble $C_{\rho, T}^i$ pendant $[0, T]$.



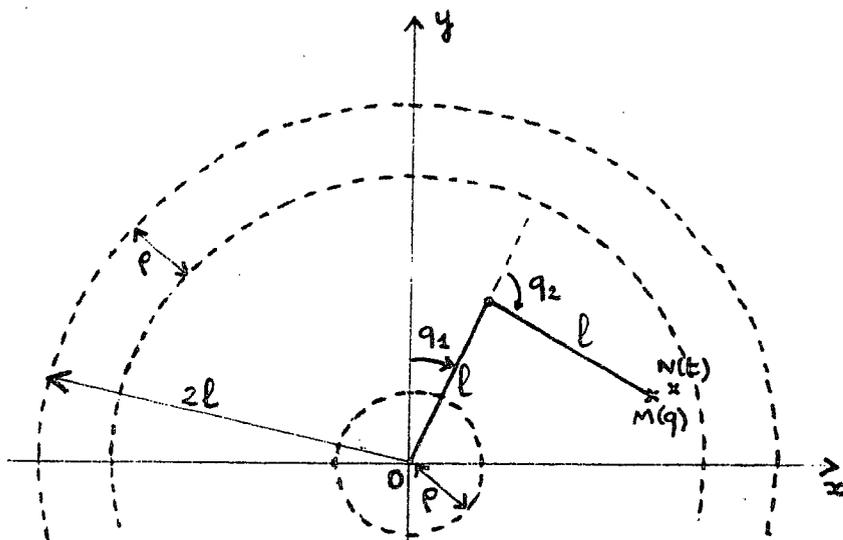
Exemple 3 : $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$; $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$; $e(q,t) = x(q) - x_r(t)$.

où :

$$x(q) = \begin{bmatrix} l[s_1 + s_{12}] \\ l[c_1 + c_{12}] \end{bmatrix}$$

($s_1 = \sin q_1$, etc.)

$x_r(t) = \begin{bmatrix} x_{r,1}(t) \\ x_{r,2}(t) \end{bmatrix}$ est une fonction de classe C^2 de dérivée bornée.



$$\vec{OM}(q) : \begin{bmatrix} x_1(q) \\ x_2(q) \end{bmatrix}$$

$$\vec{ON}(t) : \begin{bmatrix} x_{r,1}(t) \\ x_{r,2}(t) \end{bmatrix}$$

$$\vec{MN}(q,t) : \begin{bmatrix} e_1(q,t) \\ e_2(q,t) \end{bmatrix}$$

interprétation graphique de la fonction $e(q,t)$ dans le plan affine

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q,t) = \frac{\partial x}{\partial q}(q) = \begin{bmatrix} l[c_1 + c_{12}] & lc_{12} \\ -l[s_1 + s_{12}] & -ls_{12} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \left[\frac{\partial e}{\partial q}(q,t) \right] = -l^2 s_2$$

et par conséquent $\det \left[\frac{\partial e}{\partial q}(q,t) \right] = 0 \Leftrightarrow q_2 = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Pour que la fonction $e(q,t)$ soit 0-admissible pendant $[0,T]$ il faut donc que le point $N(t)$ ne passe pas pendant l'intervalle de temps $[0,T]$ par des points N_r^* de coordonnées x_r^* tels que les solutions q^* de l'équation $x(q) - x_r^* = 0$ soient de la forme $q^* = \begin{bmatrix} q_1 \\ k\pi \end{bmatrix}$. Il faut donc que le point $N(t)$ ne rencontre ni l'origine O , ni le cercle $C(O, 2l)$ de centre O et de rayon $2l$.

Nous pouvons vérifier que pour que $e(q,t)$ soit ρ -admissible pendant $[0,T]$, il faut et il suffit que la trajectoire du point $N(t)$ reste dans la couronne ouverte comprise entre les cercles $C_1(0,\rho)$ et $C_2(0, 2l - \rho)$. Autrement dit une condition nécessaire et suffisante est :

$$\forall t \in [0,T] : \rho < |x_r(t)| < 2l - \rho$$

Cette relation montre d'une part que le degré d'admissibilité de la fonction $e(q,t)$ dépend de la fonction $x_r(t)$ et d'autre part que l est la borne supérieure du degré d'admissibilité de la fonction .

1.3 Tâches admissibles

Nous supposons dans la suite de ce rapport qu'un travail de réflexion et une mise en forme préliminaires ont permis de traduire la tâche à effectuer en un problème de régulation autour de 0 d'un « vecteur d'erreur » noté e - ayant la dimension de q (c'est-à-dire $(n \times 1)$) dont les valeurs au cours du temps sont soit directement mesurables, soit accessibles à une estimation. Dans le cas le plus général, ce vecteur sera fonction de la position occupée par le manipulateur et de grandeurs éventuellement extérieures au manipulateur que nous paramètrons par la variable temporelle indépendante t . Le rôle de la commande sera donc de maintenir aussi proche de zéro que possible, pendant la durée d'exécution $[0, T]$ de la tâche, le vecteur d'erreur :

$$e(t) = e(q(t), t) \quad (t \in [0, T]) \quad (3-1)$$

où $e(q, t)$ est la fonction qui caractérise la tâche à accomplir.

a) trajectoire idéale et tâche faiblement admissible

Supposons qu'à $t = 0$, le robot occupe une position q_0 telle que $e(q_0, 0) = 0$. Une trajectoire idéale du robot est une trajectoire $\{q_r(t)\}$ telle que :

$$\forall t \in [0, T] : e(q_r(t), t) = 0 ; q_r(0) = q_0 \quad (3-2)$$

Une telle trajectoire est idéale parce qu'elle réalise parfaitement la tâche pendant $[0, T]$.

Pour des raisons physiques imposées par les lois de la dynamique, une tâche n'est parfaitement réalisable par un robot, ou possible, que s'il existe une trajectoire idéale $\{q_r(t)\}$ deux fois dérivable sur $[0, T]$. Il existe alors une commande idéale $\Gamma_r(t)$ qui, appliquée au robot, permet de suivre exactement cette trajectoire idéale.

Une tâche sera dite faiblement admissible pendant $[0, T]$ si elle est possible sur $[0, T]$ et si la trajectoire idéale $\{q_r(t)\}$ est unique. Cette propriété d'unicité est nécessaire en pratique pour assurer la répétabilité du mouvement et l'unicité de la commande idéale.

Notons que la seule donnée de la fonction $e(q, t)$ ne suffit généralement pas à définir la tâche puisqu'il peut a priori exister plusieurs positions initiales q_0 telles que $e(q_0, 0) = 0$ et auxquelles correspondent autant de trajectoires idéales $\{q_r(t)\}$ différentes.

Se fixer une tâche consistera donc à se donner le couple $(e(q, t), q_0)$ formé de la fonction $e(q, t)$ et d'une position initiale q_0 (telle que $e(q_0, 0) = 0$) que devrait idéalement occuper le robot au début de l'exécution de la tâche (à $t = 0$).

Dans le cas où la fonction e sera indépendante de la variable t , cette position q_0 sera celle vers laquelle devra tendre le manipulateur.

b) tâche ρ -admissible

Nous venons de voir que pour qu'une tâche $(e(q,t), q_0)$ ait un sens, c'est-à-dire pour qu'il existe une commande idéale unique permettant théoriquement de la réaliser, il fallait qu'elle soit faiblement admissible. Cette propriété permet déjà de restreindre l'ensemble des fonctions $e(q,t)$ que nous pouvons considérer. Elle ne suffit cependant pas à conférer un bon conditionnement au problème de régulation que nous devons résoudre.

En effet la commande idéale qui permet de réaliser parfaitement la tâche n'est pas accessible dans la pratique, ne serait-ce qu'en raison de notre méconnaissance plus ou moins grande des grandeurs intervenant dans l'équation de la dynamique du robot (problème de modélisation). Il y a en réalité bien d'autres raisons que le lecteur peut facilement concevoir (problèmes de technologie, présence de perturbations, etc.). Cela signifie que nous ne pouvons espérer en pratique faire mieux que concevoir une commande assurant une erreur $e(t)$ petite mais non nulle. Garantir une faible erreur $e(t)$ ne peut être satisfaisant que si cela entraîne que la trajectoire réelle du robot reste proche de la trajectoire idéale $\{q_r(t)\}$. Il faut aussi qu'une variation lente de l'erreur $e(t)$ ne soit pas responsable d'une variation très rapide de la position $q(t)$ du robot sinon la régulation de $e(t)$ s'accompagnera d'une fatigue mécanique et d'une dépense d'énergie aussi excessive qu'inutile. Supposons que la fonction $e(q,t)$ soit au moins de classe C^2 sur son domaine de définition :

$$e(t) = e(q(t), t)$$

$$\Rightarrow$$

$$\dot{e}(t) = \frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t) \dot{q}(t) + \frac{\partial e}{\partial t}(q(t), t)$$

d'où

$$|\dot{q}(t)| \leq \left| \frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t) \right|^{-1} \left(|\dot{e}(t)| + \left| \frac{\partial e}{\partial t}(q(t), t) \right| \right)$$

Cette relation montre que pour qu'une variation lente de $e(t)$ ($|\dot{e}(t)|$ borné) corresponde à une variation lente de $q(t)$ ($|\dot{q}(t)|$ borné) il suffit que $\frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t)$ soit inversible et d'inverse bornée et que $\frac{\partial e}{\partial t}(q(t), t)$ soit borné. Si une de ces conditions est prise en défaut il est toujours possible de trouver une évolution de $e(t)$ rendant $|\dot{q}(t)|$ non borné. En ce sens ces conditions apparaissent comme nécessaires au bon conditionnement du problème de commande. En remarquant maintenant que ces conditions caractérisent justement les fonctions ρ -admissibles définies au chapitre 2, il devient logique de relier la notion de bon conditionnement d'une tâche à la propriété de ρ -admissibilité de la fonction $e(q,t)$.

Nous dirons qu'une tâche $(e(q,t) ; q_0)$ est ρ -admissible pendant $[0, T]$ si la fonction $e(q,t)$ est ρ -admissible pendant $[0, T]$ sur le connexe $C_{\rho, T}$ contenant le point $(q_0, 0)$.

La borne supérieure ρ_m des valeurs de ρ pour lesquelles la tâche est ρ -admissible pendant $[0, T]$ détermine le degré d'admissibilité de la tâche pendant $[0, T]$.

Tant que $e(t)$ demeure à l'intérieur de la boule $B(0, \rho_m)$ la convergence à tout moment de $e(t)$ vers 0 entraîne celle de $q(t)$ vers $q_r(t)$. Si à un moment donné $e(t) > \rho_m$ il y a un risque de ne plus pouvoir ramener $q(t)$ vers $q_r(t)$. Le degré d'admissibilité d'une tâche détermine donc en quelque sorte son degré de robustesse vis-à-vis du problème de commande. Le problème de la robustesse de la commande n'intervient qu'ensuite et n'a de sens que si la tâche est admissible.

En conclusion de ce sous-paragraphe et pour situer l'importance de la notion d'admissibilité d'une tâche, nous avancerons la proposition selon laquelle plus une tâche est fortement admissible (ρ_m grand), moins les contraintes sur la commande seront importantes et donc plus la tâche sera facile à réaliser. Cette proposition n'est bien sûr à prendre qu'avec toute la circonspection qui s'impose lorsqu'un commentaire est trop général et trop vague. Elle est cependant à la base d'une réflexion qui doit nous conduire aux conclusions suivantes dont la portée pratique est évidente mais difficile à évaluer de façon précise :

i) entre deux fonctions $e_1(q, t)$ et $e_2(q, t)$ traduisant une tâche similaire, c'est-à-dire conduisant à une même trajectoire idéale $\{q_r(t)\}$, il faut de préférence choisir celle qui est la plus admissible.

exemple :

- $\{q_r(t)\}$ trajectoire prédéterminée dans l'espace des coordonnées articulaires du robot
- $e_1(q, t) = q - q_r(t) ; q_r(0) = q_0$
 $e_2(q, t) = \sin(q - q_r(t))$

Ces deux tâches visent à effectuer la poursuite parfaite de $q_r(t)$ par q . La tâche $(e_1(q, t), q_0)$ est cependant plus admissible que la tâche $(e_2(q, t), q_0)$.

ii) il vaudra parfois mieux pour des raisons de robustesse remplacer une tâche traduisant exactement le souhait de l'utilisateur par une tâche légèrement différente possédant un plus grand degré d'admissibilité.

exemple :

- $\{x_r(t)\}$: trajectoire prédéterminée et idéale d'un vecteur de coordonnées opérationnelles ($x_r(t)$ de classe C^2 , $|x_r(t)| < k_1, |\dot{x}_r(t)| < k_2$)
- $x(q)$: vecteur de coordonnées opérationnelles que l'on cherche à commander (par exemple coordonnées repérant la position et l'orientation de l'effecteur du robot dans un repère cartésien fixe).

$$\begin{aligned} \bullet \quad e_1(q, t) &= x(q) - x_r(t) ; x(q_0) = x_r(0) \\ e_2(q, t) &= \frac{\partial x^T}{\partial q}(q) (x(q) - x_r(t)) + \lambda (q - y(t)) \left(= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (|x(q) - x_r(t)|^2 + \lambda |q - y(t)|^2) \right) \end{aligned}$$

avec :

$$\lambda > 0$$

$y(t)$ de classe C^2 sur $[0, T]$, $|\dot{y}(t)| < k_3$, $y(0) = q_0$

La tâche $(e_1(q, t), q_0)$ vise à effectuer la poursuite parfaite de $x_r(t)$ par $x(q)$. Cette tâche ne peut cependant être admissible que si $\dim x(q) = \dim x_r(t) = n$ et si l'équation : $x(q) - x_r(t) = 0$ a toujours une solution, c'est-à-dire si $x_r(t) \in I_m(x(q))$, $\forall t \in [0, T]$.

· Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que si la matrice :

$$\frac{\partial e_2}{\partial q}(q, t) = \lambda I + \frac{\partial x^T}{\partial q}(q) \frac{\partial x}{\partial q}(q) + \sum_{i=1}^n (x_i(q) - x_{r,i}(t)) \frac{\partial^2 x_i(q)}{\partial q^2}$$

$(x_i, x_{r,i})$ désignant les ième composantes respectives des vecteurs x et x_r) est positive $\forall (q, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$, alors la tâche $(e_2(q, t), q_0)$ est admissible (et même infiniment admissible) pendant $[0, T]$. Cette condition est suffisante mais non nécessaire.

iii) Dans les situations où l'admissibilité de la tâche ne peut être évaluée à l'avance, par exemple lorsque nous ne disposons pas de tous les paramètres nécessaires à la connaissance d'une expression explicite de la fonction $e(q, t)$ (voir exemples donnés plus loin), il faut prévoir des « indicateurs » permettant de tester en ligne l'admissibilité de la tâche et le cas échéant des tâches de « secours » que l'on exécutera pendant les intervalles de temps où la tâche initiale n'est pas suffisamment admissible.

1.4 Non admissibilité et singularités d'une tâche

Soit une tâche $(e(q,t), q_0)$ et soit $C_{0,T}$ la composante connexe dans $F^{-1}(\{0\} \times [0,T])$ contenant le point $(q_0, 0)$. D'après P_1' (voir paragraphe 1.2) il apparaît que la propriété d'admissibilité de cette tâche pendant $[0,T]$ est systématiquement prise en défaut dans les trois cas suivants :

i) $D = \text{fr}(C_{0,T}) \cap \text{fr}(\Omega) \neq \emptyset$ (dans ce cas $C_{0,T}$ ne peut être un fermé dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$). Soit (q_1, t_1) un point de D , nous dirons que le point q_1 est une **singularité-frontière** de la tâche à l'instant t_1 .

Exemple :

$$e(q,t) = q + \sin \frac{\pi}{t-1}, \quad q_0 = 0, \quad \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{1\}$$

$$C_{0,T} = \{(-\sin \frac{\pi}{t-1}, t) \mid 0 \leq t < 1\} \quad \text{si } T \geq 1$$

$$\text{fr}(C_{0,T}) \cap \text{fr}(\Omega) = \{(q, 1) \mid q \in [-1, +1]\}$$

Tout point q_1 appartenant au segment $[-1, +1]$ est une singularité-frontière à l'instant $t_1 = 1$.

ii) $\exists (q_2, t_2) \in C_{0,T} ; \det \left[\frac{\partial e}{\partial q}(q_2, t_2) \right] = 0$

Dans ce cas, nous dirons que le point q_2 est une **singularité-jacobien** de la tâche à l'instant t_2 .

Exemple : Reprenons l'exemple 3 du chapitre 2 avec $x_r(t) = \begin{bmatrix} l+t \\ 0 \end{bmatrix}$ et $q_0 = \begin{pmatrix} \pi/3 \\ \pi/3 \end{pmatrix}$. Si $T \geq l$, le point $(q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t_2 = l)$ est un point de $C_{0,T}$. Or en ce point le déterminant de la matrice jacobienne $\frac{\partial e}{\partial q}(q, t)$ s'annule. Le point $q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est donc une singularité-jacobien de la tâche à l'instant $t_2 = l$.

iii) Il existe une suite de points $\{(q_i, t_i)\}_{i \in \mathbb{N}} (t_{i+1} > t_i)$ de $C_{0,T}$ telle que :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \left| \frac{\partial e}{\partial q}(q_i, t_i)^{-1} \right| = +\infty$$

ou telle que :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \left| \frac{\partial e}{\partial t}(q_i, t_i) \right| = +\infty$$

Si la suite $\{(q_i, t_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ admet un point d'accumulation (q_a, t_a) , le point q_a est soit une singularité-jacobien (si $(q_a, t_a) \in \Omega$ et si $\det \left[\frac{\partial e}{\partial q}(q_a, t_a) \right] = 0$) soit une singularité-frontière de la tâche à l'instant t_a .

Si par contre la suite $\{(q_i, t_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de point d'accumulation, cela signifie que la suite $\{t_i\}$ converge vers l'instant $t_b \leq T$ pendant que la suite $\{q_i\}$ diverge ($\Rightarrow C_{0,T}$ n'est pas borné). Nous dirons alors que la tâche possède une **singularité à l'infini** à l'instant t_b .

Exemple :

$$e(q,t) = q + \frac{1}{t-1}, \quad q_0 = 1, \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{1\}$$

$$C_{0,T} = \left\{ \left(-\frac{1}{t-1}, t \right) \mid 0 \leq t < 1 \right\} \text{ si } T \geq 1$$

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q,t) = 1 ; \frac{\partial e}{\partial t}(q,t) = -\frac{1}{(t-1)^2} \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} +\infty$$

Considérons la suite de points $(q_i = i + 1, t_i = 1 - \frac{1}{i+1}) \quad i \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} t_i = 1 \text{ et } \lim_{i \rightarrow +\infty} q_i = +\infty$$

La tâche possède donc une singularité à l'infini à l'instant $t = 1$.

D'après ce qui précède, une tâche $(e(q,t), q_0)$ est ρ -admissible pendant $[0, T]$ si et seulement si elle ne présente pas de singularité de type jacobien, frontière ou à l'infini sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

Dans les trois exemples que nous venons de considérer, les tâches sont respectivement ρ -admissibles jusqu'aux instants $t_0 = 1, t_0 = 1$ et $t_0 = 1$. Elles ne sont pas admissibles sur des intervalles de temps plus grands.

Notons que d'après notre définition, la notion de singularité n'a de sens que pour une tâche donnée. Elle ne dépend donc pas a priori de la géométrie du robot que nous voulons commander. Nous donnerons d'ailleurs au début du chapitre 5 un exemple de tâche toujours admissible quelque soit le manipulateur considéré. Cependant nous verrons aussi au cours d'autres exemples qu'il existe une classe de tâches robotiques pour lesquelles certaines singularités sont à rechercher systématiquement parmi un ensemble de points dont l'existence est liée uniquement au type de géométrie du manipulateur que l'on commande. Il s'agit bien entendu des « singularités géométriques du manipulateur » dont on peut trouver la définition dans la plupart des textes traitant de robotique [54], [73] [50], [9]. Nous verrons notamment comment ces singularités apparaissent comme des singularités-jacobien de la tâche. D'autres singularités appelées communément « singularités de représentation », parce que leur existence est liée à une paramétrisation particulière de l'orientation de l'effecteur du robot, réapparaîtront aussi sous la forme de singularités-frontière d'une tâche.

1.5 Exemples de tâches robotiques

1.5.1 Suivi de trajectoire dans l'espace des coordonnées articulaires du robot

Soit $\{q_r(t)\} (t \in]-\varepsilon, T + \varepsilon[)$ une trajectoire idéale, calculée par une quelconque méthode, de classe C^2 et de dérivée bornée ($|\dot{q}_r(t)| < k, t \in]-\varepsilon, T + \varepsilon[$). La tâche assignée au robot est de suivre cette trajectoire. Il est dans ce cas naturel de choisir (mais ce n'est pas la seule possibilité) :

$$e(q, t) = q - q_r(t) \quad (\Omega = \mathbb{R}^n \times]-\varepsilon, T + \varepsilon[) \quad (5-1)$$

Nous avons alors :

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q, t) = I : \text{matrice identité}$$
$$\frac{\partial e}{\partial t}(q, t) = -\dot{q}_r(t)$$

Il est facile de vérifier que la tâche $(e(q, t), q_0)$ (avec $q_0 = q_r(0)$) est ρ -admissible ($\forall \rho > 0$) pendant $[0, T]$. Nous dirons qu'elle est infiniment admissible pendant $[0, T]$. Quelque soit le robot utilisé, cette tâche ne présente pas de singularité. Elle est particulièrement robuste vis-à-vis du problème de commande.

1.5.2 Suivi de trajectoire dans un espace de coordonnées opérationnelles (cas non redondant)

Soit x un paramétrage de la position d'un élément quelconque du robot, par exemple son effecteur, dans un repère fixe. x peut par exemple être un vecteur dont les premières coordonnées sont les coordonnées cartésiennes d'un point dit « origine » de l'effecteur et dont les autres coordonnées forment un système d'angles d'Euler caractérisant l'orientation de l'effecteur.

Soit m la dimension du vecteur x . Si x n'est pas un paramétrage redondant : $m \leq n$. Le vecteur x étant fonction de la position articulaire q occupée par le robot, nous noterons sans ambiguïté $x(q)$ la fonction vectorielle faisant passer de q à x . Habituellement $x(q)$ sera une fonction de classe C^∞ allant d'un ouvert Ω_x de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Les points q du complémentaire de Ω_x dans \mathbb{R}^n sont les points où le paramétrage x n'est pas défini. Il est connu que de tels points existent toujours lorsque trois des coordonnées de x servent à paramétriser le groupe des rotations de \mathbb{R}^3 [50].

Le problème de suivi de trajectoire dans un espace de coordonnées opérationnelles se pose de la façon suivante : soit $\{x_r(t)\} (t \in]-\varepsilon, T + \varepsilon[)$ une trajectoire idéale calculée dans l'espace des coordonnées opérationnelles $(x_r(t))$ de classe $C^2, |\dot{x}_r(t)| < k$, il s'agit de trouver une commande qui assure une erreur de poursuite $(x(q, t) - x_r(t))$ petite pendant la durée d'exécution $[0, T]$ de la tâche.

Nous ne considérerons dans ce paragraphe que le cas non redondant, c'est-à-dire le cas où $m = n$. La discussion du cas redondant est reporté à un paragraphe ultérieur où le problème des tâches redondantes sera traité de façon globale.

Nous distinguerons deux cas selon que la valeur de x est mesurée ou non à l'aide de capteurs.

1er cas : $x(q(t))$ est directement mesurable à l'aide de capteurs physiques ou peut être estimé avec précision à partir d'informations fournies par des capteurs.

Nous pouvons dans ce cas choisir :

$$e(q, t) = x(q) - x_r(t) \quad (\Omega = \Omega_x \mathbf{x}] - \varepsilon, T + \varepsilon[) \quad (5-2)$$

même si nous ne disposons pas d'une expression explicite exacte de la fonction $x(q)$ dont la forme et les paramètres dépendent des caractéristiques géométriques du robot. L'élément important est que l'erreur de poursuite $e(t) = x(q(t)) - x_r(t)$ soit mesurable.

De la relation (5-2) nous déduisons :

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q, t) = \frac{\partial x}{\partial q}(q) \quad (5-3-a)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}(q, t) = -\dot{x}_r(t) \quad (5-3-b)$$

Soit q_0 une position initiale telle que $x(q_0) = x_r(0)$, examinons maintenant l'admissibilité de la tâche $(e(q, t), q_0)$. D'après le chapitre 4, nous savons déjà que pour que cette tâche soit admissible pendant $[0, T]$, il faut que la trajectoire idéale $\{x_r(t)\}$ soit telle que la trajectoire correspondante $\{q_r(t)\} (x_r(t) = x(q_r(t)), q_r(0) = q_0)$ dans l'espace des coordonnées articulaires ne passe à aucun moment par une singularité. Afin d'aller plus loin dans la discussion, précisons par un exemple la nature du paramétrage x .

Exemple :

$$n = 6$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

où

x_1 est le vecteur (3×1) des coordonnées cartésiennes du point origine de l'effecteur exprimé dans un repère fixe

x_2 est un vecteur (3×1) d'angles d'Euler caractérisant l'orientation de l'effecteur dans ce même repère.

Soit $\omega(t)$ le vecteur vitesse de rotation instantanée de l'effecteur par rapport au repère fixe. Il est bien connu (voir [50],[73] par exemple) que le vecteur $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$ est relié à la vitesse articulaire $\dot{q}(t)$ par la formule suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = J_1(q(t)) \dot{q}(t) \quad (5-4)$$

où $J_1(q)$ (définie pour $q \in \mathbb{R}^n$) est communément appelée matrice jacobienne de base. L'expression de cette matrice est uniquement fonction du choix du point origine de l'effecteur et de la géométrie du manipulateur. Elle ne dépend pas du paramétrage x_2 de l'orientation de l'effecteur. Les points q^* tels que $\det[J_1(q^*)] = 0$ sont appelés singularités géométriques du manipulateur. Physiquement ces points correspondent aux configurations du manipulateur à partir desquelles l'effecteur n'a pas la liberté d'évoluer dans une direction quelconque.

$\dot{x}_2(t)$ et $\omega(t)$ sont d'autre part reliés par la relation [73] :

$$\dot{x}_2(t) = W(q(t)) \omega(t) \quad (5-5)$$

où l'expression de la matrice (3x3) $W(q)$ dépend uniquement du type de paramétrage choisi (angles d'Euler dans notre exemple) pour caractériser l'orientation de l'effecteur. Les points q_* où la matrice $W(q)$ n'est pas définie sont les points pour lesquels les angles d'Euler de l'effecteur ne sont pas définis. Pour cette raison, ces points sont appelés singularités de représentation. A un autre système d'angles d'Euler correspondra en général d'autres singularités de représentation. Il est possible de vérifier que :

$$\forall q \in \mathbb{R}^n - \{q_*\} : \det[W(q)] \neq 0$$

et que le paramétrage par angles d'Euler est régulier ($|W(q)|$ est non borné lorsque $q \rightarrow q_*$).

De la relation (5-5) nous déduisons aussi :

$$\dot{x}(t) = J_2(q(t)) \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (5-6-a)$$

où

$$J_2(q(t)) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W(q(t)) \end{bmatrix} \quad (5-6-b)$$

En rapprochant les relations (5-2, 5-3-a, 5-4) et (5-6-a) nous tirons :

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q,t) = \frac{\partial x}{\partial q}(q) = J_2(q)J_1(q) \quad (5-7)$$

Cette relation montre que les seules singularités possibles de la tâche sont soit des singularités géométriques du manipulateur (singularités-jacobien), soit des singularités de représentation (singularités-frontière).

La connaissance a priori des singularités géométriques du manipulateur et des singularités de représentation nous permet donc de tester l'admissibilité de la tâche. Si la fonction $x(q)$ est connue, et si $\{x_r(t)\}$ est prédéterminée, cette vérification peut être effectuée hors-ligne en calculant par exemple l'image réciproque $q_r(t)$ de $x_r(t)$ et en vérifiant que $q_r(t)$ ne s'approche d'aucune singularité. Une procédure en ligne consistant à tester la distance entre $q(t)$ et chacune des singularités géométriques ou de représentation est aussi envisageable. Nous verrons ultérieurement qu'il existe encore d'autres procédures possibles .

2ème cas : Le vecteur de coordonnées opérationnelles $x(q)$ n'est pas mesuré à l'aide de capteurs mais est approché par une fonction $\hat{x}(q)$ dont nous connaissons une expression déduite d'un modèle géométrique du manipulateur.

Il est dans ce cas intuitif qu'il n'est plus possible (à moins que notre modèle géométrique soit parfait) de contrôler avec précision l'erreur : $x(q(t)) - x_r(t)$. Le problème du positionnement précis de l'effecteur en bout de trajectoire pourra cependant, dans certaines applications spécifiques (avec apprentissage hors-ligne des positions terminales du robot), être résolu en calculant $\{x_r(t)\}$ à partir d'une valeur terminale $x_r(T)$ pour laquelle on aura préalablement vérifié que la satisfaction de l'égalité $\hat{x}(q(T)) = x_r(T)$ entraîne que l'effecteur occupe la position et a l'orientation voulues.

La régulation de l'erreur $(x(q(t)) - x_r(t))$ n'étant pas possible sans une mesure de $x(q(t))$, nous devons nous contenter de la régulation de l'erreur $(\hat{x}(q(t)) - x_r(t))$. Pour réaliser cet objectif nous envisagerons deux méthodes correspondant à deux modes de commande différents.

Méthode 1 : régulation dans l'espace des coordonnées opérationnelles.

Une fonction de tâche possible est :

$$e(q,t) = \hat{x}(q) - x_r(t) \quad (5-8)$$

En reprenant point par point le développement du 1er cas, nous obtiendrions :

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q,t) = \frac{\partial \hat{x}}{\partial q}(q) = J_2(q)\hat{J}_1(q) \quad (5-9)$$

où : $\hat{J}_1(q)$ est la matrice jacobienne de base associée au modèle géométrique utilisé pour former la fonction $\hat{x}(q)$.

$J_2(q)$ est la même matrice que dans le 1er cas puisque la paramétrisation par les angles d'Euler correspond à un choix de l'utilisateur et est indépendante de la géométrie du manipulateur.

Les singularités éventuelles de la tâche sont donc soit des singularités de représentation (les mêmes que dans le 1er cas), soit des singularités géométriques associées au modèle géométrique du manipulateur. Il est intéressant de noter que ces dernières singularités se confondent avec les singularités géométriques du manipulateur physique seulement si : $\det[J_1(q)] = 0 \Leftrightarrow \det[\hat{J}_1(q)] = 0$. Dans le cas général, en raison de l'imperfection du modèle géométrique, cette équivalence ne sera pas vérifiée pour l'ensemble des singularités même si la structure du modèle est conforme avec celle du manipulateur physique (même enchaînement des degrés de libertés en rotation et translation). Tout au plus, si la fonction $\hat{x}(q)$ est « proche » de la fonction $x(q)$, alors les singularités géométriques du modèle géométrique seront proches de celles du manipulateur physique.

La remarque qui précède indique qu'il est important de ne pas assimiler systématiquement les singularités de la tâche avec les singularités géométriques du manipulateur, même lorsque l'on travaille dans un espace de coordonnées opérationnelles.

Méthode 2 : régulation dans l'espace des coordonnées articulaires.

Une méthode apparemment équivalente pour réaliser la régulation de l'erreur $(\hat{x}(q(t)) - x_r(t))$ consiste à ramener le problème de suivi de trajectoire dans un espace de coordonnées opérationnelles à un problème de suivi de trajectoire dans l'espace des coordonnées articulaires du manipulateur. Il suffit pour cela de prendre comme fonction de tâche, à la place de (5-8) :

$$e(q,t) = q - q_r(t) \quad (5-10)$$

où $q_r(t)$ est l'image inverse par la fonction $\hat{x}(q)$ de la trajectoire $x_r(t)$, c'est-à-dire :

$$x_r(t) = \hat{x}(q_r(t)) \quad (5-11)$$

L'intérêt de la fonction (5-10) par rapport à la fonction (5-8) est que, comme nous l'avons vu au paragraphe 5.1, cette fonction est infiniment admissible (dès lors que $\{q_r(t)\}$ existe et $|\dot{q}_r(t)| < k$) et n'admet jamais de singularités. Ceci facilite le problème de la commande.

Ce choix a cependant l'inconvénient de rendre nécessaire le calcul de $q_r(t)$ à partir de $x_r(t)$. Les problèmes d'admissibilité de la fonction (5-8) réapparaissent dans ce calcul parce que la fonction $\hat{x}(q)$ n'est généralement pas bijective sur son domaine de définition.

Le calcul de $q_r(t)$ peut être réalisé de deux façons :

i) nous disposons des expressions explicites de fonctions inverses locales continues de la fonction $\hat{x}(q)$. $q_r(t)$ est alors obtenu en posant :

$$q_r(t) = \hat{x}^{-1}(x_r(t)) \quad (5-12)$$

où \hat{x}^{-1} est la fonction inverse qui respecte les conditions initiales, soit : $q_0 = \hat{x}^{-1}(x_r(0))$. Ce calcul n'est cependant possible que si $x_r(t)$ demeure dans le domaine de définition de \hat{x}^{-1} et il faut pour cela que la fonction (5-8) soit admissible.

ii) nous ne disposons pas d'expression explicite pour la transformation inverse de la fonction $\hat{x}(q)$. Dans ce cas la trajectoire $\{q_r(t)\}$, ou plus précisément une suite de points de cette trajectoire séparés temporellement par la période d'échantillonnage Δ de la commande, est calculée à partir de la suite $\{x_r(k\Delta)\} (k \in \mathbb{N})$ à l'aide d'une méthode de gradient quelconque.

Rappelons brièvement le principe de ce type de méthode.

Soit $q_r(k\Delta)$ le point obtenu à l'instant $t = k\Delta$. On pose $q_{k,0} = q_r(k\Delta)$ et on calcule récursivement une suite de point $q_{k,i}$ selon la relation suivante :

$$q_{k,i+1} = q_{k,i} + P_{k,i} \frac{\partial \hat{x}}{\partial q}(q_{k,i})^T (x_r((k+1)\Delta) - \hat{x}(q_{k,i})) \quad (5-13)$$

où $P_{k,i}$ est un gain (scalaire ou matriciel) positif déterminé en fonction de la méthode de gradient utilisée (gradient simple, gradient conjugué, Newton, ... [1]). Il est facile de vérifier que l'algorithme (5-14) vise à trouver le minimum q^* du coût : $|x_r((k+1)\Delta) - \hat{x}(q)|^2$ en partant du point $q_r(k\Delta)$.

On arrête la récursion (5-14) au pas l si l'erreur $|x_r((k+1)\Delta) - \hat{x}(q_{k,l})|$ est inférieure à un seuil fixé à l'avance et on pose : $q_r((k+1)\Delta) = q_{k,l}$.

En répétant cette opération après chaque instant d'échantillonnage, on obtient ainsi de proche en proche une suite de points $\{q_r(k\Delta)\} (k \in \mathbb{N})$. Cette méthode n'est cependant efficace que si les matrices $\frac{\partial \hat{x}}{\partial q}(q_{k,i})$ sont régulières et restent bornées, ce qui nous ramène au problème de l'admissibilité de la fonction (5-8).

Remarque : Le calcul de la trajectoire idéale $\{q_r(t)\}$ associée à une tâche quelconque $(e(q,t), q_0)$ n'est clairement possible que si l'on dispose d'une expression explicite de la fonction $e(q,t)$. Dans de nombreuses applications, tel que le suivi d'une cible dont la trajectoire est inconnue à l'avance, la dépendance de la fonction $e(q,t)$ vis-à-vis de la variable t sera inconnue. Il sera alors impossible de calculer $\{q_r(t)\}$ et donc de ramener le problème de commande à un problème de suivi de trajectoire dans l'espace des coordonnées articulaires du robot. Nous n'aurons alors d'autre alternative que de commander le robot directement dans l'espace de la tâche.

1.5.3 Tâches basées sur l'utilisation de capteurs de proximité ou d'effort

Dans un futur proche, un nombre croissant d'applications robotiques reposera sur l'utilisation de capteurs de proximité ou d'effort. Ces capteurs donnent en effet la possibilité au robot, via l'information qu'ils délivrent, d'agir ou de réagir en fonction de son environnement local. Ils permettent donc au robot d'avoir une autonomie et une versatilité de fonctionnement accrues, le démarquant ainsi nettement du simple automate programmable.

Parmi les applications privilégiées des capteurs de proximité (capteurs à ultra-sons, ou à infrarouge) citons la poursuite de cible ou l'évitement d'obstacles. Pour les capteurs d'effort, citons le suivi de contour (avec contact) et l'assemblage de pièces.

Dans un grand nombre de cas ces capteurs sont utilisés de la façon suivante. Soit s - un vecteur de dimension $(m \times 1)$ ($m \leq n$) dont les composantes sont les signaux de sortie des capteurs, ou une combinaison de ces signaux, il s'agit de minimiser la norme de s - ou de réguler la valeur de s - autour de valeurs souhaitées. Par exemple dans le cas de l'évitement d'obstacles et de capteurs sensibles à l'inverse de la distance capteur-obstacle, nous chercherons par le biais de la commande à minimiser la valeur des signaux-capteurs. Dans le cas de la poursuite d'une cible, nous chercherons à maintenir s - égal à une valeur constante représentative d'une position relative constante entre capteurs et cible.

Dans le cas du contrôle d'effort et de signaux-capteurs proportionnels aux efforts exercés au niveau des capteurs, il s'agira de réguler la valeur de ces signaux, etc.

Quelque soit l'application traitée et le type de capteur utilisé, le signal délivré par le capteur sera fonction de la position articulaire q du robot et éventuellement de la variable temporelle indépendante t servant à paramétrer l'évolution des objets extérieurs au robot auxquels réagit le capteur.

Dans cette étude nous assimilerons donc le signal de tout capteur à une fonction $s(q, t)$ que nous supposerons de classe C^2 sur son domaine de définition. Pour minimiser ou réguler $s(q, t)$, il est clair qu'il nous faut, en plus de la mesure $s(q(t), t)$, une certaine connaissance de la dérivée $\frac{\partial s}{\partial q}(q, t)$. Nous savons également que l'admissibilité de la tâche, c'est-à-dire le bon conditionnement de la tâche vis-à-vis du problème de commande, est fortement liée aux propriétés de $\frac{\partial s}{\partial q}(q, t)$. Pour ces raisons, nous nous attacherons dans un premier temps à étudier la forme générale de $\frac{\partial s}{\partial q}(q, t)$. Cette étude nous fournira l'occasion de faire la liaison avec les concepts de primitives de base, actions élémentaires et torseurs statiques associés à un ensemble de capteurs tels qu'ils sont définis dans le travail d'Espiau [22], [23]. Nous illustrerons ensuite notre propos par quelques exemples de tâches robotiques dont nous examinerons l'admissibilité.

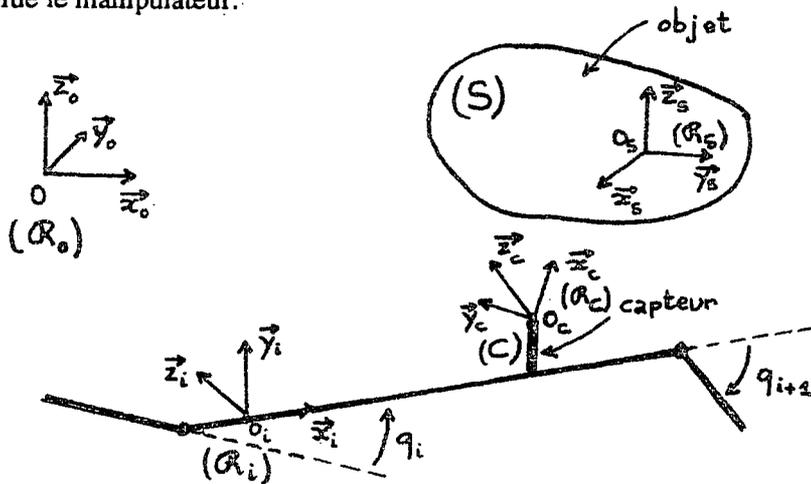
1.5.3.1 Forme générale de $\frac{\partial s}{\partial q}(q, t)$

Soit un manipulateur à n degrés de liberté. A chaque élément du manipulateur il est conventionnellement associé un repère \mathbb{R}_i ($O_i ; \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i$) ($1 \leq i \leq n$) d'origine un point O_i situé sur l'élément en question.

Soit un capteur (C) fixé sur le i ème élément du manipulateur. Nous associons à ce capteur un repère \mathbb{R}_c ($O_c ; \vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c$), O_c étant le point origine du capteur.

L'environnement local auquel réagit le capteur est représenté par un objet (S) auquel nous associons le repère \mathbb{R}_S ($O_S ; \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S$) lié à l'objet.

Nous définissons enfin un repère cartésien fixe $\mathbb{R}_O (O, \vec{x}_O, \vec{y}_O, \vec{z}_O)$ lié à l'espace dans lequel évolue le manipulateur.



Soit :

- $s(q, t)$ le signal délivré par le capteur (C)
- $x_{S,C}$ la matrice (3x1) des coordonnées du point C dans le repère (\mathbb{R}_S) lié à l'objet
- $R_{S,C}$ la matrice (3x3) des coordonnées des vecteurs $(\vec{x}_C, \vec{y}_C, \vec{z}_C)$ dans la base $(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$

Nous exprimons le fait que le signal - s - du capteur dépend uniquement de la position et de l'orientation relative du capteur (C) par rapport à l'objet (S) en écrivant : $s(x_{S,C}, R_{S,C})$.

Le fait que les variations de s sont uniquement fonction des variations de position et d'orientation du capteur par rapport à l'objet s'exprime en écrivant :

$$\dot{s}(x_{S,C}, R_{S,C}) = \vec{u}(x_{S,C}, R_{S,C}) \cdot \vec{V}_{C/\mathbb{R}_S} + \vec{r}(x_{S,C}, R_{S,C}) \cdot \vec{\omega}_{\mathbb{R}_C / \mathbb{R}_S} \quad (5-14)$$

- où :
- $\vec{\omega}_{\mathbb{R}_C / \mathbb{R}_S}$ est le vecteur vitesse de rotation instantanée du repère \mathbb{R}_C par rapport au repère \mathbb{R}_S
 - \vec{V}_{C/\mathbb{R}_S} est le vecteur vitesse du point C origine du capteur dans le repère \mathbb{R}_S lié à l'objet.
 - le couple formé par les vecteurs \vec{u} et \vec{r} c'est-à-dire la grandeur :

$$w(x_{S,C}, R_{S,C}) = [\vec{u}, \vec{r}](x_{S,C}, R_{S,C}) \quad (5-15)$$

caractérise complètement la variation du signal-capteur lorsque le capteur occupe la position et l'orientation $(x_{S,C}, R_{S,C})$ par rapport à l'objet. Pour une position et une orientation données, ces vecteurs dépendent uniquement des caractéristiques du capteur et des caractéristiques (notamment géométriques) de l'objet. Il ne dépendent pas du robot sur lequel le capteur (C) est fixé.

Nous avons d'autre part les relations cinématiques suivantes (en utilisant des notations évidentes)

$$\vec{V}_{C / R_S} = \vec{V}_{C / R_O} - \vec{V}_{O_S / R_O} - \vec{\omega}_{R_S / R_O} \wedge \overrightarrow{O_S C} \quad (5-16-a)$$

et

$$\vec{\omega}_{R_C / R_S} = \vec{\omega}_{R_C / R_O} - \vec{\omega}_{R_S / R_O} \quad (5-16-b)$$

En utilisant ces relations dans (5-14) nous obtenons :

$$\dot{s} = \vec{u} \cdot (\vec{V}_{C / R_O} - \vec{V}_{O_S / R_O} - \vec{\omega}_{R_S / R_O} \wedge \overrightarrow{O_S C}) + \vec{r} \cdot (\vec{\omega}_{R_C / R_O} - \vec{\omega}_{R_S / R_O}) \quad (5-17)$$

soit, compte tenu des propriétés du produit mixte de trois vecteurs :

$$\dot{s} = [\vec{u}, \vec{V}_{C / R_O} + \vec{r} \cdot \vec{\omega}_{R_C / R_O}] - [\vec{u}, \vec{V}_{O_S / R_O} + (\vec{r} + (\overrightarrow{O_S C} \wedge \vec{u})) \cdot \vec{\omega}_{R_S / R_O}] \quad (5-18)$$

relation que nous pouvons également écrire de façon symbolique :

$$\dot{s} = [\vec{u}, \vec{r}] \cdot \left[\begin{array}{c} \vec{V}_{C / R_O} \\ \vec{\omega}_{R_C / R_O} \end{array} \right] - [\vec{u}, \vec{r} + \overrightarrow{O_S C} \wedge \vec{u}] \cdot \left[\begin{array}{c} \vec{V}_{O_S / R_O} \\ \vec{\omega}_{R_S / R_O} \end{array} \right] \quad (5-19)$$

Nous pouvons aussi exprimer \dot{s} en fonction des vitesses de translation et de rotation instantanée de tout autre repère lié au capteur. En prenant par exemple le repère IR_i associé à l'élément du manipulateur portant le capteur (C) et en utilisant les relations cinématiques :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{C / R_O} &= \vec{V}_{O_i / R_O} + \vec{\omega}_{R_i / R_O} \wedge \overrightarrow{O_i C} \\ \vec{\omega}_{R_C / R_O} &= \vec{\omega}_{R_i / R_O} \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\dot{s} = [\vec{u}, \vec{r} + \vec{u} \wedge \overrightarrow{CO_i}] \cdot \left[\begin{array}{c} \vec{V}_{O_i / R_O} \\ \vec{\omega}_{R_i / R_O} \end{array} \right] - [\vec{u}, \vec{r} + \vec{u} \wedge \overrightarrow{CO_S}] \cdot \left[\begin{array}{c} \vec{V}_{O_S / R_O} \\ \vec{\omega}_{R_S / R_O} \end{array} \right] \quad (5-20)$$

La comparaison des relations (5-19) et (5-20) montre que le couple $[\vec{u}, \vec{r}]$ peut être identifié aux éléments de réduction d'un torseur au point C . En tout autre point O_i rigidement lié à (C), ce torseur a pour éléments de réduction le couple $[\vec{u}, \vec{r} + \vec{u} \wedge \overrightarrow{CO_i}]$.

Lorsque l'objet (S) est immobile dans le repère fixe IR_O , c'est-à-dire lorsque $\vec{V}_{O_S / R_O} = 0$ et $\vec{\omega}_{R_S / R_O} = 0$ la dérivée temporelle de s s'obtient simplement en composant les éléments de ce torseur au point O_i avec les vitesses de translation et de rotation instantanée du repère IR_i par rapport au repère fixe IR_O .

Nous retrouvons ainsi, au vecteur \vec{r} près (qui dans certains cas peut être nul), le concept de torseur statique tel qu'il est défini dans le travail d'Espiau [22].

Soit maintenant

$$(u_0, r_0, \Delta_0^{CO_i}, \dot{x}_{0_i}, \omega_i, \Delta_0^{CO_s}, \dot{x}_{0_s}, \omega_s)$$

les matrices respectives (3x1) des coordonnées des vecteurs

$$(\vec{u}, \vec{r}, \vec{u} \wedge \vec{CO}_i, \vec{V}_{O_i / R_0}, \vec{\omega}_{R_i / R_0}, \vec{u} \wedge \vec{CO}_s, \vec{V}_{O_s / R_0}, \vec{\omega}_{R_s / R_0})$$

dans la base $(\vec{x}_O, \vec{y}_O, \vec{z}_O)$, la relation (5-20) s'écrit sous forme matricielle :

$$\dot{s} = [u_0^T | (r_0 + \Delta_0^{CO_i})^T] \begin{bmatrix} \dot{x}_{0_i} \\ \omega_i \end{bmatrix} + [u_0^T | (r_0 + \Delta_0^{CO_s})^T] \begin{bmatrix} \dot{x}_{0_s} \\ \omega_s \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

Le point O_i étant lié au manipulateur, nous avons également :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{O_i} \\ \omega_i \end{bmatrix} = J_i(q) \dot{q} \quad (5-22)$$

où $J_i(q)$ est la matrice jacobienne de base reliant les vitesses de translation et rotation instantanée du repère IR_i ($O_i; \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i$) par rapport au repère fixe IR_0 ($O; \vec{x}_O, \vec{y}_O, \vec{z}_O$) et la vitesse articulaire \dot{q} .

Des relations (5-21) et (5-22) nous tirons :

$$\dot{s} = [u_0^T | (r_0 + \Delta_0^{CO_i})^T] J_i(q) \dot{q} + [u_0^T | (r_0 + \Delta_0^{CO_s})^T] \begin{bmatrix} \dot{x}_{0_s} \\ \omega_s \end{bmatrix} \quad (5-23)$$

En identifiant maintenant cette relation à la relation :

$$\dot{s}(q, t) = \frac{\partial s}{\partial q}(q, t) \dot{q} + \frac{\partial s}{\partial t}(q, t) \quad (5-24)$$

nous obtenons :

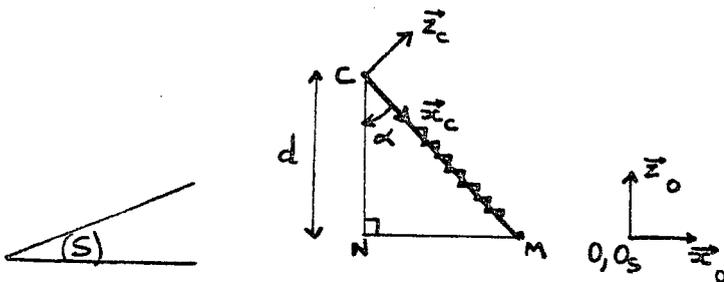
$$\frac{\partial s}{\partial q}(q, t) = [u_0^T(q, t) | (r_0 + \Delta_0^{CO_i})^T(q, t)] J_i(q) \quad (5-25-a)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}(q, t) = [u_0^T(q, t) | (r_0 + \Delta_0^{CO_s})^T(q, t)] \begin{bmatrix} \dot{x}_{0_s}(t) \\ \omega_s(t) \end{bmatrix} \quad (5-25-b)$$

La matrice $J_i(q)$ pouvant généralement être évaluée assez précisément à partir du modèle géométrique du manipulateur, la relation (5-25-a) montre que la connaissance de $\frac{\partial s}{\partial q}$ dépend principalement de la connaissance de la grandeur $w = [\vec{u}, \vec{r}]$.

Dans certaines applications où les caractéristiques des capteurs et de l'objet seront modélisables simplement il sera possible d'évaluer assez précisément cette grandeur et donc d'avoir une connaissance assez précise de $\frac{\partial s}{\partial q}$.

Exemple : capteur d'effort en contact (sans frottement) avec une surface plane.



x_0 : longueur du ressort lorsqu'il n'y a pas contact.

$$s = k(x_0 - \frac{d}{\cos \alpha}) \quad (s_{\max} = kx_0)$$

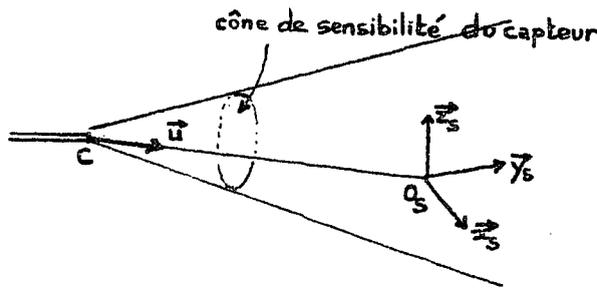
$$\Rightarrow \dot{s} = -k(\frac{\dot{d}}{\cos \alpha} - \frac{\text{tg } \alpha}{\cos \alpha} d \dot{\alpha})$$

$$= -\frac{k}{\cos \alpha} \vec{z}_0 \cdot \vec{V}_{C/R_S} + k \frac{\text{tg } \alpha}{\cos \alpha} d \vec{y}_0 \cdot \vec{\omega}_{R_C/R_S}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = -\frac{k}{\cos \alpha} \vec{z}_0, \quad \vec{r} = \text{tg } \alpha (s_{\max} - s) \vec{y}_0$$

Plus fréquemment cependant, la méconnaissance des caractéristiques exactes du capteur (C) et de l'objet (S) rendront imprécise la connaissance de $[\vec{u}, \vec{r}]$ et donc de $\frac{\partial s}{\partial q}$.

Exemple : capteur à ultra-son proche d'un objet de faibles dimensions (objet ponctuel)



La mesure - s - fournie par le capteur est une fonction monotone de la distance capteur-cible, c'est-à-dire :

$$s = f(y) \text{ avec } y = |\overrightarrow{CO_S}|^2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(y) < 0$$

$$\Rightarrow s = \frac{\partial f}{\partial y}(y) \dot{y} = -2 \frac{\partial f}{\partial y}(y) \overrightarrow{CO_S} \cdot \overrightarrow{V} \text{ c/ } \mathbb{R}_S$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{u} = -2 \frac{\partial f}{\partial y}(y) \overrightarrow{CO_S}, \quad \overrightarrow{r} = 0$$

Si la fonction $f(y)$ est mal connue, la norme de \overrightarrow{u} est également mal connue. Remarquons cependant que la direction de \overrightarrow{u} ne dépend pas de cette fonction.

Il est clair que la méconnaissance de $\partial s / \partial q$ (ainsi d'ailleurs que celle de $\partial s / \partial t$ qui est inévitable ne serait-ce que parce que les mouvements de l'objet sont généralement inconnus à l'avance) augmente la difficulté du problème de commande. Un des aspects principaux de notre analyse de la commande sera de développer des arguments de robustesse qui permettront de pallier cette méconnaissance.

Nous verrons notamment qu'il n'est pas forcément nécessaire de bien connaître $\partial s / \partial q$ et $\partial s / \partial t$ pour parvenir à commander efficacement le manipulateur. Une connaissance minimale de la structure de $\partial s / \partial q$ sera cependant toujours indispensable.

Bien qu'il n'existe pas de méthode universelle pour définir et organiser dans la pratique les éléments de cette connaissance minimale, il semble que certaines approches existantes ne sont pas étrangères à ce problème. Nous pensons en particulier aux travaux de Salisbury [20], d'André [21] et d'Espiau [22] portant sur le concepts de primitives proximétriques et d'actions élémentaires associées aux capteurs. Nous espérons pouvoir éclaircir cette question dans un proche futur.

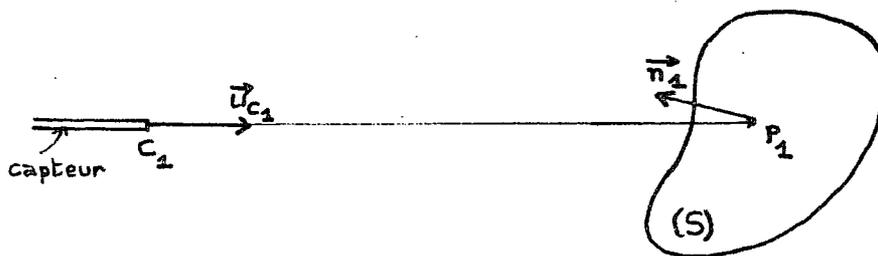
1.5.3.2 Exemples de tâches robotiques basées sur l'utilisation de capteurs de proximétrie

1er exemple : Evitement d'obstacles.

Lorsque des obstacles situés dans le champ de travail du robot ne sont pas connus par avance ou sont

susceptibles de se déplacer de façon non prévisible, il est possible de munir le robot d'organes sensoriels (tels que des capteurs de proximité) lui fournissant des informations pour détecter et éviter ces obstacles. Ces capteurs peuvent être répartis sur l'ensemble de la structure du robot.

Considérons un premier capteur $\{C_1\}$ situé sur l'élément j d'un manipulateur, et soit s_1 le signal fourni par ce capteur. Pour simplifier nous supposons que ce capteur a un champ d'observation très étroit caractérisé par le vecteur unitaire \vec{u}_{C_1} et que le signal s_1 est une fonction monotone (dans une certaine plage d'utilisation) de la distance d_1 entre un point origine C_1 du capteur et le point P_1 situé à l'intersection de la droite $(C_1; \vec{u}_{C_1})$ et du premier obstacle (assimilé à un solide (S)).



$$s_1 = f(d_1), \quad d_1 = |\overrightarrow{C_1 P_1}|, \quad f'(d_1) < 0$$

Dans ces conditions :

$$\dot{s}_1 = f'(d_1) \dot{d}_1 \quad (5-26)$$

Pour obtenir le couple $[\vec{u}_1, \vec{r}_1]$ associé au capteur et à l'obstacle, il nous faut exprimer \dot{d}_1 en fonction de \vec{V}_{C_1/R_S} et $\vec{\omega}_{R_{C_1}/R_S}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C_1 P_1} &= d_1 \vec{u}_{C_1} \\ \Rightarrow \\ \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{C_1 P_1} \right]_{R_S} &= \dot{d}_1 \vec{u}_{C_1} + d_1 \left[\frac{d}{dt} \vec{u}_{C_1} \right]_{R_S} \end{aligned}$$

\vec{u}_{C_1} étant lié au repère R_{C_1} :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{u}_{C_1} \right]_{R_S} = \vec{\omega}_{R_{C_1}/R_S} \wedge \vec{u}_{C_1}$$

d'où :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{C}_1 P_1 \right]_{R_S} = \dot{d}_1 \vec{u}_{C_1} + d_1 (\vec{\omega}_{R_C / R_S} \wedge \vec{u}_{C_1}) \quad (5-27)$$

D'autre part :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{C}_1 P_1 \right]_{R_S} = \vec{V}_{P_1 / R_S} - \vec{V}_{C_1 / R_S} \quad (5-28)$$

Soit \vec{n}_1 le vecteur unitaire normal à la surface de l'obstacle (S) au point P_1 . Puisque P_1 se déplace sur la surface de l'obstacle :

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{V}_{P_1 / R_S} = 0 \quad (5-29)$$

Des relations (5-28) et (5-29) nous déduisons :

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{V}_{C_1 / R_S} + \vec{n}_1 \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{C}_1 P_1 \right]_{R_S} = 0$$

et en utilisant (5-27) :

$$\dot{d}_1 = - \frac{\vec{n}_1}{\vec{u}_{C_1} \cdot \vec{n}_1} \cdot \vec{V}_{C_1 / R_S} - \frac{d_1}{\vec{u}_{C_1} \cdot \vec{n}_1} (\vec{u}_{C_1} \wedge \vec{n}_1) \cdot \vec{\omega}_{R_C / R_S} \quad (5-30)$$

En reportant cette relation dans (5-26) nous obtenons :

$$\dot{s}_1 = -f'(d_1) \frac{\vec{n}_1}{\vec{u}_{C_1} \cdot \vec{n}_1} \cdot \vec{V}_{C_1 / R_S} - f'(d_1) \frac{d_1}{\vec{u}_{C_1} \cdot \vec{n}_1} (\vec{u}_{C_1} \wedge \vec{n}_1) \cdot \vec{\omega}_{R_C / R_S} \quad (5-31)$$

soit :

$$\vec{u}_1 = -f'(d_1) \frac{\vec{n}_1}{\vec{u}_{C_1} \cdot \vec{n}_1} \quad (5-32-a)$$

et

$$\vec{r}_1 = -f'(d_1) \frac{d_1}{\vec{u}_{C_1} \cdot \vec{n}_1} (\vec{u}_{C_1} \wedge \vec{n}_1) \quad (5-32-b)$$

Il est important de noter que le couple $[\vec{u}_1, \vec{r}_1]$ dépend de la géométrie de l'obstacle par l'intermédiaire du vecteur normal à la surface \vec{n}_1 . Dans la plupart des applications faisant appel à l'utilisation de capteurs de proximité, le vecteur \vec{n}_1 sera a priori inconnu en raison de la méconnaissance de la géométrie de l'obstacle. Dans certains cas il sera possible d'utiliser l'information des capteurs pour faire une estimation de ce vecteur. Cette estimation pourra ensuite être

utilisée au niveau de la commande. Le centrage de la pince d'un manipulateur par rapport à un objet de géométrie connue est le cas typique où il est utile d'intégrer les propriétés de la surface de l'objet et donc de \vec{n}_1 dans le calcul de la commande (voir deuxième exemple traité). Cependant dans le cas d'évitement d'obstacles, la connaissance de \vec{n}_1 est en général moins cruciale du fait que la tâche ne requiert pas un positionnement précis du robot. Le choix de la fonction $f(d_1)$ est par contre important. Intuitivement, il faut en effet que le signal s_1 du capteur varie très sensiblement lorsque la distance d_1 , représentative de la distance entre le robot et l'obstacle, devient petite.

Classiquement cette fonction sera choisie de la forme :

$$f(d_1) = kd_1^{-m} \quad (k > 0, m > 0)$$

de sorte que $f(d_1)$ et $f'(d_1) = -mkd_1^{-(m+1)}$ tendent vers l'infini lorsque d_1 tend vers 0.

Dans ces conditions, pour empêcher que d_1 devienne trop petit, il suffit d'assurer la décroissance de s_1 c'est-à-dire $\dot{s}_1 < 0$. Supposons pour simplifier que l'obstacle (S) soit immobile ($\Rightarrow \vec{V}_{C_1/R_S} = \vec{V}_{C_1/R_0}$ et $\vec{\omega}_{R_{C_1}/R_S} = \vec{\omega}_{R_{C_1}/R_0}$). Il suffit d'imposer au repère lié au capteur un mouvement de translation pur dans la direction du vecteur $-\vec{u}_{C_1}$, soit :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{C_1/R_0} &= -\vec{u}_{C_1} \quad (\text{à un coefficient multiplicatif près}) \\ \vec{\omega}_{R_{C_1}/R_0} &= 0 \end{aligned} \quad (5-33)$$

En effet, d'après la relation (5-31) nous avons alors :

$$\dot{s}_1 = f'(d_1) < 0$$

Le raisonnement précédent montre bien qu'il n'est pas nécessaire de connaître le vecteur \vec{n}_1 pour empêcher d_1 de tendre vers 0.

D'un point de vue conceptuel, la même stratégie s'obtient en imposant comme modèle a priori :

$$\vec{n}_1 = -\vec{u}_{C_1} \quad (5-34)$$

Choisir ce modèle revient à faire l'hypothèse simplificatrice selon laquelle la direction d'observation du capteur est en permanence orthogonale au plan tangent de la surface de (S).

Sous l'hypothèse (5-34) le couple $[\vec{u}_1, \vec{r}_1]$ associé au capteur se réduit, d'après les relations (5-32), à :

$$\vec{u}_1 = -f'(d_1)\vec{u}_{C_1} \quad (5-35-a)$$

$$\vec{r}_1 = 0 \quad (5-35-b)$$

Par le biais de cet artifice, le vecteur \vec{u}_1 possède maintenant les caractéristiques d'une force fictive et

l'opposé de ce vecteur peut s'interpréter comme une action répulsive élémentaire telle qu'elle est définie dans l'approche d'Espiau [22] [24].

Considérons maintenant l capteurs identiques à $\{C_1\}$ fixés sur le jème élément du manipulateur. Soit $s_i (1 \leq i \leq l)$ le signal du capteur $\{C_i\}$ et C_i le point origine de ce capteur.

A cet ensemble de capteurs nous pouvons associer un signal s_c défini comme une somme pondérée des signaux s_i :

$$s_c = \sum_{i=1}^l a_i s_i \quad (a_i > 0) \quad (5-36)$$

Pour éviter les obstacles entourant le robot, il nous faut essayer de minimiser (ou tout au moins de limiter) la valeur de ce signal. Nous avons besoin pour cela d'évaluer $\partial s_c / \partial q$.

Soit O_j un point quelconque lié au jème élément du manipulateur et \mathbb{R}_j un repère correspondant. D'après (5-20) et en supposant que l'obstacle (S) est immobile (ce qui ne modifie pas l'expression de $\partial s_c / \partial q$) :

$$s_i = [\vec{u}_i, \vec{r}_i + \vec{u}_i \wedge \overrightarrow{C_i O_j}] \cdot \begin{bmatrix} \vec{V}_{O_j / \mathbb{R}_0} \\ \vec{\omega}_{\mathbb{R}_j / \mathbb{R}_0} \end{bmatrix} \quad (5-37)$$

D'où :

$$s_c = \left[\sum_{i=1}^l a_i \vec{u}_i, \sum_{i=1}^l a_i (\vec{r}_i + \vec{u}_i \wedge \overrightarrow{C_i O_j}) \right] \cdot \begin{bmatrix} \vec{V}_{O_j / \mathbb{R}_0} \\ \vec{\omega}_{\mathbb{R}_j / \mathbb{R}_0} \end{bmatrix} \quad (5-38)$$

Cette relation montre que comme pour chaque capteur $\{C_i\}$ nous pouvons associer à l'ensemble des capteurs un couple de vecteurs $[\vec{u}_c, \vec{r}_c]$ tel que :

$$\begin{aligned} \vec{u}_c &= \sum_{i=1}^l a_i \vec{u}_i \\ \vec{r}_c &= \sum_{i=1}^l a_i (\vec{r}_i + \vec{u}_i \wedge \overrightarrow{C_i O_j}) \end{aligned} \quad (5-39)$$

En utilisant la relation (5-32), nous obtenons plus précisément :

$$\vec{u}_c = \sum_{i=1}^l a_i \vec{n}_i$$

$$\vec{r}_C = \sum_{i=1}^l a'_i ((\vec{O}_j \vec{C}_i + d_i \vec{u}_{C_i}) \wedge \vec{n}_i) \quad (5-40)$$

avec :

$$a'_i = \frac{a_i f(d_i)}{\vec{n}_i \cdot \vec{u}_{C_i}}$$

Si on applique l'hypothèse simplificatrice (5-34) pour chacun des capteurs, c'est-à-dire : $\vec{n}_i = \vec{u}_{C_i}$, nous obtenons un modèle simplifié du couple $[\vec{u}_C, \vec{r}_C]$, soit :

$$\begin{aligned} \vec{u}_C &= \sum_{i=1}^l \vec{u}'_i \\ \vec{r}_C &= \sum_{i=1}^l \vec{O}_j \vec{C}_i \wedge \vec{u}_i \end{aligned} \quad (5-41)$$

avec :

$$\vec{u}'_i = -a_i f(d_i) \vec{u}_{C_i}$$

Nous retrouvons de cette façon le torseur associé au jème élément du manipulateur tel qu'il est défini par Espiau dans [22]-[24].

Soit maintenant :

- u_{C_j} et $\Delta_{C_j}^{O_j}$ les matrices respectives (3x1) des coordonnées des vecteurs \vec{u}_C et \vec{r}_C dans la base $(\vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j)$ lié au jème élément du manipulateur.
- R_{O_j} : la matrice (3x3) des coordonnées des vecteurs $(\vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j)$ dans la base fixe $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- J_j la matrice jacobienne de base pour le jème élément du manipulateur au point O_j .

Nous déduisons des relations (5-38) (5-39) :

$$\frac{\partial s_C}{\partial q} = [(u_{C_j})^T \mid (\Delta_{C_j}^{O_j})^T] \begin{bmatrix} R_{O_j}^T & 0 \\ 0 & R_{O_j}^T \end{bmatrix} J_j \quad (5-42)$$

2ème exemple : centrage d'une pince par rapport à un cylindre (immobile)

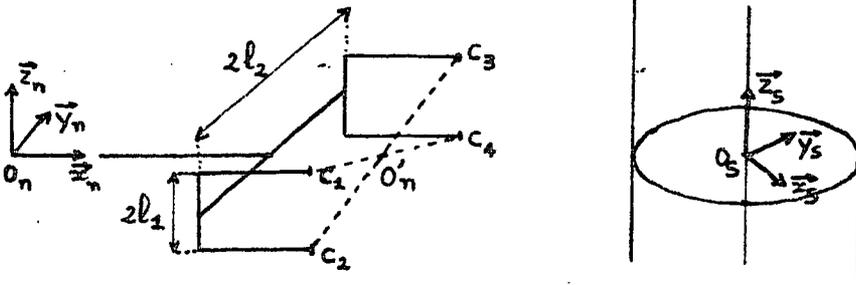


Fig. 1

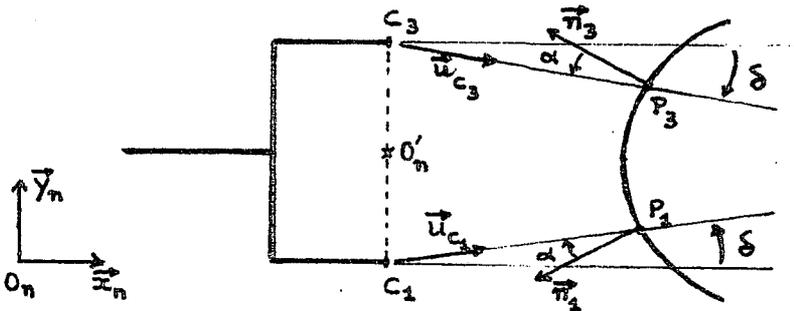


Fig. 2 : vue de dessus

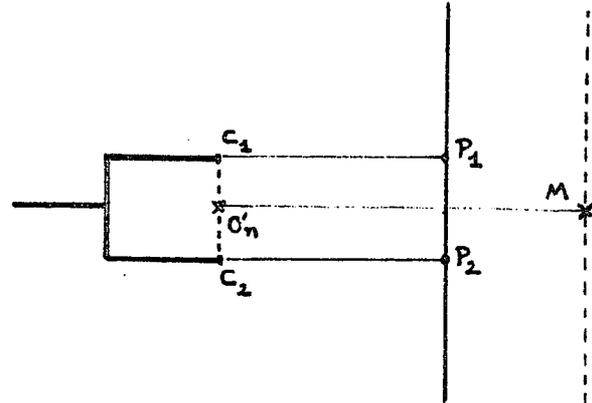


Fig. 3 : vue de coté

Quatre capteurs identiques portés par la pince ont pour origine les points $C_1 - C_4$. Nous supposons que les signaux $s_i (1 \leq i \leq 4)$ émis par ces capteurs sont de la forme :

$$s_i = f(d_i), \quad d_i = |\overrightarrow{C_i P_i}|, \quad f(d_i) < 0$$

La pince est centrée sur le cylindre si les distances $d_i (1 \leq i \leq 4)$ sont égales, c'est-à-dire si les signaux s_i ont la même valeur. Cette distance commune d étant déterminée, la pince possède encore deux degrés de liberté : l'un en translation le long de l'axe principal du cylindre, l'autre en rotation autour de cet axe.

Il faut donc imposer deux contraintes supplémentaires pour pouvoir fixer de façon localement biunivoque la position et l'orientation de la pince.

Avec les notations des figures 1 et 2 nous vérifions qu'autour de la position de centrage :

$$\begin{aligned} \vec{n}_i \cdot \vec{u}_{C_i} &= \cos \alpha \quad (\forall i) \\ \vec{u}_{C_1} \wedge \vec{n}_1 &= \vec{u}_{C_2} \wedge \vec{n}_2 = -\sin \alpha \vec{z}_n \\ \vec{u}_{C_3} \wedge \vec{n}_3 &= \vec{u}_{C_4} \wedge \vec{n}_4 = \sin \alpha \vec{z}_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 = \vec{n}_2 &= -\cos(\alpha + \delta)\vec{x}_n - \sin(\alpha + \delta)\vec{y}_n \\ \vec{n}_3 = \vec{n}_4 &= -\cos(\alpha + \delta)\vec{x}_n + \sin(\alpha + \delta)\vec{y}_n\end{aligned}$$

Par application de la relation (5-40) :

$$\begin{aligned}\dot{s}_{1,2} &= \frac{1}{\cos\alpha} f'(d) [\vec{n}_1, -d \sin\alpha \vec{z}_n + (\vec{O}_n \vec{C}_{1,2} \wedge \vec{n}_1)] \cdot \begin{bmatrix} \vec{V}_{O_n / R_0} \\ \vec{\omega}_{R_n / R_0} \end{bmatrix} \\ \dot{s}_{3,4} &= \frac{1}{\cos\alpha} f'(d) [\vec{n}_3, d \sin\alpha \vec{z}_n + (\vec{O}_n \vec{C}_{3,4} \wedge \vec{n}_3)] \cdot \begin{bmatrix} \vec{V}_{O_n / R_0} \\ \vec{\omega}_{R_n / R_0} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

O_n étant le point origine du repère $\mathbb{R}_n (O_n; \vec{x}_n, \vec{y}_n, \vec{z}_n)$ lié à la pince.

A partir des relations qui précèdent nous laissons au lecteur le soin de vérifier :

$$\frac{\partial s}{\partial q} = A \begin{bmatrix} R_{O,n}^T & 0 \\ 0 & R_{O,n}^T \end{bmatrix} J_n \tag{5-43-a}$$

($s^T = (s_1, s_2, s_3, s_4)$)

avec :

- $R_{O,n}$: matrice (3x3) des coordonnées de $(\vec{x}_n, \vec{y}_n, \vec{z}_n)$ dans la base fixe $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- J_n : matrice jacobienne de base de la pince au point O_n
- $(x_{O',n}, y_{O',n}, z_{O',n})$: coordonnées du point O'_n dans le repère \mathbb{R}_n .

$$A = \frac{1}{\cos\alpha} f'(d) \begin{bmatrix} -\cos\beta & -\sin\beta & 0 & (z'_{O_n} + 1_1) \sin\beta & -(z'_{O_n} + 1_1) \cos\beta & -x'_{O_n} \sin\beta - d \sin\alpha \\ & & & & & + (y'_{O_n} - 1_2) \cos\beta \\ -\cos\beta & -\sin\beta & 0 & (z'_{O_n} - 1_1) \sin\beta & -(z'_{O_n} - 1_1) \cos\beta & -x'_{O_n} \sin\beta - d \sin\alpha \\ & & & & & + (y'_{O_n} - 1_2) \cos\beta \\ -\cos\beta & \sin\beta & 0 & -(z'_{O_n} + 1_1) \sin\beta & -(z'_{O_n} + 1_1) \cos\beta & x'_{O_n} \sin\beta + d \sin\alpha \\ & & & & & + (y'_{O_n} + 1_2) \cos\beta \\ -\cos\beta & \sin\beta & 0 & -(z'_{O_n} - 1_1) \sin\beta & -(z'_{O_n} - 1_1) \cos\beta & x'_{O_n} \sin\beta + d \sin\alpha \\ & & & & & + (y'_{O_n} + 1_2) \cos\beta \end{bmatrix}$$

($\beta = \alpha + \delta$) (5.43.b)

Une façon de centre la pince sur le cylindre consiste à régler le vecteur de signaux s . Dans ce cas les composantes du vecteur $[s - s(d)]$, où $s(d)$ est la valeur de s (supposée mesurée à l'avance) lorsque la pince est centrée à la distance d du cylindre, seront les quatre premières composantes de la fonction de tâche $e(q, t)$.

La matrice A a cependant une forme particulière (dûe aux symétries de l'objet et au positionnement spécifique des capteurs sur la pince) qu'il est possible d'exploiter. En effet en multipliant A à gauche par la matrice de combinaisons linéaire :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5-44)$$

nous obtenons la matrice plus simple :

$$A' = C A = -\frac{4}{\cos \alpha} f'(d) \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & 0 & 0 & z_{O_n} \cos \beta & -y_{O_n} \cos \beta \\ 0 & \sin \beta & 0 & -z_{O_n} \sin \beta & 0 & l_2 \cos \beta + d \sin \alpha + x_{O_n} \sin \beta \\ 0 & 0 & 0 & l_1 \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 \cos \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Si de plus le point origine O_n de la pince est choisi tel que :

$$x_{O_n} = -\frac{d \sin \alpha + l_2 \cos(\alpha + \delta)}{\sin(\alpha + \delta)}, \quad y_{O_n} = 0, \quad z_{O_n} = 0$$

c'est-à-dire si le point O_n est confondu à l'équilibre avec le point M situé à l'intersection de l'axe du cylindre et de la droite passant par O'_n perpendiculaire au plan contenant les points $C_1 - C_4$, alors la matrice A' se simplifie encore :

$$A' = -\frac{4}{\cos \alpha} f'(d) \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 \cos \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (5-46)$$

Cette simplification suggère déjà de remplacer dans la fonction de tâche la fonction vectorielle $(s - s(d))$ par la fonction :

$$s_c = C(s - s(d)) = \begin{bmatrix} (s_1 + s_2 + s_3 + s_4) - 4s(d) \\ (s_1 + s_2) - (s_3 + s_4) \\ (s_2 + s_3) - (s_1 + s_4) \\ (s_1 + s_3) - (s_2 + s_4) \end{bmatrix} \quad (5-47)$$

dont la dérivée partielle $\frac{\partial s_c}{\partial q}$ vérifie lorsque la pince est centrée :

$$\frac{\partial s_c}{\partial q} = A' \begin{bmatrix} R_{O,n}^T & 0 \\ 0 & R_{O,n}^T \end{bmatrix} J_n \quad (5-48)$$

Nous indiquerons plus loin, en application de l'analyse de la commande, qu'il existe en plus de l'argument de simplicité de la matrice A' des raisons plus fondamentales, issues de considérations de robustesse, pour choisir s_c et non s dans la fonction de tâche $e(q,t)$.

3ème exemple : Poursuite dans le plan d'un objet ponctuel en déplacement par l'effecteur d'un manipulateur possédant deux degrés de libertés en rotation.

Plus simple que le précédent, cet exemple nous sert à discuter les conditions d'admissibilité de la tâche.

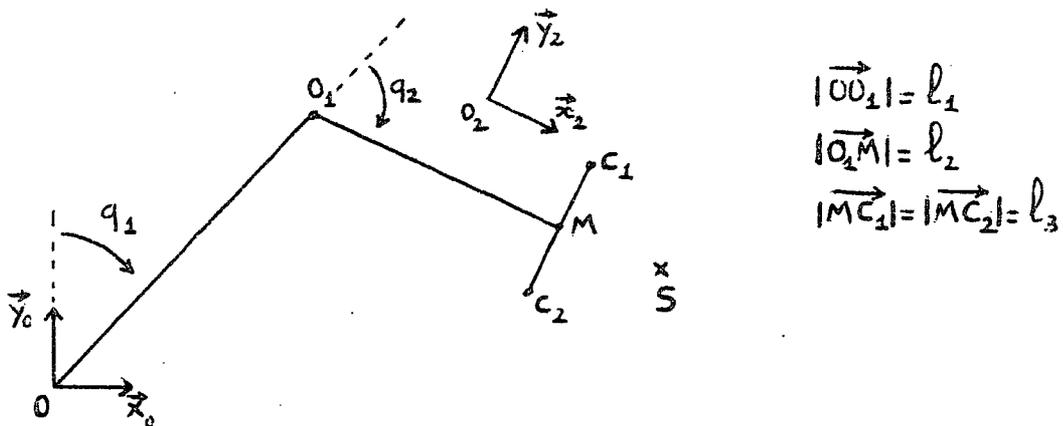


Figure 1 : Schéma du manipulateur. C_1 et C_2 sont les points origine des deux capteurs. La cible est modélisée par le point matériel S de coordonnées $\begin{pmatrix} x_{O,S} \\ y_{O,S} \end{pmatrix}$ dans le repère \mathbb{R}_O . O_2 est le point choisi comme point origine de l'effecteur.

Objectif :

Maintenir constante la position relative de S par rapport à l'effecteur lorsque S se déplace.

Modèle des capteurs :

Soit s_1 et s_2 les signaux issus des capteurs $\{C_1\}$ et $\{C_2\}$. Nous supposons que la mesure fournie par chaque capteur est fonction de la distance capteur-cible, soit :

$$s_i = f(d_i) \quad (d_i = |\overrightarrow{C_i S}|) \quad (5-49)$$

Choix de la fonction de tâche :

Tant que $f'(d_i) \neq 0$ la position du point S par rapport à l'effecteur est localement liée de façon biunivoque à la valeur du vecteur de mesure

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

Ceci nous conduit à choisir comme fonction de tâche :

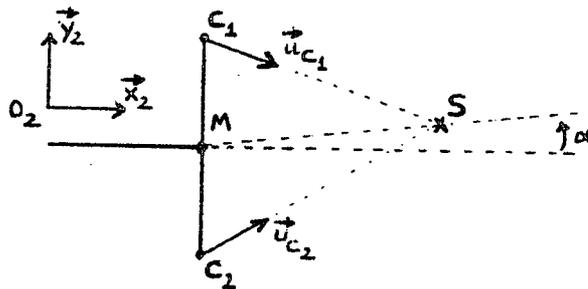
$$e(q,t) = C (s(q,t) - s_r) \quad (5-50)$$

où :

- s_r est la valeur de s , supposée mesurée à l'avance, lorsque la cible S occupe la position relative voulue par rapport à l'effecteur.
- C est une matrice constante (2x2) de rang plein

Si $e(q(t), t) = 0 (\forall t)$ alors $s(q(t), t) = s_r$ et la poursuite de la cible est effectuée de façon parfaite.

Calcul de $\frac{\partial e}{\partial q} = C \frac{\partial s}{\partial q}$:



$$|\overrightarrow{MS}| = d$$

$$\dot{s}_i = f'(d_i) \dot{d}_i = -f'(d_i) \overrightarrow{u}_{C_i} \cdot \overrightarrow{V}_{C_i / R_S} \quad (i = 1, 2)$$

d'où la valeur du couple $[\overrightarrow{u}_i, \overrightarrow{r}_i]$ associé à chaque capteur :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}_i = -f'(d_i) \overrightarrow{u}_{C_i} \\ \overrightarrow{r}_i = 0 \end{cases}$$

Il en résulte également d'après la relation (5-20) :

$$\begin{aligned} \dot{s}_i = & -f'(d_i) [\vec{u}_{C_i}, \vec{O}_2 C_i \wedge \vec{u}_{C_i}] \cdot \begin{bmatrix} \vec{V}_{O_2 / R_0} \\ \vec{\omega}_{R_2 / R_0} \end{bmatrix} \\ & + f'(d_i) \vec{u}_{C_i} \cdot \vec{V}_{S / R_0} \end{aligned} \quad (5-51)$$

Soit P le point lié à l'effecteur qui à l'instant t est confondu avec le point S . Comme à cet instant $\vec{PC}_i \wedge \vec{u}_{C_i} = 0$, nous avons d'après (5-51) :

$$\dot{s}_i = -f'(d_i) \vec{u}_{C_i} \cdot \vec{V}_{P / R_0} + f'(d_i) \vec{u}_{C_i} \cdot \vec{V}_{S / R_0} \quad (5-52)$$

Dans la base $\mathbb{R}_2 (O_2 ; \vec{x}_2 ; \vec{y}_2)$:

$$\vec{u}_{C_1} : \frac{1}{d_1} \begin{pmatrix} l \cos \alpha \\ l \sin \alpha - l_3 \end{pmatrix}, \vec{u}_{C_2} : \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} l \cos \alpha \\ l \sin \alpha + l_3 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} d_1^2 &= l^2 + l_3^2 - 2ll_3 \sin \alpha \\ d_2^2 &= l^2 + l_3^2 + 2ll_3 \sin \alpha \end{aligned}$$

• Soit :

$$R_{O,2} = R_{O,1} \cdot R_{1,2} = \begin{bmatrix} s_1 & -c_1 \\ c_1 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & s_2 \\ -s_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{12} & -c_{12} \\ c_{12} & s_{12} \end{bmatrix} \quad (5-53)$$

la matrice des coordonnées des vecteurs de base \vec{x}_2 et \vec{y}_2 dans la base (\vec{x}_0, \vec{y}_0)

• J_P : la matrice jacobienne de base de l'effecteur au point P . Dans le repère \mathbb{R}_O :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} l_1 s_1 + (l_2 + l \cos \alpha) s_{12} - l \sin \alpha c_{12} \\ l_1 c_1 + (l_2 + l \cos \alpha) c_{12} + l \sin \alpha s_{12} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{pmatrix} &= J_P \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \\ J_P &= \begin{pmatrix} l_1 c_1 + (l_2 + l \cos \alpha) c_{12} + l \sin \alpha s_{12} & (l_2 + l \cos \alpha) c_{12} + l \sin \alpha s_{12} \\ -l_1 s_1 - (l_2 + l \cos \alpha) s_{12} + l \sin \alpha c_{12} & -(l_2 + l \cos \alpha) s_{12} + l \sin \alpha c_{12} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5-54)$$

Nous déduisons de la relation (5-52) :

$$\frac{\partial s}{\partial q} = -AR_{O,2}^T J_P \quad (5-55-a)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = AR_{O,2}^T \begin{pmatrix} \dot{x}_{O,S} \\ \dot{y}_{O,S} \end{pmatrix} \quad (5-55-b)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{f'(d_1)}{d_1} l \cos \alpha & \frac{f'(d_1)}{d_1} (l \sin \alpha - l_3) \\ \frac{f'(d_2)}{d_2} l \cos \alpha & \frac{f'(d_2)}{d_2} (l \sin \alpha + l_3) \end{bmatrix} \quad (5-56)$$

La relation (5-55) entraîne :

$$\frac{\partial e}{\partial q} = -CAR_{0,2}^T J_P \quad (5-57-a)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = CAR_{0,2}^T \begin{pmatrix} \dot{x}_{O,S} \\ \dot{y}_{O,S} \end{pmatrix} \quad (5-57-b)$$

d'où :

$$\det\left\{\frac{\partial e}{\partial q}\right\} = \det\{C\} \cdot \det\{A\} \cdot \det\{J_P\}$$

or d'après (5-56) :

$$\det\{A\} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(d_i)}{d_i} = 0 \text{ ou } \cos \alpha = 0$$

et d'après (5-54) :

$$\det\{J_P\} = 0 \Leftrightarrow l \sin \alpha \cos q_2 = (l_2 + l \sin \alpha) \sin q_2$$

La matrice C étant choisie régulière, il résulte de ce qui précède que pour que la tâche soit admissible, il faut qu'au cours de la poursuite idéale :

- i) S ne rencontre pas la droite $(C_1 C_2)$ ($\Rightarrow \cos \alpha \neq 0$)
- ii) S ne soit jamais aligné avec les points O et O_1 ($\Rightarrow \det\{J_P\} \neq 0$).
- iii) $f'(d_i) \neq 0$
- iv) $\frac{f'(d_i)}{d_i}$ reste borné ($\Rightarrow \frac{\partial e}{\partial t}$ borné si la vitesse de S dans \mathbb{R}^2 est bornée)

Les conditions i) et ii) imposent des conditions sur la trajectoire de la cible S dans le repère fixe \mathbb{R}_O . Par exemple, si $\alpha = 0$ ($\Rightarrow S$ doit se trouver sur la médiatrice du segment $[C_1 C_2]$ à la distance l du point M), il faut que S reste à l'intérieur de la couronne comprise entre les deux cercles de centre O et de rayons respectifs $r_1 = l_1 - (l_2 + l)$ et $r_2 = l_1 + (l_2 + l)$.

Les conditions iii) et iv) dépendent du choix de la fonction $f(d)$ qui caractérise la réponse des capteurs. La condition iii) est évidemment vérifiée si cette fonction est strictement monotone. Il en résulte également que le degré d'admissibilité de la tâche croît avec la taille de la plage où $f'(d) \neq 0$. La condition iv) impose une borne supérieure à la pente de la fonction $f(d)$.

Comme dans le cas du deuxième exemple, nous verrons plus loin que le choix de la matrice de combinaison des signaux C est lié à des propriétés de robustesse de la commande.

1.6 Tâches redondantes. Utilisation de la redondance

1.6.1 Tâches redondantes :

L'approche exposée dans ce rapport repose sur la définition préalable d'une fonction $e(q,t)$ qui caractérise la tâche à accomplir. Nous avons relié la notion d'admissibilité de la tâche à l'existence d'un difféomorphisme local à chaque instant entre la grandeur $e(t) = e(q(t), t)$ à réguler et la position articulaire $q(t)$ du manipulateur. Pour qu'un tel difféomorphisme puisse exister il faut déjà que la fonction vectorielle $e(q,t)$ possède un nombre de composantes égal au nombre de degrés de libertés - n - du manipulateur. L'étude des conditions $P'1$ énoncées au paragraphe I.2 permet ensuite de cerner les conditions d'admissibilité de la tâche $(e(q,t), q_0)$. Nous avons entamé cette étude au paragraphe I.5 dans le cas de quelques exemples de tâches.

Une des conditions essentielles pour que la tâche $(e(q,t), q_0)$ soit admissible est que la trajectoire idéale $\{q_r(t)\}$ telle que $q_r(0) = q_0$ et $e(q_r(t), t) = 0$ ($t \in [0, T]$) soit définie de façon unique. Si tel n'est pas le cas nous dirons que la tâche est redondante.

Plus précisément nous dirons qu'une tâche $(e(q,t), q_0)$ est redondante pendant l'intervalle de temps $[0, T]$ si :

- i) Elle est possible pendant $[0, T]$ (\Leftrightarrow existence d'une trajectoire idéale $\{q_r(t)\}$ de classe C^2).
- ii) Au voisinage de tout point $q_r(t)$ d'une trajectoire idéale le rang de la fonction $e_t(q) : q \rightarrow e(q,t)$ est inférieur à n ($\Leftrightarrow \text{rang} \left\{ \frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t) \right\} < n$).

Le point ii) entraîne que la trajectoire idéale $\{q_r(t)\}$ n'est pas unique.

Exemple 1 :

Considérons la fonction (5-2) du paragraphe I.5.2 utilisée pour le suivi de trajectoire dans un espace de coordonnées opérationnelles :

$$e(q,t) = x(q) - x_r(t) \quad (6-1-a)$$

avec :

$$\dim x = m < n \quad (6-1-b)$$

x est par exemple le vecteur formé des trois coordonnées cartésiennes d'un point de l'effecteur et des trois angles d'Euler caractérisant l'orientation de l'effecteur ($m = 6$) et le manipulateur possède plus de six degrés de libertés ($n > 6$).

Une fonction de tâche équivalente ayant n composantes s'obtient en posant :

$$e'(q,t) = \begin{bmatrix} e(q,t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-2)$$

Comme :

$$\frac{\partial e'}{\partial q}(q,t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial q}(q,t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\forall (q,t))$$

et :

$$\text{rang} \left\{ \frac{\partial e'}{\partial q}(q,t) \right\} = \text{rang} \left\{ \frac{\partial e}{\partial q}(q,t) \right\} \leq m < n$$

il est clair, d'après notre définition, que si la tâche est possible (il faut pour cela que $x_r(t) \in \text{Im}x(q)$, $\forall t \in [0, T]$) elle est aussi redondante.

Exemple 2 :

L'objectif est de minimiser à chaque instant la fonction :

$$h(q,t) = \frac{1}{2} |x(q) - x_r(t)|^2 \quad (6-3)$$

Il s'agit donc de minimiser la distance entre $x(q)$ et la valeur désirée $x_r(t)$. Lorsque $x_r(t) \in \text{Im}x(q)$ cet objectif coïncide avec celui de l'exemple 1 puisque l'égalité $x(q) = x_r(t)$ est alors possible.

Le choix de la fonction $h(q,t)$ suggère de choisir comme fonction de tâche :

$$e(q,t) = \frac{\partial h^T}{\partial q}(q,t) = \frac{\partial x^T}{\partial q}(q) (x(q) - x_r(t)). \quad (6-4)$$

Notons la différence entre cette fonction et la fonction de tâche de l'exemple 1.

Dans le cas où $m = n$ et si $x_r(0) = x(q_0)$, nous pouvons vérifier que ces deux fonctions traduisent en fait la même tâche (les trajectoires idéales respectives $\{q_r(t)\}$ sont confondues) et que si l'une est admissible, l'autre l'est également (il suffit pour cela que $x_r(t) \in \text{Im}x(q)$, $|\dot{x}_r(t)| < K$ et $x_r(t)$ n'est à aucun moment l'image par x d'une singularité géométrique du manipulateur).

Dans le cas où $m < n$ et $x_r(t) \in \text{Im}x(q)$, il est encore facile de vérifier que ces deux fonctions traduisent le même objectif, à savoir la poursuite parfaite de $x_r(t)$ par $x(q(t))$. En formant $\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t)$ nous vérifions rapidement que la tâche est redondante. En effet, d'après (6-4) :

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q,t) = \frac{\partial x^T}{\partial q}(q) \frac{\partial x}{\partial q}(q) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 x_k}{\partial q^2}(q) [x_k(q) - x_{r,k}(t)] \quad (6-5)$$

(x_k et $x_{r,k}$ désignant les k ème composantes respectives de x et x_r)

Comme :

$$x(q_r(t)) = x_r(t)$$

nous obtenons :

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t) = \frac{\partial x^T}{\partial q}(q_r(t)) \frac{\partial x}{\partial q}(q_r(t))$$

La matrice $\frac{\partial x}{\partial q}(q_r(t))$ étant rectangulaire de dimension ($m \times n$), le rang de $\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t)$ est au plus égal à $m (< n)$.

En réalité la fonction de l'exemple 1 possède l'avantage d'être plus simple que la fonction (6-4). En contre partie, la fonction (6-4) est plus générale parce qu'elle s'applique encore dans le cas où $x_r(t) \notin \text{Im}x(q)$, c'est-à-dire dans le cas où la poursuite parfaite n'est pas possible. A l'instant t , le minimum $q_r(t)$ doit alors satisfaire simultanément :

$$e(q_r(t), t) = \frac{\partial x^T}{\partial q}(q_r(t)) [x(q_r(t)) - x_r(t)] = 0 \quad (6-6-a)$$

et

$$x(q_r(t)) - x_r(t) \neq 0 \quad (6-6-b)$$

Nous déduisons de ces deux relations que la matrice $\frac{\partial x}{\partial q}(q_r(t))$ ne peut être de rang plein. En nous reportant à l'étude du paragraphe 5.2, nous concluons que le manipulateur doit nécessairement se trouver dans une configuration singulière (c'est-à-dire occupe la position d'une singularité géométrique). Cependant au vu de la relation (6-5) rien ne nous permet d'affirmer pour autant que $\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t)$ est une matrice singulière et donc que la tâche est non-admissible. Nous nous trouvons donc en présence d'un nouvel exemple où singularités de la tâche et singularités géométriques du manipulateur ne coïncident pas nécessairement.

Cet exemple permet également de mettre en évidence que pour une fonction de tâche $e(q, t)$ donnée, la tâche associée peut être ou ne pas être redondante selon la condition initiale q_0 . En effet, la fonction (6-4) peut être utilisée pour minimiser la distance entre $x(q)$ et $x_r(t)$ comme elle peut être utilisée pour maximiser cette même distance. Dans le premier cas, en supposant que $x_r(t) \in \text{Im}x(q)$, $x(q_0) = x_r(0)$ et la tâche est redondante lorsque $m < n$. Dans le second cas, $x(q_0) \neq x_r(0)$ et $e(q_0, 0) = 0$. Le manipulateur est dans une position singulière, la tâche peut être admissible et donc non-redondante même si $m < n$.

Soit p le rang maximum de $\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t)$ ($t \in [0, T]$), le nombre $n - p$ est le degré de redondance

de la tâche. Ce nombre coïncide avec le nombre minimal de contraintes qu'il faudrait ajouter à la tâche pour qu'elle ait des chances d'être admissible. L'exemple 2 suffit à montrer que le degré de redondance de la tâche ne coïncide pas nécessairement avec le degré de redondance (n-m) du manipulateur.

1.6.2 Utilisation de la redondance

Une tâche redondante est une tâche mal conditionnée (non-admissible) qu'il faut modifier (ou compléter) de façon à la rendre admissible. Une façon de procéder consiste à former une fonction de tâche $e(q,t)$ dont les m premières composantes ($m < n$) sont les composantes indépendantes de la fonction de tâche initiale redondante et dont les (n-m) dernières composantes sont choisies de sorte que l'ensemble des n composantes de la fonction $e(q,t)$ soient indépendantes le long de la trajectoire idéale. Il est bien sûr souhaitable de profiter de la détermination de ces (n-m) composantes pour essayer de réaliser au mieux un objectif secondaire. C'est en ce sens que la redondance d'une tâche peut être utile.

Dans de nombreux cas, la réalisation d'un objectif secondaire pourra s'exprimer comme un problème de minimisation sous contraintes. En effet, soit $e_1(q,t)$ le vecteur des m composantes indépendantes associé à la tâche principale, l'objectif secondaire consistera à minimiser (par rapport à la variable q) un coût $h(q,t)$ sous la contrainte $e_1(q,t) = 0$, c'est-à-dire sous la contrainte que la tâche principale soit réalisée parfaitement.

De façon symbolique, nous notons ce problème :

$$(\min h(q,t) ; e_1(q,t) = 0) \quad (6-7)$$

Les conditions nécessaires pour que q soit une solution de ce problème sont classiques [1] et s'écrivent :

$$\begin{cases} e_1(q,t) = 0 & (6-8-a) \\ \frac{\partial H^T}{\partial q}(q,t,\lambda) = \frac{\partial h}{\partial q}(q,t) + \lambda^T \frac{\partial e_1}{\partial q}(q,t) = 0 & (6-8-b) \end{cases}$$

où :

- . $H(q,t,\lambda) = h(q,t) + \lambda^T e_1(q,t)$ est le Lagrangien du problème
- . λ est le vecteur (m x 1) dont les composantes sont les multiplicateurs de Lagrange.

Lemme 1 :

Soit :

- . $P(q,t)$ une fonction matricielle (m x n) telle que la matrice produit :
- . $P(q,t) \frac{\partial e_1}{\partial q}(q,t)$ soit de rang maximum (=m)

. $Q(q,t)$ une fonction matricielle ($m \times n$) telle que la matrice produit :
 $Q(q,t)P^T(q,t)$ soit de rang maximum (=m)

alors :

$$e_1 = 0, \frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

\Leftrightarrow

$$Q^T e_1 + \alpha \left(I - \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \left(P \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \right)^{-1} P \right) \frac{\partial h^T}{\partial q} = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*)$$

démonstration :

a) \Rightarrow

En multipliant (b- 6-8) à droite par $P^T(q,t)$ nous obtenons :

$$\lambda^{*T} = - \left(P \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \right)^{-1} P \frac{\partial h^T}{\partial q} \quad (6-9)$$

d'où en utilisant (6-9) dans (b- 6-8) :

$$\left(I - \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \left(P \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \right)^{-1} P \right) \frac{\partial h^T}{\partial q} = 0 \quad (6-10)$$

(a- 6-8) entraîne également :

$$Q^T e_1 = 0 \quad (6-11)$$

Enfin en multipliant (6-10) par α et en additionnant (6-11) nous obtenons l'égalité voulue, soit :

$$Q^T e_1 + \alpha \left(I - \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \left(P \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \right)^{-1} P \right) \frac{\partial h^T}{\partial q} = 0 \quad (6-12)$$

b) \Leftarrow

En multipliant (6-12) à gauche par P nous obtenons :

$$P Q^T e_1 = 0$$

Comme la matrice $P Q^T$ est de rang plein par hypothèse, il en résulte :

$$e_1 = 0$$

D'après (6-12) il en résulte également :

$$\left(I - \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \left(P \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \right)^{-1} P \right) \frac{\partial h^T}{\partial q} = 0$$

et par conséquent :

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \text{ avec } \lambda = - \left(P \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \right)^{-1} P \frac{\partial h^T}{\partial q}$$

Le résultat de ce lemme nous suggère de prendre comme fonction de tâche, la fonction vectorielle ($n \times 1$) suivante :

$$e(q, t) = Q^T(q, t) e_1(q, t) + \alpha \left(I - \frac{\partial e_1^T}{\partial q}(q, t) \left(P(q, t) \frac{\partial e_1^T}{\partial q}(q, t) \right)^{-1} P(q, t) \right) \frac{\partial h^T}{\partial q}(q, t) \quad (6-13)$$

Remarquons que cette fonction dépend du choix de P, Q et α et que nous pouvons par conséquent associer à notre problème plusieurs fonctions de tâches.

L'admissibilité de la fonction choisie dépend des propriétés des différentes fonctions qui la composent (différentiabilité, etc.). La propriété centrale est que $\frac{\partial e}{\partial q}(q, t)$ doit être de rang plein ($=n$) le long de la trajectoire idéale $\{q_r(t)\}$. Nous énonçons dans le lemme suivant les conditions pour que cette propriété soit vérifiée.

lemme 2 :

Si :

- a) $\frac{\partial e_1}{\partial q}(q_r(t), t)$ est de rang maximum $=m$
 $(\Rightarrow q_r(t)$ est un point « régulier » de la contrainte $e_1(q, t) = 0$)
- b) $P(q_r(t), t) \frac{\partial e_1^T}{\partial q}(q_r(t), t)$ et $P(q_r(t), t) Q^T(q_r(t), t)$ sont de rang plein ($=m$)

$$c) x^T \frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(q_r(t), t, \lambda^*) x > 0 \text{ pour } x \in \text{Ker} \left(\frac{\partial e_1}{\partial q}(q_r(t), t) \right), x \neq 0.$$

alors : $\det \left(\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t) \right) \neq 0.$

Remarque : Si $q_r(t)$ est un minimum local strict de $h(q, t)$ sous la contrainte $e_1(q, t) = 0$ alors

$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(q_r(t), t, \lambda^*)$ est semi-définie positive sur $\text{Ker} \left(\frac{\partial e_1}{\partial q}(q_r(t), t) \right)$ [1]. La condition c) du lemme est donc une condition légèrement plus forte.

démonstration :

Posons :

$$f = \left(I - \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \left(P \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \right)^{-1} P \right) \frac{\partial h^T}{\partial q} \quad (6-14)$$

Comme : $Pf = 0$ et $f(q_r(t), t) = 0$ nous déduisons :

$$P(q_r(t), t) \frac{\partial f}{\partial q}(q_r(t), t) = 0 \quad (6-15)$$

D'autre part, d'après la définition de $H(q, t, \lambda)$:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(q, t, \lambda^*) = \frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q, t) + \sum_{k=1}^m \lambda_k^* \frac{\partial^2 e_{1k}}{\partial q^2}(q, t) \quad (6-16)$$

et par conséquent :

$$\frac{\partial f}{\partial q}(q, t) = \frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(q, t, \lambda) + \frac{\partial e_1^T}{\partial q}(q, t) \frac{\partial \lambda^*}{\partial q}(q, t) \quad (6-17)$$

Nous pouvons également décomposer $\frac{\partial f}{\partial q}$ de la façon suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \left[I - \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \left(P \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \right)^{-1} P \right] \frac{\partial f}{\partial q} + \left[\frac{\partial e_1^T}{\partial q} \left(P \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \right)^{-1} P \right] \frac{\partial f}{\partial q}$$

En utilisant (6-15) et (6-17) dans cette dernière relation nous obtenons :

$$\frac{\partial f}{\partial q}(q_r(t), t) = \left[I - \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \left(P \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \right)^{-1} P \right] \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \Big|_{(q,t)=(q_r(t),t)} \quad (6-18)$$

D'après la définition de $e(q, t)$ et comme $e(q_r(t), t) = 0$ nous avons aussi :

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t) = Q^T \frac{\partial e_1}{\partial q} + \alpha \frac{\partial f}{\partial q} \Big|_{(q,t)=(q_r(t),t)}$$

d'où, d'après (6-18) :

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t) = Q^T \frac{\partial e_1}{\partial q} + \alpha \left(I - \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \left(P \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \right)^{-1} P \right) \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \Big|_{(q,t)=(q_r(t),t)} \quad (6-19)$$

Soit maintenant x un vecteur de \mathbb{R}^n tel que :

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t) x = 0 \quad (6-20)$$

x se décompose comme suit :

$$x = x_1 + x_2 \quad (6-21-a)$$

avec :

$$x_1 = P^T \left(\frac{\partial e_1}{\partial q} P^T \right)^{-1} \frac{\partial e_1}{\partial q} \Big|_{(q,t)=(q_r(t),t)} \cdot x \quad (6-21-b)$$

$$x_2 = \left(I - P^T \left(\frac{\partial e_1}{\partial q} P^T \right)^{-1} \frac{\partial e_1}{\partial q} \Big|_{(q,t)=(q_r(t),t)} \right) \cdot x \quad (6-21-c)$$

En multipliant (6-19) à gauche par $P(q_r(t), t)$ et à droite par x , nous obtenons compte tenu de (6-20) :

$$P Q^T \frac{\partial e_1}{\partial q} x \Big|_{(q,t)=(q_r(t),t)} = 0$$

$P Q^T$ étant de rang plein par hypothèse :

$$\frac{\partial e_1}{\partial q} x = 0$$

et donc :

$$x_1 = 0 \quad (\Rightarrow x = x_2) \quad (6-22)$$

En multipliant (6-19) à gauche par x et à droite par x^T , nous obtenons :

$$x^T \frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t) x = x_2^T \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \Big|_{(q,t)=(q_r(t),t)} x_2 = 0 \quad (6-23)$$

or x_2 appartient à $\text{Ker} \left[\frac{\partial e_1}{\partial q}(q_r(t), t) \right]$ d'où nécessairement compte tenu de l'hypothèse c) du lemme :

$$x_2 = 0 \quad (6-24)$$

Nous avons donc démontré que le vecteur nul est le seul élément du noyau de $\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t)$, d'où la conclusion du lemme.

Remarque :

L'opérateur

$$O_P = \left[I - P^T \left(\frac{\partial e_1}{\partial q} P^T \right)^{-1} \frac{\partial e_1}{\partial q} \right]$$

est un opérateur de projection (oblique) qui projette sur le noyau de $\frac{\partial e_1}{\partial q}$. Le transposé de cet opérateur, qui est utilisé dans l'expression de la fonction de tâche $e(q, t)$, projette sur le noyau de P . A partir de cette constatation il est possible de trouver une interprétation géométrique (que nous ne développerons pas ici) des résultats qui précèdent.

Le lemme 2 donne des conditions pour que la tâche $(e(q, t), q_0)$ soit admissible. Inversement si initialement le manipulateur se trouve en un point solution de notre problème d'optimisation et si la tâche est admissible pendant $[0, T]$ alors la commande idéale qui réalise $e(q, t) = 0 \quad (\forall t \in [0, T])$ assure à chaque instant la minimisation de $h(q, t)$ sous la contrainte $e_1(q, t) = 0$.

Nous avons vu que la régularité de la matrice $\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t)$ (et par la suite l'admissibilité de la tâche) ne dépendait que faiblement du choix des fonctions matricielles $P(q, t)$ et $Q(q, t)$. Cependant, dans la pratique, certains choix de ces fonctions peuvent conduire à des commandes plus simples à calculer. Ce sera le cas lorsque la matrice $\frac{\partial e}{\partial q}(q, t)$ sera définie positive au voisinage de la trajectoire idéale. En effet il ne sera alors pas indispensable (comme nous le verrons au cours de l'analyse de la commande) d'utiliser l'inverse de $\frac{\partial e}{\partial q}(q, t)$ (dont le calcul n'est généralement pas simple) dans l'expression de la commande.

Les deux lemmes qui suivent donnent des conditions suffisantes portant sur le choix de $P(q, t)$, $Q(q, t)$ et du nombre α pour que $\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t)$ soit positive.

Ces deux lemmes sont valides sous les conditions a) et c) de lemme 2.
Il existe alors deux nombres réels positifs k_1 et k_2 tels que :

$$i) \quad x_1^T \frac{\partial e_1}{\partial q}(q_r(t), t) \frac{\partial e_1}{\partial q}(q_r(t), t) x_1 \geq k_1 |x_1|^2 \quad (6-25)$$

x_1 étant un vecteur quelconque du supplémentaire du noyau de $\frac{\partial e_1}{\partial q}(q_r(t), t)$.

$$ii) \quad x_2^T \frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(q_r(t), t) x_2 \geq k_2 |x_2|^2 \quad (6-26)$$

x_2 étant un vecteur quelconque du noyau de $\frac{\partial e_1}{\partial q}(q_r(t), t)$.

Nous noterons k_3 la norme spectrale de la matrice $\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(q_r(t), t, \lambda^*)$:

$$k_3 = \left| \frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(q_r(t), t, \lambda^*) \right| \quad (6-27)$$

lemme 3 :

Si : a) les conditions a) et c) du lemme 2 sont satisfaites

$$b) \quad P(q, t) = Q(q, t) = \frac{\partial e_1}{\partial q}(q, t) \quad (6-28)$$

$$c) \quad 0 < \alpha < 4k_1 k_2 / k_3^2 \quad (6-29)$$

alors la matrice $\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t)$ est positive.

démonstration :

Nous nous plaçons au point : $(q, t) = (q_r(t), t)$.

Soit x un vecteur quelconque non nul de \mathbb{R}^n .

$$x = x_1 + x_2$$

avec :

$$x_1 = \frac{\partial e_1}{\partial q} \frac{\partial e_1}{\partial q} x$$

$$x_2 = \left(I - \frac{\partial e_1^\dagger \partial e_1}{\partial q} \right) x$$

$$\frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q} = \frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q} \left(\frac{\partial e_1}{\partial q} \frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q} \right)^{-1}$$

$\left(\frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q} \right)$ est une pseudo-inverse à droite de $\frac{\partial e_1}{\partial q}$

En utilisant la relation (6-19) et en remplaçant P et Q par $\frac{\partial e_1}{\partial q}$ nous obtenons :

$$x^T \frac{\partial e}{\partial q} x = x_1^T \frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q} \frac{\partial e_1}{\partial q} x_1 + \alpha x_2^T \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} (x_1 + x_2) \quad (6-30)$$

d'où compte tenu de (6-25)-(6-27) :

$$x^T \frac{\partial e}{\partial q} x \geq k_1 |x_1|^2 + \alpha k_2 |x_2|^2 - \alpha k_3 |x_1| |x_2|$$

$$\geq k_1 (|x_1| - (\alpha k_3 / 2k_1) |x_2|)^2 + \alpha (k_2 - (\alpha k_3^2 / 4k_1)) |x_2|^2 \quad (6-31)$$

Compte tenu de la condition (6-29) portant sur α , cette inégalité entraîne clairement :

$$x \neq 0 \Rightarrow x^T \frac{\partial e}{\partial q} x > 0$$

lemme 4 :

Si : a) les conditions a) et c) du lemme 2 sont satisfaites

$$b) P(q, t) = \frac{\partial e_1}{\partial q}(q, t) \quad (6-32)$$

$$c) Q^T(q, t) = \frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q}(q, t) = \frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q} \left(\frac{\partial e_1}{\partial q} \frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q} \right)^{-1} \quad (6-33)$$

$$d) 0 < \alpha < 4k_2/k_3^2 \quad (6-34)$$

alors la matrice $\frac{\partial e}{\partial q}(q, t)$ est positive.

démonstration :

Même démonstration que pour le lemme 3 en prenant $k_1 = 1$ parce que $x^T Q^T \frac{\partial e_1}{\partial q} x = |x_1|^2$.

Remarque : Dans le cas où l'objectif est de maximiser (et non plus minimiser) $h(q,t)$ sous la contrainte $e_1(q,t) = 0$, les énoncés des lemmes 3 et 4 restent valides en remplaçant α par $(-\alpha)$.

Nous terminerons ce paragraphe où nous avons montré comment il est possible de définir une fonction de tâche admissible à partir de la donnée d'une tâche redondante (nous avons vu que les possibilités étaient multiples) en donnant une interprétation « cinématique » de la redondance proche dans son esprit des travaux de certains auteurs sur le sujet [40] [41] [42] [46].

Pour simplifier nous supposerons que le vecteur - e_1 - et la fonction - h - qu'il s'agit de minimiser ne dépendent pas de la variable indépendante t . Dans ces conditions :

$$\dot{e}_1 = \frac{\partial e_1}{\partial q}(q) \dot{q} \quad (6-35-a)$$

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial q}(q) \dot{q} \quad (6-35-b)$$

Posons $P = \frac{\partial e_1}{\partial q}$ et $Q^T = \frac{\partial e_1^T}{\partial q}$ ce qui nous donne pour fonction de tâche :

$$e = \frac{\partial e_1^T}{\partial q} e_1 + \alpha \left(I - \frac{\partial e_1^T \partial e_1}{\partial q \partial q} \right) \frac{\partial h^T}{\partial q} \quad (6-36)$$

Supposons que « nous soyons capables de former une commande » qui permette de réaliser :

$$\dot{e} = -\mu \frac{\partial e}{\partial q} e \quad (6-37)$$

D'après le lemme 4, $\frac{\partial e}{\partial q}$ est positive (si α est petit et - e - proche de 0) et par conséquent :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |e|^2 = -\mu e^T \frac{\partial e}{\partial q} e < 0 \quad (\text{si } e \neq 0)$$

Il en résulte que - e - tend vers 0 et donc que notre objectif est asymptotiquement atteint.

Un autre raisonnement possible est le suivant. Puisque : $\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial q} \dot{q}$ et que $\frac{\partial e}{\partial q}$ est inversible la relation (6-37) s'écrit également :

$$\dot{q} = -\mu e \quad (6-38)$$

Multiplions à gauche les deux membres de cette égalité par $\frac{\partial e_1}{\partial q}$. En utilisant (6-36) nous obtenons :

$$\dot{e}_1 = \frac{\partial e_1}{\partial q} \dot{q} = -\mu e_1 \quad (6-39)$$

d'où la convergence exponentielle de $-e_1$ vers 0. La première partie de notre objectif (c'est-à-dire la tâche principale) est donc réalisée.

Multiplions maintenant (6-38) à gauche par $\frac{\partial h}{\partial q}$, nous obtenons :

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial q} \dot{q} = -\mu \frac{\partial h}{\partial q} \frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q} e_1 - \mu \alpha \frac{\partial h}{\partial q} \left(I - \frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q} \frac{\partial e_1}{\partial q} \right) \frac{\partial h^T}{\partial q} \quad (6-40)$$

Si $\frac{\partial h}{\partial q}$ et $\frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q}$ sont bornés et comme e_1 tend vers 0, nous en déduisons qu'asymptotiquement :

$$\dot{h} = -\alpha \mu \frac{\partial h}{\partial q} \left(I - \frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q} \frac{\partial e_1}{\partial q} \right) \frac{\partial h^T}{\partial q} \quad (6-41)$$

Or la matrice $(I - \alpha \mu \frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q} \frac{\partial e_1}{\partial q})$ est semi-définie positive puisqu'elle est symétrique et idempotante ($A = A^T A \Rightarrow A \geq 0$). La relation (6-41) entraîne donc qu'asymptotiquement $\dot{h} < 0$ tant que $(I - \frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q} \frac{\partial e_1}{\partial q}) \frac{\partial h^T}{\partial q} \neq 0$. Nous en déduisons aussi que $-h$ décroît jusqu'à ce que l'égalité $(I - \frac{\partial e_1^\dagger}{\partial q} \frac{\partial e_1}{\partial q}) \frac{\partial h^T}{\partial q} = 0$ soit réalisée, c'est-à-dire jusqu'à ce que notre objectif de minimisation sous contraintes soit atteint.

Le raisonnement précédent nous fournit une justification intuitive du choix de la fonction de tâche (6-36). Il ne permet cependant pas de remonter jusqu'à la commande parce qu'il laisse en suspend la réalisation de la relation cinématique (6-38) qui est à la base du raisonnement. De façon générale, toute approche cinématique de la commande possède ce type de lacune et n'a de véritable valeur que si elle est complétée par une analyse de la dynamique du robot. Cette analyse sera effectuée dans la deuxième partie de ce rapport.

1.6.3 Exemples de tâche redondante et de tâches secondaires

Soit un manipulateur possédant n degrés de liberté et $x(q)$ un paramétrage non redondant de dimension $m < n$ de la position et de l'orientation de l'effecteur du manipulateur. Imposons comme tâche principale à effectuer la poursuite d'une trajectoire de référence $x_r(t)$ déterminée à l'avance par l'utilisateur. Pour que la poursuite soit parfaite, il faut que le vecteur :

$$e_1(q, t) = x(q) - x_r(t) \quad (6-42)$$

soit nul à chaque instant. Du fait que la dimension du vecteur - e_1 - est inférieure au nombre de degrés de liberté du manipulateur, il est clair que si la tâche principale est possible elle est aussi redondante.

Pour obtenir une tâche admissible nous pouvons compléter la tâche principale par une tâche secondaire consistant à minimiser (ou maximiser une fonction scalaire $h(q,t)$ sous la contrainte $e_1(q,t) = 0$.

Donnons quelques exemples de tâches secondaires en spécifiant la fonction $h(q,t)$.

1.6.3.1 maximisation d'une "fonction de manoeuvrabilité"

Nous avons vu (lemme 2) qu'une condition pour que la fonction de tâche $e(q,t)$ donnée par la relation (6-13) soit admissible est que $\frac{\partial e_1}{\partial q}(q_r(t),t)$ soit toujours de rang maximum m . Cette condition s'exprime également dans le cas de la fonction (6-42) :

$$\det \left[\frac{\partial x}{\partial q}(q_r(t)) \frac{\partial x^T}{\partial q}(q_r(t)) \right] \neq 0$$

Dans [41] [42] Yoshikawa définit la "fonction de manoeuvrabilité" :

$$h(q) = \sqrt{\det \left[\frac{\partial x}{\partial q}(q) \frac{\partial x^T}{\partial q}(q) \right]} \quad (6-43)$$

qui n'est autre que le produit des valeurs singulières de $\frac{\partial x}{\partial q}(q)$, et propose d'utiliser la redondance de la tâche principale pour essayer de maximiser cette fonction. D'autres fonctions basées sur l'utilisation des valeurs singulières de $\frac{\partial x}{\partial q}(q)$ sont également envisagées [44].

L'idée semble attrayante lorsque le paramétrage $x(q)$ ne possède pas de singularité de représentation. Tous les exemples donnés par Yoshikawa font d'ailleurs uniquement intervenir la position du point origine de l'effecteur, mais pas de paramétrage de l'orientation de l'effecteur qui est la source de singularités de représentation.

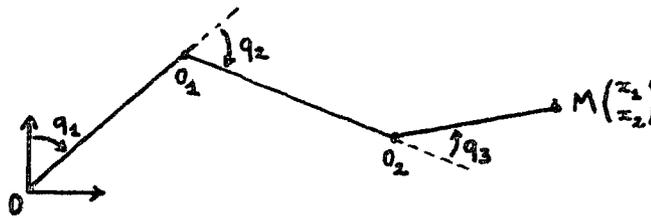
Dans le cas où $x(q)$ contient un paramétrage de l'orientation du type angles d'Euler, il ne faut pas essayer de maximiser la fonction (6-43) parce que celle-ci n'est pas bornée au voisinage des singularités de représentation. Une alternative consiste à remplacer (6-43) par :

$$h(q) = \sqrt{\det [J_{0,n}(q) J_{0,n}^T(q)]} \quad (6-44)$$

où $J_{0,n}(q)$ désigne la matrice jacobienne de base entrant dans le calcul de $\frac{\partial x}{\partial q}(q)$ (voir paragraphe 5.2). La maximisation de cette fonction doit permettre d'éviter les singularités géométriques du manipulateur mais n'empêche pas le passage des singularités de représentation.

De façon générale, l'intérêt de fonctions de manoeuvrabilité du type (6-43) ou (6-44) est qu'elles sont directement applicables à tout manipulateur. Leur inconvénient est qu'elles peuvent être complexes à calculer. Il semble possible dans de nombreux cas et à partir d'une étude spécifique des

singularités géométriques du manipulateur qui nous intéresse de trouver des fonctions plus simples. Prenons l'exemple d'un manipulateur plan représenté dans le schéma suivant :



Soit $x(q) = \begin{pmatrix} x_1(q) \\ x_2(q) \end{pmatrix}$, il est facile de vérifier que le rang de $\frac{\partial x}{\partial q}(q)$ devient inférieur à 2 si et seulement si $\sin q_2 = \sin q_3 = 0$. Ceci suggère de prendre comme fonction de manoeuvrabilité une fonction de la forme :

$$h(q) = \lambda_1(\sin q_2)^2 + \lambda_2(\sin q_3)^2 \quad (\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0) \quad (6-45)$$

plus simple que la fonction (6-43).

Nous pouvons également essayer de minimiser l'inverse de cette fonction. L'évitement des singularités de représentation peu a priori être traité de la même façon.

1.6.3.2 limitation des vitesses articulaires du manipulateur

Souvent, mais ce n'est pas toujours le cas [45], le passage par une singularité géométrique du manipulateur s'accompagne d'une vitesse de variation très grande de certaines coordonnées articulaires. Une façon de limiter la vitesse des coordonnées articulaires consiste à prendre un coût $h(q, t)$ à minimiser de la forme :

$$h(q, t) = \frac{1}{2}(q - y(t))^T W (q - y(t)) \quad (6-46)$$

où :

. W est une matrice définie positive

. $y(t)$ est un vecteur filtré du vecteur $q(t)$ vérifiant par exemple l'équation :

$$\dot{y}(t) + \alpha y(t) = \alpha q(t) \quad (\alpha > 0)$$

$$y(0) = q(0) \quad (6-47)$$

Une raison intuitive de ce choix est que le coût $h(q(t), t)$ est d'autant plus petit que la distance entre $q(t)$ et $y(t)$ est faible, et que du fait du filtrage cette distance est d'autant plus petite que les variations de $q(t)$ sont lentes.

Il est également possible d'imposer à $y(t)$ d'être de dérivée bornée en jouant sur le paramètre α .
En prenant par exemple :

$$\alpha(t) = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_2[\lambda_3 + |q(t) - y(t)|^2]^{1/2}}, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_1 > 0 \quad (6-48)$$

nous avons : $0 < \alpha(t) \leq \lambda_1 / (1 + \lambda_2 \lambda_3)$ et $|\dot{y}(t)| < \lambda_1 / \lambda_2$.

Notons que dans le cas de la fonction (6-46) le calcul de $\frac{\partial h}{\partial q}(q, t)$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q, t)$ est particulièrement simple puisque :

$$\frac{\partial h^T}{\partial q}(q, t) = W(q - y(t)) \Rightarrow \frac{\partial h^T}{\partial q}(q(t), t) = \frac{1}{\alpha} W \dot{y}(t)$$

et

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q, t) = W$$

Dans le même ordre d'idée il est possible d'imposer au vecteur filtré $y(t)$ d'être deux fois dérivable (dans le but de satisfaire les conditions théoriques d'admissibilité de la tâche) en prenant $y(t)$ comme solution de l'équation du deuxième ordre suivante :

$$\ddot{y}(t) + k(\dot{y}(t) + \alpha y(t)) = k\alpha q(t) \quad (6-49)$$

Comme dans le cas du filtre du premier ordre, les dérivées $\dot{y}(t)$ et $\ddot{y}(t)$ peuvent être maintenues bornées indépendamment de la valeur de $q(t)$ en jouant sur les paramètres α et k .

Nous reviendrons au chapitre 8 sur l'intérêt d'utiliser un coût de la forme (6-46) pour limiter les vitesses articulaires du robot.

1.6.3.3 évitement d'obstacles (connus)

De nombreuses méthodes sont envisageables. Nous reprendrons ici celles basées sur la minimisation de fonctions de type potentiel telles que celles introduites par Khatib [73] [32].

Yoshikawa propose dans [41] de minimiser le coût :

$$h(q) = \frac{1}{2}(q - q_1)^T W (q - q_1) \quad (6-50)$$

où :

. W est une matrice définie positive

. q_1 est une valeur particulière des coordonnées articulaires pour laquelle le manipulateur est « loin » de l'obstacle.

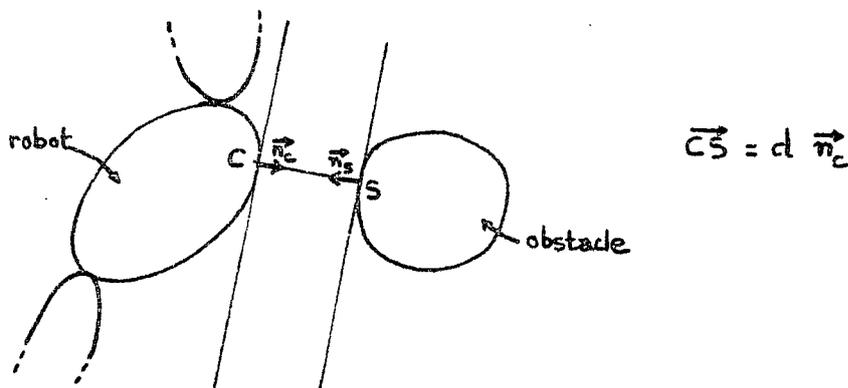
L'intérêt de la méthode réside essentiellement dans la simplicité de la fonction (6-50). Son inconvénient est qu'elle n'assure pas l'évitement de l'obstacle dans tous les cas où ce serait possible.

Une approche plus intéressante conceptuellement consiste à considérer un coût explicitement fonction de la distance entre le robot et les obstacles. Donnons quelques exemples de méthodes possibles.

1ère méthode :

Dans une première étape, on « recouvre » les éléments du robot ainsi que les obstacles par un ensemble de surfaces enveloppantes convexes élémentaires. En assimilant ces surfaces à celles du robot et des obstacles, la notion de distance entre robot et obstacles est définie sans ambiguïté : c'est la plus petite distance entre les surfaces associées au robot et celles associées aux obstacles. C'est également la distance entre deux points particuliers C et S appartenant respectivement au robot et à un des obstacles. Ces deux points se distinguent par les trois propriétés suivantes :

- i) $|\vec{CS}|$ est la plus petite distance entre deux points quelconques appartenant respectivement au robot et aux obstacles.
- ii) le plan tangent à la surface du robot au point C est parallèle au plan tangent à la surface de l'obstacle au point S . Autrement dit les vecteurs normaux à ces plans tangents ont même support.
- iii) le vecteur \vec{CS} a même support que ces vecteurs normaux.



Il existe des procédures géométriques simples et récursives pour déterminer à chaque instant les points C et S (voir Favergeon [33]). Du fait que ces procédures coûtent relativement cher en logiciel et en temps calcul elles n'ont jusqu'à présent été appliquées que pour traiter des problèmes hors-ligne d'évitement d'obstacles. Conceptuellement, cependant, rien ne s'oppose à leur application en temps réel pour le calcul d'une commande dynamique.

Les points C et S étant déterminés, il ^{est} intuitif de considérer un coût de la forme :

$$h(q,t) = d(q,t)^{-k}, \tag{6-51}$$

où : $d(q,t) = |\vec{CS}|$
 k est un nombre entier supérieur ou égal à 1

Ce choix est bien sûr dicté par le fait que le coût (6-51) tend vers l'infini lorsque d tend vers 0, c'est-à-dire lorsque le robot tend à rencontrer un obstacle.

Pour le calcul de la fonction de tâche, nous avons besoin de calculer la dérivée partielle $\frac{\partial h}{\partial q}(q,t)$.
 D'après (6-51) :

$$\frac{\partial h}{\partial q}(q,t) = -k d(q,t)^{-(k+1)} \frac{\partial d}{\partial q}(q,t) \quad (6-52)$$

La relation qui nous permet de calculer $\frac{\partial d}{\partial q}(q,t)$ est la suivante :

$$\dot{d}(q(t),t) = -\vec{n}_C \cdot \vec{V}_{C/\mathbb{R}_S} \quad (6-53)$$

où : \mathbb{R}_S est un repère lié à l'obstacle.
 \vec{n}_C est le vecteur unitaire normal à la surface du robot au point C .

démonstration :

Soit C' et S' les points glissant respectivement sur la surface du robot et sur celle de l'obstacle et qui coïncident à chaque instant avec les points C et S .

$$d(q,t) = \vec{C'S'} \cdot \vec{n}_C \quad (6-54)$$

D'après (6-54) :

$$\dot{d}(q(t),t) = (\vec{V}_{S'/\mathbb{R}_C} - \vec{V}_{C'/\mathbb{R}_S}) \cdot \vec{n}_C \quad (6-55)$$

Comme C' et S' se déplacent sur les surfaces du robot et de l'obstacle les vitesses de ces points vérifient les deux relations :

$$\vec{V}_{S'/\mathbb{R}_S} \cdot \vec{n}_C = 0 \quad (6-56-a)$$

$$\vec{V}_{C'/\mathbb{R}_i} \cdot \vec{n}_C = 0 \quad (6-56-b)$$

où \mathbb{R}_i est un repère lié à l'élément du robot auquel le point C appartient.

En reportant (6-56-a) dans (6-55) :

$$\dot{d} = -\vec{V}_{C'/\mathbb{R}_S} \cdot \vec{n}_C \quad (6-57)$$

D'autre part, du fait que le point C est fixe dans le repère \mathbb{R}_i , soit $\vec{V}_{C/\mathbb{R}_i} = 0$

$$\vec{V}_{C'/\mathbb{R}_i} = \vec{V}_{C'/\mathbb{R}_S} - \vec{V}_{C/\mathbb{R}_S} \quad (6-58)$$

et par conséquent d'après (6-56-b) :

$$\vec{V}_{C/R_S} \cdot \vec{n}_C = \vec{V}_{C/R_S} \cdot \vec{n}_C \quad (6-59)$$

Les relations (6-57) et (6-59) nous donnent la relation (6-53).

• ° •

De la relation (6-53) et de la relation aux vitesses suivante :

$$\vec{V}_{C/R_S} = \vec{V}_{C/R_0} - \vec{V}_{S/R_0} - \vec{\omega}_{R_S/R_0} \wedge \vec{SC} \quad (6-60)$$

nous déduisons :

$$\dot{d}(q(t), t) = -\vec{n}_C \cdot \vec{V}_{C/R_0} + \vec{n}_C \cdot \vec{V}_{S/R_0} \quad (6-61)$$

En identifiant cette relation avec :

$$\dot{d}(q(t), t) = \frac{\partial d}{\partial q}(q(t), t) \dot{q} + \frac{\partial d}{\partial t}(q(t), t)$$

nous obtenons :

$$\frac{\partial d}{\partial q}(q, t) = -d(q, t)^{-1} [x_S(t) - x_C(q)]^T J_{C,T}(q) \quad (6-62)$$

où :

- x_S est la matrice (3 x 1) des coordonnées du point S dans le repère fixe \mathbb{R}_0
- x_C est la matrice (3 x 1) des coordonnées du point C dans le repère \mathbb{R}_0
- $J_{C,T}(q)$ est la matrice (3 x n) des trois premières lignes de la matrice jacobienne de base du manipulateur évaluée au point C ($\dot{x}_C = J_{C,T} \dot{q}$).

En rapprochant les relations (6-52) et (6-62) nous obtenons finalement :

$$\frac{\partial h}{\partial q}(q, t) = k d(q, t)^{-(k+2)} (x_S(t) - x_C(q))^T J_{C,T}(q) \quad (6-63)$$

Afin d'éviter dans la pratique le calcul de $J_{C,T}$ en chaque point C , il peut s'avérer préférable d'utiliser la relation équivalente suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial q} = k d^{-(k+2)} [(x_S - x_C)^T | \Delta_{CO_i}^T] J_{O_i} \quad (6-64)$$

où :

- O_i est un point origine quelconque de l'élément i du robot auquel appartient le point C

. ΔCO_i est la matrice (3 x 1) des coordonnées du vecteur $(\vec{CS} \wedge \vec{CO}_i)$ dans le repère \mathbb{R}_0

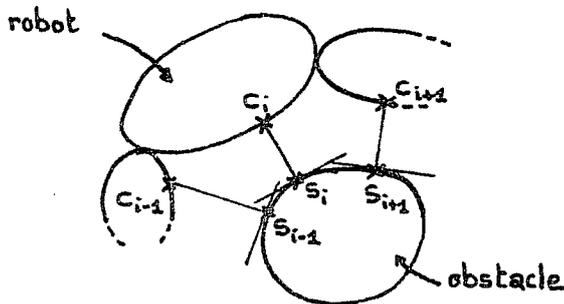
. J_{0_i} est la matrice (6 x n) jacobienne de base complète du manipulateur évaluée au point O_i .

La relation (6-64) s'obtient en remarquant qu la relation (6-53) s'écrit également :

$$\dot{d}(q(t), t) = -\vec{n}_C \cdot \vec{V}_{O_i / \mathbb{R}_0} - (\vec{n}_C \wedge \vec{CO}_i) \cdot \vec{\omega}_{\mathbb{R}_i / \mathbb{R}_0} + \vec{n}_C \cdot \vec{V}_{S / \mathbb{R}_0} \quad (6-65)$$

2ème méthode :

Une méthode plus simple consiste à fixer à l'avance un ensemble de points C_i répartis sur la surface du robot, puis à déterminer pour chacun de ces points le point S_i le plus proche situé sur la surface d'un obstacle. Ce point S_i est caractérisé par le fait que le vecteur $\vec{C}_i \vec{S}_i$ est normal à la surface de l'obstacle portant S_i .



On cherche ensuite à minimiser un coût de la forme :

$$h(q, t) = \sum_i |\vec{C}_i \vec{S}_i|^{-k} \quad (6-66)$$

ou encore :

$$h(q, t) = \sup_i \{ |\vec{C}_i \vec{S}_i|^{-k} \} \quad (6-67)$$

Si les points C_i sont suffisamment nombreux et bien répartis, on comprend que la minimisation d'un tel coût doit permettre d'éviter les obstacles.

Posons :

$$d_i(q, t) = |\vec{C}_i \vec{S}_i|$$

nous avons pour la fonction (6-66) :

$$\frac{\partial h}{\partial q}(q, t) = -k \sum_i d_i(q, t)^{-(k+1)} \frac{\partial d_i}{\partial q}(q, t) \quad (6-68)$$

et pour la fonction (6-67) :

$$\frac{\partial h}{\partial q}(q, t) = -k d_l(q, t)^{-(k+1)} \frac{\partial d_l}{\partial q}(q, t) \quad (6-69)$$

$$(d_l = \inf_i \{d_i\})$$

La relation qui permet de calculer $\frac{\partial d_i}{\partial q}(q, t)$ est la suivante :

$$\dot{d}_i = \vec{n}_{S_i} \cdot \vec{V}_{C_i / R_{S_i}} \quad (6-70)$$

où :
 . R_{S_i} est un repère lié à l'obstacle portant S_i
 \vec{n}_{S_i} est le vecteur unitaire normal à la surface de l'obstacle au point S_i .

démonstration :

Soit S'_i le point glissant sur l'obstacle qui coïncide à chaque instant avec le point S_i lié à l'obstacle.

$$d_i = \overrightarrow{S'_i C_i} \cdot \vec{n}_{S_i}$$

d'où :

$$\dot{d}_i = \vec{n}_{S_i} \cdot (\vec{V}_{C_i / R_S} - \vec{V}_{S'_i / R_i})$$

Comme S'_i se déplace sur la surface de l'obstacle :

$$\vec{V}_{S'_i / R_S} \cdot \vec{n}_{S_i} = 0$$

◻

Notons que cette relation est similaire à la relation (6-53) obtenue dans le cas de la méthode précédente. Il en résulte que la relation (6-62) se transpose également, d'où (avec des notations évidentes) :

$$\frac{\partial d_i}{\partial q} = -d_i^{-1} [x_{S_i} - x_{C_i}]^T J_{C_i, T} \quad (6-71)$$

Lorsque plusieurs points C_i appartiennent à la même articulation j du robot, il peut être préférable d'utiliser la relation équivalente :

$$\frac{\partial d_i}{\partial q} = -d_i^{-1} [(x_{S_i} - x_{C_i})^T \Delta_{C_i O_j}^T J_{O_j}] \quad (6-72)$$

- où :
- . O_j est un point origine quelconque de l'articulation j
 - . $\Delta_{C_i O_j}$ est la matrice (3 x 1) des coordonnées du vecteur $(\overrightarrow{C_i S_i} \wedge \overrightarrow{C_i O_j})$ dans le repère \mathbb{R}_{O_j} .
 - . J_{O_j} est la matrice (6 x n) jacobienne de base complète du manipulateur évaluée au point O_j .

3ème méthode :

On détermine à l'avance un ensemble de points C_i sur la structure du robot et un ensemble de points S_j sur la surface des obstacles , puis on essaye de minimiser un coût de la forme :

$$h(q,t) = \sum_i \sum_j |\overrightarrow{C_i S_j}|^{-k} \quad (6-73)$$

Cette méthode est conceptuellement la plus simple parce qu'elle ne fait intervenir aucun calcul de distance minimale. La contrepartie de cette simplicité est la nécessité dans certains cas d'utiliser un plus grand nombre de points C_i et S_j .

D'après (6-73)

$$\frac{\partial h}{\partial q}(q,t) = -k \sum_i \sum_j d_{ij}(q,t)^{-(k+1)} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q}(q,t) \quad (6-74)$$

avec :

$$d_{ij}(q,t) = |\overrightarrow{C_i S_j}|$$

Comme :

$$d_{ij} = \overrightarrow{C_i S_j} \cdot \vec{u}_{C_i S_j} \quad (6-75)$$

où

$$\vec{u}_{C_i S_j} = \frac{\overrightarrow{C_i S_j}}{|\overrightarrow{C_i S_j}|}$$

est un vecteur unitaire, nous avons :

$$\dot{d}_{ij} = -\vec{u}_{C_i S_j} \cdot \vec{V}_{C_i / R_{S_j}} \quad (6-76)$$

R_{S_j} étant un repère lié à l'obstacle portant le point S_j . De cette relation et de la relation aux vitesses suivantes :

$$\vec{V}_{C_i / R_{S_j}} = \vec{V}_{C_i / R_0} - \vec{V}_{S_j / R_0} - \vec{\omega}_{R_{S_j} / R_0} \wedge \overline{S_j C_i} \quad (6-77)$$

nous déduisons :

$$\dot{d}_{ij} = -\vec{u}_{C_i S_j} \cdot \vec{V}_{C_i / R_0} + \vec{u}_{C_i S_j} \cdot \vec{V}_{S_j / R_0} \quad (6-78)$$

d'où (avec des notations déjà utilisées précédemment)

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial q} = -d_{ij}^{-1} [x_{S_j} - x_{C_i}]^T J_{C_i, T} \quad (6-79)$$

et en utilisant (6-76) dans (6-74) :

$$\frac{\partial h}{\partial q} = -k \sum_i \sum_j d_{ij}^{-(k+2)} [x_{S_j} - x_{C_i}]^T J_{C_i, T} \quad (6-80)$$

Comme dans la méthode précédente, il est possible de regrouper les points C_i appartenant à une même articulation du manipulateur pour obtenir une relation faisant au plus intervenir - n - matrices jacobiniennes de base du manipulateur évaluées en des points origine des articulations.

1.6.4 Réglage du transitoire de la tâche secondaire

Dans le paragraphe 6.2 nous avons associé au problème de minimisation sous contrainte :

$$(\min h(q, t) ; e_1(q, t) = 0)$$

la fonction de tâche :

$$e = Q^T e_1 + \alpha \left[I - \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \left(P \frac{\partial e_1^T}{\partial q} \right)^{-1} P \right] \frac{\partial h^T}{\partial q} \quad (6-81)$$

Le but de la commande est de réguler autour de 0 l'erreur $e(t) = e(q(t), t)$.

Idéalement, il faudrait donc que $e(q(0), 0) = 0$ et par conséquent que le robot occupe initialement une position q_0 :

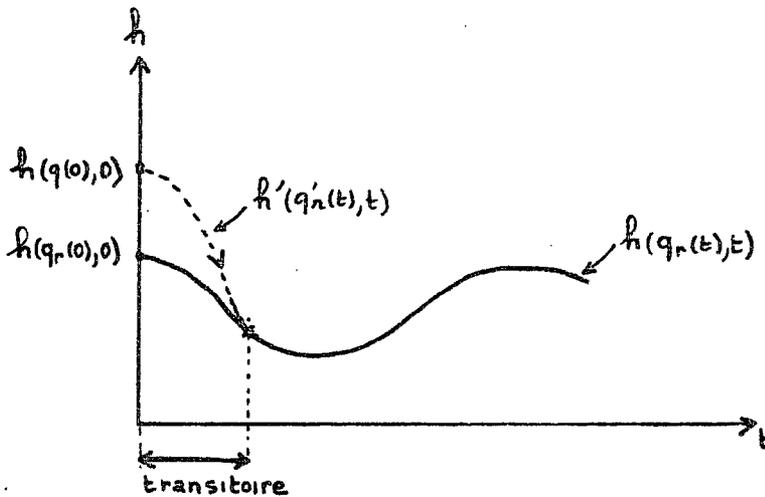
i) compatible avec la réalisation de l'objectif principal, c'est-à-dire telle que $e_1(q_0, 0) = 0$

ii) compatible avec la minimisation sous contrainte du coût secondaire, c'est-à-dire telle que

$$\left[I - \frac{\partial e_1^T}{\partial q}(q_0, 0) (P(q_0, 0) \frac{\partial e_1}{\partial q}(q_0, 0))^{-1} P(q_0, 0) \right] \frac{\partial h^T}{\partial q}(q_0, 0) = 0$$

Dans la pratique, il sera généralement possible de faire en sorte que la condition i) soit réalisée en choisissant correctement la fonction vectorielle $e_1(q, t)$. Par exemple dans le cas où $e_1(q, t) = x(q) - x_r(t)$, la trajectoire de référence $\{x_r(t)\}$ sera choisie de sorte que $x_r(0) = x(q_0)$.

Il y aura par contre peu de raisons pour que le robot soit initialement positionné de façon à minimiser le coût secondaire $h(q, t)$. Par exemple dans le cas de l'évitement d'obstacles, le robot pourra initialement se trouver à proximité d'un des obstacles. Il faudra alors prévoir une période transitoire pendant laquelle la valeur $h(q(t), t)$ du coût sera différente de sa valeur optimale $h(q_r(t), t)$.



Il sera souhaitable de faire en sorte que cette période transitoire ne soit ni trop rapide (de façon à ne pas engendrer des vitesses articulaires trop grandes), ni trop lente (de façon à réaliser l'objectif secondaire) et que sa durée soit indépendante de la structure de commande utilisée ainsi que des variations de charge transportée. Cela signifie que les caractéristiques de cette période transitoire doivent être prise en compte dès le départ au moment de la définition de la tâche.

La méthode que nous proposons (ce n'est pas la seule possible) consiste à remplacer le coût $h(q, t)$ par le coût :

$$h'(q, t) = h(q, t) + \frac{1}{2} \beta(t) |q - q_1|^2 \quad (6-82)$$

tel que :

$$i) \quad \frac{\partial h'}{\partial q}(q(0), 0) = 0 \quad (6-83)$$

$$ii) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q(0), 0) + \beta(0)I > 0 \quad (6-84)$$

iii) $\beta(t)$ est une fonction scalaire positive (de classe C^2) telle que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = 0 \quad (6-85)$$

Cette méthode revient également à remplacer la fonction de tâche (6-78) par la fonction suivante :

$$e' = Q^T e_1 + \alpha \left[I - \frac{\partial e^T}{\partial q} \left(P \frac{\partial e^T}{\partial q} \right)^{-1} P \right] \left[\frac{\partial h^T}{\partial q} + \beta(q - q_1) \right] \quad (6-86)$$

Les conditions i) et ii) entraînent que le coût $h'(q, t)$ est minimisé sans contrainte à l'instant $t = 0$ et que $e' = (q(0), 0) = 0$ (si $e_1(q(0), 0) = 0$). Il en résulte également que les paramètres de Lagrange associés au problème : $(\min h'(q, t); e_1(q, t))$ sont initialement égaux à zéro et que le lagrangien $\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(q(0), 0, \lambda^*(0))$ est positif puisqu'égal à $(\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q(0), 0) + \beta(0)I)$. Cette dernière propriété assure la satisfaction de la condition c) du lemme 2 (paragraphe 6.2) à l'instant $t = 0$ et va donc dans le sens de l'admissibilité de la tâche.

La condition ii) impose une valeur minimale pour $\beta(0)$.
 $\beta(0)$ étant choisi, la condition i) permet de déterminer la valeur de q_1 :

$$q_1 = q(0) + \frac{1}{\beta(0)} \frac{\partial h^T}{\partial q}(q(0), 0) \quad (6-87)$$

Le rôle de la condition iii) est d'assurer que la modification apportée à la tâche soit asymptotiquement sans effet sur la réalisation de la tâche. Le temps de convergence de $\beta(t)$ vers 0 fixe la durée de la période transitoire. Un choix possible pour la fonction $\beta(t)$ est par exemple :

$$\beta(t) = \beta(0) (ce^{-dt} - de^{-ct}) / (c - d) ; 0 \leq d < c \quad (6-88)$$

1.7 - PASSAGE FORCE PAR UNE SINGULARITE DE LA TACHE

Une tâche $(e(q,t), q_0)$ devient mal conditionnée lorsque la fonction $e(q,t)$ tend à devenir non-admissible. L'approche d'un instant t_1 où cette fonction devient non-admissible peut être détecté :

i) soit hors-ligne, avant l'exécution de la tâche, lorsque l'on dispose d'une expression explicite de la fonction $e(q,t)$ (calcul de la trajectoire idéale $\{q_r(t)\}$ et des instants où $\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t)$ devient singulière, $|\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t)|$ ou $|\frac{\partial e}{\partial t}(q_r(t), t)|$ diverge).

ii) soit en ligne, pendant l'exécution de la tâche, en testant à chaque instant la valeur du déterminant et la norme de $\frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t)$, $\{q(t)\}$ étant la trajectoire réelle et mesurée du manipulateur. La bornitude de $|\frac{\partial e}{\partial t}(q(t), t)|$ est en général acquise dans la pratique.

A l'approche d'un tel instant t_1 , nous avons le choix entre deux alternatives : soit arrêter l'exécution de la tâche parce que celle-ci ne peut plus être correctement contrôlée, soit modifier la tâche en remplaçant momentanément la fonction $e(q,t)$ par une fonction $e'(q,t)$ admissible à l'instant t_1 .

La seconde alternative revient à forcer le manipulateur à passer à proximité d'une singularité de la tâche initiale. Si grâce à la nouvelle fonction $e'(q,t)$ le manipulateur parvient à quitter le voisinage immédiat de la singularité, il sera éventuellement possible de répondre l'exécution de la tâche initiale.

L'analyse des phénomènes se produisant au moment de la commutation entre deux tâches est difficile et ne sera pas entreprise ici. Les difficultés à résoudre sont multiples et sont liées à divers facteurs interagissant entre eux tels que :

- * la nature de la singularité (singularité-jacobien, singularité frontière, ou singularité à l'infini)
- * le choix de la fonction de remplacement $e'(q,t)$

- * la détermination des instants de commutation entre les deux tâches
- * les problèmes de discontinuité entre les trajectoires idéales associées aux deux tâches
- * les propriétés de robustesse de la commande, etc...

Nous nous contenterons de donner quelques indications sur les conditions que doit respecter la fonction $e'(q,t)$. Il faut :

i) qu'il existe une trajectoire idéale $\{q'_r(t)\}$ pour la fonction $e'(q,t)$ telle qu'à l'instant t_2 de la commutation $q'_r(t_2)$ soit proche de $q_r(t_2)$. Idéalement, les trajectoires idéales $\{q_r(t)\}$ et $\{q'_r(t)\}$, ainsi que les dérivées première et seconde de ces trajectoires, coïncideront à l'instant t_2 .

ii) que la tâche $(e'(q,t), q'_r(t_2))$ soit "suffisamment" admissible après l'instant t_2 , c'est à dire qu'elle soit suffisamment robuste vis à vis du problème de commande.

exemple : prolongement par continuité de la trajectoire des coordonnées articulaires du robot

$$e'(q,t) = q - q'_r(t) \quad (7.1a)$$

avec

$$q'_r(t) = q(t_2) + (t-t_2) \dot{q}(t_2) \quad (7.1b)$$

où $\dot{q}(t_2)$ est une estimée de la vitesse articulaire du manipulateur à l'instant t_2 .

Une autre possibilité consiste à prendre :

$$q'_r(t) = q(t_2) + (t-t_2) \dot{q}(t_2) + \frac{1}{2} (t-t_2)^2 \ddot{q}(t_2) \quad (7.1c)$$

où $\ddot{q}(t_2)$ est une valeur estimée de l'accélération articulaire du manipulateur à l'instant t_2 .

Dans cet exemple, la trajectoire $\{q'_r(t)\}$ s'interprète comme une prédiction à l'instant t_2 de la trajectoire idéale $\{q_r(t)\}$ après l'instant t_2 . L'objectif de la tâche $(e'(q,t), q'_r(t_2))$ est de faire coïncider (pour $t > t_2$) la trajectoire du manipulateur avec cette prédiction.

L'intérêt de cette fonction $e'(q,t)$ est qu'elle est simple et infiniment admissible. Son point faible réside dans la confiance relativement limitée que l'on peut accorder à la prédiction $\{q'_r(t)\}$. Rien ne garantit en effet que $q'_r(t)$ rentre dans le domaine d'admissibilité de la tâche initiale $(e(q,t), q_0)$ lorsque celle-ci redevient admissible après l'instant t_1 . Si ce n'est pas le cas, l'exécution de la tâche initiale ne pourra pas être reprise après le passage de la singularité.

Pour conclure ce paragraphe, nous tenons à insister sur le fait que le passage forcé par une singularité de la tâche est une opération délicate. Dans la pratique les difficultés à surmonter sont inégales. Elles dépendent de la tâche à exécuter, des qualités de la commande utilisée, et éventuellement de facteurs extérieurs sur lesquels il n'est pas possible d'avoir de prise (par exemple la trajectoire d'une cible). En vertu du principe selon lequel il vaut mieux prévenir que guérir nous ne pouvons qu'encourager l'utilisateur à essayer de limiter, par un choix adéquat de la tâche à accomplir, la probabilité d'un passage par une singularité.

1.8 - MODIFICATION D'UNE TACHE POUR AUGMENTER SON ADMISSIBILITE

Est-il possible au moment du choix de la tâche de faire en sorte qu'elle soit toujours admissible ? En d'autres termes est-il possible de prévoir dès le départ les difficultés d'admissibilité que nous sommes susceptibles de rencontrer et dans tenir compte dans le choix de la fonction $e(q,t)$? Le problème revient à modifier la tâche initiale qui traduit notre véritable objectif, dans de faibles proportions et seulement lorsqu'elle tend à devenir non-admissible.

Nous limiterons notre propos au cas où la difficulté consiste à éviter le passage par une singularité-jacobien, ce type de singularité étant le plus rencontré dans la pratique. La méthode que nous proposons reprend une idée déjà évoquée dans l'introduction de cette partie I du rapport.

Supposons que l'objectif de départ soit de minimiser à tout instant un coût : $h(q,t)$. Ceci nous conduit naturellement à considérer la fonction de la tâche :

$$e(q,t) = \frac{\partial h}{\partial q}^T (q,t) \quad (8.1)$$

Soit $\{q_r(t)\}$ la trajectoire idéale associée à la tâche $(e(q,t), q_0)$ ($\Rightarrow e(q_r(t), t) = 0$). Cette tâche rencontre une singularité-jacobien si il existe un instant t_1 telle que la matrice hessienne :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q_r(t_1), t_1) = \frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t_1), t_1)$$

devient singulière, c'est à dire n'est plus strictement positive. A cet instant la fonction $h(q,t)$ n'est plus strictement convexe dans le voisinage du minimum $q_r(t_1)$.

Pour éviter l'existence de l'instant t_1 , une possibilité consiste à ajouter au coût $h(q,t)$ un coût $h'(q,t)$ admettant le point q_0 comme minimum à l'instant $t = 0$. Nous remplaçons de cette façon la tâche initiale $(e(q,t), q_0)$ par la tâche $(e'(q,t), q_0)$ telle que :

$$e'(q,t) = \frac{\partial h}{\partial q}^T (q,t) + \frac{\partial h'}{\partial q}^T (q,t) \quad (8.2)$$

Soit $\{q'_r(t)\}$ la trajectoire idéale associée à la nouvelle tâche ($\Rightarrow e'(q'_r(t), t) = 0$). Pour que cette tâche ne rencontre aucune singularité-jacobien, il suffit que la matrice :

$$\frac{\partial e'}{\partial q}(q'_r(t), t) = \frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q'_r(t), t) + \frac{\partial^2 h'}{\partial q^2}(q'_r(t), t) \quad (8.3)$$

soit à chaque instant définie positive.

Le problème se ramène donc à trouver un coût $h'(q, t)$ qui

- i) assure la positivité de $\frac{\partial e'}{\partial q}(q'_r(t), t)$ et
- ii) modifie peu la trajectoire idéale $(q'_r(t) \simeq q_r(t))$ lorsque la matrice hessienne $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q_r(t), t)$ est positive.

Notons au passage que si la tâche initiale est redondante, l'introduction d'un tel coût $h'(q, t)$ rend automatiquement la nouvelle tâche non-redondante.

Afin de satisfaire les deux contraintes précédentes, une possibilité (parmi d'autres) consiste à prendre un coût $h'(q, t)$ de la forme :

$$h'(q, t) = \frac{1}{2} \lambda(t) |q - y(t)|^2 ; \lambda(t) > 0 \quad (8.4)$$

$y(0) = q_0$

où $\lambda(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions qu'il reste à préciser.

choix de $\lambda(t)$

Avec le coût (8.4), les relations (8.2) et (8.3) deviennent respectivement :

$$e'(q, t) = \frac{\partial h}{\partial q}^T(q, t) + \lambda(t) (q - y(t)) \quad (8.5)$$

et

$$\frac{\partial e'}{\partial q}(q, t) = \frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q, t) + \lambda(t) I \quad (8.6)$$

Pour que $\frac{\partial e'}{\partial q}(q'_r(t), t)$ soit positive, il suffit que :

$$\lambda(t) + \sigma_m(q'_r(t), t) > 0 \quad (8.7)$$

où $\sigma_m(q'_r(t), t)$ désigne la plus petite valeur propre réelle de $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q'_r(t), t)$.

La relation (8.7) suggère d'essayer par exemple une fonction ressemblant à :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= 0 && \text{lorsque } (\sigma_m(q(t), t) - \sigma) > 0 \\ \lambda(t) &= \sigma - \sigma_m(q(t), t) && \text{lorsque } (\sigma_m(q(t), t) - \sigma) < 0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

où σ est un nombre positif choisi à l'avance.

Pour rendre la fonction $\lambda(t)$ deux fois dérivable, nous pouvons approcher (8.8) par :

$$\lambda(t) = \frac{z(t) + (z(t)^2 + \alpha)^{1/2}}{2} \quad (8.9a)$$

avec

$$z(t) = \sigma - \sigma_m(q(t), t) \quad (8.9b)$$

et α un petit nombre positif.

Un tel choix ne permet cependant pas de conclure immédiatement à l'admissibilité de la tâche (bornitude de $\lambda(t)$?).

Dans le cas où la fonction matricielle $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q, t)$ est uniformément bornée, il est clair qu'une valeur de λ constante telle que :

$$\lambda > \sup \left| \frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q, t) \right| \quad (8.10)$$

assure la positivité de $\frac{\partial e'}{\partial q}(q, t)$. Cette condition est bien sûr seulement suffisante et par conséquent une valeur plus faible de λ peut également donner de bons résultats dans la pratique.

choix de $y(t)$

Le rôle de $\lambda(t)$ est d'assurer la positivité de $\frac{\partial e'}{\partial q}(q',_r(t),t)$ et donc d'éviter l'existence de singularités de type jacobien. Le rôle de $y(t)$ est de faire en sorte que la trajectoire $\{q',_r(t)\}$ reste proche de la trajectoire $\{q_r(t)\}$ lorsque la tâche initiale est admissible. Il faut pour cela que $y(t)$ soit à la fois proche de $q_r(t)$ et de $q',_r(t)$. Il faut donc aussi que $y(t)$ soit proche de $q(t)$ puisque si la commande est idéale, $q(t)$ et $q',_r(t)$ sont confondus.

D'autre part, d'après (8.5) et si λ est une constante :

$$\frac{\partial e'}{\partial q}(q,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial h^T}{\partial q}(q,t) \right] - \lambda \dot{y}(t) \quad (8.11)$$

Cette relation montre que $y(t)$ doit en principe être choisie de dérivée bornée pour que $\left| \frac{\partial e'}{\partial t}(q,t) \right|$ soit borné (condition nécessaire à l'admissibilité de la tâche).

Ces considérations nous suggèrent de choisir pour $y(t)$ un vecteur filtré de $q(t)$ vérifiant par exemple l'équation :

$$\dot{y}(t) + \alpha(t)y(t) = \alpha(t)q(t) \quad ; \quad y(0) = q(0) \quad (8.12)$$

où $\alpha(t)$ est un gain variable positif choisi de façon à assurer la bornitude de $|\dot{y}(t)|$. Par exemple (voir paragraphe 6.3.2) :

$$\alpha(t) = \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2 [\lambda_3 + |q(t) - y(t)|^2]^{1/2}} \quad ; \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0 \quad (8.13)$$

Remarquons qu'un tel choix de $y(t)$ permet une adaptation de la tâche en ce sens que le coût $h'(q,t)$ varie en fonction de la position occupée par le manipulateur à chaque instant.

En dérivant par rapport au temps la relation (8.5) et en utilisant la relation (8.12), nous obtenons la relation suivante (dans le cas où λ est une constante) :

$$\dot{q} = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} + \lambda I \right)^{-1} \left[\dot{e}' + \alpha e' - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h^T}{\partial q} \right) - \alpha \frac{\partial h^T}{\partial q} \right] \quad (8.14)$$

Cette relation est intéressante à plus d'un titre. Tout d'abord elle montre que si :

- i) les fonctions matricielles $\frac{\partial h}{\partial q}$ et $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h}{\partial q} \right)$ sont bornées
- ii) la fonction matricielle $\left(\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} + \lambda I \right)$ est strictement positive (grâce à un choix adéquat de λ)
- iii) la commande assure la bornitude de l'erreur de régulation $e'(t) = e'(q(t), t)$ ainsi que de la vitesse $\dot{e}'(t)$ de cette erreur, alors la vitesse articulaire $\dot{q}(t)$ du manipulateur est bornée.

Ce résultat confirme l'intérêt d'introduire le coût $h(q, t)$ de la relation (8.4) pour limiter la vitesse des coordonnées articulaires du robot. La condition principale est que la commande remplisse correctement son rôle de régulation (condition iii). Nous verrons dans la partie II de ce rapport que de nombreuses commandes sont capables de remplir ce rôle dès lors que la tâche est admissible.

Supposons d'autre part que la commande soit idéale ($\Rightarrow e' = \dot{e}' = 0$) et qu'à partir d'un certain instant t_1 : $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h}{\partial q} \right) (q, t) = 0$ ($\forall q$). Alors d'après (8.14) :

$$\dot{q} = - \alpha \left(\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} + \lambda I \right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial q} \quad (8.15)$$

En multipliant cette relation à gauche par $\frac{\partial h}{\partial q}(q(t), t)$ nous obtenons :

$$\dot{h} = - \alpha \frac{\partial h}{\partial q} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} + \lambda I \right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial q} < 0 \quad (8.16)$$

Cette relation entraîne que $h(q(t), t)$ décroît vers un minimum de la fonction $h(q, t)$ et que $q(t)$ tend vers un point stationnaire de cette fonction. L'objectif de la tâche initiale est donc bien atteint dans ce cas.

Pour terminer ce paragraphe reprenons l'exemple de tâche que nous avons évoquée dans l'introduction de cette partie et qui nous avait servi à illustrer les problèmes de mauvais conditionnement d'une tâche.

Exemple

L'objectif de départ est de minimiser la distance entre l'effecteur d'un manipulateur et une cible ponctuelle de coordonnées cartésiennes $x_r(t)$ dans un repère fixe R_0 .

Il s'agit donc de minimiser :

$$h(q,t) = \frac{1}{2} |x(q) - x_r(t)|^2 \quad (8.17)$$

où $x(q)$ représente les coordonnées cartésiennes de l'extrémité de l'effecteur.

Une fonction de tâche pouvant être associée à ce problème de poursuite est :

$$e(q,t) = \frac{\partial h}{\partial q}(q,t) = \frac{\partial x}{\partial q}(q) (x(q) - x_r(t)) \quad (8.18)$$

Nous avons déjà vu que si $\dim x(q) < n$ alors la tâche est redondante lorsque $x_r(t) \in I_m x(q)$. Elle n'est donc pas admissible dans ce cas. Nous avons également vu que même si $\dim x(q) = n$ la tâche possède une singularité-jacobien à chaque instant où la cible sort de l'espace de travail du manipulateur.

Une façon d'améliorer le conditionnement de la tâche consiste à remplacer le coût initial $h(q,t)$ par le coût :

$$h'(q,t) = \frac{1}{2} |x(q) - x_r(t)|^2 + \frac{1}{2} \lambda |q-y(t)|^2 \quad (8.19)$$

où $y(t)$ est une valeur filtrée du vecteur $q(t)$ satisfaisant par exemple la relation (8.12).

Remarquons que si $|x_r(t)|$ et $|\dot{x}_r(t)|$ sont bornés et si le manipulateur possède uniquement des articulations en rotation alors $\frac{\partial h}{\partial q}(q,t)$ et $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial h}{\partial q})$ sont des fonctions bornées.

D'autre part :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q,t) = \frac{\partial x}{\partial q}(q) \frac{\partial x}{\partial q}(q) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^2}(q) (x_i(q) - x_{r,i}(t)) \quad (8.20)$$

où x_i et $x_{r,i}$ désignent respectivement les ième composantes des vecteurs x et x_r .

$\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q,t)$ est également une fonction bornée et il existe par conséquent une valeur minimale de λ pour laquelle la matrice $(\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q,t) + \lambda I)$ est strictement positive.

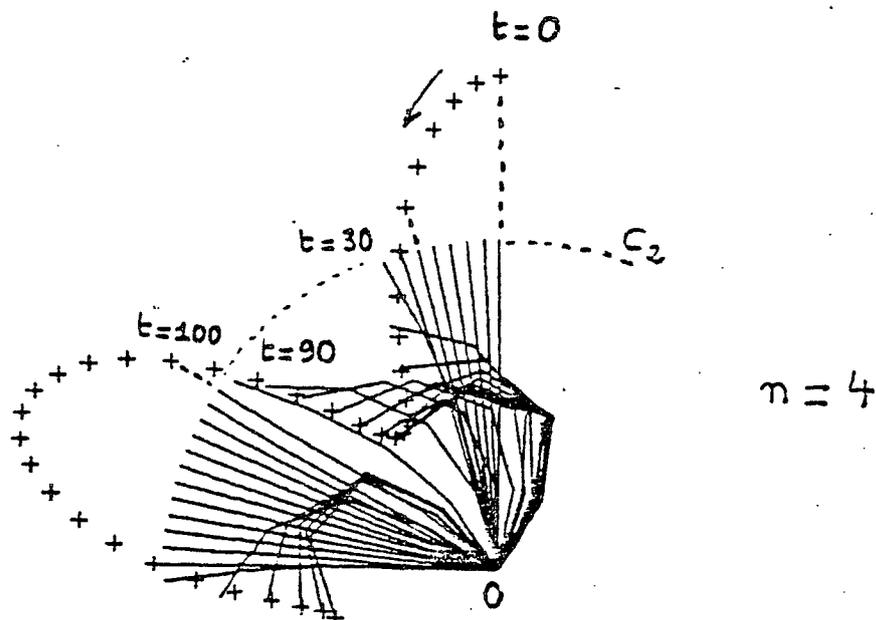
Il en résulte qu'il existe une valeur minimale de λ pour laquelle la tâche $(e'(q,t), q_0)$ avec :

$$e'(q,t) = \frac{\partial h'}{\partial q}(q,t) = \frac{\partial x^T}{\partial q}(q) (x(q) - x_r(t)) + \lambda(q - y(t)) \quad (8.21)$$

est unconditionnellement admissible, même si $\dim x(q) < n$ et si la cible sort de l'espace de travail du manipulateur.

D'après l'étude qui précède cette nouvelle fonction de tâche permet d'assurer une vitesse articulaire bornée même lorsque le manipulateur doit passer par une singularité géométrique. Dans ce cas l'extrémité de l'effecteur prend un léger retard par rapport à la cible, puis la rattrape après avoir passé la singularité géométrique. C'est au prix de ce retard que la tâche est robuste.

Enfin, si à un instant donné la cible s'immobilise ($\Rightarrow \dot{x}_r(t) = 0$) alors $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial h}{\partial q}(q,t)) = 0$ et l'étude qui précède montre que l'effecteur doit venir se positionner de façon à minimiser la distance $|x - x_r|$.



+ : positions occupées par la cible

Simulation de la tâche dans le cas d'un robot à quatre degrés de liberté

ANNEXE A

**EQUIVALENCE ENTRE P_1 et P'_1
(Chapitre 2 de la partie I)**

Cette équivalence est une conséquence immédiate du résultat suivant :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $C^k (k > 1)$. Soit B la boule unité ouverte de \mathbb{R}^n .

On considère les propriétés suivantes :

- a) $F^{-1}(\bar{B})$ est non vide et ses composantes connexes sont fermées dans \mathbb{R}^n .
- b) \bar{B} est constituée de valeurs régulières (i.e. si $F(x) \in \bar{B}$ alors $\det \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x) \right| \neq 0$)
- c) sur chaque composante connexe de $F^{-1}(\bar{B})$, $\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x)^{-1} \right|$ est bornée
- d) $F^{-1}(\bar{B})$ est une union dénombrable disjointe de compacts isolés difféomorphes à \bar{B} par F . (i.e. $F^{-1}(\bar{B}) \rightarrow \bar{B}$ est un revêtement de \bar{B} , nécessairement trivial).

Théorème : (d) \Leftrightarrow (a) et b) et c)

démonstration (de L. Baratchart)

Faisons l'hypothèse que F vérifie a), b) et c). Supposons tout d'abord $0 \in \text{Im } F$, et soit $\xi \in F^{-1}(0)$. Considérons l'ensemble \mathcal{C} des couples (U, B_r) $\llcorner 1$

où B_r est la boule ouverte de centre 0 et de rayon r dans \mathbb{R}^n , U un ouvert contenant ξ , difféomorphe à B_r par F . Par b) et le théorème d'inversion locale, $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Ordonné (partiellement) par inclusion, il est inductif. Par le lemme de Zorn, soit (U_0, B_{r_0}) un élément maximal. Par continuité,

$F(\bar{U}_0) \subset \bar{B}_{r_0}$ (l'adhérence de U_0 est prise dans Ω). Par ailleurs, U_0

est contenu dans une composante connexe de $F^{-1}(\bar{B})$, donc est borné par c) et le théorème des accroissements finis. \bar{U}_0 est donc borné, et il est

fermé dans \mathbb{R}^n par a). Ainsi \bar{U}_0 est compact, donc $F(\bar{U}_0) = \bar{B}_{r_0}$. Soit $f_r(\bar{U}_0)$ la frontière de U_0 (i.e. $\bar{U}_0 - U_0$). Soit $x \in f_r(\bar{U}_0)$. Montrons que $F(x) \in S_{r_0}$, la sphère de centre 0 et de rayon r_0 . Si ce n'est pas le cas, $F(x) \in B_{r_0}$ et il existe $x' \in U_0$ tel que $F(x) = F(x')$. Par b)

on peut trouver un voisinage V de $F(x)$, et deux voisinages disjoints V_1 et V_2 de x et x' respectivement, tels que $F : V_i \rightarrow V$ soit un difféomorphisme. Comme $V_1 \cap B_{r_0} \neq \emptyset$, ceci contredit l'injectivité de $F : U_0 \rightarrow B_{r_0}$.

Soit de nouveau $x \in f_r(\bar{U}_0)$ et V_x un voisinage ouvert de x difféomorphe par F à une boule ouverte V de centre $F(x)$. Soit $y \in V_x - \bar{U}_0$. Montrons que $F(y) \notin B_{r_0}$. En effet, dans le cas contraire, choisissons $y' \in V_x \cap U_0$;

$F(y)$ et $F(y')$ appartiennent tous deux à $V \cap B_{r_0}$ qui est convexe. Le segment

$[F(y), F(y')]$ à pour image réciproque par F dans V_x un chemin Γ joignant y à y' . Par le théorème du passage des douanes, Γ rencontre $f_r(\bar{U}_0)$, donc $F(\Gamma)$ rencontre S_{r_0} d'après la propriété précédemment établie, ce qui contredit le fait que $[F(y), F(y')] \subset B_{r_0}$.

On a donc montré que $F(V_x - \bar{U}_0)$ qui est ouvert, ne rencontre pas B_{r_0} . Par conséquent il ne rencontre pas non plus \bar{B}_{r_0} . Il vient alors :

$$V_x \cap F^{-1}(V - \bar{B}_{r_0}) = V_x - \bar{U}_0 \quad \text{et} \quad V_x \cap F^{-1}(V \cap B_{r_0}) = V_x \cap U_0 \quad (*)$$

Montrons à présent que F est injective sur $f_r(\bar{U}_0)$. Si x et x' sont deux points distincts de $f_r(\bar{U}_0)$ tels que $F(x) = F(x')$, choisissons V_x et $V_{x'}$, disjoints comme ci-dessus, difféomorphes par F à une même boule V de centre $F(x)$. Si $y \in V \cap B_{r_0}$, $F^{-1}(y) \cap V_x$ et $F^{-1}(y) \cap V_{x'}$ sont tous deux dans U_0 , contredisant l'injectivité de F sur U_0 . F est donc injective sur $F_r(\bar{U}_0)$, donc sur \bar{U}_0 .

En résumé $F: \bar{U}_0 \rightarrow \bar{B}_{r_0}$ est une bijection continue entre deux compacts, donc un homéomorphisme.

Supposons à présent $r_0 < 1$. Pour chaque x de $f_r(\bar{U}_0)$, choisissons un V_x comme précédemment, en prenant soin de prendre le V associé inclus dans B . En utilisant comme précédemment a), c) et les accroissements finis, \bar{V}_x est compact. Choisissons à présent $V'_x \subset V_x$ de telle sorte que $\bar{V}'_x \subset V_x$, l'image par F de V'_x étant une boule ouverte de centre $f(x)$ contenue dans V . Recouvrons \bar{U}_0 , qui est compact, par $W = V'_{x_1} \cup V'_{x_2} \cup \dots \cup V'_{x_p} \cup U_0$. \bar{W} est compact. Soit $y \in f_r(\bar{W})$. Alors $y \notin \bar{U}_0$ puisque $\bar{U}_0 \subset W$ qui est ouvert. Donc $y \in \bar{V}'_{x_i}$ pour un certain i . Alors $y \in V_{x_i} - \bar{U}_0$, donc $F(y) \notin \bar{B}_{r_0}$ d'après ce qui précède. Ainsi $F(f_r(\bar{W}))$ et \bar{B}_{r_0} sont des compacts disjoints, et il existe donc r , $r_0 < r < 1$ tel que $F(f_r(\bar{W}))$ et B_r soient disjoints. Comme $F(W)$ est un ouvert contenant \bar{B}_{r_0} , on peut, quitte à diminuer r , supposer $B_r \subset F(W)$.

Soit à présent $z \in B_r$; $F^{-1}(z) \cap \bar{W}$ est discret par b) et compact car fermé d'un compact. Il est donc fini et composé de y_1, y_2, \dots, y_m . Comme $F(f_r(\bar{W})) \cap B_r = \emptyset$, $y_i \in W$, $\forall_i \in \{1, \dots, m\}$. Pour chaque i , soit V_i un ouvert contenant y_i , difféomorphe par F à un voisinage ouvert W_i de z . On peut imposer, quitte à restreindre ces ouverts que $V_i \subset W$, $W_i \subset B_r$, et que les V_i sont disjoints. Posons $W' = W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_m - F(\bar{W} - V_1 - V_2 - \dots - V_m)$. Un instant de réflexion montre que W' est un ouvert contenant z et que $F^{-1}(W') \cap W$ est l'union des $V_i \cap F^{-1}(W')$, chacun de ces ouverts étant difféomorphe à W' par F . Il s'ensuit que $F: F^{-1}(B_r) \cap W \rightarrow B_r$ est un revêtement de B_r (cf. [D]), nécessairement trivial car B_r est contractile. $F^{-1}(B_r) \cap W$ est donc une union disjointe d'ouverts connexes homéomorphes à B_r par F , et l'un d'entre eux, U' , contient U_0 . (U', B_r) appartient à \mathcal{B} , contredisant la maximalité de (U_0, B_{r_0}) . Par suite $r_0 = 1$.

Nous venons de montrer que si $0 \in \text{Im } F$, chaque élément de $F^{-1}(0)$ est contenu dans un compact difféomorphe par F à \bar{B} . Ces compacts sont isolés car si on recouvre \bar{U}_0 par $V_{x_1}, \dots, V_{x_r}, U_0$, où les V_{x_i} sont comme dans les formules $(*)$, on voit que $F^{-1}(\bar{B}) \cap (V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_r} \cup U_0) = \bar{U}_0$. (ceci entraîne bien sûr, en passant, que l'union est dénombrable).

Si à présent $\eta \in \text{Im } F \cap B$, soit ϕ un difféomorphisme : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, laissant invariant le complémentaire de B et tel que $\phi(\eta) = 0$ (pour la construction d'un tel ϕ , voir par exemple [M]). $(\phi \circ F)$ vérifie a), b), c) et $0 \in \text{Im}(\phi \circ F)$. Donc tout élément de $(\phi \circ F)^{-1}(0) = F^{-1}(\eta)$ appartient à un compact isolé homéomorphe à \bar{B} par $(\phi \circ F)$, donc aussi par F . Supposons enfin $\eta \in \text{Im } F \cap \bar{B}$. Par b), $\text{Im } F \cap B \neq \emptyset$ donc $F^{-1}(\bar{B})$ est contenu dans une union disjointe de compacts difféomorphes à \bar{B} d'après ce qui précède. Par inversion locale, tout élément de $F^{-1}(\eta)$ est adhérent à un ouvert convexe contenu dans $F^{-1}(B)$, donc à l'intérieur d'un des compacts puisqu'ils sont isolés. Tout élément de $F^{-1}(\eta)$ appartient donc à un des compacts. Ceci achève la démonstration.

[D] Douady "Algèbre et théorie galoisiennes". Tome 2, Chap.4, Fernand Nathan.

[M] Milnor "Topology from the differentiable viewpoint". Univ. Press of Virginia, P.23.

PARTIE 2

Synthese et analyse

de la commande

2.1 - INTRODUCTION

Un manipulateur peut être vu comme un système formé de l'enchaînement de quatre sous-systèmes.

Le premier est constitué des organes moteurs du manipulateur, à savoir: moteurs électriques, vérins hydrauliques ou pneumatiques. Le rôle de ces organes est de générer les forces et couples permettant de déplacer les articulations du manipulateur. Typiquement l'entrée de ces organes, c'est-à-dire la variable de commande, est un courant ou une tension. La sortie est un couple (moteurs électriques) ou une pression (vérins hydrauliques et pneumatiques). Au mieux les équations reliant les entrées aux sorties sont linéaires sur une certaine plage de fonctionnement (moteurs électriques). Dans d'autres cas, elles sont non-linéaires et seulement connues de façon approximative (vérins hydrauliques et pneumatiques). La dynamique limitée des moteurs et leur saturation éventuelle sont des éléments dont il faut tenir compte dans la pratique.

Les forces et couples produits par les moteurs sont appliquées aux articulations du manipulateur par l'intermédiaire des organes de transmission: courroies, engrenages,... Ces forces et couples peuvent subir au niveau de la transmission des dégradations dues par exemple à l'élasticité des courroies ou aux phénomènes d'hystérésis provenant de jeux dans les engrenages. Ces altérations sont classiquement à l'origine de problèmes de vibrations et contribuent à réduire la précision des mouvements.

Le troisième sous-système est constitué des articulations du manipulateur. Les entrées de ce bloc sont les forces et couples transmis. Les sorties sont des variables de position ou de vitesse qui caractérisent l'état dans lequel se trouve le manipulateur à chaque instant. Il faut à ce niveau distinguer deux grandes classes de manipulateurs: i) les manipulateurs dits "rigides" (ou indéformables) caractérisés par des équations dynamiques

non-linéaires d'ordre $2n$ (n étant le nombre de degrés de liberté du manipulateur) et ii) les manipulateurs dits "souples" (ou déformables) dont les équations dynamiques sont a priori d'ordre infini. Le développement de ce dernier type de manipulateur provient de certaines applications requérant des bras légers et rapides ou des bras de grande taille (tel que celui de la navette spatiale américaine et sans doute celui de la future navette européenne). Il va sans dire que les manipulateurs souples posent des problèmes difficiles de commande encore mal dominés à l'heure actuelle, surtout lorsque les performances demandées sont élevées. Pour cette raison, la plupart des manipulateurs actuellement fabriqués et en service dans l'industrie sont du type rigide.

Enfin, en bout de chaîne, le dernier sous-système (facultatif) est constitué des organes sensoriels du manipulateur (capteurs de vision, de proximétrie, d'efforts,...) qui permettent au robot d'agir en relation avec son environnement. Privé d'organe sensoriels, un robot n'est qu'un automate sans "intelligence". L'information fournie par les capteurs se présente dans le cas le plus simple sous la forme d'un signal (sortie-capteur) qui est fonction de la position occupée par le robot (entrée-capteur) relative à son environnement. La fréquence des signaux, la linéarité de la fonction de transfert des capteurs, la sensibilité et la précision des capteurs sont autant d'éléments qui favorisent ou pénalisent la conception de la commande.

La présentation succincte que nous venons de donner des divers éléments constituant un manipulateur fait déjà ressortir un certain nombre de difficultés inhérentes à chaque partie du robot et auxquelles se heurtera l'élaboration de la commande. Il apparaît que nombre d'entre elles sont de nature mécanique ou technologique (non-linéarités, saturations, élasticités,...) et qu'elles peuvent par conséquent être surmontées en partie au niveau de la conception physique du manipulateur. Cette solution peut cependant n'être que partielle, soit parce que nous ne disposons pas actuellement de la technologie suffisante, soit parce que cette technologie coûte trop chère. Un des rôles de la commande est alors de pallier, dans la mesure du possible, les défauts et les faiblesses de conception du manipulateur. Il faut en d'autres termes que la commande soit adaptée et robuste.

Un moteur électrique ne vérifie pas les mêmes équations qu'un vérin hydraulique et une courroie de transmission n'a pas les mêmes propriétés qu'une transmission par engrenages. Il est par conséquent vain de vouloir définir une approche générale pour la commande de tous les manipulateurs. Nous limiterons pour cela notre étude au cas de robots équipés

de moteurs électriques à courant continu. Afin de bien distinguer les problèmes provenant de la nature structurelle des manipulateurs de ceux provenant des limitations de la technologie employée, nous supposerons également au cours de l'analyse que les manipulateurs que nous voulons commander sont parfaitement rigides, que les organes de transmission ne comportent ni jeux ni élasticités et que les actionneurs sont idéaux (c'est-à-dire capables de fournir une grande puissance de façon quasi instantanée). Nous supposerons également que les capteurs utilisés ont une réponse instantanée et qu'aucune butée mécanique ne limite les mouvements du manipulateur dans l'espace des coordonnées articulaires. Dans le cadre de ces hypothèses simplificatrices, nous verrons qu'il est possible de faire une analyse assez générale de la commande des manipulateurs sans qu'il soit nécessaire de linéariser les équations de la mécanique ou les courbes de réponse des capteurs embarqués. Les frottements secs ou visqueux et les bruits de mesure seront également pris en compte. A la suite de cette analyse, les principales conséquences issues de la transgression des hypothèses que nous avons faites seront commentées à la lumière des résultats obtenus.

Remarque - Il est bien connu en théorie de la commande que pour des raisons de robustesse vis à vis des erreurs de modélisation et des perturbations extérieures agissant sur le système à commander toute "bonne" commande doit être rebouclée sur les sorties du système, c'est-à-dire doit contenir un terme de retour (ou de feedback). La possibilité de former un tel retour repose elle-même sur la possibilité de faire un certain nombre de mesures sur le système. Avant d'aborder le problème de la commande des robots, il importe donc de décider dès le départ quelles sont les grandeurs accessibles à la mesure. Dans ce qui suit, nous supposerons que les mesures dont nous disposons pour calculer la commande portent sur la position articulaire $q(t)$, la vitesse articulaire $\dot{q}(t)$ et l'erreur de poursuite $e(t) = e(q(t), t)$ ($e(q, t)$ étant la fonction caractérisant la tâche à exécuter. Nous nous interdirons par contre d'utiliser une mesure de la vitesse $\dot{e}(t)$ parce que celle-ci est généralement à la fois plus difficile à obtenir et moins fiable que la mesure de vitesse articulaire $\dot{q}(t)$. Il en résulte que le terme $\dot{e}(t)$ ne pourra pas figurer dans l'expression de la commande, si ce n'est sous la forme :

$$\frac{\partial e}{\partial q} (q(t), t) \dot{q}(t) + \frac{\partial e}{\partial t} (q(t), t)$$

2.2 - LES EQUATIONS DU MANIPULATEUR

2.2.1 - Equation des moteurs électriques

Pour un moteur "couple" à courant continu, cette équation est :

$$C_i = K_i I_i \quad (2.1)$$

où : I_i est le courant au bornes du moteur entraînant la i ème articulation du manipulateur.

C_i est une variable de commande

C_i est le couple produit par le moteur.

2.2.2 - Equation des organes de transmission

Soit : J_i l'inertie propre au moteur augmentée de l'inertie des éléments de transmission ramenée au moteur

N_i le rapport global de réduction (engrenages pour une liaison rotoïde, engrenages et poulie pour une liaison prismatique)

q_{mi} la position angulaire du rotor du moteur par rapport au stator.

Les équations de la transmission sont :

$$\dot{q}_{mi} = N_i \dot{q}_i \quad (2.2)$$

et

$$C_i = J_i \ddot{q}_{mi} + \tau_i / N_i \quad (2.3)$$

où τ_i est le couple transmis à la i ème articulation du manipulateur.

2.2.3 - Equation de la dynamique du corps du manipulateur

Les formalismes de Newton-Euler ou de Lagrange peuvent être utilisés indifféremment pour obtenir cette équation maintenant bien connue [50] [53] et que l'on peut écrire de façon compacte :

$$\tau = M_0(q) \ddot{q} + l_0(q, \dot{q}, t) \quad (2.4)$$

où q est le vecteur des n coordonnées articulaires du manipulateur, n étant le nombre de degrés de liberté du manipulateur.

- \dot{q} et \ddot{q} sont respectivement les dérivées première et seconde de q .
- τ est le vecteur de dimension $(n \times 1)$ dont la i ème composante est τ_i .
- $M_0(q)$ est la matrice $(n \times n)$ d'énergie cinétique, ou encore matrice d'inertie, du manipulateur. Cette matrice est symétrique définie positive et ne peut tendre, pour des raisons physiques, vers une matrice singulière.

$$I_0(q, \dot{q}, t) = F(q, \dot{q})\dot{q} + I'_0(q, \dot{q}, t) \quad (2.5)$$

• $F(q, \dot{q})\dot{q}$ est le vecteur $(n \times 1)$ qui regroupe les opposées des forces de coriolis et des forces centrifuges auxquelles sont soumises les articulations du manipulateur en cours de mouvement. $I'_0(q, \dot{q}, t)$ est le vecteur $(n \times 1)$ qui regroupe les opposées des forces "parasites" agissant sur le manipulateur telles que forces de gravité non compensées mécaniquement et forces de frottement.

2.2.4 - Equation des capteurs (lorsque le manipulateur en est équipé)

Cette équation dépend bien entendu du type de capteur utilisé. Nous avons supposé dans la partie I de ce rapport que le signal $s(q)$ fourni par un capteur est disponible instantanément et est uniquement fonction de la position et de l'orientation relative du capteur par rapport à son environnement. Ceci nous a amené à caractériser la réponse du capteur par un couple de vecteurs $[\vec{u}, \vec{r}]$ satisfaisant la relation cinématique suivante.

$$\dot{s} = \vec{u} \cdot \vec{V}_{C/R_S} + \vec{r} \cdot \vec{\omega}_{R_C/R_S} \quad (2.6)$$

où \vec{V}_{C/R_S} est le vecteur vitesse du point C origine du capteur dans le repère R_S lié à l'objet "observé" par le capteur.

$\vec{\omega}_{R_C/R_S}$ est le vecteur vitesse de rotation instantanée du repère R_C lié au capteur par rapport au repère R_S .

2.2.5 - Modèle du manipulateur pour la commande dans l'espace des coordonnées articulaires

Ce modèle décrit l'évolution des variables articulaires du manipulateur en fonction des variables de commande I_i . Il s'obtient en regroupant les relations (2.1)-(2.4) et s'écrit de façon compacte :

$$\Gamma = M(q)\ddot{q} + I(q, \dot{q}, t) \quad (2.7)$$

avec

$$\Gamma^T = \frac{1}{N_0} [N_1 K_1 I_1, \dots, N_n K_n I_n] \quad (2.8)$$

N_0 : rapport de réduction moyen. C'est un paramètre libre que nous introduisons pour normaliser l'équation du modèle. Par exemple : $N_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i$.

$$l(q, \dot{q}, t) = l_0(q, \dot{q}, t) / N_0^2 \quad (2.9)$$

et

$$M(q) = M_0(q) / N_0^2 + \begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} (N_1^2/N_0^2)J_1 & 0 \\ 0 & (N_n^2/N_0^2)J_n \end{matrix}} \end{matrix} \quad (2.10)$$

Par analogie avec la relation (2.4) et afin de simplifier les conventions de langage, nous appellerons à partir de maintenant $M(q)$ la matrice d'inertie (normalisée) du manipulateur. Comme $M_0(q)$, c'est une matrice symétrique définie positive.

Le vecteur Γ est le vecteur de commande qu'il s'agit de déterminer pour réaliser la tâche assignée au robot. Les valeurs des courants I_i des moteurs se déduisent immédiatement de Γ par la relation (2.8).

Les relations (2.9) et (2.10) mettent clairement en évidence le fait bien connu selon lequel l'utilisation de grands rapports de réduction facilitent la commande du manipulateur à petite ou moyenne vitesse. En effet, d'après ces relations, la contribution du terme non linéaire $l(q, \dot{q}, t)$ ainsi que les variations relatives de la matrice d'inertie $M(q)$ et les termes non situés sur la diagonale sont d'autant plus faibles que N_0 est grand. Autrement dit les variations de charge vues des moteurs sont d'autant plus petits que les rapports de réduction sont grands.

Les contreparties de cet avantage sont également bien connues [60] : l'utilisation de réducteurs, et donc de systèmes d'engrenages ou de poulies i) favorise les problèmes d'élasticité, de frottement et de jeux mécaniques, et ii) empêche d'atteindre des vitesses élevées.

Ces raisons ont récemment motivé l'apparition et l'étude d'une nouvelle classe de manipulateurs électriques dits "à transmission directe" (direct-drive arms dans la terminologie anglo-saxonne) qui n'utilisent pas de systèmes de réduction ($\Rightarrow N_i=1$). La transmission directe est rendue possible par le développement d'une nouvelle technologie de moteurs électriques à courant continu de taille raisonnable (parce

qu'ils sont embarqués) et capables de délivrer des couples importants [61]. La grande non-linéarité des équations de ce type de manipulateur rend d'autant plus cruciales les études de commande non basées sur des hypothèses de linéarité du modèle.

2.2.6 - Modèle du manipulateur dans l'espace de la tâche

Ce modèle décrit l'évolution du vecteur de tâche $e(q,t)$ en fonction du vecteur de commande Γ .

Nous avons :

$$\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial q}(q,t) \dot{q} + \frac{\partial e}{\partial t}(q,t) \quad (2.11)$$

d'où, en dérivant une seconde fois par rapport à la variable temporelle :

$$\ddot{e} = \frac{\partial e}{\partial q}(q,t) \ddot{q} + f(q,\dot{q},t) \quad (2.12a)$$

$$f(q,\dot{q},t) = \begin{bmatrix} \dot{q}^T W_1(q,t) \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T W_n(q,t) \dot{q} \end{bmatrix} + 2 \frac{\partial^2 e}{\partial q \partial t}(q,t) \dot{q} + \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}(q,t) \quad (2.12b)$$

où la matrice $W_i(q,t)$ désigne la dérivée partielle de la i ème colonne de $\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$ par rapport à la variable q .

En regroupant les relations (2.7) et (2.12a) nous obtenons le modèle suivant :

$$\ddot{e} + \frac{\partial e}{\partial q}(q,t) M^{-1}(q) l(q,\dot{q},t) - f(q,\dot{q},t) = \frac{\partial e}{\partial q}(q,t) M^{-1}(q) \Gamma \quad (2.13)$$

C'est à partir de ce modèle que nous analyserons la commande, le rôle de celle-ci étant de maintenir l'erreur $e(t) = e(q(t),t)$ aussi proche de zéro que possible.

2.3 - UNE STRUCTURE DE COMMANDE GENERALE

2.3.1 - Structure élémentaire de la commande

A partir de maintenant, sauf spécification contraire, nous supposons que la tâche $(e(q,t), q_0)$ assignée au robot a été définie au cours d'une étude préalable et que cette tâche est ρ -admissible pendant la durée d'exécution prévue $[0, T]$ de la tâche.

Dans ces conditions, le problème de la commande en tant que problème de régulation du vecteur d'erreur $e(t) = e(q(t), t)$ est bien posé.

L'équation de la dynamique (2.4) montre qu'un robot possédant n articulations en translation ou en rotation est un système d'ordre $2n$, en général non-linéaire, dont un vecteur d'état est le vecteur $X = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$ constitué des coordonnées articulaires du robot et de ses vitesses articulaires. L'équation complète (2.7) du manipulateur s'écrit de façon équivalente :

$$\dot{X} = F(X, t, \Gamma) \quad (3.1a)$$

avec :

$$F(X, t, \Gamma) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q) \end{bmatrix} \Gamma - \begin{bmatrix} 0 \\ 1(X, t) \end{bmatrix} \quad (3.1b)$$

La forme la plus simple de cette équation est l'équation linéaire invariante du second ordre.

$$\ddot{q} = M^{-1} \Gamma \quad (3.2)$$

où q et Γ sont des grandeurs scalaires.

C'est par exemple l'équation d'un chariot de masse M se déplaçant sans frottement le long d'un axe horizontal et soumis à une force $\vec{\Gamma}$ de support parallèle à l'axe.

La théorie classique de la commande des systèmes linéaires [10] nous enseigne que pour commander un tel système en régulation autour d'une position de consigne q_c il faut appliquer une commande "par retour d'état" :

$$\Gamma = -G^T(X - X_c) = -g_1(q - q_c) - g_2\dot{q} \quad (3.3)$$

avec

$$G^T = [g_1, g_2], \quad g_1 > 0, \quad g_2 > 0; \quad X_c^T = [q_c, 0]$$

G est le vecteur des gains de la commande. Le choix de gains positifs est imposé par la condition de stabilité du système. Si un de ces gains est nul ou négatif, le système n'est pas absolument stable (la partie réelle d'une des valeurs propres de la matrice d'état du système rebouclé par la commande n'est pas strictement négative).

Une conséquence particulière de ce résultat est que si $g_1 = 0$, c'est-à-dire si le système est seulement "commandé en vitesse", la moindre force perturbatrice agissant sur le système fait dévier le système de la position désirée sans qu'aucun rattrapage soit possible.

Nous avons choisi cet exemple très simple pour illustrer le fait que toute commande de robot doit au moins comporter un terme de retour en position et un terme de retour en vitesse. Autrement dit toute commande robuste pour un robot est nécessairement une commande en position et en vitesse de type proportionnelle-dérivée (P.D.). Bien entendu, il suffit d'augmenter la taille du vecteur d'état pour voir qu'il est également possible d'inclure dans la commande un terme de retour proportionnel à l'intégrale de l'erreur en position. La commande est alors de type proportionnelle-intégrale-dérivée (P.I.D.).

Cette mise au point préalable sur la composition élémentaire de la commande est importante pour réaliser que toutes les commandes de robot ont nécessairement **une structure de base commune**. Elle permet aussi d'éviter des confusions pouvant résulter de certaines habitudes de langage impropres. Par exemple, il existe une classe de commandes que les roboticiens appellent couramment "commandes en vitesse". Cette dénomination provient sans doute historiquement du fait que les actionneurs électriques des robots ont d'abord été des moteurs électriques qui dans d'autres applications étaient classiquement asservis en vitesse. L'idée de base est de former une sorte de vitesse désirée $\dot{q}_d(t)$ sur laquelle on asservit la vitesse articulaire $q(t)$ du robot par l'intermédiaire d'une commande de la forme : $\Gamma = -g(\dot{q} - \dot{q}_d)$. Ecrite de cette façon, il semblerait que la commande utilise uniquement un retour en vitesse pure. Si tel était vraiment le cas, cette commande ne pourrait assurer la stabilité en position du robot. La clé de ce petit mystère est que dans les applications robotiques la vitesse désirée q_d est calculée en fonction de la position du robot. Par exemple : $\dot{q}_d(t) = \mu (q_c - q(t))$ ($\mu > 0$) dans le cas où il s'agit d'amener le robot à la position de consigne q_c . La commande en vitesse s'écrit donc en réalité : $\Gamma = -g[\mu (q - q_c) + \dot{q}]$ et coïncide bien avec la commande (3.3) en posant $g_1 = g\mu$ et $g_2 = g$. Nous aurons l'occasion de revenir plus loin sur les commandes dites en vitesse. D'autres commandes dites "en accélération" ou "en effort" n'échappent pas à la règle précédente et sont en réalité des commandes en position et en vitesse.

Il nous faut donc nous placer à un autre niveau pour trouver une distinction de fond entre les différentes commandes de robots. A notre avis cette distinction existe et est à mettre en parallèle avec celle faite dans l'introduction de la partie I entre les analyses cinématiques basées sur une méthode de gradient et celles basées sur une méthode de Newton.

2.3.2 - Commandes de type gradient

Supposons que l'objectif de la tâche soit de minimiser (resp. de maximiser) à tout instant un coût $h(q,t)$ positif. Pour y parvenir, ou tout du moins se rapprocher de cet objectif, une méthode décalquée sur la méthode de gradient classique consiste à essayer d'imposer au robot, par l'intermédiaire de la commande, l'équation d'évolution suivante :

$$\ddot{q} + gG \left[\dot{q} + \mu D \frac{\partial h^T}{\partial q} \right] = 0 \quad (3.4)$$

avec $g > 0$, $\mu > 0$, G et D : matrices diagonales positives.

Pour justifier rapidement ce choix supposons que le coût $h(q,t)$ varie lentement en fonction de la variable t , c'est-à-dire que : $\frac{\partial h}{\partial t}(q,t) \simeq 0$.

En multipliant alors la relation (3.4) à gauche par $\dot{q}^T(DG)^{-1}$ nous obtenons:

$$\frac{d}{dt} \left[1/2 \dot{q}^T (DG)^{-1} \dot{q} + g\mu h \right] = -g \dot{q}^T D^{-1} \dot{q} \quad (3.5)$$

Cette relation entraîne (théorème de Lyapunov) que la vitesse \dot{q} tend vers 0 et que le coût $h(q)$ tend vers une valeur constante.

Introduisons la variable supplémentaire :

$$\eta = \dot{q} + \mu D \frac{\partial h^T}{\partial q} \quad (3.6)$$

En utilisant (3.4) nous vérifions facilement que cette variable évolue selon l'équation:

$$\dot{\eta} = -gG\eta + \mu D \frac{\partial^2 h}{\partial q^2} \dot{q} \quad (3.7)$$

Supposons pour simplifier que $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q)$ soit une fonction matricielle bornée. Il résulte de la convergence de \dot{q} vers 0 que $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} \dot{q}$ tend également vers 0, et de la relation (3.7) que la variable η converge asymptotiquement exponentiellement vers 0. Cette convergence est elle même et autant plus rapide que le gain g est grand.

Autrement dit, si g est assez grand, la relation (3.4) entraîne que le système évolue asymptotiquement selon la relation cinématique :

$$\dot{q} + \mu D \frac{\partial h^T}{\partial q} = 0 \quad (3.8)$$

Pour l'automaticien cette relation résulte plus directement du fait que si g est assez grand ($\Rightarrow 1/g$ petit) alors la relation (3.4) s'interprète comme l'équation d'un système "singulièrement perturbé" [110] dont la partie lente vérifie l'équation (3.8).

La dénomination de "commande de type gradient" résulte de la relation (3.8) qui s'identifie à une méthode cinématique de gradient pour la minimisation du coût $h(q)$ (voir Introduction de la partie I). L'expression de cette commande s'obtient simplement en comparant les relations (2.7) et (3.4) :

$$\Gamma = -gM(q)G \left[\mu D \frac{\partial h^T}{\partial q} (q, t) + \dot{q} \right] + l(q, \dot{q}, t) \quad (3.9)$$

soit, en introduisant la fonction de tâche $e(q, t) = \frac{\partial h^T}{\partial q} (q, t)$:

$$\Gamma = -gM(q) G \left[\mu D e(q, t) + \dot{q} \right] + l(q, \dot{q}, t) \quad (3.10)$$

Cette relation montre que le calcul exact de la commande requiert une connaissance parfaite des termes $M(q)$ et $l(q, \dot{q}, t)$ ainsi que des mesures parfaites de q et \dot{q} . Dans la pratique ces conditions idéales ne sont jamais tout à fait remplies et la commande de type-gradient (3.10) sera au mieux approchée par une commande de la forme:

$$\Gamma = -g(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, t) \hat{M}(q) G \left[\mu D \hat{e}(q, t) + \hat{\dot{q}} \right] + \hat{l}(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, t) \quad (3.11)$$

où :

$\hat{q}(t), \hat{\dot{q}}(t)$ sont des mesures (ou des estimées) à l'instant t des positions et vitesses articulaires du robot

$\hat{e}(t) = \hat{e}(q(t), t)$ est une mesure (ou une estimée) de l'erreur de poursuite

$\hat{M}(q)$ est une fonction estimée de la fonction matrice d'inertie $M(q)$

$\hat{l}(q, \dot{q}, t)$ est une fonction estimée de la fonction $l(q, \dot{q}, t)$

$g(q, \dot{q}, t)$ est un gain scalaire que nous nous réservons la liberté de faire varier dans le temps en fonction de l'état du système. Nous montrerons plus loin dans l'analyse comment cette liberté supplémentaire peut-être exploitée.

Remarquons que l'erreur $e(q(t),t)$ étant homogène à une position, la commande (3.11) est bien une commande avec retour en position et en vitesse (le terme $-g\hat{M}G[\mu D\hat{e}+\hat{q}]$) auquel s'ajoute le terme $\hat{l}(\hat{q},\hat{q},t)$ dont le rôle est de compenser directement les effets du terme non-linéaire $l(q,\dot{q},t)$.

Par extension d'idée, lorsque la fonction de tâche $e(q,t)$ sera le gradient d'un coût $h(q,t)$ que l'on cherche à minimiser, nous qualifierons de commande de type-gradient toute commande calculée selon la relation (3.11). Une telle commande sera utilisée dans le but (parfois implicite) de minimiser $h(q,t)$ selon une méthode de gradient. Nous pouvons donc déjà penser que ce type de commande aura des qualités et des limitations semblables à celles généralement associées à la méthode de gradient, à savoir (voir Introduction de la partie I) :

- pour les qualités : i) simplicité de la méthode et par suite de la commande
 - ii) insensibilité de la direction de descente vis-à-vis de la non positivité de la matrice $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q,t) = \frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$ au point courant.
- pour les limitations : i) incapacité de maintenir $h(q,t)$ exactement en son minimum lorsque $\frac{\partial e}{\partial t}(q,t) \neq 0$, ce qui se traduit par un suivi imparfait de la trajectoire idéale
 - ii) sensibilité aux effets de "vallée" et par suite aux bruits de mesure.

2.3.3 - Commandes de type Newton

Une seconde façon de procéder, pour minimiser (ou maximiser) à chaque instant le coût $h(q,t)$ consiste à imposer au vecteur gradient $e(q,t) = \frac{\partial h}{\partial q}^T(q,t)$ de satisfaire l'équation linéaire invariante du second ordre :

$$\ddot{e} + gG[\mu D\dot{e} + \dot{e}] = 0 \quad (3.12)$$

avec :

$g > 0$, $\mu > 0$, D et G : matrices symétriques définies positives.

Il est immédiat de montrer que (3.12) est l'équation d'un système exponentiellement stable et qu'elle entraîne par conséquent la convergence exponentielle du vecteur e

vers le vecteur nul. Le fait d'imposer cette relation permet donc en théorie de maintenir minimale la valeur du coût $h(q,t)$ pendant la durée d'exécution de la tâche.

Lorsque le gain g est assez grand, la relation (3.12) s'interprète également comme l'équation d'un système singulièrement perturbé dont la partie lente vérifie l'équation :

$$\dot{e} + \mu D e = 0 \quad (3.13)$$

Cela signifie que la relation (3.12) entraîne que l'évolution asymptotique du système est approximativement donnée par la relation cinématique (3.13). La dénomination de commande de type Newton se justifie du fait que cette relation s'identifie (voir Introduction de la partie I) à une méthode de Newton pour minimiser le coût $h(q,t)$.

Notons que comme dans le cas des méthodes de type gradient, la théorie des perturbations singulières est l'outil privilégié qui permet de relier les études de commande cinématique aux études de commande dynamique.

En comparant les relations (2.13) et (3.12) nous obtenons l'expression de la commande de type Newton qui permet la réalisation de la relation (3.12) :

$$\Gamma = -g M(q) \frac{\partial e}{\partial q}^{-1}(q,t) G [\mu D e(q,t) + \frac{\partial e}{\partial q}(q,t) \dot{q} + \frac{\partial e}{\partial t}(q,t)] + \hat{1}(q, \dot{q}, t) - M(q) \frac{\partial e}{\partial q}^{-1}(q,t) f(q, \dot{q}, t) \quad (3.14)$$

C'est une commande idéale qui dans la pratique sera approchée par une commande de la forme :

$$\Gamma = -g(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, t) \hat{M}(\hat{q}) \frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{q}}^{-1}(\hat{q}, t) G [\mu D \hat{e}(\hat{q}, t) + \frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{q}}(\hat{q}, t) \hat{\dot{q}} + \frac{\partial \hat{e}}{\partial t}(\hat{q}, t)] + \hat{1}(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, t) - \hat{M}(\hat{q}) \frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{q}}^{-1}(\hat{q}, t) \hat{f}(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, t) \quad (3.15)$$

où les grandeurs surmontées d'un chapeau représentent selon le cas des mesures ou des fonctions estimées des grandeurs correspondantes.

Comme pour la commande de type gradient nous gardons la liberté de faire varier le gain de commande g .

La structure proportionnelle-dérivée de la commande se retrouve dans le terme de retour $-g\hat{M} \frac{\partial \hat{e}^{-1}}{\partial q} G [\mu D\hat{e} + \frac{\partial \hat{e}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \hat{e}}{\partial t}]$ qui est essentiel à la robustesse de la commande.

Par extension, lorsque la fonction de tâche $e(q,t)$ dérivera d'un coût $h(q,t)$ que l'on cherche à minimiser, nous qualifierons de commande de type Newton toute commande calculée selon la relation (3.15).

Par analogie avec la méthode de Newton, nous pouvons penser que ce type de commande possède qualités et limitations suivantes (à comparer avec celles des commandes de type gradient) :

- qualités : i) capacité à assurer un bon suivi de la trajectoire idéale. C'est une conséquence directe de l'utilisation des dérivées secondes de $h(q,t)$ dans le calcul de la commande .
- ii) élimination du phénomène de vallée au voisinage de la trajectoire idéale, d'où une meilleure insensibilité vis-à-vis des bruits de mesure.

-limitations : i) plus grande complexité de la commande .

- ii) commande seulement définie dans les régions où $\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$ reste inversible, c'est-à-dire où $\frac{\partial^2 h}{\partial q^2}(q,t)$ reste positive (resp. négative dans le cas d'un problème de maximisation). Cette condition est évidemment étroitement liée à la propriété d'admissibilité de la tâche.

C'est au niveau de cette seconde limitation que se situe, du point de vue de l'analyse, la différence fondamentale entre les commandes de type gradient et les commandes de type Newton. Alors que le domaine d'utilisation des secondes se confond avec le domaine d'admissibilité de la tâche, les premières sont encore calculables et donc utilisables dans un domaine plus grand. Rien ne permet cependant de prédire la qualité du comportement de ces commandes pendant l'intervalle de temps où le manipulateur quitte le domaine d'admissibilité de la tâche.

Comme nous l'avons expliqué dans l'Introduction de la partie I, le problème est moins un problème de commande qu'un problème de définition de la tâche à accomplir. Les commandes "pointues" de type Newton ne sont utilisables que lorsque la trajectoire idéale du robot est définie sans ambiguïté et est théoriquement réalisable. Les com-

mandes "moins précises" de type gradient sont plus souples et peuvent s'accommoder d'une certaine ambiguïté et même de certaines incohérences au niveau de la définition de la tâche. Nous avons donné l'exemple d'une fonction $h(q,t)$ dont le minimum se transforme au fil du temps en un maximum. Maintenir le robot au minimum de cette fonction n'a mathématiquement pas de sens puisque la trajectoire idéale cesse d'être définie à l'instant précis où le minimum se transforme en un maximum. A l'approche de cet instant les commandes de type Newton deviennent numériquement instables, alors qu'une commande de type gradient peut "absorber" la difficulté et permettre au robot de rejoindre (dans quelles conditions ?) un autre minimum de la fonction $h(q,t)$.

Nous pouvons déjà déduire de ce qui précède que les commandes de type gradient sont numériquement plus robustes que les commandes de type Newton lorsque la tâche du robot est improprement spécifiée. Une analyse plus poussée de ces commandes se fera sur une base de fonctionnement commune, c'est-à-dire en supposant que la tâche est admissible pendant sa durée d'exécution. Nous avons montré dans la partie A que cette condition est peu restrictive dans la mesure où il est généralement possible de modifier en ligne une tâche de façon à la rendre admissible au voisinage d'une position quelconque occupée par le robot. En transposant à la commande dynamique le raisonnement de commande cinématique fait en fin d'Introduction de la partie I, nous pourrions montrer que cette procédure de régularisation de la tâche conduit à remplacer les commandes de type Newton associées à la tâche initiale par des commandes de type mixte gradient-Newton numériquement plus robustes.

2.3.4 - Expression générale de la commande

Lorsque la fonction de tâche $e(q,t)$ ne dérive pas d'un coût scalaire $h(q,t)$, la notion de commande de type gradient ou de commande de type Newton n'a pas de sens. L'objectif de régulation de l'erreur $e(t) = e(q(t),t)$ autour du vecteur nul reste cependant applicable dans tous les cas. Les commandes de type gradient et les commandes de type Newton relèvent donc d'une structure de commande plus générale dont la forme est :

$$\Gamma = -g(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, t) \hat{M}(\hat{q}, t) J_q^{-1}(\hat{q}, t) G [\mu D e(q, t) + J_q(\hat{q}, t) \hat{\dot{q}} + j_t(\hat{q}, t)] + 1_c(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, t) \quad (3.16)$$

La composante de retour en position et vitesse se retrouve dans le terme $-g\hat{M}J_q^{-1}G[\mu D\hat{e} + J_q\hat{\dot{q}} + j_t]$ alors que le terme $l_c(\hat{q},\hat{\dot{q}},t)$ rassemble les autres composantes dont la commande peut être munie (compensation du terme $l(\hat{q},\hat{\dot{q}},t)$, retour intégral, etc...).

En posant :

$$J_q(q,t) = I \quad (\text{matrice identité})$$

$$j_t(q,t) = 0$$

$$l_c(q,\dot{q},t) = \hat{l}(q,\dot{q},t)$$

nous retrouvons les commandes de type gradient.

En posant :

$$J_q(q,t) = \frac{\partial \hat{e}}{\partial q}(q,t)$$

$$j_t(q,t) = \frac{\partial \hat{e}}{\partial t}(q,t)$$

$$l_c(q,\dot{q},t) = \hat{l}(q,\dot{q},t) - \hat{M}(q) J_q^{-1}(q,t) \hat{f}(q,\dot{q},t)$$

nous retrouvons les commandes de type Newton.

Cette forme générale de la commande sera celle reprise dans notre analyse globale de la commande des robots. Les résultats de cette analyse seront de cette façon applicables à toutes les commandes pouvant s'écrire sous cette forme.

Nous montrons dans le paragraphe suivant que la plupart des commandes utilisées dans la pratique ou proposées dans la littérature sont des cas particuliers de la commande générale (3.16).

2.4 - RAPPELS DES DIVERSES APPROCHES DE COMMANDE DYNAMIQUE

Pour simplifier l'exposé, nous supposons dans ce paragraphe que la position articulaire q , la vitesse articulaire \dot{q} et l'erreur de poursuite e sont exactement mesurées. Dans ces conditions $\hat{q} = q$, $\hat{\dot{q}} = \dot{q}$ et $\hat{e} = e$.

2.4.1 - Commandes par découplage linéaire des équations du système dans l'espace de la tâche

Cette technique de commande est à la base des autres techniques. Son principe, bien connu en théorie de la commande des systèmes non linéaires, consiste à transformer le problème de commande initial en un problème de commande d'un système linéaire. Cette première étape effectuée, la commande se calcule ensuite en appliquant une des techniques de la théorie classique de la commande des systèmes linéaires.

Dans le cas général, le problème de linéarisation par retour d'état d'un système non-linéaire est un problème difficile pour lequel il n'existe pas toujours de solution. Plusieurs études théoriques sont d'ailleurs consacrées à ce problème [78].

Par chance, il se trouve que le découplage linéaire des équations des robots rigides est une opération triviale que les roboticiens ont très tôt su reconnaître et exploiter (du moins sur le papier). Pour se convaincre de la simplicité de l'opération dans le cas le plus favorable, il suffit de considérer l'équation (2.7) du robot (que nous rappelons) :

$$\Gamma = M(q) \ddot{q} + l(q, \dot{q}, t) \quad (4.1)$$

et de voir qu'en posant

$$\Gamma = M(q) \Gamma' + l(q, \dot{q}, t) \quad (4.2a)$$

cette équation devient :

$$\ddot{q} = \Gamma' \quad (4.2b)$$

En interprétant Γ' comme un vecteur de commande auxiliaire à partir duquel Γ se déduit par la relation (4.2a) (à condition de connaître $M(q)$ et $l(q, \dot{q}, t)$) nous nous sommes bien ramenés à un problème de commande de n systèmes linéaires invariants découplés du second ordre (qui ne sont autres que des doubles intégrateurs).

En réalité, la relation (4.2b) est surtout intéressante parce qu'elle montre que le découplage linéaire du système dans l'espace de la tâche est également possible. En effet, d'après (2.12) et (4.2b) :

$$\ddot{\theta} = \Gamma'' \quad (4.3a)$$

avec

$$\Gamma'' = \frac{\partial e}{\partial q}(q, t) \Gamma' + f(q, \dot{q}, t) \quad (4.3b)$$

En éliminant Γ' entre les relations (4.2a) et (4.3b), la commande Γ s'exprime directement en fonction de la commande auxiliaire Γ'' :

$$\Gamma = M(q) \frac{\partial e}{\partial q}(q, t)^{-1} (\Gamma'' - f(q, \dot{q}, t)) + l(q, \dot{q}, t) \quad (4.4)$$

Remarquons que les relations (4.3a) et (4.4) s'obtiennent encore plus rapidement à partir de l'équation (2.13) du robot dans l'espace de la tâche.

L'application de la théorie classique de la commande au système linéaire découplée (4.3a) nous conduit, **quelque soit** la technique de commande employée (placement de pôles, minimisation d'un critère quadratique,...), à une commande auxiliaire Γ'' de la forme :

$$\Gamma'' = -g G(\mu D e + \dot{e}) \quad (4.5)$$

avec $g > 0$, $\mu > 0$, G et D : matrices diagonales positives.

Remarquons au passage que la minimisation d'un critère quadratique dans lequel figure l'énergie de la commande auxiliaire Γ'' a un intérêt très relatif du fait que seule l'énergie de la vraie commande Γ importe réellement.

En rapprochant les relations (4.3a) et (4.5), nous déduisons que la commande par découplage linéaire des équations du robot dans l'espace de la tâche revient à imposer au robot de satisfaire l'équation dynamique :

$$\ddot{e} + gG(\mu D e + \dot{e}) = 0 \quad (4.6)$$

D'après les relations (4.4) et (4.5) cette commande a pour expression :

$$\begin{aligned} \Gamma = & -gM(q) \frac{\partial e}{\partial q}(q, t)^{-1} G(\mu D e + \frac{\partial e}{\partial q}(q, t) \dot{q} + \frac{\partial e}{\partial t}(q, t)) \\ & -M(q) \frac{\partial e}{\partial q}(q, t)^{-1} f(q, \dot{q}, t) + l(q, \dot{q}, t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nous retrouvons ainsi que dans le cas où la fonction de tâche $e(q,t)$ dérive d'un coût scalaire $h(q,t)$, la commande par découplage linéaire n'est autre qu'une commande de type Newton.

En posant :

$$J_q(q,t) = \frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$$

$$j_t(q,t) = \frac{\partial e}{\partial t}(q,t)$$

$$l_c(q, \dot{q}, t) = l(q, \dot{q}, t) - M(q) J_q^{-1}(q,t) f(q, \dot{q}, t)$$

nous voyons également que la classe des commandes par découplage linéaire est un sous-ensemble de la classe de commandes plus large (3.16).

Dans la littérature, la commande par découplage linéaire a initialement été utilisée et principalement été étudiée dans le cas le plus simple où la tâche consiste à effectuer la poursuite d'une trajectoire prespécifiée dans l'espace des coordonnées articulaires du robot, c'est-à-dire dans le cas où : $e(q,t) = q - q_r(t)$. D'après (4.7) et (2.12b) cette commande a pour expression :

$$\Gamma = -gM(q) G(\mu D(q - q_r(t)) + (\dot{q} - \dot{q}_r(t))) + M(q) \ddot{q}_r(t) + l_c(q, \dot{q}, t) \quad (4.8)$$

Dans la littérature anglo-saxonne cette technique de commande a reçue les noms de "inverse problem" technique [9] [76] et de "computed torque" technique [71] [77]. En France, on la retrouve sous le nom évasif de "commande dynamique" [70] [72] [73]. Cette appellation, quelque peu abusive parce que toute commande de robot (même la plus simple) vise à régler la dynamique du robot, trouve sans doute son origine dans la volonté de certains auteurs de la démarquer des commandes dites "cinématiques" (à ne pas confondre avec les commandes en vitesse) qui qualifient essentiellement les différentes techniques de détermination de la vitesse articulaire idéale $\dot{q}_r(t)$.

Plus récemment, la commande par découplage linéaire a été appliquée au cas de la poursuite par l'effecteur d'un robot d'une trajectoire définie dans un repère cartésien fixe [73] [74] ($e(q,t) = x(q) - x_r(t)$). En fait, nous venons de voir que le principe de cette technique de commande est potentiellement applicable à toute sorte de tâche robotique.

D'après ce qui précède, les atouts majeurs des commandes par découplage linéaire sont :

- i) elles permettent en théorie une exécution parfaite de la tâche, c'est-à-dire un maintien parfait (ou presque parfait dans le cas de mesures légèrement bruitées) de l'erreur $|e(t)|$ à la valeur zéro. C'est une simple conséquence de la relation (4.6).
- ii) cette exécution parfaite de la tâche est possible (toujours en théorie) sans qu'il soit nécessaire d'utiliser un grand gain de commande g , G , μ et D étant supposés fixes). L'importance de ce point sera expliquée ultérieurement.

Ces atouts ont cependant leurs contreparties :

- i) l'implémentation des commandes par découplage linéaire est généralement complexe parce qu'il faut calculer à tout instant les valeurs des fonctions $M(q)$, $\frac{\partial e}{\partial q}(q, t)$, $\frac{\partial e}{\partial q}(q, t)^{-1}$, $f(q, \dot{q}, t)$ et $l(q, \dot{q}, t)$ dont les expressions sont souvent compliquées. Il faut donc déjà disposer d'un environnement informatique assez puissant qui permette le calcul de la commande à des cadences élevées.
- ii) la géométrie et la masse de la charge transportée par le manipulateur interviennent comme paramètres dans les fonctions $M(q)$ et $l(q, \dot{q}, t)$ qui caractérisent le manipulateur. L'influence de ces paramètres est intuitivement d'autant plus importante que le rapport (masse de la charge/masse du robot à vide) varie dans de grandes proportions. Souvent ces paramètres ne seront pas connus avec exactitude et il ne sera donc pas possible de connaître exactement les fonctions $M(q)$ et $l(q, \dot{q}, t)$. A cette méconnaissance, d'autres erreurs de modélisation viennent généralement s'ajouter (modèle géométrique inexact, calcul approximatif des moments d'inertie du robot à vide, difficultés de modéliser les forces de frottement sec intervenant dans $l(q, \dot{q}, t)$, etc...). D'autre part, il existe des tâches (nous en avons donné des exemples dans la partie I) pour lesquelles il n'est pas possible de connaître précisément les dérivées de la fonction de tâche $e(q, t)$. En d'autres termes la linéarisation parfaite du système n'est pas du domaine du

possible et toute commande par découplage linéaire est dans la pratique approchée par une commande de la forme :

$$\Gamma = -g(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, t) \hat{M}(\hat{q}, t) \frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{q}}(\hat{q}, t)^{-1} G(\mu D \hat{e} + \frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{q}}(\hat{q}, t) \hat{\dot{q}} + \frac{\partial \hat{e}}{\partial t}(\hat{q}, t)) - \hat{M}(\hat{q}, t) \frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{q}}(\hat{q}, t)^{-1} \hat{f}(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, t) + \hat{l}(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, t) \quad (4.9)$$

Il est dans ces conditions logique de se demander si l'effort consacré à la modélisation des fonctions M et l et à son utilisation dans la commande est payant dans tous les cas. La réponse à cette question est loin d'être évidente comme le montrera plus loin notre analyse. Pour l'instant nous pouvons seulement pressentir que plus notre estimation des grandeurs M, l, $\frac{\partial e}{\partial q}$, $\frac{\partial e}{\partial t}$ et f sera bonne, plus nous nous rapprocherons des conditions idéales de découplage linéaire, et moins il sera nécessaire d'utiliser un grand gain de commande g pour obtenir les performances désirées. Nous aurons l'occasion d'indiquer plus loin les éléments qui dans la pratique limitent la taille de ce gain.

2.4.2 - Commandes en vitesse

Il existe dans la littérature de nombreux travaux portant sur la commande en vitesse des robots. Plutôt que d'essayer d'en donner un compte rendu exhaustif (de toute façon irréalisable en quelques lignes), il nous paraît plus intéressant d'en donner le schéma directeur et d'en faire ressortir les éléments communs principaux.

A notre connaissance, l'ensemble de ces travaux repose exclusivement sur une étude cinématique du problème de commande, contrairement à notre approche qui dès le départ intègre de façon explicite l'aspect dynamique du problème. Le fait de "court-circuiter" cet aspect dynamique et de traiter le problème de commande comme un problème purement cinématique rend, on s'en doute aisément, l'élaboration de la commande conceptuellement plus simple. Par exemple, seules les caractéristiques géométriques (par opposition aux caractéristiques inertielles) du robot interviennent. Cette simplification constitue à nos yeux le principal intérêt de l'approche. Mais elle en fixe également les limitations parce que toute simplification se paye. L'évaluation de ce prix ne sera possible qu'en replaçant la commande en vitesse dans un contexte dynamique.

Au départ, la notion de commande en vitesse des robots provient sans doute de la technique classique d'asservissement en vitesse des moteurs électriques. L'idée de base est que si l'on considère chaque moteur séparément, il doit être possible d'imposer au ième moteur une "vitesse désirée" que nous noterons $\dot{q}_{d,i}$ en utilisant une commande de la forme :

$$\Gamma_i = -g \delta_i (\dot{q}_i - \dot{q}_{d,i}) \quad (g > 0, \delta_i > 0) \quad (4.10)$$

\dot{q}_i étant la vitesse réelle mesurée à la sortie des réducteurs.

La commande globale pour les n moteurs du robot s'écrit donc dans ce cas:

$$\Gamma = -g \Lambda (\dot{q} - \dot{q}_d) \quad (4.11a)$$

avec

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{bmatrix} \quad (4.11b)$$

Notons que la validité du raisonnement repose sur les hypothèses que les n moteurs n'interagissent pas entre eux (hypothèse de découplage) et que la charge de chaque moteur peut en première approximation être considérée constante. D'après l'équation (2.7) du robot ces hypothèses sont d'autant mieux justifiables que les rapports de réduction des moteurs sont grands. Elles sont par contre en général prises en défaut dans le cas où les transmissions sont directes.

La relation (4.11) étant posée (et son bien fondé implicitement accepté une fois pour toutes) le calcul de la commande se réduit effectivement à la seule détermination de la vitesse désirée \dot{q}_d .

A ce niveau nous envisagerons deux méthodes nous paraissant significatives des études faites sur le sujet.

1ère méthode (méthode du potentiel)

Supposons que l'objectif soit de minimiser (resp. maximiser) un coût scalaire $h(q,t)$.

Par analogie avec une méthode de gradient, la vitesse \dot{q} du robot devra coïncider avec la vitesse désirée :

$$\dot{q}_d = -\mu D \frac{\partial h}{\partial q} \quad (4.12)$$

(D matrice symétrique définie positive)

soit en posant : $e(q,t) = \frac{\partial h}{\partial q}^T(q,t)$:

$$\dot{q}_D = - \mu D e \quad (4.13)$$

En utilisant cette relation dans (4.11a) nous obtenons la commande :

$$\Gamma = - g \Lambda (\mu D e + \dot{q}) \quad (4.14)$$

En posant :

$$\hat{M} = \Lambda$$

$$G = I$$

$$J_q = I$$

$$j_t = 0$$

$$l_c = 0$$

Nous voyons déjà que cette commande en vitesse appartient bien à la classe de commandes (3.16).

En fait, si l'on compare (4.14) avec (3.11), il apparaît que la commande en vitesse (4.14) est une commande de type-gradient simplifiée. Elle en possède donc les défauts et au mieux les qualités.

Si à la place d'une méthode de gradient, nous préférons raisonner à partir d'une méthode de Newton, nous sommes conduits à vouloir imposer :

$$\dot{e} + \mu D e = 0$$

sachant que :

$$\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial e}{\partial t}$$

ce qui nous suggère de choisir comme vitesse désirée :

$$\dot{q}_D = - \frac{\partial e}{\partial q}^{-1} [\mu D e + \frac{\partial e}{\partial t}] \quad (4.15)$$

En utilisant cette relation dans (4.11a) nous obtenons la commande :

$$\Gamma = -g \Lambda \left[\frac{\partial e}{\partial q} \right]^{-1} \left(\mu D e + \frac{\partial e}{\partial t} + \dot{q} \right) \quad (4.16)$$

En posant :

$$\hat{M} = \Lambda$$

$$G = I$$

$$J_q = \frac{\partial e}{\partial q}$$

$$j_t = \frac{\partial e}{\partial t}$$

$$l_c = 0$$

Nous vérifions que cette commande appartient bien à la classe de commande (3.16).

Du fait de l'utilisation de $\left[\frac{\partial e}{\partial q} \right]^{-1}$ et $\frac{\partial e}{\partial t}$ cette commande apparaît aussi comme une version incomplète de la commande de type Newton (3.14).

En résumé, les commandes en vitesses (4.14) et (4.16) sont respectivement assimilables à des commandes de type gradient et de type Newton. Elles se distinguent par le fait que les termes \hat{l} et \hat{f} sont choisis nuls et que la matrice \hat{M} est choisie diagonale et constante. Vis-à-vis des commandes par découplage linéaire, ces choix spécifiques sont d'autant mieux justifiés que la vitesse du robot est faible et que le rapport de réduction des moteurs est grand (N_0 grand) puisqu'alors d'après (2.9) et (2.10) :

$$\lim_{N_0 \rightarrow +\infty} l(q, \dot{q}, t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{N_0 \rightarrow +\infty} M(q) = \begin{bmatrix} (N_1^2/N_0^2) J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (N_n^2/N_0^2) J_n \end{bmatrix}$$

Regardons ce que donnent ces commandes dans le cas de la poursuite d'une trajectoire dans l'espace des coordonnées articulaires, c'est-à-dire dans le cas où

$$h(q, t) = \frac{1}{2} |q - q_r(t)|^2 \quad \text{et} \quad e(q, t) = \frac{\partial h}{\partial q}^T (q, t) = q - q_r(t).$$

La commande (4.14) devient :

$$\Gamma = -g \Lambda (\mu D(q - q_r(t)) + \dot{q}) \quad (4.17)$$

et la commande (4.16) :

$$\Gamma = -g \Lambda (\mu D(q - q_r(t)) + (\dot{q} - \dot{q}_r(t))) \quad (4.18)$$

Ces expressions montrent que les commandes en vitesses (4.14) et (4.16) coïncident dans ce cas avec des commandes classiques Proportionnelle-Dérivée (P.D.) à coefficients constants.

2ème méthode (à partir d'une commande cinématique)

Une seconde façon d'aborder la commande en vitesse consiste à relier la vitesse désirée $\dot{q}_d(t)$ à la vitesse $\dot{q}_r(t)$ que doit idéalement avoir le robot pour effectuer la tâche parfaitement. La "commande cinématique" $\dot{q}_r(t)$ vérifie la relation suivante:

$$\dot{q}_r(t) = - \left[\frac{\partial e}{\partial q} (q_r(t), t) \right]^{-1} \frac{\partial e}{\partial t} (q_r(t), t) \quad (4.19)$$

que l'on obtient simplement en dérivant par rapport au temps la relation : $e(q_r(t), t) = 0$ qui caractérise la trajectoire idéale.

Dans certains cas $\dot{q}_r(t)$ peut être calculée sans passer par la détermination explicite de la fonction de tâche $e(q, t)$, en calculant directement $\frac{\partial e}{\partial t}$ et $\frac{\partial e}{\partial q}$ et en s'aidant éventuellement, lorsque la tâche est redondante, de l'utilisation de matrices pseudo-inverses [43].

Dans l'esprit de cette approche, $\dot{q}_r(t)$ apparaît comme la véritable vitesse désirée et la commande en vitesse devrait logiquement s'écrire :

$$\dot{q}_d = \dot{q}_r$$

$$\Gamma = -g \Lambda (\dot{q} - \dot{q}_r)$$

La distinction entre "commande en vitesse" et "commande cinématique" n'aurait alors pas lieu d'être.

En fait, cette commande est rarement utilisée tel quel dans la pratique.

Une première raison est que la trajectoire idéale $\{ q_r(t) \}$ est en principe inconnue à l'avance, sauf dans le cas précis où la tâche consiste à poursuivre une trajectoire prédéterminée dans l'espace des coordonnées articulaires. Il en résulte que $\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t)$ et parfois $\frac{\partial e}{\partial t}(q_r(t), t)$ ($\frac{\partial e}{\partial t}$ est souvent indépendant de la variable q) sont inconnus et ne peuvent donc pas être utilisés pour former la commande.

Une seconde raison, plus fondamentale, est qu'une telle commande n'assure pas la stabilité en position du système parce qu'elle ne contient pas de terme de retour en position. Nous avons déjà évoqué ce point au paragraphe 3.1. La stabilité du système interdit donc de prendre $\dot{q}_r(t)$ comme vitesse désirée.

Pour obtenir une commande en vitesse possédant un terme de retour en position, nous sommes amenés à relier (explicitement ou implicitement) la vitesse désirée \dot{q}_d à la vitesse idéale \dot{q}_r par une relation de la forme :

$$\dot{q}_d = \dot{q}_r + \mu D(q - q_r) \quad (\mu > 0; D : \text{s.d.p.}) \quad (4.20)$$

Cette relation assure la convergence exponentielle de \dot{q}_d vers \dot{q}_r lorsque, grâce à la commande, la vitesse réelle du robot coïncide avec la vitesse désirée \dot{q}_d .

La vitesse idéale $\dot{q}_r(t)$ est évaluée en faisant l'approximation suivante (valable lorsque $q(t)$ reste proche de $q_r(t)$) :

$$\dot{q}_r(t) \simeq \left[\frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t) \right]^{-1} \frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t) \quad (4.21)$$

Dans le même ordre d'idée, $q_r(t)$ s'obtient par le développement limité du 1er ordre:

$$0 = e(q_r(t), t) \simeq e(q(t), t) + \frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t) (q(t) - q_r(t)) \quad (4.22)$$

dont on tire :

$$q(t) - q_r(t) \simeq - \left[\frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t) \right]^{-1} e(t) \quad (4.23)$$

En utilisant (4.21) et (4.23) dans la relation (4.20), nous obtenons finalement :

$$\dot{q}_d = - \frac{\partial e}{\partial q}^{-1} \left[\mu D e + \frac{\partial e}{\partial t} \right] \quad (4.24)$$

Nous retrouvons ainsi la commande en vitesse (4.15) obtenue par la méthode du potentiel lorsque $e(q, t)$ dérive d'un coût scalaire $h(q, t)$.

2.4.3 - Commandes adaptatives

2.4.3.1 - Introduction

Comme dans le cas des commandes en vitesse, il n'est pas possible de couvrir en quelques pages l'ensemble des schémas de commande adaptative proposés dans la littérature pour les robots.

La tâche est d'autant plus difficile que la notion même d'adaptation trouve diverses interprétations selon les auteurs. Nous distinguerons à ce niveau deux grandes classes de commandes adaptatives.

La première repose sur l'adaptation des gains des termes de retour en position et en vitesse de la commande. La loi d'adaptation se déduit d'une analyse de stabilité du système rebouclé par la commande basée soit sur la seconde méthode de Lyapunov, soit sur la théorie de l'hyperstabilité de Popov (plus tard reprise et développée par plusieurs autres auteurs [3] [4]). Certains auteurs [80] [81][809] voient en cette approche une forme particulière de la commande adaptative avec modèle de référence (MRAC) qui a été étudiée par Landau [4]. Aucune tentative n'étant faite dans le sens de mieux connaître le système que l'on veut commander, nous préférons la considérer comme une approche de commande robuste visant à déterminer des gains de commande non-linéaires qui assurent la stabilité du système en dépit d'erreurs de modélisation initiales. Nous ne la traiterons donc pas ici comme une approche de commande adaptative. Cependant l'analyse sous-jacente de la commande est très proche dans son esprit de l'analyse de la classe de commandes (3.16) que nous donnerons plus loin. Bien que dans notre cas la démonstration des résultats de stabilité ne reposera pas explicitement sur l'application d'une méthode de Lyapunov où sur la théorie de l'hyperstabilité (les liens sont implicites), nous retrouverons la notion de gains de commande non linéaires qui caractérise ce type d'approche.

La seconde approche, qui à notre avis est la seule (au sens moderne de la théorie de la commande adaptative) à être vraiment adaptative repose sur l'idée d'apprentissage du système à commander par le biais de l'identification des paramètres d'un modèle du système. Nous nous limiterons ici à rappeler la structure générale des schémas obtenus selon cette approche et à en faire une synthèse exploitable pour l'analyse.

Pour les lecteurs familiarisés avec la commande adaptative, indiquons que nous ne considérerons que l'approche dite "indirecte" [86]. Les spécialistes savent que cette approche est celle qui conduit aux résultats de stabilité les plus généraux et qu'elle contient en puissance les résultats de l'approche directe.

Il semble qu'une motivation commune à l'ensemble des travaux effectués sur la commande adaptative des robots provienne de la constatation que tout modèle mathématique pré-calculé de la dynamique d'un robot, aussi élaboré soit-il, est invariablement imparfait (parce qu'il ne prend pas en compte les variations des charges transportées, qu'il néglige ou modélise grossièrement la contribution des forces de frottement, etc...). De cette constatation résulte l'idée de corriger (ou d'adapter) en ligne le modèle dynamique utilisé pour former la commande du robot en exploitant l'information contenue dans l'observation des grandeurs d'entrée (la commande) et des grandeurs de sortie (positions, vitesses, accélérations,...). Il s'agit donc de créer en quelque sorte un feedback sur le modèle du robot. C'est au niveau de l'exploitation de cette idée que les études divergent. Nous nous proposons de rassembler un certain nombre de schémas proposés dans la littérature au sein d'une méthodologie générale.

2.4.3.2 - Synthèse de la commande adaptative

Une manière de traduire l'incertitude sur le modèle du robot consiste à paramétrer ce modèle en fonction d'un vecteur de paramètres θ dont les valeurs sont a priori inconnues ou mal connues. Compte tenu de l'équation (2.7) du robot, qui est générale, ceci revient à se donner un modèle de la forme :

$$\hat{M}(\theta; q) \ddot{q} + \hat{l}(\theta; q, \dot{q}, t) = \Gamma \quad (4.25)$$

Les fonctions \hat{M} et \hat{l} sont surmontées du signe " $\hat{}$ " pour indiquer qu'elles ne doivent pas être confondues avec les "vraies" fonctions M et l représentatives de la dynamique réelle du robot. La relation (4.25) constitue seulement un modèle pour la commande, pas nécessairement complexe et pas nécessairement réaliste (cela dépend du choix de \hat{M} et \hat{l}). Ce modèle respecte cependant dans tous les cas la structure essentielle du robot, à savoir celle d'un double intégrateur a priori non-linéaire perturbé par des forces parasites (regroupées dans le terme \hat{l}).

La signification physique que l'on peut attribuer au vecteur de paramètres θ dépend du paramétrage adopté, c'est-à-dire de la façon dont la variable θ intervient dans les fonctions \hat{M} et \hat{l} .

En principe, le paramétrage doit être choisi de sorte que l'égalité :

$$\hat{M}(\theta(t); q(t)) \ddot{q}(t) + \hat{l}(\theta(t); q(t), \dot{q}(t), t) = M(q(t))\ddot{q}(t) + l(q(t), \dot{q}(t), t)$$

soit possible (quelque soit la trajectoire $\{ q(t) \}$ du robot) et compatible avec une

évolution lente (ou des variations brusques mais rares) du vecteur $\theta(t)$. Ces conditions correspondent en effet à des hypothèses classiques faites dans les théories de l'identification et de la commande adaptative.

Nous donnerons plus loin quelques exemples de paramétrage dont les plus simples ne satisfont manifestement pas ces conditions.

Si un vecteur de paramètres θ solution de l'équation (4.25) existait et était connu, nous serions ramenés à un problème de commande classique et un choix logique serait la commande par découplage linéaire (4.7) appliquée au modèle (4.25). Cette commande a pour expression :

$$\begin{aligned} \Gamma(\theta) = & -g \hat{M}(\theta; q) \frac{\partial e}{\partial q}(q, t)^{-1} G(\mu D e + \frac{\partial e}{\partial q}(q, t) \dot{q} + \frac{\partial e}{\partial t}(q, t)) \\ & - \hat{M}(\theta; q) \frac{\partial e}{\partial q}(q, t)^{-1} f(q, \dot{q}, t) + \hat{l}(\theta; q, \dot{q}, t) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Pour obtenir une version adaptative de cette commande il suffit de remplacer la variable inconnue θ par une estimée courante que nous notons $\hat{\theta}(t)$. Nous noterons $\Gamma(\hat{\theta}(t))$ la valeur correspondante de la commande à l'instant t . Remarquons que ce procédé revient à essayer de commander un "modèle adaptatif" du robot se déduisant du modèle (4.25) en remplaçant θ par son estimée $\hat{\theta}(t)$.

Pour compléter le schéma de commande adaptative, il ne nous reste plus qu'à spécifier l'algorithme d'estimation utilisé pour le calcul de $\hat{\theta}(t)$. En toute logique, l'estimation de θ doit reposer sur l'exploitation du modèle (4.25) et sur les mesures faites sur le système. Le problème revient à essayer de trouver l'élément dans la classe de modèles (4.25) qui "colle" le mieux, selon un critère à définir, à ces mesures. C'est un problème d'identification classique auquel il est possible d'associer de nombreuses méthodes de résolution, selon que l'on adopte un point de vue déterministe ou stochastique ou que l'on cherche une identification hors ligne (off-line) ou en temps réel (on-line). Une formulation classique, permettant de retrouver la plupart des solutions, consiste à poser le problème comme celui de l'estimation récursive d'un vecteur d'état $\theta(t)$ obéissant aux équations suivantes :

$$\dot{\theta}(t) = \eta(t) \quad (4.27a)$$

$$\Gamma(\hat{\theta}(t)) = \hat{M}(\theta(t); q(t)) \ddot{q}(t) + \hat{l}(\theta(t); q(t), \dot{q}(t), t) + v(t) \quad (4.27b)$$

où

$\eta(t)$ représente un bruit blanc centré modélisant l'évolution dans le temps de $\theta(t)$.
 $v(t)$ représente un second bruit blanc centré modélisant l'imperfection du modèle (4.25) et les effets des bruits de mesure.

L'équation (4.27a) est l'équation d'état du système. L'équation (4.27b) est l'équation de mesure du système. L'écriture $\Gamma(\hat{\theta}(t))$ indique que la commande utilisée est la commande adaptative formée à partir de l'estimée $\hat{\theta}(t)$.

Si le modèle (4.25) est linéaire en θ (ceci dépend du paramétrage choisi au départ) alors l'équation de mesure (4.27b) est linéaire en $\theta(t)$ et peut donc se mettre sous la forme :

$$y(t) = \phi(t)^T \theta(t) + v(t) \quad (4.28)$$

Nous sommes dans ce cas ramenés à un problème d'estimation de l'état d'un système linéaire dont la solution a la forme générale :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) &= P(t)\phi(t) [y(t) - \phi(t)^T \hat{\theta}(t)] \\ &= P(t)\phi(t) [F(\hat{\theta}(t)) - \hat{M}(\hat{\theta}(t); q(t))\ddot{q}(t) - \hat{I}(\hat{\theta}(t); q(t), \dot{q}(t), t)] \end{aligned} \quad (4.29)$$

où $P(t)$ est le "gain" de l'algorithme d'estimation. Les diverses méthodes d'identification récursive décrites dans la littérature se distinguent essentiellement au niveau du choix de ce gain qui dans tous les cas doit être pris égal à une matrice positive. Il est par exemple bien connu qu'en choisissant ce gain égal au "gain de Kalman" (associé au fameux filtre de Kalman) nous retombons sur une méthode d'identification du type "moindres carrés" [5]. En choisissant $P(t)$ égal au produit d'un gain scalaire par la matrice identité nous retombons sur des méthodes du type "approximation stochastique" [5].

Considérons maintenant le cas d'un paramétrage quelconque pour lequel le modèle (4.25), et par suite l'équation de mesure (4.27b), ne sont pas nécessairement linéaire en θ .

Une façon classique de traiter ce cas consiste à linéariser à l'instant t l'équation de mesure (4.27b) autour du vecteur estimé $\hat{\theta}(t)$. Il est intuitivement clair que cette procédure est d'autant mieux justifiée que le vecteur estimé $\hat{\theta}(t)$ est proche du "vrai" vecteur $\theta(t)$. Cette condition n'est cependant pas absolument nécessaire comme le montre des études sur l'identification telles que [5]. Le lecteur familiarisé avec l'utilisation du filtre de Kalman sait également que cette procédure de linéarisation conduit aux équations du "filtre de Kalman étendu" [5].

Plus précisément, linéariser (4.27b) autour de $\hat{\theta}(t)$ revient à remplacer cette relation par la suivante :

$$\begin{aligned} r(\hat{\theta}(t)) \simeq & \hat{M}(\hat{\theta}(t); q(t))\ddot{q}(t) + \hat{l}(\hat{\theta}(t); q(t), \dot{q}(t), t) \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} [\hat{M}(\theta; q(t))\ddot{q}(t) + \hat{l}(\theta; q(t), \dot{q}(t), t)] (\theta(t) - \hat{\theta}(t)) \end{aligned} \quad (4.30)$$

| $\theta = \hat{\theta}(t)$

Cette nouvelle équation de mesure coïncide bien sûr exactement avec (4.27b) lorsque le modèle (4.25) est linéaire en θ .

L'équation (4.30) étant linéaire en $\theta(t)$ peut maintenant s'écrire sous la forme de la relation (4.28) en posant :

$$\phi(t)^T = \frac{\partial}{\partial \theta} [\hat{M}(\theta; q(t))\ddot{q}(t) + \hat{l}(\theta; q(t), \dot{q}(t), t)] \quad (4.31a)$$

| $\theta = \hat{\theta}(t)$

et

$$\begin{aligned} y(t) = & r(\hat{\theta}(t)) - \hat{M}(\hat{\theta}(t); q(t))\ddot{q}(t) - \hat{l}(\hat{\theta}(t); q(t), \dot{q}(t), t) \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} [\hat{M}(\theta; q(t))\ddot{q}(t) + \hat{l}(\theta; q(t), \dot{q}(t), t)] \hat{\theta}(t) \end{aligned} \quad (4.31b)$$

| $\theta = \hat{\theta}(t)$

Nous nous sommes ainsi ramenés au cas du paramétrage linéaire et l'algorithme (4.29) permet d'obtenir une estimée $\hat{\theta}(t)$.

Remarquons que la synthèse de cet algorithme ne fait nulle part intervenir l'expression explicite de la commande. Il est donc utilisable quelque soit notre choix de la commande (adaptative ou non). Cependant dans le cas particulier de la commande

adaptative par découplage linéaire obtenue en remplaçant θ par $\hat{\theta}(t)$ dans la relation (4.26) il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned} & \Gamma(\hat{\theta}(t)) - \hat{M}(\hat{\theta}(t); q(t)) \ddot{q}(t) - \hat{I}(\hat{\theta}(t); q(t), \dot{q}(t), t) \\ = & - \hat{M}(\hat{\theta}(t); q(t)) \left[\frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t) \right]^{-1} \left[gG(\mu D e(t) + \dot{e}(t)) + \ddot{e}(t) \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Il en résulte que si $\dot{e}(t)$ et $\ddot{e}(t)$ sont mesurés au même titre que $e(t)$, alors l'algorithme d'identification (4.29) peut être utilisé sous la forme suivante :

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -P(t) \phi(t) \hat{M}(\hat{\theta}(t); q(t)) \left[\frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t) \right]^{-1} \left[gG(\mu D e(t) + \dot{e}(t)) + \ddot{e}(t) \right] \quad (4.33)$$

Sous cette forme, il apparaît plus clairement que l'estimée $\hat{\theta}(t)$ cesse d'évoluer dès lors que la commande assure effectivement le découplage du système dans l'espace de la tâche, c'est à dire lorsque : $gG(\mu D e + \dot{e}) + \ddot{e} = 0$.

Remarques :

i) il n'est pas difficile d'adapter le formalisme précédent au cas où nous voulons obtenir une version discrétisée de l'algorithme d'identification. Il suffit pour cela de remplacer l'équation d'état continue (4.27a) par l'équation aux différences :

$\theta(t) = \theta(t-\Delta) + \eta(t)$ où Δ est le pas de discrétisation. Cette modification nous conduit à des algorithmes similaires à (4.29) où $\hat{\theta}(t)$ est remplacé par $\hat{\theta}(t+\Delta) - \hat{\theta}(t)$. Le gain $P(t)$ doit bien sûr être modifié en conséquence.

ii) A part quelques exceptions [31], la commande adaptative de robots a surtout été jusqu'à présent étudiée dans le cas de la poursuite d'une trajectoire dans l'espace des coordonnées articulaires, c'est à dire dans le cas où $e(q,t) = q - q_r(t)$. La méthode de synthèse de schémas adaptatifs que nous venons de décrire s'applique à des tâches quelconques.

2.4.3.3 - Exemples de paramétrage

Pal : La classe de paramétrages la plus simple et aussi la plus brutale du modèle (4.25) s'obtient en posant :

$$\begin{aligned} \hat{M}(\theta; q) &= \hat{M}(\theta_1) \\ \hat{I}(\theta; q, \dot{q}, t) &= \hat{I}(\theta_2) \end{aligned} \quad ; \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Ceci revient à faire l'hypothèse que la matrice d'inertie du robot et le vecteur l qui regroupe l'ensemble des forces parasites agissant sur le robot (forces de Coriolis, centrifuges, gravitationnelles et forces de frottement) sont quasiment invariants et dépendent seulement d'un vecteur de paramètres θ^* que l'on cherche à identifier.

θ_1 sera par exemple formé des $n(n+1)/2$ (et non n^2 parce que M est symétrique) composantes a priori distinctes de la matrice \hat{M} , et θ_2 des n composantes du vecteur $-\hat{l}$. ($\hat{l}(\theta_2) = \theta_2$). Dans ce cas nous sommes amenés à estimer $[n(n+1)/2+n]$ paramètres.

La matrice $\hat{M}(\theta)$ peut également être choisie diagonale (hypothèse de découplage des différents degrés de liberté du robot) et dans ce cas θ_1 ne contient que n composantes.

Une simplification supplémentaire est obtenue en choisissant \hat{M} égal à une matrice constante définie positive calculée à l'avance. Dans ce cas le vecteur de paramètres θ se réduit au vecteur θ_2 et ne contient plus que n composantes. Ce choix se justifie lorsque le rapport de réduction des moteurs est grand ($\Rightarrow M \simeq$ matrice constante) et lorsque les forces parasites (par exemple les forces de frottement) ont une contribution non négligeable que l'on essaye d'estimer. Ce choix a en fait l'autre avantage d'assurer systématiquement la positivité de la matrice \hat{M} . Nous verrons au cours de l'analyse de stabilité de la commande adaptative, et de façon plus significative au cours de l'analyse générale de l'ensemble des commandes (3.16), que cette condition de positivité est essentielle à la robustesse de la commande.

Il est également possible d'imposer $\hat{l}(\theta) = 0$ ($\Rightarrow \theta = \theta_1$), ce qui revient à négliger l'effet des forces parasites et à assimiler le robot à un système linéaire invariant du second ordre [82].

Pa2 : A grande vitesse, lorsque la contribution des forces de gravité et des forces de frottement est négligeable devant celle des forces de Coriolis et des forces centrifuges, nous avons en première approximation :

$$l(q, \dot{q}, t) \simeq \begin{bmatrix} \dot{q}^T V_1(q) \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T V_n(q) \dot{q} \end{bmatrix}$$

les matrices $V_i(q)$ étant symétriques et fonction de la position articulaire q .

Un paramétrage possible, proposé dans [§ 3], consiste alors à poser :

$$\begin{aligned} \hat{M}(\theta; q) &= \hat{M}(\theta_1) \\ \hat{I}(\theta; q; \dot{q}, t) &= \begin{bmatrix} \dot{q}^T & B_1(\theta_2) & \dot{q} \\ & \vdots & \\ \dot{q}^T & B_n(\theta_2) & \dot{q} \end{bmatrix} ; \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

la structure des matrices B_i étant copiée sur celle des matrices V_i .

Choisir ce type de paramétrage revient à isoler les termes qui ne dépendent que de la position q (et non de \dot{q}) et à les considérer comme des paramètres inconnus qu'il s'agit d'estimer. Cela revient aussi à linéariser les équations du robot dans le cas de mouvements de faible amplitude.

Il est également possible de modéliser l'effet des forces de gravité (qui ne dépendent que de la position) par un vecteur de paramètres θ_3 . Nous obtenons alors le paramétrage suivant :

$$\begin{aligned} \hat{M}(\theta; q) &= \hat{M}(\theta_1) \\ \hat{I}(\theta; q; \dot{q}, t) &= \begin{bmatrix} \dot{q}^T & B_1(\theta_2) & \dot{q} \\ & \vdots & \\ \dot{q}^T & B_n(\theta_2) & \dot{q} \end{bmatrix} + \theta_3 ; \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pa3 : Les paramétrages sans doute les plus réalistes et les plus compatibles avec les hypothèses classiques de la théorie de la commande adaptative s'obtiennent en partant de l'expression analytique d'un modèle dynamique complet du robot et font entrer dans le vecteur θ les paramètres du modèle qui dépendent de la géométrie et de la masse de la charge transportée. Peuvent également entrer dans le vecteur θ d'autres paramètres tels que ceux représentatifs de coefficients de frottement visqueux.

Les commandes adaptatives obtenues de cette façon peuvent, par analogie avec le cas non-adaptatif, être qualifiées de "commandes par découplage linéaire adaptatives". Elles possèdent en effet toutes les caractéristiques des commandes par découplage linéaire avec en plus une composante d'identification des paramètres mal connus [§ 4].

La complexité de ces commandes est généralement grande (complexité des commandes par découplage linéaire + complexité de l'algorithme d'identification). Cependant comme le nombre de paramètres à estimer n'est pas nécessairement grand (à la limite un seul paramètre représentant la masse transportée), on ne peut affirmer que le coût-calcul de ces commandes est dans tous les cas supérieur à celui

d'une commande issue d'un modèle plus simple mais faisant intervenir plus de paramètres à estimer. Toutefois il est clair que ce coût reste important si on le compare à celui d'une commande non adaptative de type P.D. à coefficients constants ou même à celui des commandes adaptatives les plus simples (qui malheureusement ne sont pas forcément les plus performantes).

2.4.3.4 - Etude de stabilité par les méthodes classiques de la théorie de la commande adaptative

Dans la littérature existante sur le sujet, les différents schémas de commande sont souvent accompagnés d'une analyse de stabilité inspirée de celles proposées dans les études théoriques de commande adaptative. Bien que les schémas de commande soient en apparence très différents, il est intéressant de constater que toutes les analyses de stabilité procèdent fondamentalement de la même façon et conduisent à des résultats similaires. Cette constatation trouve une explication dans le fait (que nous venons de montrer) que de nombreux schémas de commande adaptative peuvent être regroupés au sein d'une approche unique.

Afin de donner un aperçu cohérent et de mieux cerner le mécanisme de ces analyses de stabilité, nous nous proposons de décrire dans ses grandes lignes une analyse similaire pour la classe des commandes adaptatives que nous avons considérées. Nous aurons ainsi une base de référence à partir de laquelle il nous sera plus facile de discuter de la valeur de ce type d'analyse dans le cas des robots.

L'hypothèse fondamentale sur laquelle repose l'analyse est qu'il existe un vecteur θ^* (inconnu) de "vrais paramètres" pour lequel le modèle (4.25) coïncide avec les vraies équations du robot.

Bien qu'il soit possible de légèrement affaiblir cette hypothèse sans modifier le coeur des résultats, nous préférons la donner sous sa forme la plus forte pour ne pas sacrifier à l'essentiel (qui seul nous préoccupe ici).

Cette hypothèse revient à supposer que l'équation :

$$\hat{M}(\theta^*; q) \ddot{q} + \hat{K}(\theta^*; q, \dot{q}, t) = \Gamma \quad (4.34)$$

décrit fidèlement la dynamique du robot.

Nous devons également supposer (pour les besoins de l'analyse) que le paramétrage choisi est linéaire par rapport à θ . Il en résulte que l'équation (4.34) est également linéaire en θ^* et qu'elle peut donc s'écrire :

$$y(t) = \phi^T(t) \theta^* \quad (4.35)$$

Soit $\hat{\theta}(t)$ le vecteur estimée de θ^* obtenu à l'aide de l'algorithme d'identification (4.29) (ou (4.33)). Pour simplifier l'analyse, nous supposons que le gain $P(t)$ de l'algorithme est le produit d'un gain scalaire positif $p(t)$ et de la matrice identité, c'est à dire :

$$P(t) = p(t) I \quad (p(t) > p_{\min} > 0) \quad (4.36)$$

Introduisons l'erreur d'estimation :

$$\tilde{\theta}(t) = \theta^* - \hat{\theta}(t) \quad (4.37)$$

D'après (4.29) :

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -p(t) \phi(t) [y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t)] \quad (4.38)$$

d'où en utilisant (4.35) :

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -p(t) \phi(t) \phi^T(t) \tilde{\theta}(t) \quad (4.38)$$

En multipliant à gauche les deux membres de cette égalité par $\tilde{\theta}^T(t)$ nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\tilde{\theta}(t)|^2 = -p(t) |\phi(t)^T \tilde{\theta}(t)|^2 \leq 0 \quad (4.39)$$

Il en résulte que $|\tilde{\theta}(t)|$ décroît et converge asymptotiquement vers une valeur constante positive ou nulle. Remarquons que ceci n'implique pas que $\hat{\theta}(t)$ converge vers un vecteur constant et encore moins que $\hat{\theta}(t)$ converge vers θ^* .

Comme $p(t)$ est strictement positif, il en résulte également :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t)^T \tilde{\theta}(t) = 0 \quad (4.40)$$

Cette relation caractérise les performances asymptotiques de l'algorithme d'identification. Ce résultat est le meilleur que l'on puisse espérer si on ne peut établir de façon complémentaire que $\phi(t)$ satisfait des conditions dites "d'excitation persistante" [5].

D'autre part :

$$\phi(t)^T \ddot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma(\hat{\theta}(t)) - \hat{M}(\hat{\theta}(t); q(t)) \ddot{q}(t) - \hat{l}(\hat{\theta}(t); q(t), \dot{q}(t), t) \quad (4.41)$$

et par conséquent, d'après (4.32) :

$$\phi(t)^T \ddot{\hat{\theta}}(t) = -\hat{M}(\hat{\theta}(t); q(t)) \left[\frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t) \right]^{-1} e(t) \quad (4.42a)$$

avec :

$$e(t) = \ddot{e}(t) + g G(\mu D e(t) + \dot{e}(t)) \quad (4.24b)$$

D'après (4.40), il en résulte que si :

i) $\hat{M}(\hat{\theta}(t); q(t))$ reste positive et bornée inférieurement

ii) $\frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t)$ est régulière et $\left| \frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t) \right|$ est uniformément borné, alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0 \quad (4.43)$$

Les termes g , M , G et D étant choisis de sorte que le système linéaire du second ordre : $\ddot{x} + gG(\mu Dx + \dot{x}) = 0$ soit exponentiellement stable, la relation (4.43) entraîne à son tour :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0 \quad (4.44)$$

Cette dernière relation est le but de la démonstration. Elle signifie que la commande adaptative assure asymptotiquement l'exécution parfaite de la tâche.

Remarques : i) une façon d'assurer la positivité de $\hat{M}(\hat{\theta}(t); q(t))$ consiste à figer $\hat{\theta}(t)$ lorsque cette matrice tend à devenir singulière. Il est possible (mais pas très important ici) de montrer que pour certains paramétrages, cette modification de l'algorithme d'identification n'altère pas la validité de la relation (4.40) sur laquelle repose la démonstration. Une façon encore plus systématique de "faire marcher" la démonstration

consiste, comme nous l'avons déjà suggéré, à faire dès le départ l'hypothèse que la matrice \hat{M} est constante et connue.

- ii) les conditions de régularité et de bornitude de $\frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t)$ nous rappellent que la tâche doit être admissible. Elles sont automatiquement satisfaites dans le cas où $e(q, t) = q - q_r(t)$ ($\Rightarrow \frac{\partial e}{\partial q} = I$), c'est à dire dans le cas de la poursuite d'une trajectoire dans l'espace des coordonnées articulaires du robot.

2. 4. 3. 5 - Discussion

Le principal mérite de l'analyse précédente est peut être de montrer qu'il n'est pas nécessaire que le vecteur estimée $\hat{\theta}(t)$ converge vers le vrai vecteur θ^* pour que la commande remplisse correctement son rôle asymptotiquement. La convergence de $\hat{\theta}(t)$ vers θ^* dépend en effet de conditions classiques d'identifiabilité (liées au choix du paramétrage) et d'excitation persistante (liées aux mouvements effectués par le robot) dont la satisfaction n'est pas automatiquement garantie dans la pratique. Nous retrouvons ainsi un résultat classique de la commande adaptative [86] [87].

En fait, des études récentes de commande adaptative [85]-[88] ont permis d'établir que la propriété de stabilité asymptotique du système (celle-ci n'entraînant pas nécessairement que la commande soit performante) reste encore acquise lorsque le système est sujet à des perturbations bornées additives, lorsque θ^* varie "lentement", et lorsque certaines dynamiques très stables du système ne sont pas prises en compte dans la modélisation.

Ces résultats, bien qu'encourageant, ne permettent cependant en aucun cas de conclure à la stabilité de la commande adaptative lorsque l'hypothèse fondamentale de départ ($\exists \theta^* ; \Gamma = \hat{M}(\theta^*, q) \ddot{q} + \hat{l}(\theta^*; q, \dot{q}, t)$) est grossièrement violée, ce qui malheureusement est généralement le cas lorsque l'on considère un paramétrage de type Pa1 ou Pa2 (surtout si la transmission des couples moteurs est directe et si les mouvements du robots doivent être rapides et de grande amplitude). Seul un paramétrage de type Pa3, pour lequel l'hypothèse portant sur la modélisation est la plus réaliste, nous semble être le plus apte à donner de bons résultats. Les commandes qui en découlent sont cependant assez complexes puisqu'elles nécessitent, au même titre que les commandes par découplage linéaire, le calcul d'un modèle mathématique complet du robot.

Signalons d'autre part que le résultat de stabilité que nous avons obtenu est de nature asymptotique et qu'il ne renseigne donc pas sur le comportement transitoire de la commande. Notamment, rien ne prouve que le manipulateur ne sort pas en

cours de route du domaine d'admissibilité de la tâche (auquel cas la démonstration de stabilité est invalidée). La démonstration fait aussi clairement apparaître que les performances des schémas de commande adaptative sont très liées aux performances de l'algorithme d'identification (performances d'autant meilleures que $\Phi(t)^T \tilde{\theta}(t)$ tend rapidement vers 0). Or la façon la plus sûre d'obtenir ces performances, tout en prévenant des phénomènes d'explosions transitoires bien connus des théoriciens de la commande adaptative, consiste encore à assurer une convergence aussi rapide que possible de l'estimée $\hat{\theta}(t)$ vers les vrais paramètres θ^* . Cela signifie en pratique qu'il vaut peut être mieux découpler la commande de l'identification, de ne procéder à l'identification que lorsque les mesures sont riches en information (par exemple au cours de mouvements rapides), et de n'utiliser les résultats de l'identification qu'après convergence des paramètres. Autrement dit, il nous semble que l'avenir de la commande adaptative pour les robots ne se trouve pas dans le "tout-adaptatif" en temps réel et à tout prix mais plutôt dans une approche pragmatique qui étudie les moyens de faire coopérer efficacement identification et commande .

Nous pouvons nous demander pourquoi ce type d'approche ne s'est pas auparavant imposé aux chercheurs travaillant sur la commande adaptative des robots. La réponse à cette question n'est pas simple, et tout au plus pouvons nous proposer quelques éléments de réflexion. Si l'on écarte le souci "esthétique" (légitime pour un chercheur) de trouver un algorithme d'adaptation simple, applicable systématiquement et sans aménagement quelque soit le robot et la nature de la tâche à accomplir, il reste le fait observé et rapporté par plusieurs auteurs (dont l'auteur de ce rapport) que des schémas de commande adaptative basés sur un paramétrage de type Pa1 ou Pa2 peuvent en simulation avoir un comportement correct et même sembler dans certains cas apporter une amélioration par rapport à des schémas non adaptatifs [82] [83]. Comme nous l'avons déjà indiqué, l'analyse de stabilité que nous avons reproduite ne permet pas d'expliquer ce bon comportement en raison de la nature de l'hypothèse faite au départ. Pour trouver une explication à ce phénomène nous devons anticiper sur l'analyse générale (faite plus loin) de la classe de commandes (3.16) à laquelle appartiennent les commandes adaptatives précédemment proposées. Cette analyse est avant tout une analyse de robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation. Elle est donc, par nature, différente de celle reproduite au paragraphe 2.4.3.4. Elle ne se préoccupe pas du type de paramétrage utilisé et de la façon dont sont obtenues la matrice $\hat{M}(\hat{\theta}(t); q(t))$ et le vecteur $\hat{l}(\hat{\theta}(t); q(t), \dot{q}(t), t)$, mais elle permet de comprendre pourquoi une mauvaise estimation des termes $M(q)$ et $l(q, \dot{q}, t)$ du robot

ne conduit pas nécessairement à une mauvaise commande. Sans entrer pour l'instant dans les détails, elle montre que la robustesse de la commande vis-à-vis des erreurs de modélisation est étroitement liée à la taille des gains des termes de retour en position et en vitesse. Par exemple, une augmentation des valeurs propres de la matrice $M(\hat{\theta}(t); q(t))$ revient à augmenter ces gains et améliore la robustesse de la commande. Cette analyse de robustesse éclaire donc d'un jour nouveau les études de commande adaptative parce qu'elle suggère que le bon comportement de la commande provient moins dans certains cas de la qualité de la méthode d'adaptation que de la robustesse interne inhérente à toute commande appartenant à la classe de commande (3.16).

2.4.4 - Sliding control

La notion de "surface glissante" ("sliding surface" dans la terminologie anglo-saxonne) a été très étudiée dans la littérature soviétique (voir [7] pour une synthèse). Elle a été reprise et appliquée à la commande des robots par quelques auteurs [90] [91]. L'approche se veut une approche de commande robuste dans la mesure où elle vise à contraindre l'état du robot à satisfaire une équation linéaire invariante exponentiellement stable (caractérisant la surface glissante) indépendamment des erreurs de modélisation.

Dès le départ la théorie est équivoque parce qu'elle suppose que la commande est capable de sauter infiniment souvent d'une valeur à une autre en un temps infiniment court. Dans la pratique, il est reconnu [90] [91] qu'elle conduit à des commandes entrant en résonance à des fréquences élevées : c'est le phénomène de "chattering".

Reconnaissant l'aspect réditatoire de ce défaut de conception, les auteurs de [91] et [92] se sont attachés à "aménager" l'approche de sorte à supprimer l'effet de chattering. En procédant ainsi ils invalident la qualité principale de l'approche qui réside dans la simplicité conceptuelle de l'analyse de stabilité du système. En effet, celle-ci ne s'applique pas directement aux commandes modifiées obtenues qui, si on ne s'attarde pas à les regarder à la loupe, sont franchement de même nature que les commandes obtenues par application de la théorie de l'hyperstabilité [109] ou encore celles étudiées dans le présent rapport. Selon notre point de vue, ce sont des commandes de type P.D. à gains non-linéaires. L'utilisation de gains non-linéaires pour améliorer la robustesse de la commande sera globalement traitée par la suite.

2.5. ANALYSE DE STABILITE D'UNE CLASSE DE SYSTEMES NON-LINEAIRES

2.5.1 - Introduction

Nous décrivons dans ce paragraphe 2.5 l'outil d'analyse dont l'application au cas des robots nous donnera des conditions de robustesse pour l'ensemble des éléments de la classe de commande (3.16).

Cette analyse est une extension de notre étude [100] dans le but de traiter le cas d'une tâche quelconque.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il nous faut rappeler que cette étude n'est pas unique en son genre et que plusieurs auteurs se sont intéressés au problème de la robustesse de la commande des robots vis-à-vis des erreurs de modélisation. Parmi les références qui nous paraissent les plus significatives, citons les travaux faits dans [102]-[108]. Nous ne ferons pas ici une description de chacun de ces travaux parce que, à nos yeux, ils relèvent tous fondamentalement d'une même approche et conduisent grosso-modo à des résultats de même nature. A l'appui de cette interprétation, il y a d'abord la formulation du problème qui se ramène dans chacun des cas à l'analyse de stabilité d'une classe de systèmes non-linéaires dont la structure est imposée par les équations de la dynamique communes à tous les robots (ainsi qu'à d'autres systèmes mécaniques). Il y a ensuite les outils de démonstration de stabilité qui relèvent tous, sous une forme ou une autre, d'une méthode de Lyapunov. La technique des systèmes singulièrement perturbés que nous avons adaptée pour obtenir le principal résultat de notre analyse est elle-même une forme dérivée d'une méthode de Lyapunov. La théorie de l'hyperstabilité en est une autre. Il y a enfin la similitude des résultats énoncés et des commandes proposées qui sont toutes de type P.D. ou (P.I.D) à gains non-linéaires. Seule l'expression de ces gains diffère d'une étude à l'autre en raison des nuances dans l'utilisation de la méthode de Lyapunov. Ce point est à notre avis mineur dans la mesure où les conditions de stabilité obtenues sont de toute façon seulement suffisantes et laissent donc une marge importante à l'utilisateur pour choisir les gains qui lui paraissent les plus appropriés pour son application.

2.5.2 - Position du problème

Soit $C_{p,T}$ un ensemble connexe et compact dans $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ auquel appartient le point origine $(q(0), 0)$ et sur lequel la fonction de tâche $e(q, t)$ est ρ -admissible pendant l'intervalle de temps $[0, T]$ (voir paragraphe 1.2).

Nous nous intéressons ici à l'étude des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{e} + g(q, \dot{q}, t) A_1(q, t) A_2(q, t) [\mu B(q, t) \dot{e} + \dot{e} + v(q, t)] + s(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (5.1)$$

où $e = e(q, t)$

$$\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial q}(q, t) \dot{q} + \frac{\partial e}{\partial t}(q, t)$$

$$\ddot{e} = \frac{\partial e}{\partial q}(q, t) \ddot{q} + f(q, \dot{q}, t)$$

$$f(q, \dot{q}, t) = \begin{bmatrix} \dot{q}^T W_1(q, t) \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T W_n(q, t) \dot{q} \end{bmatrix} + 2 \frac{\partial^2 e}{\partial q \partial t}(q, t) \dot{q} + \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}(q, t)$$

($W_i(q, t)$ désignant la dérivée partielle de la i ème colonne de $\frac{\partial e}{\partial q}(q, t)$ par rapport à la variable q).

H_1 : $\mu > 0$

D : matrice ($n \times n$) symétrique positive

H_2 : Sur un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ contenant $C_{\rho, T}$

a) les fonctions matricielles $A_1(q, t)$, $A_2(q, t)$ et $B(q, t)$ de dimension ($n \times n$) sont de classe C^1

b) les matrices $A_1(q, t)$ et $B(q, t)$ sont positives

c) la matrice $A_2(q, t)$ est symétrique et positive

H_3 : Sur un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ contenant $C_{\rho, T}$, la fonction vectorielle $v(q, t)$ est de classe C^1

H_4 : Sur un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ contenant $C_{\rho, T} \times \mathbb{R}^n$ ($(q, t) \in C_{\rho, T}$, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$), la fonction vectorielle $s(q, \dot{q}, t)$ est de classe C^1

H_5 : Sur un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ contenant $C_{\rho, T} \times \mathbb{R}^n$, la fonction scalaire $g(q, \dot{q}, t)$ est positive et de classe C^1 .

L'équation différentielle (5.1) s'écrit également sous la forme classique :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t) \quad (5.2a)$$

avec :

$$X = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ q \end{bmatrix} \quad (5.2b)$$

et

$$F(X, t) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -\frac{\partial e}{\partial q}(q, t) \left[f(q, \dot{q}, t) + g(q, \dot{q}, t) A_1(q, t) A_2(q, t) [\mu B(q, t) D e(q, t) + \frac{\partial e}{\partial q}(q, t) \dot{q} + \frac{\partial e}{\partial t}(q, t) + v(q, t)] + s(q, \dot{q}, t) \right] \right] \end{bmatrix} \quad (5.2c)$$

Les solutions de cette équation, si elles existent, sont les trajectoires deux fois dérivables $\{q(t)\}$ qui satisfont (5.1) pour $t \geq 0$.

Les hypothèses H_2-H_5 que nous avons faites sur les différentes fonctions intervenant dans l'équation (5.1) ne suffisent pas à caractériser l'ensemble des solutions de cette équation. Notre objectif se borne à l'étude des solutions partant d'un point q_0 tel que $(q_0, 0) \in C_{\rho, T}$. Si nous imposons à la fonction $e(q, t)$ d'être de classe C^3 sur son domaine de définition (qui contient $C_{\rho, T}$), les hypothèses de différentiabilité faites sur les autres fonctions et la propriété d'admissibilité de la fonction $e(q, t)$ permettent d'affirmer que la fonction $F(X, t)$ est de classe C^1 sur un ouvert contenant $C_{\rho, T} \times \mathbb{R}^n ((q, t) \in C_{\rho, T}, \dot{q} \in \mathbb{R}^n)^*$. Par application d'un théorème classique [2] de la théorie des équations différentielles, nous pouvons déjà conclure à l'existence et l'unicité locales de la solution $\{q(t)\}$ lorsque $(q(0), 0) \in C_{\rho, T}$.

Le but de l'analyse est de montrer qu'en imposant des conditions supplémentaires sur les tailles du gain $g(q, \dot{q}, t)$, du scalaire μ , et des conditions initiales $(e(0) = e(q(0), 0), \dot{e}(0) = \frac{\partial e}{\partial q}(q(0), 0) \dot{q}(0) + \frac{\partial e}{\partial t}(q(0), 0))$ les solutions se prolongent jusqu'à l'instant T et sont telles que : $\forall t \in [0, T] : |e(t)| = |e(q(t), t)| < \rho$. Des conditions suffisantes pour assurer la petitesse asymptotique de l'erreur $|e(t)|$ seront également données.

*Ces hypothèses pourraient être affaiblies. Nous préférons cependant nous en tenir à des hypothèses fortes de façon à éviter la discussion de points de détail techniques sans grande importance.

2.5.3 - Cas d'une équation linéaire invariante

Avant d'aborder l'étude de l'équation (5.1) dans sa généralité, nous nous proposons de traiter le cas particulier où (5.1) se réduit à une équation linéaire invariante. Le but de ce paragraphe est de montrer que l'analyse du cas linéaire invariant contient en puissance celle du cas non-linéaire, alors que dans ce dernier cas la démonstration est plus longue et plus ardue. Il s'agit aussi de faire simplement ressortir les propriétés qui sont essentielles à l'établissement des résultats principaux sur lesquels notre analyse de la commande repose. Enfin il est conceptuellement intéressant de savoir que pour les applications il suffira la plupart du temps de raisonner à partir du cas linéaire invariant pour extrapoler des résultats dans le cas non-linéaire.

Nous supposerons donc dans ce paragraphe que A_1 , A_2 et B sont des matrices constantes et que v et s sont des perturbations quelconques mais bornées et uniquement fonctions de temps. Nous supposerons aussi que g est un gain scalaire positif constant et que $e(q,t) = q$. Dans ces conditions l'équation (5.1) se réduit à l'équation linéaire invariante du second ordre suivante :

$$\ddot{e} + g A_1 A_2 [\mu BDe + \dot{e} + v(t)] + s(t) = 0 \quad (5.2)$$

Sous forme d'équation d'état, en posant $X^T = (e^T, \dot{e}^T)$:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -g\mu A_1 A_2 B D & -g A_1 A_2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ -g A_1 A_2 v(t) - s(t) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Nous savons déjà, de la théorie des systèmes linéaires, que quelque soit la condition initiale $X(0)$, la solution $X(t)$ de (5.3) existe et est unique sur \mathbb{R}^+ .

Le polynôme caractéristique associé au système (5.3) est :

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda^2 I + g\lambda A_1 A_2 + g\mu A_1 A_2 B D) \quad (5.4)$$

Pour que le système (5.3) soit (exponentiellement) stable ($v(t) = s(t) = 0 \Rightarrow X(t)$ converge exponentiellement vers 0 ; $v(t)$ et $s(t)$ bornés $\Rightarrow X(t)$ asymptotiquement uniformément borné quelque soit $X(0)$) il faut et il suffit que les $2n$ racines complexes de $\mathcal{P}(\lambda)$ soient à partie réelle négative.

lemme 1

Soit A et C deux matrices réelles de dimension (n x n) et soit l'équation en λ :

$$\det(\lambda^2 I + g\lambda A + gAC) = 0 \tag{5.5}$$

Si on fait tendre g vers $+\infty$ alors n racines de cette équation tendent vers les opposées des n valeurs propres de C, et les rapports des n autres racines par g tendent vers les opposées des n valeurs propres de A.

démonstration (simplifiée)

Considérons dans un premier temps les racines de l'équation qui restent bornées lorsque g tend vers l'infini. Pour cela imposons à $|\lambda|$ de rester inférieur au réel k_C ou k_C est supérieur au plus grand module des valeurs propres de C. Dans ces conditions, il existe une valeur minimale de g notée g_1 telle que si $g > g_1$ alors la matrice $(\lambda I + gA)$ est inversible. De plus si l'on fait tendre g vers l'infini alors $(\lambda I + gA)^{-1}$ tend vers la matrice nulle.

Puisque :

$$\lambda^2 I + g\lambda A + gAC = (\lambda I + gA) [(\lambda I + C) - (\lambda I + gA)^{-1} \lambda C]$$

il résulte que pour $|\lambda| < k_C$ et $g > g_1$

$$\det(\lambda^2 I + g\lambda A + gAC) = 0 \Leftrightarrow \det [(\lambda I + C) - (\lambda I + gA)^{-1} \lambda C] = 0$$

or :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{g \rightarrow +\infty \\ |\lambda| < k_C}} \det [(\lambda I + C) - (\lambda I + gA)^{-1} \lambda C] &= \det \left\{ \lim_{\substack{g \rightarrow +\infty \\ |\lambda| < k_C}} [(\lambda I + C) - (\lambda I + gA)^{-1} \lambda C] \right\} \\ &= \det(\lambda I + C) \end{aligned}$$

ce qui montre que n racines de l'équation (5.5) bornées supérieurement en module par k_C tendent vers les opposées des n valeurs propres de C lorsque g tend vers l'infini.

Procédons de façon similaire pour les racines dont le module tend vers $+\infty$ lorsque g tend vers $+\infty$. Pour cela, posons :

$$\delta = \frac{\lambda}{g}$$

et imposons à $|\delta|$ d'être supérieur au réel positif k_a ou k_a est inférieur au plus petit module des valeurs propres de A . Dans ces conditions il existe une valeur minimale de g que nous notons g_2 telle que si $g > g_2$ alors la matrice $(\delta I + \frac{C}{g})$ est inversible. De plus, si l'on fait tendre g vers $+\infty$ alors $\frac{1}{g} (\delta I + \frac{C}{g})^{-1}$ tend vers la matrice nulle.

Puisque :

$$\lambda^2 I + g\lambda A + gAC = g^2 \left[(\delta I + A) - \frac{1}{g} \delta C (\delta I + \frac{C}{g})^{-1} \right] (\delta I + \frac{C}{g})$$

il résulte que pour $|\delta| > k_a$ et $g > g_2$:

$$\det(\lambda^2 I + g\lambda A + gAC) = 0 \Leftrightarrow \det \left[(\delta I + A) - \frac{1}{g} \delta C (\delta I + \frac{C}{g})^{-1} \right] = 0$$

or :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{g \rightarrow +\infty \\ |\delta| > k_a}} \det \left[(\delta I + A) - \frac{1}{g} \delta C (\delta I + \frac{C}{g})^{-1} \right] &= \det \left\{ \lim_{\substack{g \rightarrow +\infty \\ |\delta| > k_a}} \left[(\delta I + A) - \frac{1}{g} \delta C (\delta I + \frac{C}{g})^{-1} \right] \right\} \\ &= \det(\delta I + A) \end{aligned}$$

ce qui montre que les rapports de n racines de l'équation (5.5) par g tendent les opposées des n valeurs propres de A lorsque g tend vers $+\infty$.

o
o

lemme 2

Si A_1 est une matrice réelle positive de dimension $(n \times n)$ et si A_2 est une matrice réelle positive **symétrique** de même dimension, alors les valeurs propres de la matrice produit $A = A_1 A_2$ sont à partie réelle positive.

o
o

démonstration

Soit λ une valeur propre de $A = A_1 A_2$ et x un vecteur propre associé, alors :

$$\begin{aligned} x^* A_2 A x &= \lambda x^* A_2 x \text{ (par définition d'une valeur propre)} \\ &= x^* A_2 A_1 A_2 x \text{ (par définition de } A) \end{aligned}$$

(où x^* désigne le vecteur transconjugué de x)

Par conséquent :

$$\lambda = \frac{x^* A_2 A_1 A_2 x}{x^* A_2 x}$$

$x^* A_2 x$ étant un réel positif et $x^* A_2 A_1 A_2 x$ un nombre complexe à partie réelle positive, λ est un nombre complexe à partie réelle positive.

o
o

Il résulte de ce lemme que les valeurs propres des matrices $A=A_1 A_2$ et $C=\mu BD$ sont à partie réelle positive. Par application du lemme 1, nous déduisons immédiatement le résultat de stabilité suivant :

lemme 3 (résultat de stabilité)

Il existe une valeur minimale $g_0 > 0$ telle que si $g > g_0$ alors le système (5.3) est (exponentiellement) stable

Corollaire : Des conditions suffisantes pour que le gain minimal g_0 soit nul (c'est à dire pour que le système (5.3) soit exponentiellement stable quelque soit $g > 0$) sont :

- $A_1 A_2$ et BD sont définies positives symétriques
- $A_1 A_2 = \alpha I$ ($\alpha > 0$) et les valeurs propres de $C = \mu BD$ sont positives réelles
- $\mu BD = \alpha I$ ($\alpha > 0$) et les valeurs propres de $A = A_1 A_2$ sont positives réelles

Démonstration du corollaire

Cas 1 : $A = A_1 A_2$ et $C = \mu BD$ sont des matrices symétriques définies positives.

Soit λ une racine quelconque du polynome caractéristique $\mathcal{P}(\lambda)$. Il existe un vecteur x (à composantes dans \mathbb{C}) non nul tel que :

$$(\lambda^2 I + g \lambda A + gAC) x = 0$$

et par conséquent, en multipliant cette égalité à gauche par $x^* A^{-1}$ (où x^* est le transconjugué de x) :

$$\lambda^2 \frac{x^* A^{-1} x}{|x|^2} + g \lambda + g \frac{x^* C x}{|x|^2} = 0$$

Si g est positif, les coefficients de cette équation du second degré en λ sont tous positifs, ce qui entraîne que la partie réelle de la racine λ est nécessairement négative.

Cas 2 : les valeurs propres de $C = \mu BD$ sont réelles positives et $A = A_1 A_2 = \alpha I (\alpha > 0)$.

Soit δ_i une valeur propre de C et x un vecteur propre associé. On vérifie facilement que x est aussi un vecteur du noyau de la matrice $(\lambda^2 I + g \lambda A + g A C)$ à condition que λ vérifie l'équation :

$$\lambda^2 + g \alpha \lambda + g \alpha \delta_i = 0$$

Les coefficients de cette équation en λ étant positifs, les parties réelles des deux solutions de cette équation sont négatives.

En considérant les n valeurs propres δ_i de la matrice C , on retrouve ainsi les $2n$ racines du polynôme caractéristique $\mathcal{P}(\lambda)$.

Cas 3 : les valeurs propres de $A = A_1 A_2$ sont réelles positives et $C = \mu BD = \alpha I (\alpha > 0)$

Même raisonnement que pour le cas 2.

°
° °

A l'aide de contre-exemples simples il est facile de montrer que si les matrices A_1 , A_2 , B et D ne vérifient pas les conditions du corollaire alors le gain minimal g_0 à partir duquel le système est stable n'a aucune raison d'être égal à zéro.

Le résultat de stabilité du lemme 3 peut être établi de façon différente en utilisant des techniques de perturbation singulière [8]. Le lecteur un peu familiarisé avec ce type de techniques peut aisément s'en rendre compte en écrivant le système (5.3) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{e} = z \\ \eta \dot{z} = -\mu A_1 A_2 B D e - A_1 A_2 z - A_1 A_2 v(t) - \eta s(t) \end{cases} \quad (5.6)$$

avec : $\eta = 1/g$

On montre alors que lorsque η tend vers 0, c'est-à-dire lorsque g tend vers $+\infty$, le système (5.6) se décompose en une partie "rapide" transitoire rapidement éteinte et en une partie "lente" donnant l'évolution asymptotique du système. On retrouve sans surprise que le temps d'extinction de la partie rapide est fonction des valeurs propres très stables du système dont les modules tendent vers l'infini lorsque η tend vers 0 (d'après le lemme 1, les produits de ces valeurs propres par η tendent vers les opposées des valeurs propres de $A = A_1 A_2$). Une façon d'appréhender la partie lente consiste à poser $\eta = 0$ dans la seconde équation de (5.6), ce qui donne :

$$\dot{e} \simeq -\mu B D e + v(t) \quad (5.7)$$

On retrouve ainsi que lorsque η est très petit (g est très grand) le système (5.2) est asymptotiquement équivalent à un système du premier ordre dont le polynôme caractéristique a pour racines les opposées des valeurs propres de la matrice $C = \mu B D$.

D'après (5.7), il est possible de rendre $e(t)$ asymptotiquement aussi petit que l'on veut en augmentant autant que nécessaire la taille du paramètre μ .

La démonstration de l'ensemble de ces résultats est contenue dans la démonstration d'un théorème de stabilité donné plus loin qui généralise le lemme 3 au cas des systèmes non-linéaires.

D'après le lemme 1, il suffit que les matrices $-A = -A_1 A_2$ et $-C = -\mu B D$ soient stables pour que le lemme 3 s'applique. Pourquoi avons nous alors imposé des conditions de positivité plus fortes sur les matrices A_1, A_2, B et D ? La première raison est que la transposition des résultats de stabilité du cas linéaire invariant au cas non-linéaire nécessite d'imposer aux matrices $-A(q(t), t) = -A_1(q(t), t) A_2(q(t), t)$ et $-C(q(t), t) = -\mu B(q(t), t) D$ des conditions plus fortes que la simple stabilité de ces matrices à chaque instant. Pour s'en convaincre raisonnons par analogie avec le système : $\dot{x} = -F(x, t)x$. Il est bien connu qu'il ne suffit pas que ($\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n : -F(x, t)$ stable) pour que ce système soit stable. Il suffit par contre que $F(x, t)$ soit une matrice positive telle que $\lambda_{\min} \left[\frac{F(x, t) + F^T(x, t)}{2} \right] > \delta > 0$. En effet, en multipliant l'équation du système à gauche par x^T nous obtenons : $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x|^2 < -\delta |x|^2$ et cette inégalité entraîne clairement la convergence exponentielle de $x(t)$ vers 0. Remarquons que ce résultat est vrai quelque soit le degré de variation de la matrice $F(x, t)$. Ce résultat suffit déjà à faire pressentir le rôle des propriétés de positivité matricielle dans l'établissement de résultats de stabilité dans le cas de systèmes non-linéaires.

Remarquons aussi que toute équation dynamique de robot met en évidence une matrice possédant ce type de propriété : c'est la matrice d'inertie $M(q)$ du robot. Nous avons également vu que lorsque la tâche assignée au robot est de minimiser un coût $h(q, t)$, il faut, pour que la tâche soit admissible, que la matrice jacobienne $\frac{\partial e}{\partial q}(q, t)$ (avec $e(q, t)^T = \frac{\partial}{\partial q} h(q, t)$) soit positive au voisinage du minimum. Il ressort de ces observations que la propriété de positivité matricielle apparaît naturellement lorsque l'on traite de commande dynamique de robots. Il est par conséquent logique de l'exploiter au niveau de l'analyse.

2.5.4 - Un théorème de stabilité

Une exposition concise du résultat principal de l'analyse nécessite l'introduction de quelques notations préliminaires dont nous donnons la liste ci-dessous.

$$cA_1 \succ \sup_{(q,t) \in C_{\rho,T}} \left(\left\| \frac{A_1(q,t) + A_1(q,t)^T}{2} \right\|^{-1} \|A_1(q,t)\| \right)$$

$$a_2^m(q,t) = \lambda_{\min}(A_2(q,t)) : \text{plus petite valeur propre de la matrice } A_2(q,t)$$

$$a_2^M(q,t) = \lambda_{\max}(A_2(q,t)) : \text{plus grande valeur propre de la matrice } A_2(q,t)$$

$$c_{A_2} \geq \sup_{(q,t) \in C_{\rho,T}} (a_2^M(q,t)/a_2^m(q,t))$$

$$0 < \sigma_2^m \leq \inf_{(q,t) \in C_{\rho,T}} (a_2^m(q,t))$$

$$\sigma_2^M \geq \sup_{(q,t) \in C_{\rho,T}} (a_2^M(q,t))$$

$$b^m(q,t) = \lambda_{\min} [(B(q,t) + B^T(q,t))/2]$$

$$b^M(q,t) = \lambda_{\max} [(B(q,t) + B^T(q,t))/2]$$

$$0 < \beta^m \leq \inf_{(q,t) \in C_{\rho,T}} (b^m(q,t))$$

$$b_{\max} \geq \sup_{(q,t) \in C_{\rho,T}} |B(q,t)|$$

$$d^m = \lambda_{\min} (D)$$

$$d^M = \lambda_{\max} (D)$$

$$v \geq \sup_{(q,t) \in C_{\rho,T}} |v(q,t)|$$

Nous utiliserons aussi dans l'énoncé du théorème la fonction scalaire positive $g_{\alpha, \mu, k, \delta}(q, \dot{q}, t)$ définie de la façon suivante :

$$g_{\mu, \alpha, k, \delta}(q, \dot{q}, t) = \sup(g_{\mu, \alpha}^1(q, \dot{q}, t); g_{\mu, \alpha, k, \delta}^2(q, \dot{q}, t)) \quad (5.8a)$$

avec :

$$g_{\mu, \alpha}^1(q, \dot{q}, t) = |A_3(q, t)^{-1}| \left\{ \mu d^M \left(\frac{a_2^M(q, t)}{a_2^m(q, t)} \right)^{1/2} \left[\frac{\beta^m \sigma_2^m}{\alpha} \left(\frac{\sigma_2^m}{a_2^m(q, t)} \right)^{1/2} \right. \right. \\ \left. \left. + (n+1) |B(q, t)| + n \frac{\alpha}{\beta^m} \left(\frac{a_2^m(q, t)}{\sigma_2^m} \right)^{1/2} |B(q, t)|^2 \right] \right. \\ \left. + n \frac{\alpha}{\beta^m} \left(\frac{a_2^M(q, t)}{\sigma_2^m} \right)^{1/2} |B(q, \dot{q}, t)| + \frac{1}{2} \frac{|\dot{A}_2(q, \dot{q}, t)|}{a_2^m(q, t)} \right\} \quad (5.8b)$$

et

$$g_{\mu, \alpha, k, \delta}^2(q, \dot{q}, t) = (c_{A_1} c_{A_2} (\sigma_2^M)^{1/2} \frac{v}{k} + 1) |A_3(q, t)^{-1}| \left\{ \mu d^M \left(\frac{a_2^M(q, t)}{a_2^m(q, t)} \right)^{1/2} \right. \\ \left. (|B(q, t)| + \frac{\beta^m}{\alpha}) + \delta \right\} + \frac{(a_2^M(q, t))^{1/2}}{k} |A_3(q, t)^{-1}| |s(q, \dot{q}, t)| \quad (5.8c)$$

où : . $\alpha > 1, k > 0, \delta > 0$ sont des paramètres libres

$$. A_3(q, t) = A_2(q, t)^{1/2} \left(\frac{A_1(q, t) + A_1(q, t)^T}{2} \right) A_2(q, t)^{1/2}$$

$(A_2(q, t))^{1/2}$ étant la matrice racine carrée symétrique positive de $A_2(q, t)$

$$. \dot{B}(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt} B(q, t)$$

$$. \dot{A}_2(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt} A_2(q, t)$$

Introduisons enfin le scalaire positif μ_p :

$$\mu_p = \frac{1}{\rho} \left(\frac{d^M}{d^m} \right)^{1/2} \frac{1}{(1 - \frac{1}{\alpha}) \beta^m d^m} \left[\begin{array}{c} \sigma_2^M \\ \left(\frac{d^M}{d^m} \right)^{1/2} \\ \sigma_2^m \end{array} c_{A_1} c_{A_2} v + \frac{k}{(\sigma_2^m)^{1/2}} \right] \quad (5.9)$$

Nous disposons maintenant des éléments qui nous permettent d'énoncer le résultat suivant :

Théorème :

$$\text{si : } . \mu > \mu_p \quad (5.10)$$

$$. g(q, \dot{q}, t) > g_{\mu, \alpha, k, \delta}(q, \dot{q}, t) \quad (5.11)$$

. les conditions initiales $q(0)$ et $\dot{q}(0)$ sont telles que $(q(0), 0) \in C_{\rho, T}$, et :

$$|e(0)| + \frac{|\dot{e}(0)|}{\mu b_{\max} d^M} < \left(\frac{d^m}{d^M} \right)^{3/2} (1 - \frac{1}{\alpha}) \frac{\beta^m}{b_{\max}} \left(\frac{\sigma_2^m}{\sigma_2^M} \right)^{1/2} \rho \quad (5.12)$$

alors : i) (existence) La solution $q(t)$ de l'équation différentielle (5.1) existe de façon unique sur $[0, T]$

$$\text{ii) (stabilité) } . \forall t \in [0, T] : |e(t)| \leq \rho$$

. $|\dot{e}(t)|$ et $|\dot{q}(t)|$ sont uniformément bornées sur $[0, T]$ par

rapport aux conditions initiales

iii) (comportement asymptotique) Sur $[\bar{0}, \bar{T}]$, $e(t)$ satisfait la relation :

$$\dot{e}(t) = -L(t) e(t) + \eta(t) \quad (5.13)$$

où . $-L(t)$ est la matrice d'état d'un système uniformément exponentiellement stable. Plus précisément, si on pose $|x|_D^2 = x^T D x$ alors :

$$\dot{x}(t) = -L(t)x(t) \Rightarrow |x(t)|_D < |x(0)|_D \exp\left[-\mu d^m \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \beta^m t\right] \quad (5.14)$$

De plus :

$$\bullet \quad L(t) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} \mu B(q(t), t) D \text{ uniformément sur } [0, T] \quad (5.15)$$

$$\bullet \quad | \eta(t) | < \sup \left[\left(\frac{\sigma_2^M}{\sigma_2^m} \right)^{1/2} |\dot{e}(0) + \mu B(0) D e(0)| \exp(-\delta t); \right. \\ \left. \left(\frac{\sigma_2^M}{\sigma_2^m} \right)^{1/2} c_{A_1} c_{A_2}^v + \frac{k}{(\sigma_2^m)^{1/2}} \right] \quad (5.16)$$

Corollaire (extension à l'intervalle de temps $[0, +\infty[$)

si : . la fonction $e(q, t)$ est ρ -admissible sur $C_\rho = \sup_{0 < T < +\infty} C_{\rho, T}$ pendant $[0, +\infty[$

. $\left| \left(\frac{\partial e}{\partial q} (q, t) \right)^{-1} \right|$ et $\left| \frac{\partial e}{\partial t} (q, t) \right|$ sont uniformément bornées sur C_ρ
 . les bornes $c_{A_1}, c_{A_2}, \sigma_2^m, \sigma_2^M, \beta^m, b_{\max}$ et v existent pour $(q, t) \in C_\rho$

alors : i) les résultats du théorème s'appliquent sur l'intervalle de temps $[0, +\infty[$

ii) si la fonction $|s(q, \dot{q}, t)|$ est uniformément bornée par rapport aux variables q et t lorsque $(q, t) \in C_\rho$ alors $g_{\mu, \alpha, k, \delta}(q, \dot{q}, t)$ est également uniformément borné par rapport à q et t lorsque $(q, t) \in C_\rho$

iii) si de plus $g(q, \dot{q}, t)$ est uniformément borné par rapport à q et t lorsque $(q, t) \in C_\rho$ alors $g(q(t), \dot{q}(t), t)$ et $|\ddot{e}(t)|$ sont uniformément bornés sur $[0, +\infty[$ [par rapport aux conditions initiales.

La démonstration du théorème est donnée dans l'annexe B de ce rapport.

Ce théorème permet de cerner de façon assez précise les effets de chacun des termes de l'équation différentielle (5.1) sur la stabilité et le comportement asymptotique de l'erreur $e(t) = e(q(t), t)$. Il serait cependant trop ardu et probablement peu significatif sans le support d'une application concrète d'examiner de but en blanc l'ensemble de ces effets. Nous nous contenterons donc pour l'instant d'une interprétation globale.

Dans ses grandes lignes, le théorème généralise au cas non linéaire le résultat de stabilité du lemme 3. Il indique en effet que si les erreurs initiales $|e(0)|$ et $|\dot{e}(0)|$ sont suffisamment petites (la notion de petitesse étant ici relative à la taille du degré d'admissibilité ρ de la fonction $(e(q, t))$ et si $\mu > \mu_\rho$, où μ_ρ est inversement proportionnel à ρ , alors il existe un gain non-linéaire "minimal" tel que si $g(q, \dot{q}, t)$ est plus grand que ce gain minimal, alors $e(t)$ demeure dans la boule $\mathcal{B}(0, \rho)$.

L'interprétation provenant des techniques de perturbation singulière est conservée (ce qui est normal parce que la démonstration du théorème est basée sur ces techniques) et transparaît dans l'équation (5.13) qui permet de préciser le comportement asymptotique des solutions de l'équation. D'après cette équation et d'après (5.14), si le gain $g(q, \dot{q}, t)$ est "suffisamment" grand (plus précisément si $g(q, \dot{q}, t) > g_{\mu, \alpha, k, \delta}(q, \dot{q}, t)$ avec α grand) alors $e(t)$ vérifie approximativement la relation :

$$\dot{e}(t) \simeq -\mu B(q(t), t) D e(t) + \eta(t) \quad (5.17)$$

où le terme $\eta(t)$ s'interprète comme une perturbation empêchant $e(t)$ de converger vers 0. En choisissant le paramètre libre k petit, la relation (5.16) indique que le terme $v(t)$ est responsable asymptotiquement de l'existence de $\eta(t)$ et qu'une borne asymptotique supérieure de $|\eta(t)|$ est $(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})^{M/2} c_{A_1} c_{A_2} v$. Une conséquence importante de la relation (5.17) est qu'elle montre que si $g(q, \dot{q}, t)$ est suffisamment grand alors la dynamique asymptotique de l'erreur $e(t)$ est principalement fonction de la matrice $-\mu B(q(t), t)D$, et est par conséquent pratiquement indépendante des fonctions matricielles $A_1(q, t)$ et $A_2(q, t)$. Compte tenu de (5.14) cette relation montre également que l'erreur $e(t)$ peut être rendu asymptotiquement aussi petite que l'on veut en augmentant le paramètre μ autant que nécessaire, ceci étant vrai quelque soit la taille des perturbations $v(q(t), t)$ et $s(q(t), \dot{q}(t), t)$. L'intuition derrière ce résultat est la même que dans le cas linéaire invariant : le grand gain $-g$ "écrase" la perturbation $s(t)$ et une grande valeur du paramètre $-\mu$ "écrase" la perturbation $v(t)$. Nous employons ici le qualificatif "grand" pour signifier que les rapports $(g(q, \dot{q}, t)/g_{\mu, \alpha, k, \delta}(q, \dot{q}, t))$ et (μ/μ_0) sont grands, ce qui ne présage pas dans l'absolu des tailles réelles de g et μ .

2.5.5. - Deux résultats complémentaires

En vue des applications robotiques, il est utile de compléter le théorème précédent par deux résultats complémentaires, l'un pour montrer qu'il n'est pas nécessaire que le gain $g(q, \dot{q}, t)$ soit toujours supérieur à $g_{\mu, \alpha, k, \delta}(q, \dot{q}, t)$ pour assurer que l'erreur $e(t)$ demeure dans la boule $\mathcal{B}(0, \rho)$, l'autre pour montrer qu'un gain $-g$ constant et assez grand suffit à assurer la stabilité de l'équation différentielle (5.1) dans un domaine dont la taille augmente avec celle du gain.

Lemme 4

Si la condition (5.11) est remplacée par la condition plus faible :

- $g(q, \dot{q}, t) > g_{\mu, \alpha, k, \delta}(q, \dot{q}, t)$ dans les régions où
- $|e(q, t)| + |\dot{e}(q, \dot{q}, t)| / \mu b_{\max} d^M \geq \left(\frac{d^m}{d^M}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\beta^m}{b_{\max}} \left(\frac{\sigma_2^m}{\sigma_1^M}\right)^{1/2} \rho \quad (\alpha > \alpha' \approx 1)$
- $g(q, \dot{q}, t) > 0$ ailleurs

alors les points i) ii) et iii) du théorème restent vrais.

démonstration

Prenons une solution quelconque $q(t)$ satisfaisant la condition initiale (5.12) du théorème. A cette solution correspond l'erreur $e(t) = e(q(t), t)$. Pour démontrer le lemme 4, il suffit de montrer que sur tout intervalle de temps $[t_0, t_1[$ ($t_0 \geq 0, t_1 \leq T$) où l'inégalité :

$$|e(t)| + |\dot{e}(t)| / \mu b_{\max} d^M < \left(\frac{d^m}{d^M}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\beta^m}{b_{\max}} \left(\frac{\sigma_2^m}{\sigma_1^M}\right)^{1/2} \rho \quad (5.19)$$

n'est pas satisfaite, le théorème s'applique. Ailleurs, en effet, cette inégalité entraîne la bornitude uniforme de $|\dot{e}(t)|$ et celle de $|e(t)|$ par ρ . Or, en raison de la continuité de $e(t)$ et $\dot{e}(t)$, l'inégalité précédente devient une égalité à l'instant t_0 . La condition initiale (5.12) du théorème est donc satisfaite à l'instant t_0 . De plus d'après la condition (5.18), le gain $-g-$ est plus grand que $g_{\mu, \alpha, k, \delta}$ sur l'intervalle $[t_0, t_1[$. En prenant t_0 comme nouvel instant initial, le théorème s'applique donc sur l'intervalle $[t_0, t_1[$.



Le lemme 4 signifie que tant que les erreurs $e(t)$ et $\dot{e}(t)$ sont petites, le gain $g(q(t), \dot{q}(t), t)$ est libre de prendre n'importe quelle valeur positive. La bornitude uniforme de $|\dot{e}(t)|$ et celle de $|e(t)|$ par ρ sont assurées du moment que $-g-$ redevient plus grand que $-g_{\mu, \alpha, k, \delta}$ lorsque l'inégalité (5.19) n'est plus vraie. Nous verrons que dans les applications robotiques, ce résultat augmente la liberté de choix du gain de commande $g(q, \dot{q}, t)$. Il protège également notre analyse de la commande des robots d'être systématiquement biaisée en faveur de l'utilisation de grands gains de commande.

lemme 5

Il existe un réel positif $g_{\rho, \tau}$ tel que si la condition (5.11) est remplacée par :

$$g(q, \dot{q}, t) > g_{\rho, \tau}$$

alors les résultats du théorème s'appliquent encore.

En particulier, tout gain constant plus grand que $g_{\rho, \tau}$ assure la bornitude de $|e(t)|$ par ρ .

Ce résultat est une simple conséquence du fait que pour toutes les solutions $\{ q(t) \}$ ($t \in [0, T]$) satisfaisant la condition initiale (5.12) et obtenues avec un gain $g(q, \dot{q}, t)$ quelconque plus grand que $g_{\mu, \alpha, k, \delta}(q, \dot{q}, t)$, la fonction $t \rightarrow g_{\mu, \alpha, k, \delta}(q(t), \dot{q}(t), t)$ est uniformément bornée par un réel positif $g_{\rho, T}$. La dépendance vis à vis de ρ et T provient de l'appartenance de tous les points $(q(t), t)$ à l'ensemble $C_{\rho, T}$.

La condition initiale (5.12) indique que le domaine de stabilité "garanti" par l'analyse augmente avec ρ . Comme le domaine $C_{\rho, T}$ grandit avec ρ , la borne $g_{\rho, T}$ augmente également avec ρ . Il en résulte que le domaine de stabilité garanti par l'analyse est d'autant plus grand que le gain constant $-g$ est grand. L'étude antérieure du cas linéaire invariant montre cependant qu'il peut exister une valeur minimale g_0 du gain assurant un domaine de stabilité réel infiniment grand dans le cas où la fonction $e(q, t)$ est infiniment admissible.

2.6. APPLICATION AU PROBLEME DE LA COMMANDE DES ROBOTS

2.6.1 - Equation de l'erreur de poursuite

Nous avons donné au paragraphe 2.3.3 l'expression d'une structure générale de commande pour les robots, que nous rappelons :

$$\Gamma = -g(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, t) \hat{M}(\hat{q}, t) J_q^{-1}(\hat{q}, t) G \bar{\mu} D \hat{e}(q, t) + J_q(\hat{q}, t) \hat{\dot{q}} + j_t(\hat{q}, t) + l_c(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, t) \quad (6.1)$$

Soit $b_q(t)$, $b_{\dot{q}}(t)$ et $b_e(t)$ les erreurs sur les mesures de $q(t)$, $\dot{q}(t)$ et $e(t)$:

$$\hat{q}(t) = q(t) + b_q(t) \quad (6.2a)$$

$$\hat{\dot{q}}(t) = \dot{q}(t) + b_{\dot{q}}(t) \quad (6.2b)$$

$$\hat{e}(t) = e(t) + b_e(t) \quad (6.2c)$$

En assimilant, au niveau de l'analyse, ces erreurs à des fonctions de classe C^1 de la variable temporelle $-t-$, nous pouvons formellement poser :

$$\bar{g}(q, \dot{q}, t) = g(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, t) \quad (6.3a)$$

$$\bar{M}(q, t) = \hat{M}(\hat{q}, t) \quad (6.3b)$$

$$\bar{J}_q(q, t) = J_q(\hat{q}, t) \quad (6.3c)$$

$$\bar{j}_t(q, t) = j_t(\hat{q}, t) + \mu D b_e(t) + J_q(\hat{q}, t) b_{\dot{q}}(t) \quad (6.3d)$$

$$l_c(q, \dot{q}, t) = l_c(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, t) \quad (6.3e)$$

et écrire la commande (6.1)

$$\Gamma = -\bar{g}(q, \dot{q}, t) \hat{M}(q, t) \bar{J}_q^{-1}(q, t) G [\mu D e(q, t) + \bar{J}_q(q, t) \dot{q} + \bar{j}_t(q, t)] + \bar{l}_c(q, \dot{q}, t) \quad (6.4)$$

En remplaçant Γ par son expression (6.4) dans l'équation (2.13) du robot dans l'espace de la tâche, nous obtenons la forme générale de l'équation d'erreur de poursuite du robot :

$$\ddot{e} + \bar{g} \left(\frac{\partial e}{\partial q} \right) M^{-1} \hat{M} J_q^{-1} G \bar{J}_q \left(\frac{\partial e}{\partial q} \right)^{-1} \left[\mu \left(\frac{\partial e}{\partial q} \right) \bar{J}_q^{-1} D e + \dot{e} + \left(\frac{\partial e}{\partial q} \right) J_q^{-1} \bar{J}_t - \frac{\partial e}{\partial t} \right] + \frac{\partial e}{\partial q} M^{-1} (1 - \bar{l}_c) - f = 0 \quad (6.5)$$

Cette équation s'écrit comme l'équation différentielle (5.1) étudiée précédemment si nous posons :

$$\left[\begin{array}{l} A_1(q, t) A_2(q, t) = \frac{\partial e}{\partial q} (q, t) M^{-1}(q) \hat{M}(q, t) \bar{J}_q^{-1}(q, t) G \bar{J}_q(q, t) \left(\frac{\partial e}{\partial q} (q, t) \right)^{-1} \\ B(q, t) = \frac{\partial e}{\partial q} (q, t) \bar{J}_q^{-1}(q, t) \\ v(q, t) = \frac{\partial e}{\partial q} (q, t) \bar{J}_q^{-1}(q, t) \bar{j}_t(q, t) - \frac{\partial e}{\partial t} (q, t) \\ s(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial e}{\partial q} (q, t) M^{-1}(q) \left[l(q, \dot{q}, t) - \bar{l}_c(q, \dot{q}, t) \right] - f(q, \dot{q}, t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (6.6a) \\ (6.6b) \\ (6.6c) \\ (6.6d) \end{array}$$

2.6.2 - Conditions d'application du théorème de stabilité

Pour pouvoir appliquer les résultats de l'analyse du paragraphe 2.5, il nous reste à déterminer les conditions sous lesquelles les hypothèses H_1-H_5 de l'analyse sont vérifiées.

L'hypothèse H_1 est automatiquement vérifiée en imposant $\mu > 0$ et D symétrique positive.

Les hypothèses H_3 et H_4 imposent seulement des propriétés de différentiabilité pour les fonctions $j_t(q, t)$, $l_c(q, \dot{q}, t)$ et $J_q(q, t)$. Elles ne sont donc pas contraignantes. Il faut cependant en plus que $\bar{J}_q(q, t)$ ($= J_q(q, t)$ si $b_q(t) = 0$) soit inversible sur $C_{\rho, T}$.

L'hypothèse H_5 signifie que l'on doit choisir un gain $g(q, \dot{q}, t)$ positif et de classe C^1 sur $C_{\rho, T}$. Ce n'est pas non plus une condition contraignante.

L'hypothèse la plus sensible est l'hypothèse H_2 et plus particulièrement les points b) et c) qui imposent des propriétés de positivité aux fonctions matricielles $A_1(q,t)$, $A_2(q,t)$ et $B(q,t)$.

Positivité des fonctions $A_1(q,t)$ et $A_2(q,t)$

La relation (6.6.a) nous donne la composition du produit $A_1(q,t) A_2(q,t)$. Elle laisse cependant une certaine liberté quant au choix de chacune des fonctions A_1 et A_2 . Donnons quelques exemples de choix possibles en fonction de contraintes imposées sur $M(q,t)$, $J_q(q,t)$ et G . Nous supposons pour simplifier que l'erreur de mesure $b_q(t)$ est nulle de sorte que $\hat{M}(q,t)$ et $\bar{J}_q(q,t)$ se confondent respectivement avec $\hat{M}(q,t)$ et $J_q(q,t)$.

ex 1 : $\hat{M}(q,t) = M(q)$; $J_q(q,t) = \frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$

Dans ce cas :

$$A_1(q,t) A_2(q,t) = G$$

Si : $G = G_1 G_2$ où G_1 est positive et G_2 est symétrique positive, il suffit de poser $A_1 = G_1$ et $A_2 = G_2$

Si : G est choisi positive dès le départ (symétrique ou non), il suffit de poser $A_1 = G$ et $A_2 = I$.

ex 2 : $\hat{M}(q,t) = M(q)$, $J_q(q,t) = I$, $G > 0$

Dans ce cas :

$$A_1 A_2 = \frac{\partial e}{\partial q} G \frac{\partial e}{\partial q}^{-1}$$

Nous pouvons choisir :

$$A_1 = \frac{\partial e}{\partial q} G \frac{\partial e}{\partial q}^T \quad \text{matrice positive}$$

$$A_2 = \frac{\partial e}{\partial q}^{-T} \frac{\partial e}{\partial q}^{-1} \quad \text{matrice symétrique positive}$$

La positivité de $B(q,t) = \frac{\partial e}{\partial q}(q,t) J_q^{-1}(q,t)$ impose en plus que $\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$ soit positive sur C_p, T .

ex 3 : $M^{-1}(q) \hat{M}(q,t) > 0$ sur $C_{\rho,T}$, $J_q(q,t) = I$
 G symétrique et positive

Alors :

$$A_1 A_2 = \frac{\partial e}{\partial q} M^{-1} \hat{M} G \frac{\partial e}{\partial q}^{-1}$$

et nous pouvons choisir :

$$A_1 = \frac{\partial e}{\partial q} M^{-1} \hat{M} \frac{\partial e}{\partial q}^T$$

$$A_2 = \frac{\partial e}{\partial q}^{-T} G \frac{\partial e}{\partial q}^{-1}$$

Il faut aussi que $\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$ soit positive sur $C_{\rho,T}$ pour que $B(q,t)$ soit positive.

Notons que par rapport à l'exemple précédent la condition portant sur le choix de $\hat{M}(q,t)$ est beaucoup moins contraignante que l'égalité stricte avec $M(q)$. Cette condition est par exemple vérifiée en prenant $\hat{M} = I$.

Le relachement de la contrainte sur le choix de \hat{M} entraîne cependant une contrainte supplémentaire sur G qui doit être choisie symétrique.

ex 4 : $M^{-1}(q) \hat{M}(q,t) > 0$, $G = I$

Alors :

$$A_1 A_2 = \frac{\partial e}{\partial q} M^{-1} \hat{M} \frac{\partial e}{\partial q} = 1$$

et nous pouvons choisir

$$A_1 = \frac{\partial e}{\partial q} M^{-1} \hat{M} \frac{\partial e}{\partial q}^T$$

$$A_2 = \left(\frac{\partial e}{\partial q} \quad \frac{\partial e}{\partial q}^T \right)^{-1}$$

ex 5 : $\hat{M}(q,t)$ positive symétrique, $G = I$

Alors :

$$A_1 A_2 = \frac{\partial e}{\partial q} M^{-1} \hat{M} \frac{\partial e}{\partial q} = 1$$

et nous pouvons choisir :

$$A_1 = \frac{\partial e}{\partial q} M^{-1} \frac{\partial e}{\partial q}^T$$

$$A_2 = \frac{\partial e}{\partial q}^{-T} \hat{M} \frac{\partial e}{\partial q}^{-1}$$

Le cas de l'exemple 5 est particulièrement important parce qu'il nous indique que l'analyse de stabilité du paragraphe 2.5 s'applique dès lors que $\hat{M}(q,t)$ est choisie positive symétrique (à condition de choisir $G = I$). Il n'est donc pas nécessaire que l'erreur de modélisation $(M(q) - \hat{M}(q,t))$ soit petite.

Remarquons que cette condition sur $\hat{M}(q,t)$ est très faible et qu'elle est automatiquement satisfaite dans le cas des commandes par découplage et en vitesse. Dans le cas des commandes adaptatives, elle coïncide avec une des conditions que nous avons mis en évidence au cours de l'analyse de stabilité de ces commandes.

positivité de la fonction $B(q,t)$

Compte tenu de la relation (6.6.b), cette condition signifie que la fonction matricielle $J_q(q,t)$ doit être choisie de sorte que :

$$\forall (q,t) \in C_{p,T} : \frac{\partial e}{\partial q}(q,t) \bar{J}_q^{-1}(q,t) > 0 \quad (6.7)$$

En supposant, pour simplifier, que $\bar{J}_q(q,t) = J_q(q,t)$ soit parce que $J_q(q,t)$ ne dépend pas de la variable q , soit parce que la mesure de la position articulaire $q(t)$ n'est pas entachée d'erreur ($\Rightarrow b_q(t) = 0$), cette condition devient :

$$\forall (q,t) \in C_{p,T} : \frac{\partial e}{\partial q}(q,t) J_q^{-1}(q,t) > 0$$

(6.8)

Cette condition est à notre avis la plus importante parce qu'elle rend compte de l'**information minimale** que l'utilisateur doit posséder pour être théoriquement capable de former une bonne commande. En effet, d'après le théorème du paragraphe 25, il suffit ensuite de choisir un gain $g(q,\dot{q},t)$ (constant ou non-linéaire) et un scalaire μ suffisamment grands pour assurer la stabilité du système et une erreur de poursuite $e(t)$ petite. Cette condition est donc essentielle à la robustesse de la commande.

Il est intéressant de remarquer que l'information nécessaire à la réalisation de la condition (6.8) porte uniquement sur la matrice jacobienne $\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$ de la tâche et non directement sur les caractéristiques du robot. Notamment, puisque la tâche est a priori indépendante des caractéristiques inertielles du robot (masse et moment d'inertie des éléments du robot) nous pouvons en déduire qu'il n'est théoriquement pas nécessaire de connaître quoique ce soit sur ces caractéristiques pour former une bonne commande. Ceci permet également d'expliquer pourquoi la modélisation du robot comme un simple double intégrateur d'équation : $\ddot{q} = \Gamma$ suffit souvent à aborder de façon correcte le problème de la commande.

Si de plus la tâche est indépendante des caractéristiques géométriques du robot (comme par exemple dans le cas de la poursuite d'une trajectoire dans l'espace des coordonnées articulaires où $\frac{\partial e}{\partial q}(q,t) = I$) il apparait qu'il devient virtuellement possible de commander le robot sans connaître aucune de ses caractéristiques. Ceci explique, entre autre, qu'une simple commande à coefficients constants du type P.D. (Proportionnelle-Dérivée) puisse dans certains cas être utilisée en donnant de bons résultats.

L'obligation de connaître une fonction matricielle $J_q(q,t)$ satisfaisant la condition (6.8) nous fournit également un moyen pratique de tester en ligne l'admissibilité de la tâche. En effet, si la matrice : $B(q,t) = \frac{\partial e}{\partial q}(q,t) J_q^{-1}(q,t)$ vérifie la condition supplémentaire d'être, ainsi que son inverse, uniformément bornée sur tout connexe $C_{\rho,T}$ où la fonction $e(q,t)$ est admissible, alors la matrice $J_q(q(t),t)$ doit rester inversible et bornée aussi longtemps que $|e(t)| < \rho$. Dans ces conditions

$$\det[J_q(q(t),t)] \text{ et } |J_q(q(t),t)|$$

peuvent servir d'indicateurs de l'admissibilité de la tâche à l'instant t .

Nous reviendrons au paragraphe 2.9 sur l'utilisation de la condition (6.8) dans les applications.

En résumé de ce qui précède, nous avons montré que les résultats de stabilité du paragraphe 2.5 s'appliquent à toute commande (6.1) à condition que $\hat{M}(q,t)$ soit choisie symétrique positive et que $J_q(q,t)$ soit telle que $\frac{\partial e}{\partial q}(q,t) J_q^{-1}(q,t) > 0$ sur $C_{\rho,T}$. La matrice G devra en général être choisie positive et sera prise égale à la matrice identité lorsque $\hat{M}(q,t)$ n'aura aucune raison d'être une bonne approximation de la matrice d'inertie $M(q)$ du robot. Dans ces conditions notre analyse révèle que les propriétés de stabilité et les performances de toute commande (6.1) dépendent essentiellement du choix du gain $g(q,\dot{q},t)$ et du scalaire μ . Nous savons déjà que pour la commande par découplage idéale, et lorsque les erreurs de mesure sont nulles, il suffit que g et μ soient positifs pour que $e(t)$ converge vers 0. Pour les autres commandes, le théorème du paragraphe 2.5 nous fournit des bornes inférieures de μ et de $g(q,\dot{q},t)$ au delà desquelles la bornitude de $|e(t)|$ est assurée. Ce théorème montre également comment une augmentation adéquate de $g(q,\dot{q},t)$ et μ permet de rendre $|e(t)|$ aussi petit que l'on veut asymptotiquement. Les relations (5.8) et (5.9) peuvent être exploitées pour mettre en évidence comment le choix des autres termes entrant

dans l'expression de la commande influent sur les tailles de $g(q, \dot{q}, t)$ et de μ . Une inspection plus poussée de ces relations montrerait par exemple que plus on s'éloigne de la commande par découplage idéale, plus $g(q, \dot{q}, t)$ et μ doivent être choisis grands. C'est en ce sens qu'il faut comprendre que l'utilisation de grands gains de commande est le prix à payer pour être robuste vis-à-vis des erreurs de modélisation. Rappelons une fois encore que le qualificatif "grand" n'a qu'une valeur indicative et ne permet pas de juger dans l'absolu de la taille réelle des gains. Celle-ci dépend de nombreux facteurs (nature de la tâche robotique, vitesses de déplacement que l'exécution de cette tâche requiert, taille des bruits de mesure, valeur des réducteurs de transmission des couples, précision requise, amortissement de la commande, utilisation d'un terme de retour intégral, etc...) qu'il est seulement possible de discuter dans le cadre d'applications spécifiques.

Enfin le corollaire du théorème nous donne les conditions d'extension des résultats du théorème sur l'intervalle de temps $[0, +\infty[$. Il met notamment en évidence l'importance de la bornitude de $|s(q, \dot{q}, t)|$ par rapport aux variables q et t pour obtenir la bornitude de l'erreur $e(t)$ à l'aide d'un gain $g(q(t), \dot{q}(t), t)$ lui-même borné. En se reportant à l'expression (6.6d) nous voyons que $s(q, \dot{q}, t) = 0$ si $l_c(q, \dot{q}, t) = l(q, \dot{q}, t) - M(q) \frac{\partial e}{\partial q}(q, t) f(q, \dot{q}, t)$. Nous retrouvons bien sûr le choix de $l_c(q, \dot{q}, t)$ fait dans la commande par découplage linéaire. Dans de nombreuses applications ce choix ne sera pas respecté en raison de la complexité du calcul de $f(q, \dot{q}, t)$ qui fait intervenir les dérivées secondes des composantes de $e(q, t)$. Remarquons cependant que pour que la bornitude uniforme de $|s(q, \dot{q}, t)|$ par rapport à q et t sur C_ρ soit assurée, il suffit que $|\frac{\partial e}{\partial q}(q, t)|$, $|M^{-1}(q)|$, $|f(q, \dot{q}, t)|$ et $|l(q, \dot{q}, t) - l_c(q, \dot{q}, t)|$ soient uniformément bornés par rapport à q et t sur C_ρ . L'introduction dans $l_c(q, \dot{q}, t)$ d'un terme de retour intégral, de façon à obtenir des commandes de type P.I.D., est donc permise à condition de s'assurer par avance (en utilisant par exemple un mécanisme de saturation) de la bornitude de ce terme.

2.6.3 - Choix du gain $g(q, \dot{q}, t)$

2.6.3.1 - Gains constants

Notre analyse de stabilité met en évidence l'importance du choix du gain $g(q, \dot{q}, t)$ au sein de toute commande (6.1). Si l'on se borne à une interprétation globale qu'il conviendrait de compléter et de nuancer au moment de traiter une application particulière,

il ressort de cette analyse que plus le gain $-g-$ est grand, moins le comportement en position du système commandé est sensible au choix des autres termes entrant dans l'expression de la commande. Ce fait est facilement observable à partir des relations (5.13) et (5.15) du théorème selon lesquelles si $-g-$ est grand (α grand), si $J_{q\Delta} \frac{\partial e}{\partial q} (= > B\Delta I)$ et $j_t \approx \frac{\partial e}{\partial t}$ et si les erreurs de mesures b_e, b_q et $b_{\dot{q}}$ sont négligeables ($=> \eta(t) \Delta 0$ asymptotiquement) alors l'erreur $e(t)$ évolue asymptotiquement selon l'équation linéaire invariante du premier ordre :

$$\dot{e}(t) + \mu D e(t) = 0$$

qui ne dépend ni des caractéristiques du robot, ni du choix des termes \hat{M} et I_c dans la commande. Cette équation montre que le système réagit en régulation comme un système linéaire sur-amorti avec une dynamique fixée par le choix du scalaire μ et de la matrice positive D .

Au vu de ce résultat et du lemme 5 qui montre que le résultat s'applique encore lorsque le gain $-g-$ est constant, il est tentant de conclure qu'il suffit de choisir un grand gain $-g-$ constant pour obtenir dans tous les cas un bon comportement de la commande et une bonne exécution de la tâche. Sans que cette conclusion soit erronée, parce que la robustesse issue de l'utilisation d'un grand gain est un fait indiscutable mis en évidence par l'analyse, il est indispensable d'en modérer la portée par d'autres considérations de robustesse que nous exposerons plus loin. Les grands gains ont en effet aussi leurs inconvénients. Il n'en demeure pas moins vrai que le choix d'un gain constant constitue le choix le plus simple et qu'il est pour cette raison privilégié dans de nombreuses applications.

Dans le cas d'une commande par découplage le gain $-g-$ sera logiquement choisi en raisonnant à partir de l'équation d'erreur idéale (relation (4.6)) :

$$\ddot{e} + g G (\mu D e + \dot{e}) = 0$$

Par exemple si $G = D = I$, on pourra choisir $g = 4\mu$. Cette solution correspond en effet à un amortissement critique du système (6.10). Une plus petite valeur de $-g-$ correspondrait à un régime sous-amorti et conduirait à des oscillations indésirables. Le scalaire μ - détermine quant à lui la vitesse de convergence de $e(t)$ vers 0. Il devra donc en principe être choisi de sorte que le temps de convergence de $e(t)$ vers 0

soit petit devant le temps nécessaire au manipulateur pour effectuer un mouvement de grande amplitude. Par exemple, si un mouvement dure une seconde, $\mu \approx 10$ (\Rightarrow temps de montée de l'ordre de 0.1s) sera un ordre de grandeur raisonnable.

Dans le cas d'une commande plus simple (du type commande en vitesse) il n'existe pas de règle générale pour choisir la valeur de $-g$. Une valeur convenable sera donc généralement obtenue dans la pratique par tâtonnements successifs à partir de la configuration du robot qui nécessite la plus grande valeur. Si les forces de coriolis et centrifuges sont négligeables (par exemple dans le cas de mouvements lents) et si les forces de frottements et de gravité sont également négligeables ($\Rightarrow 1 \ll 0$) les configurations les plus défavorables sont généralement celles qui correspondent à une grande matrice d'inertie du robot. En effet, dans ce cas l'équation du robot, qui s'écrit $\ddot{q} \approx M^{-1} \Gamma$, montre que le gain global du système est égal au gain de commande "divisé" par la matrice d'inertie et qu'il est donc minimal lorsque M est maximal. En prenant, par exemple, $\hat{M} = D = I$ dans l'expression de la commande (6.1), il faudra en principe choisir $g \gg 4 \mu \lambda_{\max}(M)$ (où $\lambda_{\max}(M)$ est la borne supérieure des valeurs propres de la matrice d'inertie M) de sorte à assurer un amortissement suffisant quelque soit la position du robot.

2.6.3.2 - Gains non linéaires

Le théorème du paragraphe 2.5 suggère la possibilité d'utiliser un gain non-linéaire $g(q, \dot{q}, t)$. Plus précisément, ce théorème indique que pour que l'erreur $e(t)$ demeure en norme inférieure au réel positif ρ (dont la seule contrainte est d'être inférieure au degré d'admissibilité de la tâche) il suffit d'utiliser un gain non-linéaire plus grand que le gain "minimal" $g_{\mu, \alpha, k, \delta}(q, \dot{q}, t)$ donné par la relation (5.8). A partir de la donnée des fonctions $\hat{M}(q, t)$, $l_c(q, \dot{q}, t)$, $J_q(q, t)$ et $j_t(q, t)$ et d'une connaissance approximative des caractéristiques $M(q)$ et $l(q, \dot{q}, t)$ du robot ainsi que de la fonction de tâche $e(q, t)$, il n'est généralement pas difficile de trouver une fonction $g(q, \dot{q}, t)$ qui majore $g_{\mu, \alpha, k, \delta}(q, \dot{q}, t)$. Le plus difficile est de trouver une fonction peu majorante. Il ne faut cependant pas perdre de vue que la relation (5.8) a plus une valeur qualitative que quantitative du fait que les résultats du théorème repose sur des conditions suffisantes mais non nécessaires. Pour cette raison, l'exploitation de la relation (5.8) peut conduire à un gain $g(q, \dot{q}, t)$ inutilement trop grand.

Dans ces conditions, il semble tout aussi raisonnable de déterminer à l'avance l'expression d'un gain non-linéaire à partir de considérations d'ordre pratique, quitte à vérifier par la suite que l'expression obtenue est compatible avec les résultats de l'analyse. Quelques considérations pouvant guider notre choix sont les suivantes :

i) si la taille de l'erreur $e(t)$ est inférieure à la précision demandée, rien ne s'oppose à une diminution du gain. Par contre une augmentation de l'erreur signifie que les erreurs de modélisation ont un effet néfaste non négligeable auquel il convient de s'opposer en augmentant le gain. L'augmentation de celui-ci en même temps que $|e(t)|$ permet entre autre de réduire l'effet des frottements secs.

ii) l'effet des forces de Coriolis et centrifuges, lorsque celles-ci sont incomplètement modélisées dans le terme $h(q, \dot{q}, t)$ de la commande, augmente avec la vitesse $\dot{q}(t)$ du robot. L'augmentation du gain en même temps que $|\dot{q}(t)|$ contribue à limiter cet effet.

Ces considérations suggèrent d'essayer (mais ce n'est pas la seule possibilité) un gain de la forme :

$$g(q(t), \dot{q}(t), t) = g_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n g_{1,i} |e_i(t)| \right)^{n_1} \left(1 + \sum_{i=1}^n g_{2,i} |\dot{q}_i(t)| \right)^{n_2} \quad (6.11)$$

où : $e_i(t)$ est la i ème composante du vecteur $e(t)$

$\dot{q}_i(t)$ est la i ème composante du vecteur $\dot{q}(t)$

$g_0 > 0, g_{1,i} > 0, g_{2,i} > 0 \quad (1 \leq i \leq n)$

$n_1 > 0, n_2 > 0$

D'après le lemme 5, nous savons déjà qu'il existe une valeur minimale de g_0 à partir de laquelle la stabilité du système est garantie.

L'intérêt du lemme 4 est de montrer qu'il n'est pas systématiquement nécessaire que $g(q, \dot{q}, t)$ soit toujours grand et donc que g_0 soit lui-même grand. Il est ainsi établi dans [100], dans le cas où la tâche consiste à suivre une trajectoire dans l'espace des coordonnées articulaires du robot, que les conditions du lemme 4 sont vérifiées en choisissant g_0 positif quelconque, $n_1 \geq 3$ et $n_2 \geq 1$ ($n_1 \geq 1$ si le manipulateur possède seulement des articulations en rotation).

En résumé :

i) l'utilisation d'un gain non-linéaire en place d'un gain constant augmente la souplesse d'emploi de toute commande (parce que la classe des gains non-linéaires contient celle des gains constants) et doit donc permettre d'améliorer ses performances (voir les simulations données dans [111]).

ii) cette amélioration est liée dans la pratique au fait que le choix d'un gain constant est toujours biaisé vers les grandes valeurs, parce que ce gain doit être déterminé en fonction de la configuration du robot la plus défavorable. Par contre un gain non-linéaire a la possibilité de varier en fonction des diverses configurations du robot de sorte à n'assumer de grandes valeurs que lorsque cela est nécessaire.

iii) l'effet d'une variation de charge transportée ou l'erreur statique résultant de frottements secs peuvent être réduits en liant la taille du gain à celle de $|e(t)|$. En ce sens, une commande utilisant un gain non-linéaire peut être perçue comme étant une commande adaptative (c'est d'ailleurs l'optique de certains auteurs [109]) bien que ne faisant pas intervenir d'algorithme d'identification. En réalité, rien ne s'oppose (si ce n'est l'argument de complexité) de compléter une commande adaptative avec identification du modèle du robot par l'utilisation d'un gain non-linéaire. C'est peut-être une façon de rendre ces commandes plus robustes.

iv) la simplicité de la relation (6.11) montre que l'introduction d'un gain non-linéaire ne rend pas nécessairement beaucoup plus complexe le calcul de la commande. L'utilisation de gains non-linéaires peut donc dans certains cas constituer une alternative moins chère à l'utilisation d'un modèle complet du robot (une solution n'excluant d'ailleurs pas l'autre).

2.6.4. Effets des erreurs de mesure b_q , $b_{\dot{q}}$ et b_e

Les effets des erreurs de mesure sont examinés selon deux points de vue complémentaires. Le premier consiste à exploiter le théorème du paragraphe 2.5 pour analyser l'influence des erreurs de mesure sur la stabilité du système. Le second est celui d'une analyse stochastique dans le but de mettre en évidence certaines conséquences énergétiques résultant de ces erreurs de mesure.

2.6.4.1 - Utilisation du théorème de stabilité

L'effet le plus sensible de l'erreur $b_q(t)$ portant sur la mesure de $q(t)$ se situe a priori au niveau de la satisfaction de la condition fondamentale (6.7) que nous rappelons :

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t) J_q^{-1}(\hat{q}(t), t) > 0 \quad (6.12)$$

Supposons en effet que nous choisissons, comme dans la commande par découplage :

$$J_q(q,t) = \frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$$

Si $b_q = 0$ alors la condition (6.12) est automatiquement satisfaite partout ou $\frac{\partial e}{\partial q}$ est inversible. Dans le cas où $b_q \neq 0$, nous obtenons en faisant une approximation du premier ordre :

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q(t),t) J_q^{-1}(\hat{q}(t),t) = [\bar{I} + \Delta_i(t)]^{-1} \quad (6.13a)$$

avec :

$$\Delta_i(t) = \left(\sum_{i=1}^n b_{q,i}(t) \frac{\partial^2 e}{\partial q^2}(q(t),t) \right) \left(\frac{\partial e}{\partial q}(q(t),t) \right)^{-1} \quad (6.13b)$$

($b_{q,i}(t)$ étant la i ème composante du vecteur $b_q(t)$)

Cette relation montre que si b_q est assez grand où si le robot s'approche d'une région où $|\left(\frac{\partial e}{\partial q}(q(t),t)\right)^{-1}|$ devient grand (par exemple près d'une singularité jacobien) alors la matrice $\Delta_i(t)$ devient non négligeable et peut rendre la matrice $[\bar{I} + \Delta_i(t)]^{-1}$ non positive. Cela se traduit physiquement par le fait que la commande ne corrige plus dans la bonne direction. La stabilité du système est alors menacée.

Les erreurs de mesure $b_e(t)$ et $b_q(t)$ agissent quant à elles au niveau du vecteur de perturbation $v(t)$ qui s'écrit d'après (6.3d) et (6.6c) :

$$v(t) = \frac{\partial e}{\partial q}(q(t),t) J_q^{-1}(\hat{q}(t),t) [j_t(\hat{q}(t),t) + \mu D b_e(t) + J_q(\hat{q}(t),t) b_q(t)] - \frac{\partial e}{\partial t}(q(t),t) \quad (6.14)$$

Pour simplifier l'étude, plaçons nous dans le cas favorable où $b_q = 0$, $J_q = \frac{\partial e}{\partial q}$
 $j_t = \frac{\partial e}{\partial t}$ et $D = I$.

Dans ces conditions :

$$v(t) = \mu b_e(t) + \frac{\partial e}{\partial q}(q(t),t) b_q(t) \quad (6.15)$$

Examinons l'effet de $b_e(t)$ en supposant que $b_q = 0$. Alors :

$$v = \sup_{t \in [0, T]} |v(t)| = \mu b_{e, \max} \quad (6.16a)$$

où

$$b_{e, \max} = \sup_{t \in [0, T]} |b_e(t)| \quad (6.16b)$$

La relation (5.9) qui détermine la valeur minimale μ_ρ de μ pour laquelle l'application du théorème de stabilité permet de montrer la bornitude de $|e(t)|$ par ρ s'écrit :

$$\mu_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{1}{(1 - \frac{1}{\alpha})} \left[\frac{\sigma_2^M}{\sigma_2^m} \right]^{1/2} c_{A_1} c_{A_2} v + \frac{k}{(\sigma_2^m)^{1/2}} \quad (\alpha > 1, k > 0) \quad (6.17)$$

soit en utilisant (6.16) :

$$\mu_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{1}{(1 - \frac{1}{\alpha})} \left[\mu \frac{\sigma_2^M}{\sigma_2^m} \right]^{1/2} c_{A_1} c_{A_2} b_{e, \max} + \frac{k}{(\sigma_2^m)^{1/2}} \quad (6.18)$$

Prenons $k \ll 1$, la condition $\mu > \mu_\rho$ (condition (5.10) du théorème) impose compte tenu de (6.18) :

$$b_{e, \max} < \rho \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{\sigma_2^m}{\sigma_2^M}\right)^{1/2} \frac{1}{c_{A_1} c_{A_2}} \quad (6.19)$$

Cette inégalité est analytiquement intéressante parce qu'elle montre que la taille maximale permise pour l'erreur $b_e(t)$ est proportionnelle au degré d'admissibilité ρ de la tâche et qu'elle est inversement proportionnelle aux nombres de conditionnement des matrices A_1 et A_2 .

Dans le cas où la tâche est infiniment admissible (par exemple dans le cas de la poursuite d'une trajectoire dans l'espace des coordonnées articulaires) nous pouvons déduire qu'il est toujours possible d'assurer la stabilité du système quelque soit la taille (bornée) de l'erreur de mesure $b_e(t)$. Par contre, lorsque la tâche est faiblement admissible, comme cela peut être le cas à proximité d'une singularité, il importe pour la stabilité du système (sans parler pour l'instant de précision) que cette erreur de mesure soit aussi petite que possible.

L'effet de l'erreur de mesure $b_q^*(t)$ peut être examiné de la même façon en posant $b_e = 0$. Nous obtenons alors :

$$v < \sup \left(\left| \frac{\partial e}{\partial q} \right| \right) b_{q, \max}^* \quad (6.20)$$

et l'application de la condition (5.10) du théorème conduit à :

$$\mu > \frac{1}{\rho} \left(\frac{\sigma_2^M}{\sigma_2^m}\right)^{1/2} c_{A_1} c_{A_2} \sup \left(\left| \frac{\partial e}{\partial q} \right| \right) b_{q, \max}^* \quad (6.21)$$

Cette inégalité montre que contrairement au cas de l'erreur de mesure b_e il est toujours possible en théorie de limiter l'effet de l'erreur b_q et d'assurer la stabilité du système (si bien sûr la tâche est admissible) en choisissant une valeur de μ suffisamment grande. D'après (6.21) la taille minimale de μ est inversement proportionnelle au degré d'admissibilité de la tâche.

Enfin, d'après le point iv) du théorème, si la taille de b_e et la valeur de μ sont compatibles avec la réalisation de la condition (5.10), et si le gain $g(q, \dot{q}, t)$ est choisi suffisamment grand, alors l'erreur de régulation $e(t)$ vérifie asymptotiquement (et approximativement) l'équation :

$$\dot{e} = - \mu \frac{\partial e}{\partial q} J_q^{-1} D e + \eta \quad (6.22)$$

avec :

$$|\eta(t)| < \left(\frac{\sigma_2^M}{\sigma_2^m} \right)^{1/2} c_{A_1} c_{A_2} v + \frac{k}{(\sigma_2^m)^{1/2}} \quad (6.23)$$

L'équation (6.22) relie la taille de $|e(t)|$ à celle de $|\eta(t)|$. Grosso modo, elle montre (en posant $\dot{e}=0$) que la taille de $|e(t)|$ est proportionnelle à celle de $|\eta(t)|$. En choisissant $k \ll 1$ (ce qui contraint d'après (5.8c) à utiliser un grand gain $g(q, \dot{q}, t)$ lorsque $|s(q, \dot{q}, t)|$ n'est pas petit) la relation (6.23) montre que la taille de $\eta(t)$ est elle-même proportionnellement liée à celle du vecteur de perturbation $v(t)$. Il en résulte que la taille de $e(t)$ est asymptotiquement proportionnellement liée à celle de $v(t)$. Pour que la précision soit bonne, c'est à dire pour que $e(t)$ soit asymptotiquement petit, il suffit donc en théorie que le gain $g(q, \dot{q}, t)$ soit suffisamment grand (cette notion de grandeur étant relative et fonction, de par la relation (5.8), du choix des autres termes de la commande) et que $v(t)$ soit asymptotiquement petit. D'après la relation (6.14), $v(t)$ est petit si les erreurs de mesure b_e , b_q et b_q sont elles-mêmes petites et si :

$$\frac{\partial e}{\partial q} J_q^{-1} j_t - \frac{\partial e}{\partial t} \approx 0 \quad (6.24)$$

Cette condition nous renseigne sur la façon dont $j_t(q, t)$ devrait être choisi.

Idéalement :

$$j_t = J_q \left(\frac{\partial e}{\partial q} \right)^{-1} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (6.25)$$

et nous retrouvons bien sûr $j_t = \frac{\partial e}{\partial t}$ dans le cas de la commande par découplage où $J_q = \frac{\partial e}{\partial q}$.

Dans le cas particulier où la tâche consiste en la poursuite d'une trajectoire $\{ q_r(t) \}$ définie dans l'espace des coordonnées articulaires du robot ($\Rightarrow e(q,t) = q - q_r(t)$), la condition (6.24) est vérifiée en prenant :

$$J_q = I, j_t(t) = \frac{\partial e}{\partial t}(q(t), t) = -\dot{q}_r(t)$$

Notons que si seule la précision en fin de mouvement importe, lorsque $\dot{q}_r(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, nous pouvons également prendre $j_t(t) = 0$. L'expression de la commande s'en trouve légèrement simplifiée.

Plus généralement, le choix $j_t = 0$ pourra être fait chaque fois que $\frac{\partial e}{\partial t}(q_r(t), t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Dans ce cas, en négligeant les erreurs de mesure :

$v(t) \approx -\frac{\partial e}{\partial t}(q(t), t)$ et la valeur du scalaire μ devra être ajustée en fonction du degré d'admissibilité de la tâche et de la taille maximale de $|\frac{\partial e}{\partial t}(q(t), t)|$.

2.6.4.2 - Analyse stochastique

Il est tentant d'affirmer que l'utilisation de grands gains dans la commande conduit à de grandes valeurs de commande. Sans plus d'explications, cette affirmation est fautive. Notre analyse permet en effet de montrer que si les mesures de $e(t)$, $q(t)$ et $\dot{q}(t)$ ne sont pas entachées d'erreurs et si initialement $e(0) = \dot{e}(0) = 0$, alors plus le gain $-g-$ est grand plus la commande ressemble à la commande idéale :

$$\Gamma_r(t) = M(q_r(t))\ddot{q}_r(t) + l(q_r(t), \dot{q}_r(t), t) \quad (6.26)$$

qui est la commande d'énergie minimale assurant l'exécution parfaite de la tâche ($e(t)=0$ pour $t \in [0, T]$). Cette propriété est vraie même si le modèle de robot utilisé pour la synthèse de la commande est très approximatif ($\hat{M} \neq M, \hat{l} \neq l$) et si $J_q \neq \frac{\partial e}{\partial q}$ et $j_t \neq \frac{\partial e}{\partial t}$. Il suffit que les conditions d'application du théorème du paragraphe 2.5 soient réunies, les plus importantes de ces conditions étant $\hat{M} > 0$ et $\frac{\partial e}{\partial q} J_q^{-1} > 0$.

Cette propriété des grands gains est en fait à la base des propriétés de robustesse des commandes que nous étudions. Elle met également en évidence la valeur limitée de simulations où les erreurs de mesure ne sont pas modélisées, puisqu'il suffit dans ce cas d'augmenter le gain $-g-$ pour améliorer la commande.

La prise en compte des erreurs de mesure conduit à un résultat sensiblement différent, comme nous allons maintenant le montrer.

Dans le seul but de dégager quelques principes fondamentaux, il nous suffit d'extrapoler le cas du robot le plus simple qui a pour équation :

$$m \ddot{q} = \Gamma \quad (n = 1) \quad (6.27)$$

Considérons également la tâche simple consistant à suivre une trajectoire idéale $\{q_r(t)\}$ déterminée à l'avance.

Il est immédiat de vérifier que la commande :

$$\Gamma = -g(\mu \hat{e} + \dot{\hat{e}}) + m \ddot{q}_r \quad (6.28a)$$

avec :

$$\hat{e} = \hat{q} - q_r = (q - q_r) + b_q = e + b_e \quad (b_e = b_q) \quad (6.28b)$$

et :

$$\dot{\hat{e}} = \dot{\hat{q}} - \dot{q}_r = (\dot{q} - \dot{q}_r) + b_{\dot{q}} = \dot{e} + b_{\dot{q}} \quad (6.28c)$$

appartient à la classe des commandes (3.16).

En utilisant (6.28) dans (6.27) nous obtenons l'équation d'erreur suivante :

$$\ddot{e} + \frac{g}{m}(\mu e + \dot{e}) + \frac{g}{m}(\mu b_e + b_{\dot{q}}) = 0 \quad (6.29)$$

dont une représentation sous forme d'équation d'état est :

$$\dot{X} = A X + w$$

avec :

$$X = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ e \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu g/m & -g/m \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu g/m \end{bmatrix} b_e + \begin{bmatrix} 0 \\ g/m \end{bmatrix} b_{\dot{q}}$$

Modélisons maintenant les erreurs de mesure b_e et $b_{\dot{q}}$ comme des bruits blancs centrés stationnaires indépendants de variances respectives :

$$\sigma_e = E[b_e^2], \quad \sigma_{\dot{q}} = E[b_{\dot{q}}^2]$$

Soit Σ la matrice de variance asymptotique du vecteur d'état X .

$$\Sigma = \lim_{t \rightarrow +\infty} E[X(t)X^T(t)] \quad (6.31)$$

Cette matrice est solution de l'équation :

$$0 = A\Sigma + \Sigma A^T + R \quad (6.32a)$$

où :

$$R = E[w(t)w(t)^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{g^2}{m^2}(\mu^2\sigma_e + \sigma_q) \end{bmatrix} \quad (6.32b)$$

Après un calcul simple nous obtenons :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} E(e^2) = \sigma_e/2 + \sigma_q^*/2\mu^2 & 0 \\ 0 & E(\dot{e}^2) = (\sigma_e + \sigma_q^*/\mu^2)\mu g/2m \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Cette relation montre deux choses :

i) l'énergie $E(e^2)$ de l'erreur en position est indépendante de la taille du gain g . Ceci est en accord avec l'analyse déterministe selon laquelle une augmentation du gain permet de réduire l'erreur statique (qui dans notre exemple est toujours nulle parce qu'asymptotiquement $E(e) = 0, \forall g$) sans pour autant augmenter l'erreur dynamique. On retrouve également qu'une augmentation du paramètre μ permet de réduire l'effet de l'erreur de mesure b_q^* mais est sans action sur la contribution de l'erreur b_e .

ii) l'énergie $E(\dot{e}^2)$ de l'erreur en vitesse est proportionnelle à la taille du gain g . Cela se traduit dans la pratique par le fait qu'une augmentation de gain s'accompagne d'une augmentation de la bande passante du système commandé et favorise les phénomènes de vibrations à haute fréquence. Dans le cas où le robot est parfaitement rigide (c'est une de nos hypothèses de départ), l'existence de telles vibrations est sans conséquence sur les performances de la commande parce que leur amplitude ne dépend pas du gain (voir point i)) mais seulement de l'amplitude des bruits de mesure. Notons au

passage qu'une augmentation du paramètre μ tend à augmenter la contribution du bruit b_e alors qu'elle tend à réduire celle de $b_{\dot{q}}$. Il peut cependant résulter à long terme une fatigue accrue des structures et de la mécanique du robot. Le problème est plus crucial dans le cas où le robot est imparfaitement rigide car il y a alors un risque accru d'excitation des modes de résonance (généralement localisés dans les hautes fréquences) de la structure du robot.

Examinons maintenant l'effet des bruits de mesure sur l'énergie de la commande. D'après (6.28) :

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma - E[\Gamma] = -g(\mu e + \dot{e}) - g(\mu b_e + b_{\dot{q}}) \quad (6.34)$$

où $E[\Gamma] = m\ddot{q}_r$ est l'espérance de la valeur de la commande (c'est également la commande idéale lorsque les erreurs initiales $e(0)$ et $\dot{e}(0)$ sont nulles). Remarquons que l'énergie de la commande idéale dépend uniquement du choix de la trajectoire de référence $\{q_r(t)\}$. Si $b_e = b_{\dot{q}} = 0$, alors $e(t)$ et $\dot{e}(t)$ convergent exponentiellement vers 0 et par conséquent $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\Gamma}(t) = 0$. $\tilde{\Gamma}$ est donc la "composante bruitée" de la commande qui résulte de l'existence des bruits de mesure b_e et $b_{\dot{q}}$. L'effet de ces bruits sur la commande se mesure donc en calculant l'énergie de $\tilde{\Gamma}$, soit $E[\tilde{\Gamma}^2]$. A partir de (6.33) et (6.34) nous obtenons :

$$E[\tilde{\Gamma}^2] = (\sigma_e + \sigma_q/\mu^2)g^3/2m + (\mu^2\sigma_e + \sigma_q)3g^2/2 \quad (6.35)$$

De cette relation nous déduisons le point suivant :

iii) l'énergie de la composante bruitée de la commande augmente approximativement comme le cube de la taille du gain g . Autrement dit cette énergie augmente d'un facteur 1000 lorsque le gain augmente seulement d'un facteur 10. Ce point est important parce qu'il montre que l'énergie dissipée par la partie non-efficace de la commande augmente très vite avec le gain de commande. Il peut même arriver que si les bruits b_e et $b_{\dot{q}}$ sont importants ou si le gain devient très grand, ou encore si $\ddot{q}_r \rightarrow 0$, la composante bruitée de la commande domine la composante utile. Outre l'aspect énergétique, il est également probable que de grandes variations rapides et persistantes de la commande contribuent à accélérer l'usure des moteurs. Remarquons cependant que les problèmes de saturation des moteurs sont a priori moins liés à

l'existence de la partie bruitée de la commande (responsables de pics de commande pendant des instants très courts) qu'à la partie utile de la commande ($m\ddot{q}_r$). Ceci est d'autant plus vrai que les bruits de mesure sont petits. Aussi sommes nous tentés de dire que les problèmes de saturation de la commande sont généralement moins liés à un problème de réglage du gain de commande qu'au choix de la trajectoire idéale $\{q_r(t)\}$ et plus précisément de l'accélération \ddot{q}_r . Selon cette optique les problèmes de saturation (que nous ne traiterons pas ici) se situent en amont des problèmes de régulation et devraient donc en principe être réglés au niveau de la conception de la tâche.

Les considérations que nous avons évoquées au cours des points ii) et iii) ne rentrent pas dans le cadre du théorème de stabilité donné au paragraphe 2.5. La raison en est que nous avons alors basé notre analyse sur les problèmes de stabilité et sur la minimisation de l'erreur $e(t)$ au détriment d'autres considérations (énergétiques par exemple) a priori moins cruciales. Il n'en demeure pas moins vrai que ces considérations peuvent avoir une incidence importante dans certaines applications. Dans le paragraphe suivant, nous nous proposons de passer rapidement en revue un certain nombre de problèmes dont nous n'avons pas tenu compte jusqu'à présent et qui vont tous dans le sens d'une limitation des gains de commande.

2.7 - COMPLEMENT A L'ANALYSE : CONSEQUENCES DES ELASTICITES MECANQUES, DE LA DISCRETISATION DE LA COMMANDE ET DES RETARDS DANS LES MESURES

Tout au long de l'analyse qui précède nous avons implicitement fait trois hypothèses :

- i) la dynamique du robot est exactement décrite par l'équation (2.7)
- ii) la commande est analogique (c'est à dire qu'elle est calculée en temps continu)
- iii) les mesures de $e(t)$, $q(t)$ et $\dot{q}(t)$ sont disponibles instantanément pour le calcul de la commande.

Dans la pratique ces trois hypothèses ne sont pas complètement satisfaites. En effet, la première hypothèse n'est vraie que si les articulations du robot et les éléments de transmission des couples moteur sont parfaitement rigides. En réalité, il est évident que tout robot, comme d'ailleurs toute structure mécanique, est sujet dans des proportions très variables à des phénomènes de vibrations dues à des souplesses structurelles distribuées. La seconde hypothèse ignore le fait que dans la plupart des applications robotiques les commandes sont calculées numériquement. La troisième néglige les temps de réponse des organes de mesure qui se traduisent en retards dans le calcul de la commande.

La réalisation imparfaite de ces trois hypothèses tend à limiter le champ d'application des résultats théoriques que nous avons donnés. A notre avis, si on écarte les cas où l'une quelconque de ces hypothèses est exagérément prise en défaut (cas des robots souples, d'une fréquence d'échantillonnage très faible ou de mesures très retardées) rendant nécessaire une étude séparée, la principale limitation pratique réside dans la nécessité de borner supérieurement les gains de commande et plus particulièrement le gain $g(q, \dot{q}, t)$. En effet, nous avons déjà vu au paragraphe 2.6.4.2 qu'en raison des bruits de mesure plus le gain est grand, plus les risques d'excitation de modes de vibrations structurelles situés à des fréquences élevées étaient importants (conséquence de l'augmentation de la bande passante du système). Nous avons également vu qu'il pouvait en résulter un accroissement significatif de l'énergie de la commande.

Les contraintes issues de la discrétisation de la commande peuvent s'expliquer simplement en considérant le système linéaire :

$$\ddot{e} = \Gamma' \quad (7.1)$$

Cette équation peut être vue soit comme l'équation d'un robot particulier (pour lequel $M = I$, $l = 0$) effectuant une tâche particulière ($e=q$, $\ddot{q}_r=0$), soit comme l'équation d'erreur obtenue en appliquant une commande par découplage à un robot quelconque et en posant : $\Gamma' = M \Gamma' + l_c$. La commande continue que l'on utiliserait dans ce cas (avec $G = D = I$) s'écrit :

$$\Gamma' = -g(\mu e + \dot{e}) \quad (7.2)$$

Elle assure la convergence exponentielle de e vers 0 quelque soit le gain $g > 0$.

Une version discrétisée de cette commande est :

$$\Gamma'(t) = -g(\mu e(kh) + \dot{e}(kh)) ; kh < t \leq (k+1)h \quad (7.3)$$

où $k \in \mathbb{N}$ et h est la période d'échantillonnage de la commande.

A partir de (7.1) et (7.3), il est facile de vérifier que cette commande conduit à l'équation d'état discrète suivante :

$$\begin{bmatrix} e((k+1)h) \\ \dot{e}((k+1)h) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} e(kh) \\ \dot{e}(kh) \end{bmatrix} \quad (7.4a)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \mu gh^2/2 & h(1 - gh/2) \\ -\mu gh & 1 - gh \end{bmatrix} \quad (7.4b)$$

Ce système est stable si les valeurs propres de la matrice A sont à l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe. Par application du critère de Jury [10] il est facile de vérifier que tel est le cas seulement si :

$$0 < g < 2/h (=2f_c) \quad (7.5)$$

et

$$0 < \mu < 2/h(=2f_c) \quad (7.6)$$

où f_c désigne la fréquence d'échantillonnage de la commande.

Cet exemple simple met clairement en évidence la relation existant entre la fréquence d'échantillonnage de la commande et la taille maximale permise pour les gains de commande g et μ . Nous retrouvons bien entendu, conformément à notre analyse du cas continu, que la liberté d'accroître ces gains augmente avec la fréquence d'échantillonnage.

Afin de mettre simplement en évidence l'effet des retards de mesure nous nous contenterons de raisonner sur le cas d'un système du premier ordre auquel est appliqué un retour en position. Le traitement d'un système d'ordre plus élevé tel que (7.1) se

ferait de façon similaire, conduirait à des résultats de même nature, mais serait inutilement plus compliqué.

Soit donc le système :

$$\dot{e} = \Gamma \quad (7.7)$$

En appliquant à ce système la commande discrète :

$$\Gamma(t) = -g e(kh) \quad ; \quad kh < t \leq (k+1)h \quad (7.8a)$$

nous obtenons l'équation du système en boucle fermée :

$$e((k+1)h) = (1 - gh) e(kh) \quad (7.8b)$$

qui est stable si et seulement si :

$$-1 < 1 - gh < 1$$

soit :

$$0 < g < 2f_c \quad (7.9)$$

Remarquons la similitude entre la valeur maximale ($2f_c$) du gain et la valeur (7.5) obtenue dans le cas d'un système du second ordre.

Supposons maintenant que la mesure $e(kh)$ n'est pas disponible à l'instant $(t=kh)$ mais seulement à l'instant $(t=kh+\Delta)$ avec $\Delta \leq h$ et que pour cette raison la commande utilisée n'est plus (7.8a) mais :

$$\Gamma(t) = -g e(kh) \quad ; \quad kh + \Delta < t \leq (k+1)h + \Delta \quad (7.10a)$$

L'équation du système en boucle fermée s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} e((k+1)h) \\ e(kh) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} e(kh) \\ e((k-1)h) \end{bmatrix} \quad (7.10b)$$

avec :

$$B = \begin{bmatrix} 1 - g(h - \Delta) & -g\Delta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.10c)$$

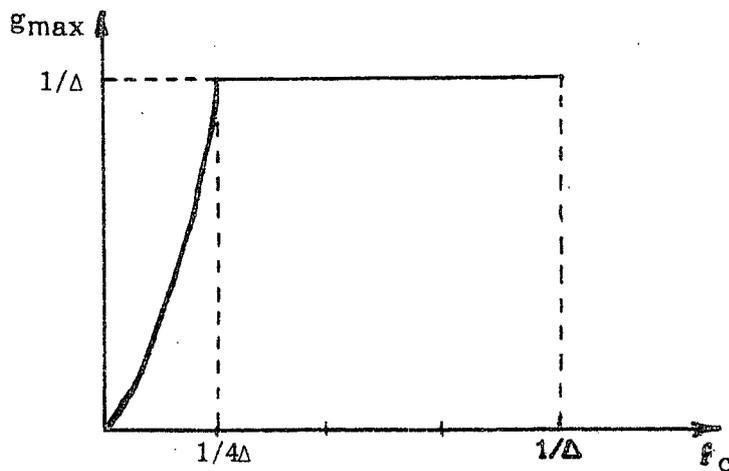
Pour que le système soit stable, il faut que les valeurs propres de la matrice B soient à l'intérieur du cercle unité. Après calcul nous obtenons les conditions de stabilité :

$$0 < g < f_c / (1/2 - \Delta f_c) \quad \text{si} \quad 0 < f_c \leq 1/4\Delta \quad (7.11a)$$

et

$$0 < g < \frac{1}{\Delta} \quad \text{si} \quad 1/4 \leq f_c \leq 1/\Delta \quad (7.11b)$$

Nous avons représenté ci-dessous la fonction $g_{\max}(f_c)$:



Lorsque $f_c \ll 1/\Delta$ alors $g_{\max} \approx 2f_c$. La valeur maximale du gain continue d'augmenter avec la fréquence d'échantillonnage tant que $f_c \leq 1/4\Delta$. Au-dessus de cette valeur de la fréquence, le gain maximum n'augmente plus et est égal à $1/\Delta$, soit l'inverse du retard de mesure. Ceci tend également à montrer qu'il est inutile d'augmenter la fréquence d'échantillonnage au delà de $1/4\Delta$.

Une analyse mathématique rigoureuse, basée sur des hypothèses de rigidité parfaite du robot, d'utilisation d'une commande continue et d'absence de retards dans les mesures, nous a permis d'une part d'établir que l'utilisation de grands gains de commande rendait toute commande (3.16) robuste pour le problème de minimisation de l'erreur de poursuite $e(t)$ à la condition que $J_q(q,t)$ soit choisie de sorte que $\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)J_q^{-1}(q,t)$ soit positive dans le voisinage de la trajectoire idéale du robot. D'autre part nous venons de voir que la taille du gain de commande était nécessairement limitée par des contraintes de stabilité résultant de la discrétisation de la commande et l'existence de

retards dans les mesures (il faut inclure dans ces retards le temps nécessaire au calcul de la commande). Nous avons également vu que l'utilisation de grands gains contribuait à augmenter l'énergie dissipative de la commande en présence de bruits de mesure et tendait à favoriser l'excitation de modes souples non modélisés. L'ensemble de ces éléments indique qu'il y a toujours dans la pratique conflit entre plusieurs contraintes de robustesse. C'est d'ailleurs ce conflit, et non en soit la nature non-linéaire de l'équation dynamique des robots, qui peut rendre délicat le réglage de la commande. Les situations les plus défavorables sont celles pour lesquelles toutes les contraintes tendent à s'opposer les unes aux autres et rendent difficile la recherche d'un compromis acceptable.

Compte tenu de la grande variété des situations possibles, il est tout à fait exclu de proposer une solution unique donnant satisfaction dans tous les cas. Le rôle de l'utilisateur est justement, en s'aidant par exemple des éléments d'analyse exposés dans ce rapport, de faire la part des choses et de rechercher parmi la classe de commandes (3.16) celle qui est la mieux adaptée à son problème. Tout au plus pouvons nous indiquer qu'une façon évidente de réduire systématiquement la portée du conflit évoqué précédemment consiste à utiliser, quand c'est possible, une commande qui se rapproche de la commande par découplage parfaite de façon à rendre inutile l'utilisation de **grands gains**. Il semble également que l'utilisation de gains non-linéaires en place de gains constants, ait un intérêt dans la plupart des cas. La possibilité de déterminer simplement de tels gains non-linéaires a été abordée au paragraphe 2.6.3.2. Elle est reprise plus en détail dans [86] [111] dans le cadre d'une tâche robotique spécifique.

2.8 - RAPPEL DES POINTS PRINCIPAUX DE L'ANALYSE

Quelque soit la tâche à effectuer la stabilité du système commandé est principalement conditionnée par :

- i) le degré d'admissibilité de la tâche dont il est souhaitable qu'il soit aussi grand que possible
- ii) la vérification de la condition de positivité (6.8), qui détermine la connaissance minimale a priori qu'il faut avoir pour espérer réaliser la tâche
- iii) le choix du gain de commande $g(q, \dot{q}, t)$ dont la taille dépend du choix des autres termes intervenant dans l'expression de la commande
- iv) la taille du scalaire μ selon le degré d'admissibilité de la tâche, le choix de \hat{j}_t et de façon généralement moins critique dans la pratique la taille des erreurs de mesure $b_q, b_{\dot{q}}, b_e$

v) la taille de l'erreur de mesure b_q , qui intervient au niveau de la satisfaction de la condition (6.8), et la taille de l'erreur de mesure b_e selon le degré d'admissibilité de la tâche.

A cela il faut ajouter des contraintes issues de la technologie mécanique du robot (plus ou moins grande rigidité) et de la discrétisation de la commande. Ces contraintes conduisent avant tout à limiter le gain de commande. Pour que cette limitation (très variable selon les robots et le choix de la période d'échantillonnage) soit compatible avec les autres résultats de l'analyse il faut imposer des contraintes sur le choix des autres termes entrant dans l'expression de la commande. En règle générale, plus nous sommes proches des conditions de découplage linéaire parfait, plus les chances de compatibilité sont grandes parce que moins il devient nécessaire d'utiliser un grand gain. Ces conditions sont également compatibles avec une diminution de l'énergie de la commande lorsque les mesures en position et vitesse sont bruitées.

La précision de la commande en fin de mouvement, c'est à dire lorsque $q_r(t)$ converge vers une valeur constante $q_{r,\infty}$, se mesure en fonction de la taille de $|e(t)|$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Elle est conditionnée par :

i) le choix du terme $l_c(q, \dot{q}, t)$ qui entre dans l'expression de la commande (3.16) et qui sert à s'opposer directement à l'action de l'ensemble des forces parasites (forces de Coriolis, centrifuges, gravitationnelles, de frottement sec). L'action de ce terme est d'autant plus efficace que l'on se rapproche du choix idéal :

$$l_c(q, \dot{q}, t) = l(q, \dot{q}, t) - M(q) \left[\frac{\partial e}{\partial q} (q, t) \right]^{-1} f(q, \dot{q}, t)$$

Comme en fin de mouvement $f(q, \dot{q}, t) \rightarrow 0$, une précision asymptotiquement égale sera obtenue en prenant :

$$l_c(q, \dot{q}, t) = l(q, \dot{q}, t)$$

et comme les forces de Coriolis et centrifuges qui interviennent dans $l(q, \dot{q}, t)$ ont une contribution nulle à vitesse nulle, il suffit que $l_c(q, \dot{q}, t)$ se limite à compenser l'action des forces de frottements et des forces de gravité. Dans le cas où les forces de frottements secs sont négligeables, une simple action intégrale incluse dans $l_c(q, \dot{q}, t)$ permet de compenser l'action des forces de gravité et d'éliminer les risques de biais lorsque les erreurs de mesure b_e ou $b_{\dot{q}}$ ne sont pas de moyenne nulle.

ii) le choix du gain de commande. Les erreurs statiques dues à une mauvaise compensation des forces de frottement sec et des forces de gravité sont diminuées en augmentant le gain.

iii) la taille des bruits de mesure b_e et b_q (b_q est moins important à ce niveau). En augmentant le paramètre μ , il est possible de diminuer l'effet de b_q . Ce paramètre est cependant sans action sur l'effet de b_e .

2.9 - UTILISATION DE LA CONDITION DE POSITIVITE DE LA MATRICE $B = \frac{\partial e}{\partial q} J_q^{-1}$ DANS LES APPLICATIONS

L'analyse de la classe de commande (3.16) met en évidence le rôle de la positivité de la matrice $B = \frac{\partial e}{\partial q} J_q^{-1}$ sur la stabilité du système commandé. Dans la pratique, cette condition de positivité a des répercussions sur la détermination de la fonction de tâche $e(q,t)$ ainsi que sur celle de la commande par l'intermédiaire du choix de $J_q(q,t)$. Afin de mieux cerner la portée de cette condition, examinons à la lumière de quelques exemples les trois principales situations auxquelles l'utilisateur sera confronté dans les applications.

2.9.1 - Cas où $\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$ est connu

Lorsque la nature de la tâche rend possible la connaissance d'une expression explicite de $\frac{\partial e}{\partial q}$, il faut envisager en premier lieu de prendre :

$$J_q = \frac{\partial e}{\partial q} \quad (9.1)$$

B est alors égale à la matrice identité (qui est définie positive).

Ce choix est celui adopté dans les commandes par découplage linéaire et plus généralement dans les commandes de type Newton.

Exemple 1

Considérons le cas de la poursuite d'une trajectoire dans un espace de coordonnées opérationnelles. Soit $\{x_r(t)\}$ la trajectoire à suivre et $x(q)$ la matrice colonne des coordonnées opérationnelles qui nous intéressent.

Un choix possible pour la fonction de tâche est :

$$e(q,t) = x(q) - x_r(t) \quad (9.2)$$

d'où :

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q, t) = \frac{\partial x}{\partial q}(q) \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}(q, t) = -\dot{x}_r(t) \quad (9.4)$$

La connaissance de la fonction $x(q)$ permet donc de déterminer $\frac{\partial e}{\partial q}(q, t)$ et nous pouvons poser :

$$J_q(q, t) = \frac{\partial x}{\partial q}(q) \quad (9.5)$$

En choisissant d'autre part $j_t = \frac{\partial e}{\partial t} = -\dot{x}_r$ et $G = I$, nous obtenons la commande :

$$\Gamma = -g \hat{M} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^{-1} (\mu D(x-x_r) - \dot{x}_r) + \hat{q} \right] + I_c \quad (9.6)$$

Dans certains cas, il sera suffisant de déterminer une fonction approchée $\frac{\partial \hat{e}}{\partial q}$ de $\frac{\partial e}{\partial q}$ et de poser $J_q = \frac{\partial \hat{e}}{\partial q}$. Une condition suffisante pour que B soit positive est que la norme de l'erreur $(\frac{\partial e}{\partial q} - \frac{\partial \hat{e}}{\partial q})$ soit petite et telle que : $|\frac{\partial e}{\partial q} - \frac{\partial \hat{e}}{\partial q}| |(\frac{\partial \hat{e}}{\partial q})^{-1}| < 1$ sur $C_{\rho, T}$.

Exemple 2

Une façon de généraliser le problème de poursuite précédent au cas où $x_r(t)$ n'appartient pas nécessairement à l'image de la fonction $x(q)$ consiste à poser le problème comme celui de la minimisation du coût : $h(q, t) = \frac{1}{2} (x(q) - x_r(t))^T W(x(q) - x_r(t))$ où W est une matrice symétrique positive. Ceci nous conduit à la fonction de tâche :

$$e(q, t) = \frac{\partial h}{\partial q}^T(q, t) = \frac{\partial x}{\partial q}^T(q) W(x(q) - x_r(t)) \quad (9.7)$$

d'où :

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q, t) = \frac{\partial x}{\partial q}^T(q) W \frac{\partial x}{\partial q}(q) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 x_k}{\partial q^2}(q) [W(x(q) - x_r(t))]_k \quad (9.8)$$

$(x_k(q)$ et $[W(x(q) - x_r(t))]_k$ désignent les k èmes composantes respectives de $x(q)$ et $W(x(q) - x_r(t))$)

$$\frac{\partial e}{\partial t}(q, t) = -\frac{\partial x}{\partial t}^T(q) W \dot{x}_r(t) \quad (9.9)$$

Le calcul exact de $\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$ requiert le calcul des dérivées secondes des composantes de $x(q)$. Ce calcul est donc plus complexe que dans le cas de l'exemple 1. Remarquons cependant que si $x_r(t)$ appartient à l'image de la fonction $x(q)$ et si $x(q(t))$ reste proche de la valeur idéale $x(q_r(t))$ telle que $(x(q_r(t)) - x_r(t)) = 0$ (c'est le but recherché) alors : $\frac{\partial e}{\partial q}(q(t),t) \simeq \frac{\partial x^T}{\partial q}(q(t)) W \frac{\partial x}{\partial t}(q(t))$. Autrement dit la fonction matricielle $(\frac{\partial x^T}{\partial q}(q) W \frac{\partial x}{\partial t}(q))$ est une bonne approximation de $\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$ dans le voisinage de la trajectoire idéale $(q_r(t),t)$. Ceci nous suggère de prendre :

$$J_q(q,t) = \frac{\partial x^T}{\partial q}(q) W \frac{\partial x}{\partial t}(q) \quad (9.10)$$

lorsque $x_r(t) \in \text{Im } x(q)$.

En choisissant d'autre part $j_t = \frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\partial x^T}{\partial q} W \dot{x}_r$, $G = I$ et $W = D$ nous obtenons la commande :

$$\Gamma = -g\hat{M} \left[\left(\frac{\partial x^T}{\partial q} D \frac{\partial x}{\partial q} \right)^{-1} \left(\mu D e - \frac{\partial x^T}{\partial q} D \dot{x}_r + \dot{q} \right) + 1_c \right] \quad (9.11)$$

soit, en tenant compte de (9.7) et après simplification :

$$\Gamma = -g\hat{M} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^{-1} \left(\mu D(x-x_r) - \dot{x}_r + \dot{q} \right) + 1_c \right] \quad (9.12)$$

Nous retrouvons ainsi d'une autre façon la commande obtenue dans l'exemple 1. Ce fait est peu étonnant si l'on considère que les objectifs de poursuite, sont similaires lorsque $x_r(t) \in \text{Im } x(q)$.

Par contre lorsque $x_r(t) \notin \text{Im } x(q)$, le choix (9.10) pour $J_q(q,t)$ n'a aucune raison d'assurer la positivité de B dans le voisinage de la trajectoire idéale puisqu'alors $x(q_r(t)) - x_r(t) \neq 0$. $J_q(q_r(t),t)$ peut ne même pas être inversible. La commande par découplage linéaire nécessite donc dans ce cas un calcul complet de $\frac{\partial e}{\partial q}$. Nous verrons ultérieurement que l'utilisation d'une commande de type gradient conduit à une solution plus simple.

Lorsque $\frac{\partial e}{\partial q}$ est connu, il est également possible de faire le choix suivant :

$$J_q = \frac{\partial e}{\partial q}^{-T} \quad (9.13)$$

puisqu'alors : $B = \frac{\partial e}{\partial q} \frac{\partial e}{\partial q}^T$. Cette matrice est définie positive quand $\frac{\partial e}{\partial q}$ est régulière.

o
o o

Exemple 3

Considérons à nouveau la fonction de tâche de l'exemple 1 et posons :

$$J_q = \frac{\partial e}{\partial q}^{-T} = \frac{\partial x}{\partial q}^{-T} \quad (9.14)$$

En choisissant d'autre part : $j_t = 0$ et $G = I$, nous obtenons la commande :

$$\Gamma = -g \hat{M} \left[\mu \frac{\partial x}{\partial q}^T D(x-x_r) + \dot{q} \right] + 1_c \quad (9.15)$$

Notons que par rapport à la commande obtenue dans l'exemple 1, cette commande ne nécessite pas l'inversion de $\frac{\partial x}{\partial q}$. De façon générale, le choix (9.13) permet d'éviter l'inversion de $\frac{\partial e}{\partial q}$ parce que la commande utilise J_q^{-1} et non pas J_q .

Nous verrons dans le paragraphe suivant que la commande (9.15) s'interprète comme une commande de type gradient lorsque la tâche est exprimée en termes d'un problème de minimisation d'une fonction de coût.

2.9.2 - Cas où $\frac{\partial e}{\partial q}$ (q,t) est définie positive

Ce cas se présentera chaque fois que l'objectif de la tâche sera posé en termes de minimisation d'un coût $h(q,t)$ et que la fonction de tâche dérivera de ce coût, c'est à dire lorsque : $e(q,t) = \frac{\partial h}{\partial q} (q,t)$.

Nous avons vu en effet dans la partie I que si la tâche ainsi définie est admissible alors $\frac{\partial e}{\partial q} (q,t) = \frac{\partial^2 h}{\partial q^2} (q,t)$ est positive dans le voisinage de la trajectoire idéale.

Dans ce cas la condition de positivité de B peut être satisfaite sans qu'il soit même nécessaire de déterminer $\frac{\partial e}{\partial q}$. Il suffit en effet de choisir :

$$J_q = I \quad (9.16)$$

puisqu'alors : $B = \frac{\partial e}{\partial q}$

Ce choix est celui adopté dans les commandes de type gradient.

Exemple 4

Reprenons le problème de l'exemple 2 avec les mêmes fonctions de coût et de tâche.

En prenant $J_q = I$ et en choisissant d'autre part : $j_t = 0$, $G = I$ et $D = I$, nous obtenons la commande :

$$\Gamma = -g \hat{M} \left[\mu \frac{\partial x^T}{\partial q} W(x-x_r) + \dot{q} \right] + l_c \quad (9.17)$$

Nous retrouvons ainsi la commande de l'exemple 3 à la différence près que la commande que nous avons alors obtenue n'avait été conçue que pour traiter le cas où $x_r(t) \in \text{Im } x(q)$. Dans le cas où $x_r(t) \notin \text{Im } x(q)$, il est clair que cette commande est beaucoup plus simple que la commande préconisée dans l'exemple 2 avec $J_q = \frac{\partial e}{\partial q}$.

Etant du type gradient cette commande a d'autre part la propriété de pouvoir être utilisée même lorsque la tâche devient non-admissible à l'approche d'une singularité-jacobien, notamment lorsque $x_r(t)$ s'approche de la frontière de la fonction $x(q)$. Notre analyse ne permet cependant pas de prédire le comportement de la commande pendant l'intervalle de temps où $x_r(t)$ reste proche de la frontière.

Afin d'éviter l'existence de singularités-jacobien nous avons vu au paragraphe 1.8 qu'il était possible de régulariser la tâche en remplaçant le coût précédant par:

$$h(q,t) = \frac{1}{2} (x(q)-x_r(t))^T W(x(q)-x_r(t)) + \frac{\lambda}{2} |q-y(t)|^2 \quad (\lambda > 0)$$

où $y(t)$ est un vecteur filtré de $q(t)$. La fonction de tâche devient ainsi :

$$e(q,t) = \frac{\partial x^T}{\partial q} W(x-x_r) + \lambda (q-y)$$

et la commande (9.17) devient :

$$\Gamma = -g \hat{M} \left[\mu \left(\frac{\partial x^T}{\partial q} W(x-x_r) + \lambda (q-y) \right) + \dot{q} \right] + l_c \quad (9.18)$$

Cette modification augmente dans des proportions assez faibles la complexité de la commande et suffit à faire rentrer celle-ci dans le cadre de l'analyse lorsque $x_r(t)$ est à proximité de la frontière de la fonction $x(q)$. Nous pouvons donc attendre de cette modification qu'elle améliore dans certaines situations la robustesse de la commande.

°
° °

Il n'est pas nécessaire que la fonction de tâche $e(q,t)$ dérive d'une fonction potentielle pour que $\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$ soit positive dans le voisinage de la trajectoire idéale. Dans le paragraphe 1.6.2 consacré à l'utilisation de la redondance d'une tâche prioritaire nous avons proposé la fonction de tâche (relation (6.13)) :

$$e = Q^T e_1 + \alpha \left[I - \frac{\partial e_1}{\partial q}^T (P \frac{\partial e_1}{\partial q})^{-1} \right] \frac{\partial h}{\partial q}^T \quad (\alpha > 0) \quad (9.19)$$

- où . $e_1(q,t)$ est la fonction associée à la tâche prioritaire
- . $h(q,t)$ est le coût secondaire que l'on désire minimiser sous la contrainte d'annuler en priorité e_1 .

Nous avons ensuite montré qu'il existait des choix particuliers de $P(q,t)$ et $Q(q,t)$ qui rendaient la matrice jacobienne $\frac{\partial e}{\partial q}$ positive au voisinage de la trajectoire idéale.

Le premier de ces choix était :

$$P = Q = \frac{\partial e_1}{\partial q} \quad (9.20)$$

et le second :

$$P = \frac{\partial e_1}{\partial q} \quad ; \quad Q^T = \frac{\partial e_1}{\partial q}^+ = \frac{\partial e_1}{\partial q}^T \left(\frac{\partial e_1}{\partial q} \frac{\partial e_1}{\partial q}^T \right)^{-1} \quad (9.21)$$

Nous sommes maintenant en mesure de mieux comprendre l'intérêt de ces choix : ils permettent d'éviter le calcul généralement fastidieux de $\frac{\partial e}{\partial q}$ et de choisir dans la commande $J_q = I$.

Exemple 5

Prenons comme tâche prioritaire la poursuite d'une trajectoire dans un espace de coordonnées opérationnelles et soit : $e_1(q,t) = x(q) - x_r(t)$ la fonction associée à cette tâche. Si $\dim x(q) < n$, cette tâche est redondante et par conséquent non-admissible.

Soit d'autre part $h(q,t)$ le coût associé à la tâche secondaire que l'on désire minimiser. Ce pourra par exemple être une des fonctions considérées au paragraphe 1.6.3.3 pour l'évitement d'obstacles.

En choisissant P et Q selon (9.21), la fonction de tâche s'écrit :

$$e(q,t) = \frac{\partial x}{\partial q}(q)^+ (x(q) - x_r(t)) + \alpha \left[I - \frac{\partial x}{\partial q}(q)^+ \frac{\partial x}{\partial q}(q) \right] \frac{\partial h}{\partial q}^T(q,t) \quad (9.22)$$

et en prenant $J_q = I$, $J_t = - \frac{\partial x}{\partial q}^+ \dot{x}_r$, $G = D = I$, nous obtenons la commande

$$\Gamma = -g \hat{M} \left[\frac{\partial x}{\partial q} (\mu(x - x_r) - \dot{x}_r) + \alpha \mu \left[I - \frac{\partial x}{\partial q}^+ \frac{\partial x}{\partial q} \right] \frac{\partial h}{\partial q}^T + \ddot{q} \right] + \dot{1}_c \quad (9.23)$$

Remarquons que si la tâche prioritaire n'est pas redondante alors $\frac{\partial x}{\partial q}^+ = \frac{\partial x}{\partial q}^{-1}$ et la commande (9.23) se réduit à :

$$\Gamma = -g \hat{M} \left[\frac{\partial x}{\partial q} \right]^{-1} (\mu(x-x_r) - \dot{x}_r) + \dot{q} + 1_c \quad (9.24)$$

Nous retrouvons la commande (9.6) de l'exemple 1 (avec $D = I$). En choisissant P et Q selon (9.20), et en prenant $j_t = 0$, nous retrouverions de la même façon la commande (9.15) de l'exemple 3. Lorsque la tâche prioritaire n'est pas redondante, le choix (9.20) conduit donc à des commandes de type gradient alors que le choix (9.21) conduit à des commandes de type Newton.

Afin d'améliorer le conditionnement de la tâche secondaire et du même coup l'admissibilité de la tâche globale, il sera toujours possible de remplacer le coût $h(q,t)$ par le coût $h(q,t) + \frac{\lambda}{2} |q - y(t)|^2$ où $y(t)$ est un vecteur filtré de $q(t)$.

2.9.3 - Cas où $\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$ est partiellement connu. Application au problème du positionnement de l'effecteur d'un robot par rapport à un cible à partir de mesures proximétriques

Supposons que $\frac{\partial e}{\partial q}$ se décompose de la façon suivante :

$$\frac{\partial e}{\partial q} = \begin{bmatrix} [A_1 | 0] J \\ E \end{bmatrix} + \Sigma \quad (9.25)$$

- où
- A_1 est une matrice ($m \times m$)
 - $m \leq \inf(6, n)$
 - J est une matrice ($6 \times n$)
 - E est une matrice ($(n-m) \times n$)
 - Σ est une matrice ($n \times n$)

Supposons également que les matrices A_1 et Σ soient inconnues et posons :

$$J_q = \begin{bmatrix} [I_m | 0] J \\ E \end{bmatrix} \quad (9.26)$$

Lemme technique

Si :

- A_1 est positive
- $|\Sigma| < \inf(1, \lambda_{\min}(\frac{A_1 + A_1^T}{2})) / |J_q^{-1}|$

(9.27)

alors la matrice :

$$B = \frac{\partial e}{\partial q} J_q^{-1}$$

est positive.

Démonstration

$$J = \begin{matrix} \xrightarrow{n} \\ \left[\begin{array}{c} J_1 \xrightarrow{m} \\ J_2 \xrightarrow{6-m} \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$J_q = \begin{bmatrix} J_1 \\ E \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial e}{\partial q} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} J_q + \Sigma$$

et par conséquent :

$$\frac{\partial e}{\partial q} J_q^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} + \Sigma J_q^{-1}$$

or :

$$x^T \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} x > \inf(1, \lambda_{\min}(\frac{A_1 + A_1^T}{2})) |x|^2$$

et

$$|x^T \Sigma J_q^{-1} x| \leq |\Sigma| |J_q^{-1}| |x|^2$$

Compte tenu de (9.27) nous déduisons des trois dernières relations :

$$x^T B x > 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0$$

Ce résultat technique montre que si la matrice A_1 , qui intervient dans $\frac{\partial e}{\partial q}$ est inconnue mais **positive** et si la matrice Σ , qui a la signification d'une erreur de modélisation, est **petite** alors le choix (9.26) pour J_q assure la positivité de la matrice B.

Le cas où $\frac{\partial e}{\partial q}$ n'est que partiellement connu concerne directement les tâches robotiques basées sur l'utilisation de capteurs de proximétrie ou d'effort. La raison est que l'exécution de ces tâches fait intervenir la régulation des signaux fournis par les capteurs portés par le robot et que ces signaux sont des fonctions généralement mal connues des variables q et t . Ce sont des fonctions de q et t parce que les signaux ne varient que si le robot bouge (d'où la dépendance en q) ou si la cible "éclairée" par les capteurs bouge (d'où la dépendance en t si la cible se déplace indépendamment du robot). Ces fonctions sont mal connues parce qu'elles dépendent à la fois des caractéristiques propres aux capteurs et de celles de la cible (sa géométrie et sa couleur par exemple).

Considérons le problème plus spécifique du positionnement de l'effecteur d'un robot par rapport à une cible (fixe ou non) et examinons de plus près à quel niveau la méconnaissance des fonctions-sigaux intervient dans le calcul de $\frac{\partial e}{\partial q}$

Nous supposons pour cela que la fonction de tâche choisie est de la forme :

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow m \\ \updownarrow n-m \end{matrix} \quad (9.28a)$$

avec

$$e_1(q,t) = C(s(q,t) - s_r) \quad (9.28b)$$

- où :
- $s(q,t)$ est la matrice ($m \times 1$) des signaux fournis par les m capteurs (ou regroupements de capteurs) portés par l'effecteur. Comme le positionnement et l'orientation de l'effecteur requiert au plus la mobilisation de six degrés de liberté : $m \leq \inf(6, n)$.
 - s_r est la valeur désirée des signaux. C'est la valeur des signaux lorsque l'effecteur est idéalement positionné par rapport à la cible
 - C est une matrice ($m \times m$) inversible de combinaison des signaux-capteur. Le choix de cette matrice est a priori libre.

La composante $e_2(q,t)$ de la fonction de tâche caractérise la partie de la tâche qui n'utilise pas l'information fournie par les capteurs de proximité. Cette partie mobilise les $(n-m)$ degrés de liberté du robot laissés libres par l'annulation de e_1 . Nous supposons $\frac{\partial e_2}{\partial q}$ connu.

D'après (9.28b) :

$$\frac{\partial e_1}{\partial q} = C \frac{\partial s}{\partial q} \quad (9.29)$$

Nous avons montré au paragraphe 1.5.3 que $\frac{\partial s}{\partial q}$ se décompose de la façon suivante :

$$\frac{\partial s}{\partial q} = S J'_n \quad (9.30)$$

où : S est une matrice $(m \times 6)$ dont la i ème ligne est constituée des six coordonnées dans le repère de l'effecteur du couple de vecteurs $(\vec{u}_j, \vec{r}_j \wedge C_j \vec{O}'_n)$; (\vec{u}_j, \vec{r}_j) étant le couple caractéristique de la variation du signal du i ème capteur pour la cible considérée (nous avons à ce moment établi le lien entre ce couple et la notion d'action élémentaire utilisée dans l'approche d'Espiau), C_j étant le point origine du i ème capteur et O'_n le point origine du repère lié à l'effecteur. Cette matrice est indépendante des caractéristiques géométriques du robot.

$$J'_n = \begin{bmatrix} R_{0,n}^T & 0 \\ 0 & R_{0,n}^T \end{bmatrix} J_n \quad (9.31)$$

$R_{0,n}$ étant la matrice (3×3) des coordonnées des vecteurs de base $(\vec{x}_n, \vec{y}_n, \vec{z}_n)$ du repère lié à l'effecteur dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ du repère fixe lié à la base du robot, et J_n la matrice jacobienne de base $(6 \times n)$ associée à l'effecteur au point O'_n .

L'intérêt de la relation (9.30) est de séparer dans $\frac{\partial s}{\partial q}$ la contribution des caractéristiques propres aux capteurs et à la cible de la contribution issue de la structure géométrique du robot. Notre méconnaissance de $\frac{\partial s}{\partial q}$, et par suite de $\frac{\partial e}{\partial q}$, est ainsi concentrée dans la matrice S .

En regroupant les relations (9.28) et (9.30) nous obtenons :

$$\frac{\partial e}{\partial q} = \begin{bmatrix} C S J'_n \\ \frac{\partial e_2}{\partial q} \end{bmatrix} \quad (9.32)$$

Sans une connaissance minimale de S, il nous est impossible de déterminer J_q et donc de former une commande pour exécuter la tâche. Dans la pratique, il s'agira donc d'utiliser au mieux les éléments de connaissance que nous avons sur S (résultant de la combinaison des symétries géométriques de la cible avec les symétries de positionnement des capteurs sur l'effecteur) pour déterminer le point origine O'_n de l'effecteur et la matrice de combinaison C qui confèrent à la matrice $C S J'_n$ une structure intéressante et exploitable pour la détermination de J_q dans la commande. Une telle structure sera $[A_1 | 0]J$ où la matrice A_1 sera positive (et non nécessairement connue) et où la matrice J sera connue. En effet, le lemme technique énoncé en début de paragraphe montre qu'il sera alors possible de choisir :

$$J_q = \begin{bmatrix} [I_m | 0]J \\ \frac{\partial e_2}{\partial q} \end{bmatrix} \quad (9.33)$$

La matrice B étant dans ce cas positive, nous savons que la commande aura les qualités de robustesse mises en évidence par l'analyse.

Illustrons cette possibilité en reprenant deux exemples de tâche considérées dans la partie A de ce rapport.

Exemple 1 : Positionnement d'une pince sur un cylindre (suite du deuxième exemple du paragraphe 1.5.3.2.)

En choisissant :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

Nous avons vu qu'autour de la position idéale :

$$CSJ'_n \approx -\frac{4}{\cos\alpha} f'(d) \Delta J'_n \quad (9.35a)$$

avec :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & 0 & 0 & z'_{0'_n} \cos\beta & -y'_{0'_n} \cos\beta \\ 0 & \sin\beta & 0 & -z'_{0'_n} \sin\beta & 0 & l_2 \cos\beta + d \sin\alpha + x'_{0'_n} \sin\beta \\ 0 & 0 & 0 & l_1 \sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 \cos\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (9.35b)$$

Soit la matrice de permutation :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.36)$$

la relation (9.35a) s'écrit également :

$$CSJ'_n = [A_1 | 0] J + \sum_1 \quad (9.37a)$$

avec :

$$A_1 = -\frac{4}{\cos\alpha} f'(d) \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 \sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 \cos\beta \end{bmatrix} \quad (9.37b)$$

$$J = PJ'_n \quad (9.37c)$$

$$\sum_1 = A_2 J \quad (9.37d)$$

$$A_2 = -\frac{4}{\cos\alpha} f'(d) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & z_{0,n} \cos\beta & -y_{0,n} \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & -z_{0,n} \sin\beta & 0 & (l_2 \cos\beta + d \sin\alpha + x_{0,n}) \sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.37e)$$

Comme $f'(d) < 0$, la matrice A_1 est positive si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

Le choix de l'origine O'_n de l'effecteur intervient sur la taille de la matrice A_2 et par suite sur celle de la matrice résidue \sum_1 . Le point O'_n idéal pour lequel ces deux matrices s'annulent coïncide le long de la trajectoire idéale du robot avec le point situé à l'intersection de l'axe du cylindre et de la droite perpendiculaire au plan des capteurs passant par l'épicentre des origines des capteurs.

En résumé, les éléments d'analyse que nous avons donnés indiquent qu'une façon robuste pour réaliser le centrage de la pince sur le cylindre consiste à :

i) poser :
$$e_1(q,t) = C(s(q) - s_r) \tag{9.38}$$

avec C donnée par la relation (9.34)

ii) choisir l'origine O'_n du repère de la pince aussi proche que possible du point idéal que nous avons déterminé.

iii) poser dans la commande

$$J_q = \begin{bmatrix} [I_4 | 0] P J'_n \\ \frac{\partial e_2}{\partial q} \end{bmatrix} \tag{9.39}$$

Ce choix est particulièrement robuste vis-à-vis des conditions expérimentales parce qu'il est indépendant de la fonction $f(d)$ qui caractérise la réponse des capteurs et qu'il ne demande pas non plus de connaître le diamètre du cylindre. Cette robustesse est une conséquence directe du fait que la positivité de la matrice \hat{A}_1 provient uniquement des propriétés de symétrie du problème (forme de la cible et répartition des capteurs sur l'effecteur), du choix du point O'_n et du choix de la matrice de combinaison C .

Rien ne nous empêche cependant, dans le cas où nous disposons de bonnes estimées de $f'(d)$ et du diamètre du cylindre, d'utiliser ces estimées dans le calcul d'une estimée \hat{A}_1 de la matrice A_1 le long de la trajectoire idéale (c'est à dire lorsque la pince est centrée sur le cylindre à la distance désirée). Ce calcul conduit à prendre à la place de (9.39) :

$$J_q = \begin{bmatrix} [\hat{A}_1 | 0] P J'_n \\ \frac{\partial e_2}{\partial q} \end{bmatrix} \tag{9.40}$$

Dans ce cas, si $\hat{A}_1 = A_1$, la matrice :

$$B = \frac{\partial e}{\partial q} J_q^{-1} \approx \begin{bmatrix} A_1 \hat{A}_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (9.41)$$

est, dans le voisinage de la trajectoire idéale, proche de la matrice identité et la commande est localement de type Newton.

°
° °

Exemple 2 : Poursuite dans le plan d'un objet ponctuel par l'effecteur d'un manipulateur à deux degrés de liberté (suite du troisième exemple du paragraphe 1.5.3.2)

Nous avons considéré la fonction de tâche suivante :

$$e(q,t) = C(s(q,t) - s_r) \quad (9.42)$$

avec : $s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$

$s_r = \begin{bmatrix} s_{r1} \\ s_{r2} \end{bmatrix}$, s_{r1} et s_{r2} étant les valeurs des signaux-capteurs lorsque l'effecteur est correctement positionné par rapport à la cible.

teur est correctement positionné par rapport à la cible.

C est la matrice de combinaison (2x2) qu'il reste à déterminer .

Nous avons vu que le long de la trajectoire idéale (relation 5.55a) :

$$\frac{\partial e}{\partial q} = CA' R_{0,2}^T J_P \quad (9.43a)$$

avec :

$$A' = -A = - \begin{bmatrix} f'(d_1) l \cos \alpha / d_1 & f'(d_1) (l \sin \alpha - l_3) / d_1 \\ f'(d_2) l \cos \alpha / d_2 & f'(d_2) (l \sin \alpha + l_3) / d_2 \end{bmatrix}$$

• $R_{0,2}$: matrice des coordonnées des vecteurs de base \vec{x}_2 et \vec{y}_2 du repère lié à l'effecteur dans la base (\vec{x}_0, \vec{y}_0) du repère fixe

• J_p : matrice jacobienne de base de l'effecteur évaluée au point P. Ce point P est le point lié à l'effecteur qui coïncide avec la cible le long de la trajectoire idéale. Il joue le même rôle que le choix idéal du point $0'_n$ dans l'exemple précédent.

Si la fonction de pente $f'(d)$ est inconnue (ou mal connue) alors la matrice A' est inconnue et ne possède pas de structure particulière. Le calcul d'une commande robuste peut s'avérer dans ces conditions difficile. Il existe cependant une configuration relative particulière de l'effecteur par rapport à la cible qui confère à la matrice A' une structure plus intéressante. Cette configuration correspond au cas où $d_1 = d_2 (= \alpha = 0)$, c'est à dire au cas où la cible se trouve sur la médiatrice du segment $[C_1 C_2]$. Pour cette configuration :

$$A' = -f'(d)/d \begin{bmatrix} 1 & -l_3 \\ 1 & l_3 \end{bmatrix} \quad (9.44)$$

où $-d-$ est la distance commune des deux capteurs à la cible.

En choisissant alors la matrice de combinaison :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.45)$$

nous obtenons :

$$CA' = -2f'(d)/d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l_3 \end{bmatrix} \quad (9.46)$$

Comme $f'(d) < 0$, cette matrice est positive et nous pouvons donc prendre dans la commande :

$$J_q = R_{0,2}^T J_p \quad (9.47)$$

Dans ce cas, en effet, la matrice :

$$B = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{q}} J_{\mathfrak{q}}^{-1} = CA'$$

est positive quelque soit la caractéristique $f'(d)$ des capteurs utilisés.

Notons que le fait d'imposer $d_1 = d_2$ revient à imposer dans la fonction de tâche : $s_{r_1} = s_{r_2}$.

ANNEXE B

DEMONSTRATION DU THEOREME DE STABILITE

(partie II, paragraphe 2.5.4)

Les notations utilisées sont celles du chapitre 2.5 de la partie II

Sous les hypothèses H_1-H_5 du paragraphe 2.5.2 et les hypothèses du théorème nous étudions les solutions de l'équation :

$$\ddot{e} + g(q, \dot{q}, t)A_1(q, t)A_2(q, t) [\mu B(q, t)De + \dot{e} + v(q, t)] + s(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (B.1)$$

La fonction $e(q, t)$ est supposée ρ -admissible sur le connexe $C_{\rho, T}$ pendant $[\bar{0}, \bar{T}]$. Il y a donc difféomorphisme (de classe C^3 parce que nous avons imposé pour simplifier que $e(q, t)$ soit de classe C^3) par la fonction $F(q, t) = (e(q, t), t)$ entre un ouvert contenant $C_{\rho, T}$ et un ouvert contenant $B(0, \rho) \times [0, T]$. Grâce à ce difféomorphisme nous pouvons aborder l'équation différentielle (B.1) non pas comme une équation de la variable $-q-$, mais comme une équation de la variable $-e-$, du moins tant que $-e-$ demeure dans la boule $B(0, \rho)$.

Pour l'ensemble des conditions initiales satisfaisant la condition (5.12) du théorème, l'existence et l'unicité locales de chaque solution $e(t)$ découlent des propriétés de régularités imposées aux différentes fonctions intervenant dans l'équation (B.1).

Pour montrer que la solution $e(t)$ se prolonge sur $[\bar{0}, \bar{T}]$, il suffit de montrer que sur tout intervalle $[0, \tau]$ ($0 < \tau \leq T$) sur lequel $e(t)$ existe, $|e(t)|$ est uniformément borné par ρ et $|\dot{e}(t)|$ est uniformément borné par une constante indépendante de τ .

Pour cela, étudions dans un premier temps la famille d'équations différentielles matricielles suivante :

$$\dot{Q} = -g(q(t), \dot{q}(t), t)A_1(q(t), t)A_2(q(t), t)Q + \mu(Q + B(q(t), t))D(Q + B(q(t), t)) - \dot{B}(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (B.2)$$

avec la condition initiale :

$$Q(0) = 0 \quad (B.3)$$

Puisque $q(t)$ et $\dot{q}(t)$ existent sur l'intervalle de temps $[0, \tau]$, nous pouvons déjà affirmer que la solution $Q(t)$ existe de façon unique sur un intervalle $[0, \tau_1]$ ($\tau_1 \leq \tau$).

Soit q_i la i ème colonne de Q :

$$q_i = Q r_i \quad (B.4)$$

où r_i est le vecteur unitaire :

$$r_i^T = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \quad (B.5)$$

↑
ième rang

Multiplions (B.2) à gauche par $q_i^T A_2$ et à droite par r_i . Nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (q_i^T A_2 q_i) = -g q_i^T A_2 A_1 A_2 q_i + z_i \quad (B.6a)$$

avec :

$$z_i = \mu q_i^T A_2 (Q+B) D (Q+B) r_i - q_i^T A_2 \dot{B} r_i - \frac{1}{2} q_i^T \dot{A}_2 q_i \quad (B.6b)$$

Soit maintenant :

$$y_i = U q_i \quad (B.7)$$

où U est la matrice racine carrée symétrique positive de A_2

$$A_2 = U^2 \quad (U = A_2^{1/2}) \quad (B.8)$$

Nous pouvons réécrire la relation (B.6a) de la façon suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |y_i|^2 = -g y_i^T U A_1 U y_i + z_i \quad (B.9a)$$

avec :

$$z_i = \mu y_i^T U (Q+B) D (Q+B) r_i - y_i^T U \dot{B} r_i - \frac{1}{2} y_i^T U^{-1} \dot{A}_2 U^{-1} y_i \quad (B.9b)$$

Avec les notations du paragraphe 2.5.4 et en appliquant à la relation (B.9b) les inégalités classiques sur les normes matricielles, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |z_i| \leq & \mu d^M(a_2^M/a_2^m)^{1/2} |Q| |y_i|^2 + \mu d^M(a_2^M)^{1/2} |Q| |B| |y_i| \\ & + \mu d^M(a_2^M/a_2^m)^{1/2} |B| |y_i|^2 + \mu d^M(a_2^M)^{1/2} |B^2| |y_i| \\ & + (a_2^M)^{1/2} |\dot{B}| |y_i| + (1/2) (|\dot{A}_2|/a_2^m) |y_i|^2 \end{aligned} \quad (B.10)$$

Faisons un raisonnement par l'absurde pour montrer que Q est uniformément borné et supposons qu'il existe un premier instant $t_1 (0 < t_1 \leq \tau_1)$ et une colonne q_j de Q tels que :

$$i) |y_i(t_1)| = (\sigma_2^m)^{1/2} \beta^m (\alpha n)^{-1}$$

$$ii) \forall_j (1 \leq j \leq n), \forall t \in [0, t_1[: |y_j(t)| < (\sigma_2^m)^{1/2} \beta^m (\alpha n)^{-1}$$

Puisque : $|Q| \leq \sum_{j=1}^n |q_j|$ et $|q_j| \leq |U^{-1}| |y_j|$, nécessairement à l'instant t_1 :

$$\begin{aligned} |Q(t_1)| &\leq |U^{-1}(t_1)| (\sigma_2^m)^{1/2} \beta^m \alpha^{-1} \\ &\leq (\sigma_2^m / a_2^m(t_1))^{1/2} \beta^m \alpha^{-1} \end{aligned} \quad (B.11)$$

En utilisant (B.11) dans (B.10) nous obtenons :

$$\begin{aligned} |z_i(t_1)| &\leq \{ \mu d M (a_2^M / a_2^m)^{1/2} [(\beta^m / \alpha) (\sigma_2^m / a_2^m)^{1/2} + (n+1) |B| \\ &\quad + n (\alpha / \beta^m) (a_2^m / \sigma_2^m)^{1/2} |B|^2] + n (\alpha / \beta^m) (a_2^M / \sigma_2^m)^{1/2} |B| \\ &\quad + (1/2) |A_2| / a_2^m \}_{t=t_1} |y_i(t_1)|^2 \end{aligned} \quad (B.12)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} g y_i^T U A_1 U y_i &= g y_i^T U \left(\frac{A_1 + A_1}{2} \right)^T U y_i \\ &> g_{\mu, \alpha, k, \delta} |y_i|^2 / |U^{-1} \left(\frac{A_1 + A_1}{2} \right)^{T-1} U^{-1}| \end{aligned} \quad (B.13)$$

Compte tenu de l'expression de $g_{\mu, \alpha}^1$ (relation 5.8b) et puisque $g_{\mu, \alpha, k, \delta} \geq g_{\mu, \alpha}^1$ nous déduisons de (B.12) et (B.13) :

$$(-g y_i^T U A_1 U y_i + z_i)_{t=t_1} < 0 \quad (B.14)$$

et par conséquent d'après (B.9a) :

$$\frac{d}{dt} |y_i|^2_{t=t_1} < 0 \quad (B.15)$$

y_i étant continuellement différentiable sur $[\bar{0}, \tau_1[$, l'inégalité (B.15) contredit l'existence de l'instant t_1 puisque $|y_i|$ ne peut atteindre pour la première fois la constante $(\sigma_2 m)^{1/2} \beta^m (\alpha n)^{-1}$ qu'avec une dérivée positive ou nulle en cet instant.

Puisque l'instant t_1 n'existe pas, nous avons établi :

$$\forall t \in [\bar{0}, \tau_1[, \forall i \in \{1, \dots, n\} : |y_i(t)| < (\sigma_2 m)^{1/2} \beta^m (\alpha n)^{-1} \quad (\text{B.16})$$

Soit $[\bar{0}, \tau_2[$ ($\tau_2 \ll \tau_1$) le plus grand intervalle de temps contenu dans $[\bar{0}, \tau_1[$ sur lequel $|e(t)| \leq \rho$. Il résulte immédiatement de (B.7) et (B.16) :

$$\forall t \in [\bar{0}, \tau_2[, |Q(t)| < \beta^m / \alpha \quad (\text{B.17})$$

Notons que la borne supérieure (β^m / α) est indépendante de τ_2 .

Dans la seconde étape de la démonstration, nous introduisons la fonction matricielle $L(t)$ que l'on déduit de $Q(t)$ de la façon suivante :

$$L(t) = \mu (Q(t) + B(t))D \quad ; \quad L(0) = \mu B(0)D \quad (\text{B.18})$$

$L(t)$ est définie sur $[\bar{0}, \tau_2[$ et est uniformément bornée sur cet intervalle. En effet d'après (B.17) et (B.18) :

$$|L(t)| < \mu d^M (b_{\max} + \beta^m / \alpha) \quad (\text{B.19})$$

D'autre part, toujours d'après (B.17) et (B.18) :

$$x^T DL(t)x = \mu x^T D(Q(t) + B(t))Dx \gg \mu |x|^2 [b^m(t) - \beta^m / \alpha] (d^m)^2 \quad (\text{B.20a})$$

avec :

$$b^m(t) - \beta^m / \alpha \gg (1 - 1/\alpha) \beta^m > 0 \quad (\text{B.20b})$$

Il résulte de (B.20) que le système différentiel homogène du 1er ordre et d'équation :

$$\dot{x} = -L(t)x \quad (\text{B.21})$$

est exponentiellement stable. En effet, d'après (B.20) et (B.21) nous avons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^T Dx) < -\mu (1 - 1/\alpha) \beta^m (d^m)^2 |x|^2 \quad (\text{B.22})$$

et cette inégalité entraîne évidemment la convergence exponentielle de $x(t)$ vers 0.

La relation (5.14) du théorème découle de (B.22).

A partir de (B.2) et (B.18) il est aussi facile de montrer que $L(t)$ vérifie l'équation :

$$\dot{L} = -gA_1 A_2 L + L^2 + g\mu A_1 A_2 BD \quad (B.23)$$

Définissons la variable auxiliaire η de la façon suivante :

$$\eta(t) = \dot{e}(t) + L(t)e(t) \quad ; \quad \eta(0) = \dot{e}(0) + \mu B(0)De(0) \quad (B.24)$$

Cette relation est la relation (5.13) du théorème.

Puisque $e(t)$, $\dot{e}(t)$ et $L(t)$ existent sur l'intervalle de temps $[\bar{0}, \tau_2]$, nous savons que $\eta(t)$ existe sur cet intervalle.

A partir des relations (B.1) (B.23) et (B.24) il n'est pas difficile de montrer que η satisfait aussi l'équation suivante :

$$\dot{\eta}(t) = (-g(t)A_1(t)A_2(t)+L(t)) \eta(t) - g(t)A_1(t)A_2(t)v(t) - s(t) \quad (B.25)$$

En multipliant les deux membres de cette égalité à gauche par $\eta(t)^T A_2(t)$ nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z|^2 = -gz^T U A_1 U z + w \quad (B.26a)$$

où :

$$z = U \eta \quad (U = A_2^{1/2}) \quad (B.26b)$$

et :

$$w = -gz^T U A_1 A_2 v + z^T U L U z - z^T U s \quad (B.26c)$$

En utilisant (B.18) pour obtenir une majoration de $|L|$, nous déduisons de (B.26c) :

$$|w| \leq \mu d^M (a_2^M / a_2^m)^{1/2} (|B| + \beta^m / \alpha) |z|^2 + g(a_2^M)^{3/2} v |A_1| |z| + (a_2^M)^{1/2} |s| |z| \quad (B.27)$$

où v désigne maintenant la borne supérieure de $v(t)$.

Par conséquent, si : $|z| \geq (c_{A_1} c_{A_2} (\sigma_2^M)^{1/2} v + k)$ alors : (B.27)

$$|w| \leq \left[\begin{aligned} & \mu d^M (a_2^M / a_2^m)^{1/2} (|B| + \beta^m / \alpha) + \frac{g(a_2^M)^{3/2} v |A_1|}{c_{A_1} c_{A_2} (\sigma_2^M)^{1/2} v + k} \\ & + \frac{(a_2^M)^{1/2} |s|}{c_{A_1} c_{A_2} (\sigma_2^M)^{1/2} v + k} \end{aligned} \right] |z|^2 \quad (B.28)$$

D'autre part :

$$gz^T U A_1 U z \succ g |z|^2 / |U^{-1} \left(\frac{A_1 + A_1^T}{2} \right)^{-1} U^{-1}| \quad (B.29)$$

Des relations (B.26a) (B.28) et (B.29) nous déduisons que si

$$|z| \succ (c_{A_1} c_{A_2} (\sigma_2^M)^{1/2})^{v+k}$$

alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z|^2 \prec -g \left[\frac{1}{|U^{-1} \left(\frac{A_1 + A_1^T}{2} \right)^{-1} U^{-1}| - (a_2^M)^{3/2} v |A_1| / (c_{A_1} c_{A_2} (\sigma_2^M)^{1/2})^{v+k}} \right] |z|^2 \\ + \left[\mu d^M (a_2^M / a_2^m)^{1/2} (|B| + \beta^m / \alpha) + (a_2^M)^{1/2} |s| / (c_{A_1} c_{A_2} (\sigma_2^M)^{1/2})^{v+k} \right] |z|^2 \end{aligned} \quad (B.30)$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|U^{-1} \left(\frac{A_1 + A_1^T}{2} \right)^{-1} U^{-1}| - (a_2^M)^{3/2} v |A_1| / (c_{A_1} c_{A_2} (\sigma_2^M)^{1/2})^{v+k}} \\ \succ k / (c_{A_1} c_{A_2} (\sigma_2^M)^{1/2})^{v+k} \cdot \frac{1}{|U^{-1} \left(\frac{A_1 + A_1^T}{2} \right)^{-1} U^{-1}|} \end{aligned} \quad (B.31)$$

et en utilisant le fait que $g \gg g_{\mu, \alpha, k, \delta}^2$ (avec $g_{\mu, \alpha, k, \delta}^2$ donné par la relation (5.8c)), nous déduisons de (B.30) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z|^2 < -\delta |z|^2 \text{ lorsque } |z| \gg (c_{A_1} c_{A_2} (\sigma_2^M)^{1/2})^{v+k} \quad (\text{B.32})$$

ce qui montre que sur $[0, \tau_2[$:

$$|z| \leq \max(|z(0)| \exp(-\delta t) ; c_{A_1} c_{A_2} (\sigma_2^M)^{1/2})^{v+k} \quad (\text{B.33})$$

De plus, puisque : $\eta = U^{-1}z$

$$|\eta| \leq |U^{-1}| |z| \leq |z| (\sigma_2^m)^{-1/2} \text{ sur } [0, \tau_2[\quad (\text{B.34})$$

D'après (B.24) nous avons aussi :

$$|z(0)| \leq (\sigma_2^M)^{1/2} |\dot{e}(0) + \mu B(0) D e(0)| \quad (\text{B.35})$$

et par conséquent d'après (B.33)-(B.35) et pour $t \in [0, \tau_2[$:

$$|\eta| \leq \max \left[(\sigma_2^M / \sigma_2^m)^{1/2} |\dot{e}(0) + \mu B(0) D e(0)| \exp(-\delta t) ; (\sigma_2^M / \sigma_2^m)^{1/2} c_{A_1} c_{A_2}^{v+k} (\sigma_2^m)^{-1/2} \right] \quad (\text{B.36})$$

ce qui montre que $|\eta|$ est uniformément borné sur $[0, \tau_2[$. La relation (5.16) du théorème n'est autre que la relation (B.36).

Pour terminer la démonstration, reprenons l'équation (B.24) que nous pouvons aussi écrire :

$$\dot{e}(t) = -L(t) e(t) + \eta(t) \quad (\text{B.37})$$

Nous déduisons de cette relation et de la relation (B.18) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |r|^2 = -\mu r^T D^{1/2} (Q+B) D^{1/2} r + r^T D^{1/2} \eta \quad (\text{B.38})$$

où

$$r = D^{1/2} e \quad (\text{B.39})$$

Nous avons :

$$|r^T D^{1/2} \eta| \leq (d^M)^{1/2} N |r| \quad (N = \sup_{t \in [0, \tau_2[} \eta(t)) \quad (B.40)$$

D'autre part, en utilisant (B.17) et pour $t \in [0, \tau_2[$:

$$\mu r^T D^{1/2} (Q+B) D^{1/2} r \geq \mu d^m (1 - \frac{1}{\alpha}) \beta^m |r|^2 \quad (B.41)$$

Des relations (B.38), (B.40) et (B.41) il vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |r|^2 \leq 0 \quad \text{lorsque } |r| \geq (d^M)^{1/2} N / \mu d^m (1 - \frac{1}{\alpha}) \beta^m \quad (B.42)$$

Par conséquent, sur $[0, \tau_2[$:

$$|r| \leq \max[|r(0)| ; (d^M)^{1/2} N / \mu d^m (1 - \frac{1}{\alpha}) \beta^m] \quad (B.43)$$

Or, d'après (B.39)

$$|r(0)| < (d^M)^{1/2} |e(0)| \quad (B.44)$$

et aussi :

$$|e| \leq |r| (d^m)^{-1/2} \quad (B.45)$$

Nous avons par conséquent sur $[0, \tau_2[$:

$$|e| \leq (d^M/d^m)^{1/2} \max[|e(0)| ; N / \mu d^m (1 - \frac{1}{\alpha}) \beta^m] \quad (B.46)$$

D'après (B.36), nous avons aussi :

$$N \leq \max \left[(\sigma_2^M / \sigma_2^m)^{1/2} (|e(0)| + \mu b \max d^M |e(0)|) ; \right. \\ \left. (\sigma_2^M / \sigma_2^m)^{1/2} c_{A_1} c_{A_2} \nu + k (\sigma_2^m)^{-1/2} \right] \quad (B.47)$$

A partir de (B.46) et (B.47), en utilisant le fait que $\mu > \mu_p$ (condition (5.10)) ainsi que la condition (5.12) traduisant la taille maximale permise pour les erreurs initiales $e(0)$ et $\dot{e}(0)$, nous obtenons :

$$\forall t \in [0, \tau_2[: |e(t)| < \rho \quad (B.48)$$

Puisque $e(t)$ est continu sur $[0, \tau_2[$, il résulte de l'inégalité stricte précédente : $\tau_2 = \tau_1$ (sinon on aurait $|e(\tau_2)| = \rho$).

La bornitude de $|Q|$ sur $[0, \tau_1[$ étant uniforme et indépendante de τ_1 , il en résulte aussi que $\tau_1 = \tau$.

Nous venons donc de montrer que si $e(t)$ existe sur un intervalle de temps $[\bar{0}, \tau[$, alors $|e(t)|$ est uniformément borné sur cet intervalle par ρ . La bornitude uniforme de $|\dot{e}(t)|$ sur ce même intervalle est une simple conséquence de l'équation (B.24) et de la bornitude uniforme de $|\dot{e}(t)|$, $|\eta(t)|$ et $|L(t)|$. Il en résulte que $e(t)$ existe de façon unique sur tout l'intervalle $[\bar{0}, T]$ (en fait sur $[\bar{0}, T[$ et par continuité sur $[\bar{0}, T]$) et que tous les résultats obtenus en cours de démonstration sur l'intervalle $[\bar{0}, \tau_2[$ sont encore vrais sur l'intervalle $[0, T]$.

Les points énoncés dans le théorème sont contenus dans ces résultats.

Un paramètre "différentiel" de l'orientation de l'effecteur pour la commande dans l'espace des coordonnées opérationnelles

Nous reprenons, sous un éclairage différent, un paramétrage de l'orientation de l'effecteur initialement proposé par Luh, Walker et Paul en 1980 dans un article intitulé (pour des raisons assez obscures) "Resolved Acceleration Control of Mechanical Manipulators" [74].

Un intérêt de ce paramétrage est d'être simple et de ne présenter aucune des ambiguïtés de calcul rencontrées avec d'autres paramétrages classiques (angles d'Euler, ...). Nous verrons d'autre part que, grâce à certaines approximations justifiables de façon rigoureuse par notre analyse de la commande, ce paramétrage conduit à des commandes à la fois simples à calculer et robustes.

A notre avis, tout bon paramétrage de l'orientation de l'effecteur d'un robot doit prendre en compte le fait qu'il est seulement possible de définir des cartes locales du groupe des rotations SO_3 dans R_3 [50]. Toute tentative pour paramétrer SO_3 dans son intégralité dans R_3 étant vouée à l'échec, il apparaît nécessaire de contourner le problème en faisant en sorte qu'il ne soit nécessaire dans la pratique de représenter tout SO_3 . Une façon de s'y prendre consiste à introduire la notion de repère de référence $R_r(t)$, dont l'orientation représente l'orientation idéale que devrait avoir à tout instant le repère $R_n(q)$ de l'effecteur, et de se contenter de paramétrer les écarts relatifs d'orientation (que la commande se doit de maintenir petits) entre les repères R_r et R_n . De cette façon seul un petit ouvert de SO_3 a besoin d'être paramétré. L'idée est donc de travailler à partir de paramétrages que nous qualifierons de "différentiels".

Nous supposerons seulement ; cette hypothèse n'étant généralement pas contraignante dans la pratique ; que l'utilisateur est capable de calculer à tout instant la matrice de rotation $R_{(R_0, R_r(t))}$ faisant passer du repère fixe R_0 au repère de référence $R_r(t)$.

De cette façon le problème de la commande revient d'une part à déterminer un paramétrage de l'écart d'orientation entre R_n et R_r et d'autre part à asservir la valeur de ce paramétrage sur sa valeur idéale correspondant au cas où les orientations de R_r et R_n coïncident.

Choix du paramétrage

Soit $R_{(R_r(t), R_n(q))}$ la matrice de rotation faisant passer du repère de référence $R_r(t)$ au repère de l'effecteur $R_n(q)$. Cette matrice se déduit des matrices de rotation $R_{(R_0, R_r(t))}$ et $R_{(R_0, R_n(q))}$ faisant respectivement passer du repère fixe R_0 avec $R_r(t)$ et $R_n(q)$, par la relation :

$$R_{(R_r(t), R_n(q))} = R_{(R_0, R_r(t))}^T R_{(R_0, R_n(q))} \quad (C.1)$$

La matrice $R_{(R_0, R_n(q))}$ n'est autre que la matrice d'attitude classique que l'on obtient à partir du modèle géométrique du robot.

Soit a_{ij} l'élément de $R_{(R_r(t), R_n(q))}$ situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ colonne et de la $j^{\text{ème}}$ ligne de cette matrice.

Le paramétrage proposé par Luh, Walker et Paul dans [74] est la matrice $[v]_{R_r}$ de dimension (3 x 1) suivante

$$[v]_{R_r} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

$[v]_{R_r}$ se calcule donc très simplement à partir des six éléments de $R_{(R_r(t), R_n(q))}$ non situés sur la diagonale.

$[v]_{R_r}$ est effectivement un paramétrage de l'orientation relative de R_n par rapport à R_r parce que cette matrice n'est autre que la matrice des coordonnées exprimées dans la base de R_r du vecteur

$$\vec{v} = \sin \theta \cdot \vec{u} \quad (C.3)$$

où : \vec{u} est le vecteur unitaire de l'axe de rotation faisant passer de R_r à R_n
 θ est l'angle de cette rotation.

Nous voyons donc déjà que \vec{v} est une approximation du vecteur de rotation $\vec{rot}(R_r, R_n) = \theta \cdot \vec{u}$ lorsque l'angle θ est petit, c'est à dire lorsque les orientations de R_r et R_n coïncident presque.

En fait comme $\vec{v} = \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \text{rot}(R_r, R_n)$, il est clair que pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ le vecteur \vec{v} caractérise de façon unique l'orientation relative de R_n par rapport à R_r .

Lorsque les repères R_r et R_n coïncident parfaitement : $[v]_{R_r}^T = [0 \ 0 \ 0]$. C'est la valeur idéale du paramétrage et le but de la commande sera donc d'asservir $[v]_{R_r}$ à la matrice nulle.

exemple : Pour un robot à six degrés de liberté, une fonction de tâche possible sera :

$$e(q,t) = \begin{bmatrix} x(q) - x_r(t) \\ [v(q,t)]_{R_r} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow 3 \times 1 \\ \updownarrow 3 \times 1 \end{matrix} \quad (C.4)$$

où :
 . $x(q)$ désigne la matrice de coordonnées dans R_0 du point origine de l'effecteur
 . $x_r(t)$: la trajectoire idéale des coordonnées cartésiennes de l'origine de l'effecteur

Un des avantages du paramétrage $[v]_{R_r}$ est qu'il est toujours défini et calculable sans ambiguïté, au même titre que la matrice de rotation $R_{(R_r, R_n)}$.

Un second intérêt est que la matrice dérivée partielle $\frac{\partial [v]_{R_r}}{\partial q}$, dont nous avons besoin pour déterminer $\frac{\partial e}{\partial q}$ et donc pour former la commande, est également calculable sans ambiguïté à partir des dérivées par rapport à la variable q des éléments $a_{ij}(q,t)$ ($i \neq j$) de la matrice de rotation $R_{(R_r, R_n)}$. En dérivant la relation (C.1) par rapport à chacune des composantes q_k de la variable q , nous voyons que les dérivées partielles $\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}(q,t)$ peuvent elles-mêmes être obtenues à partir des dérivées des éléments de la matrice d'attitude $R_{(R_0, R_n)}$. En effet :

$$\frac{\partial}{\partial q_k} [R_{(R_r(t), R_n(q))}] = R_{(R_0, R_r(t))}^T \frac{\partial}{\partial q_k} [R_{(R_0, R_n(q))}] \quad (C.5)$$

- Soit :
- $\vec{\omega}_{R_n/R_0}$ le vecteur vitesse de rotation instantanée de R_n par rapport à R_0
 - $[\omega_{R_n/R_0}]_{R_0}$ la matrice (3 x 1) des coordonnées de $\vec{\omega}_{R_n/R_0}$ dans la base de R_0
 - $J_R(q)$: la matrice jacobienne de base de rotation. Rappelons que par définition :
- $$[\omega_{R_n/R_0}]_{R_0} = J_R(q) \dot{q}$$

Il est également possible de calculer la dérivée partielle $\frac{\partial [v]_{R_r}}{\partial q}$ à partir de $J_R(q)$ en utilisant la relation suivante :

$$\frac{\partial [v]_{R_r}}{\partial q} = J_1 R_{(R_0, R_r)}^T J_R \quad (C.6a)$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \left\{ \text{trace}[R_{(R_r, R_n)}] I_3 - R_{(R_r, R_n)} \right\} \quad (C.6b)$$

(I_3 : matrice identité)

Démonstration de la relation (C.6)

La démonstration de cette relation passe par le calcul de $[\frac{d}{dt} \vec{v}]_{R_r}$.

Il n'est pas difficile de montrer (voir [74] par exemple) que le vecteur $\vec{v} = \sin \theta \cdot \vec{u}$ se décompose également de la façon suivante :

$$\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{i}_r \wedge \vec{i}_n + \vec{j}_r \wedge \vec{j}_n + \vec{k}_r \wedge \vec{k}_n) \quad (C.7)$$

où : $(\vec{i}_r, \vec{j}_r, \vec{k}_r)$ est la base de vecteur unitaire du repère R_r
 $(\vec{i}_n, \vec{j}_n, \vec{k}_n)$ est la base de vecteur unitaire du repère R_n

Dérivons (C.7) par rapport à t :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{v} \right]_{R_r} = \frac{1}{2} \left[\vec{i}_r \wedge (\vec{\omega}_{R_n/R_r} \wedge \vec{i}_n) + \vec{j}_r \wedge (\vec{\omega}_{R_n/R_r} \wedge \vec{j}_n) + \vec{k}_r \wedge (\vec{\omega}_{R_n/R_r} \wedge \vec{k}_n) \right] \quad (C.8)$$

soit en développant les produits vectoriels :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{v} \right]_{R_r} = \frac{1}{2} \left[\vec{i}_r \cdot \vec{j}_n + \vec{j}_r \cdot \vec{j}_n + \vec{k}_r \cdot \vec{k}_n \right] \vec{\omega}_{R_n/R_r} - \frac{1}{2} \left[(\vec{i}_r \cdot \vec{\omega}_{R_n/R_r}) \vec{i}_n + (\vec{j}_r \cdot \vec{\omega}_{R_n/R_r}) \vec{j}_n + (\vec{k}_r \cdot \vec{\omega}_{R_n/R_r}) \vec{k}_n \right] \quad (C.9)$$

En utilisant la définition de $R_{(R_r, R_n)}$ et le fait que :

$$\left[\omega_{R_n/R_r} \right]_{R_r} = \begin{bmatrix} \vec{i}_r \cdot \vec{\omega}_{R_n/R_r} \\ \vec{j}_r \cdot \vec{\omega}_{R_n/R_r} \\ \vec{k}_r \cdot \vec{\omega}_{R_n/R_r} \end{bmatrix} \quad (C.10)$$

la relation (C.9) s'écrit également sous forme matricielle :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{v} \right]_{R_r} = J_1 \left[\omega_{R_n/R_r} \right]_{R_r} \quad (C.11)$$

où J_1 est donné par la relation (C.6b).

or :

$$\vec{\omega}_{R_n/R_r} = \vec{\omega}_{R_n/R_0} - \vec{\omega}_{R_r/R_0}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \left[\omega_{R_n/R_r} \right]_{R_r} &= R_{(R_0, R_r)}^T \left[\omega_{R_n/R_r} \right]_{R_0} \\ &= R_{(R_0, R_r)}^T \left\{ \left[\omega_{R_n/R_0} \right]_{R_0} - \left[\omega_{R_r/R_0} \right]_{R_0} \right\} \end{aligned}$$

d'où finalement puisque $[\omega_{R_n/R_0}]_{R_0} = J_R \dot{q}$:

$$[\frac{d}{dt} v]_{R_r} = J_1 R^T_{(R_0, R_r)} \{ J_R \dot{q} - [\omega_{R_r/R_0}]_{R_0} \} \quad (C.12)$$

En identifiant cette relation avec :

$$[\frac{d}{dt} v]_{R_r} = \frac{\partial}{\partial q} [v]_{R_r} \dot{q} + \frac{\partial}{\partial t} [v]_{R_r}$$

nous obtenons d'une part la relation (C.6a) et également :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} [v]_{R_r} = - J_1 R^T_{(R_0, R_r)} [\omega_{R_r/R_0}]_{R_0}} \quad (C.13)$$

•
• •

Comme : $\text{trace } R_{(R_r, R_n)} = 2 \cos \theta + 1$, la relation (C.6b) s'écrit aussi :

$$J_1 = \cos \theta I_3 + \frac{1}{2} [I_3 - R_{(R_r, R_n)}] \quad (C.14)$$

Application au calcul de la commande :

Reprenons l'exemple de la poursuite dans l'espace des coordonnées opérationnelles avec la fonction de tâche :

$$e(q,t) = \begin{bmatrix} x(q) - x_r(t) \\ [v(q,t)]_{R_r} \end{bmatrix} \quad (C.15)$$

Nous avons, en utilisant la relation 6)

$$\frac{\partial e}{\partial q} = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & 0 \\ \hline 0 & J_1^T R^T(R_0, R_n) \end{array} \right] J \quad (C.16a)$$

avec :

$$J(q) = \left[\begin{array}{c} J_T(q) \\ J_R(q) \end{array} \right] \quad (C.16b)$$

(matrice jacobienne de base complète évaluée au point origine de l'effecteur).

Le long de la trajectoire idéale : $\theta = 0$, $R_r \equiv R_n$, et par conséquent : $J_1 = I$. Nous en déduisons :

$$\frac{\partial e}{\partial q}(q_r(t), t) = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & 0 \\ \hline 0 & R^T(R_0, R_r(t)) \end{array} \right] J(q_r(t)) \quad (C.17)$$

Cette relation nous indique que la tâche à toutes les chances d'être ρ -admissible (pour un certain $\rho > 0$) si la trajectoire idéale du manipulateur (entièrement définie par les choix de $x_r(t)$ et $R_r(t)$) ne s'approche pas trop d'une singularité géométrique.

Nous voyons donc déjà que par rapport à l'utilisation d'un système figé d'angles d'Euler, toute singularité de représentation a disparu.

Par rapport à la méthode consistant à inverser les coordonnées opérationnelles de la trajectoire idéale et à se ramener à un problème de commande dans l'espace des coordonnées articulaires, le problème du choix de la fonction inverse locale selon la position initiale du robot a également disparu.

Si la mécanique du robot le permet, les rotations d'angle supérieur à 2π , qui posent des difficultés lorsque l'on utilise la méthode de la fonction inverse, ne nécessitent plus de traitement particulier.

Enfin le problème du passage par des singularités géométriques peut lui-même être résolu en régularisant la fonction de tâche selon la méthode donnée au chapitre 1.8. En appliquant cette méthode il faudra toutefois vérifier (ce qui n'est malheureusement pas très simple) que la nouvelle fonction de tâche ne conduit pas à des angles relatifs θ dont la valeur absolue approche $\frac{\pi}{2}$.

Toutes ces remarques montrent l'intérêt du paramétrage étudié par rapport à d'autres méthodes.

Nous terminerons par quelques commentaires sur le calcul de la commande pour l'exemple de tâche considérée.

Nous avons vu au cours de la partie II qu'une grandeur essentielle pour la commande est la matrice J_q qui, pour des raisons de robustesse de la commande, doit être choisie de sorte que la matrice $B = \frac{\partial e}{\partial q} J_q^{-1}$ soit positive dans le domaine le plus grand possible autour de la trajectoire idéale du robot.

Une première possibilité consiste bien sûr à choisir :

$$J_q = \frac{\partial e}{\partial q}$$

Dans ce cas la matrice $B (=I)$ est définie et positive tant que $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ et en dehors des singularités géométriques.

Cependant ce choix conduit à calculer explicitement la matrice J_1 à partir de la matrice $R_{(R_r, R_n)}$ et à multiplier cette matrice par $R_{(R_0, R_n)}^T$.

Une commande plus simple est obtenue en remarquant que le long de la trajectoire idéale du robot $J_1 = I$ et en posant en conséquence :

$$J_q = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & R_{(R_0, R_n)}^T \end{array} \right] J \quad (C.18)$$

Pour évaluer la robustesse des commandes utilisant cette matrice J_q , étudions la matrice B associée. Dans ce cas :

$$B = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & J_1 \end{array} \right] \quad (C.19)$$

Cette matrice est positive si et seulement si la matrice J_1 est elle-même positive.

Or la matrice $[I_3 - R_{(R_r, R_n)}]$ est semi définie positive puisque :

$$x^T R_{(R_r, R_n)} x \leq |x|^2 .$$

D'autre part la matrice $\cos \theta I_3$ est strictement positive pour $|\theta| < \frac{\pi}{2}$.

Il en résulte, d'après la relation (14), que J_1 est strictement positive pour $|\theta| < \frac{\pi}{2}$.

Ainsi la matrice B est positive définie dans le même domaine que dans le cas précédent. En pratique cela signifie que l'utilisation dans la commande de J_q donnée par la relation (C.18), à la place de l'expression complète de $\frac{\partial e}{\partial q}$, n'affecte pas (du moins en première analyse parce que d'autres éléments interviennent) la robustesse de la commande.

Cette analyse tend à confirmer les bonnes propriétés de la commande proposée par Luh, Walker et Paul dans [24].

Une économie supplémentaire dans le calcul de la commande peut être obtenue en choisissant les matrices G et D dans l'expression générale (3.16) de la commande de la façon suivante :

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & | & 0 \\ \hline 0 & | & I_3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & | & 0 \\ \hline 0 & | & I_3 \end{bmatrix}$$

En effet dans ce cas :

$$\begin{aligned} J_q^{-1} G D e &= J^{-1} \begin{bmatrix} G_1 D_1 (x - x_r) \\ R_{(R_0, R_r)} [v]_{R_r} \end{bmatrix} \\ &= J^{-1} \begin{bmatrix} G_1 D_1 (x - x_r) \\ [v]_{R_0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et la matrice de coordonnées $[v]_{R_0}$ sera calculée directement à partir des composantes des matrices $R_{(R_0, R_r)}$ et $R_{(R_0, R_n)}$ en utilisant la relation (C.7). Il devient alors inutile de calculer explicitement la matrice $R_{(R_r, R_n)}$.

De même en choisissant :

$$j_t = - \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ R^T_{(R_0, R_r)} [\omega_{R_r/R_0}]_{R_0} \end{bmatrix}$$

la matrice $R^T_{(R_0, R_r)}$ est neutralisée par son inverse dans le calcul du terme $J_q^{-1} G j_t$.

Remarque :

Le paramétrage "différentiel" que nous avons considéré n'est ni le seul possible, ni le seul à posséder de bonnes propriétés. L'idée importante ne réside pas en effet dans le choix spécifique de tel ou tel autre paramétrage mais plutôt dans le caractère "différentiel" du paramétrage.

Deux autres paramétrages possibles possédant ce caractère sont :

- . la matrice des coordonnées du vecteur de rotation $(\theta \cdot \vec{u})$
- . la matrice des coordonnées du vecteur $(\sin \frac{\theta}{2} \cdot \vec{u})$ qui s'interprète aussi comme la partie imaginaire pure d'un quaternion [50].

Nous pouvons d'ailleurs remarquer que pour des angles θ petits nous avons : $(\sin \theta \cdot \vec{u}) \approx (\theta \cdot \vec{u}) \approx 2 (\sin \frac{\theta}{2} \cdot \vec{u})$ et que pour $\theta = 0$ les dérivées de ces trois vecteurs coïncident. Il en résulte qu'en théorie, et tant que l'objectif de la commande est de maintenir θ égal à 0, les coordonnées de ces trois vecteurs peuvent être utilisées indifféremment dans la commande.

Notre choix s'est porté sur $(\sin \theta \cdot \vec{u})$ du fait que les coordonnées de ce vecteur se calculent avec les seules opérations +, - et * à partir des composantes des matrices $R_{(R_0, R_r)}$ et $R_{(R_0, R_n)}$ (pas d'ambiguïté et économie de calcul de la commande) et en raison de la robustesse théoriquement prouvée des commandes utilisant ce paramétrage (se référer à l'étude qui précède).

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages d'intérêt général

- [1] D.G. Luenberger : "Introduction to linear and nonlinear programming", **Addison-Wesley**.
- [2] G. Birkhoff, G.C. Rota : "Ordinary differential equations", **Blaisdell Publishing Company**.
- [3] C.A. Desoer, M. Vidyasagar : "Feedback systems : Input-Output properties", **Academic Press**, New York, 1975.
- [4] I.D. Landau : "Adaptative control : the model reference approach", New York : **Marcel Dekker**, 1979.
- [5] L. Ljung, T. Soderström : "Theory and practice of recursive identification", **MIT Press**.
- [6] B. Espiau : "Use of optical reflectance sensors, from recent advances in robotics", **Wiley**.
- [7] V. Utkin : "Sliding modes and their application in variable structure systems", traduit par P. Parnakh, Moscow : **MIR Publ.**, 1978.
- [8] N.N. Bogoliubov Jr., Y.A. Mitropolskii : "Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillation", **Gordon and Breach**, New York.
- [9] R.P. Paul : "Robot manipulators : mathematics, programming and control", **MIT Press**, Cambridge, 1983.
- [10] K.J. Aström, B. Wittenmark : "Computer controlled systems", **Prentice-Hall**, Thomas Kailath Editor.

Proximité

- [20] J.K. Salisbury : "Kinematic and force analysis of articulated hands", **IBM, Summer School**, Grassau, W. Germany, 1983.

- [21] G. André : "Conception et modélisation de systèmes de perception proximétrique. Application à la commande en téléopération", **Thèse de Docteur-Ingénieur**, Rennes, 1983.

- [22] B. Espiau : "Note sur l'interprétation de primitives et actions proximétriques en termes de liaisons cinématiques fictives", **Rapport IRISA/INRIA**, n° 242, 1984.

- [23] B. Espiau, G. André : "Sensory based control of robots and teleoperators", **5th Symp. "Romansy"**, IFT.MM, Udine, Italie, 1984.

- [24] M. Leborgne, B. Espiau : "Modelling and closed-loop control of robots in local operating space", **IEEE conf. on Decision and Control**, Las Vegas, 1984.

Evitements d'obstacles

(Méthodes globales)

- [30] T. Lozano-Pérez : "Spatial planning : a configuration space approach", **IEEE Trans. on Computers**, vol. C-32, n° 2, p. 108-120, 1983.
- [31] B. Faverjon : "Obstacle avoidance using an octree in the configuration space of a manipulator", **Proc. IEEE Int. Conf. Robotics**, Atlanta, 1984.

(Méthodes locales)

- [32] O. Khatib : "Real time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots", **IEEE Conf. on Robotics and Automation**, Saint-Louis, 1985.
- [33] B. Faverjon,
Thèse de Doctorat d'Université, soutenance prochaine.

Redondance

- [40] A. Liegeois : "Automatic supervisory control of the configuration and behaviour of multibody mechanisms", **IEEE Trans. on SMC**, vol. **SMC-7**, n° **12**, 1977.

- [41] T. Yoshikawa : "Analysis and control of robot manipulators with redundancy", **1st ISRR**, Bretton Woods, NH, 1983.

- [42] T. Yoshikawa : "Manipulability of robotic mechanisms", **Int. J. of Robotics Research**, vol. **4**, n° **2**, 1985.

- [43] C.A. Klein, Ching-Hsiang Huang : "Reviw of pseudo-inverse control for use with kinematically redundant manipulators", **IEEE Trans. on SMC**, vol. **SMC-13**, n° **3**, 1983.

- [44] C.A. Klein : "Use of redundancy in the design of robotic systems", **2nd ISRR**, Kyoto, 1984.

- [45] J. Bailleul, J. Hollerbach, R. Brockett : "Programming and control of kinematically redundant manipulators", **Proc. of 23rd Conf. on Decision and Control**, Las Vegas, NV, 1984.

- [46] Y. Nakamura, H. Hanafusa : "Task priority based redundancy control of robot manipulators", **2nd ISRR**, Kyoto, 1984.

- [47] J. Hollerbach, K.C. Suh : "Redundancy resolution of manipulators through torque optimization", **IEEE Conf. on Robotics and Automation**, Saint-Louis,

Modélisation des robots manipulateurs

- [50] M. Leborgne : "Modélisation des robots manipulateurs rigides", **Publication interne n° 248, IRISA, Campus de beaulieu, 35042 Rennes Cédex, 1985.**

- [51] J.Y. Luh, M. Walker, R. Paul : "Newton-Euler formulation of manipulator dynamics for computer control", **2nd IFAC/IFIP Symp., Stuttgart, 1979.**

- [52] W. Silver : "On the equivalence of Lagrangian and Newton-Euler dynamics for manipulators", **Int. J. Robotics Res. 1(2), 1982.**

- [53] M. Renaud : "An efficient iterative analytical procedure for obtaining a robot manipulator dynamic model", **Proc. Int. Symp. Robotics Res., 1983.**

- [54] M. Renaud : "Coordinated control of robot-manipulators ; determination of the singularities of the Jacobian matrix", **1st Yugoslav Symposium on Industrial Robotics and Artificial Intelligence, Dubrovnik, Sept. 1979.**

Robots à transmission directe (direct-drive)

- [60] H. Asada, T. Kanade : "Design of direct-drive mechanical arms", **ASME Journal of Vibrations, Acoustics, Stress and reliability in Design, vol. 105, n° 3, p. 312-316, 1983.**

- [61] H. Asada, T. Kanade, I. Takeyama : "Control of a direct-drive arm", **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 105, p. 136-142, 1983.**

Commande des robots

a) par découplage linéaire

- [70] W. Khalil : "Contribution à la commande automatique des manipulateurs avec l'aide d'un modèle mathématique des mécanismes", **Thèse d'Etat, U.S.T.L., Montpellier, 1978.**
- [71] A.C. Bejczy : "Robot arm dynamics and control", **JPL Technical Memo., 33-369, 1974;**
- [72] W. Khalil, A. Liègois, A. Fournier : "Commande dynamique de robots", **RAIRO Automatique/Systems Analysis and Control, vol. 13, n° 2, p. 189-201, 1979.**
- [73] O. Khatib : "Commande dynamique dans l'espace opérationnel des robots manipulateurs en présence d'obstacles", **Thèse de Docteur-Ingénieur, ENSAE, Toulouse, 1980.**
- [74] J.Y.S. Luh, M.W. Walker, R.P.C. Paul : "Resolved acceleration control of mechanical manipulators", **IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC.25, p. 468-474, 1980.**
- [75] E. Freund : "Fast non linear control with arbitrary pole placement for industrial robots and manipulators", **Int. J. Robotics Research, vol. 1, n° 1, p. 65-79, 1982.**
- [76] M.H. Raibert, B.K.P. Horn : "Manipulator control using the configuration space method", **Industrial Robot, vol. 5, p. 69-73, 1978.**
- [77] B.R. Markiewicz : "Analysis of the computed torque drive method and comparison with conventional position servo for a computer-controlled manipulator", **JPL Memo 33-601, 1973.**
- [78] D. Claude : "Découplage des systèmes : du linéaire au non linéaire", **Outils et Méthodes Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse des Systèmes et la Théorie du Signal, vol. III, Edit. CNRS, Paris, 1983.**

- [79] A. Isidori : "Control of non linear systems via dynamic state feedback", **Algebraic and Geometric Methods in Non Linear Control Theory**, M. Fliess and M. Hazewinkel eds., Reidel, Dordrecht, 1985.

b) Commande adaptative

- [80] S. Dubowsky, D.T. Desforges : "The application of model referenced adaptive control to robotic manipulators", **Journal of Dyn. Syst., Meas., and Control**, vol. 101, p. 193-200, 1979.
- [81] M. Takegaki, S. Arimoto : "An adaptive trajectory control of manipulators", **Int. J. Control**, vol. 35, n° 2, p. 219-230, 1981.
- [82] A.J. Koivo, R.P. Paul : "Manipulator with self turning controller", **IEEE Conf. on Cybernetics and Society**, Massachussets, 1980.
- [83] R. Horowitz, M. Tomizuka : "An adaptive-control scheme for mechanical manipulators - Compensation of non linearity and decoupling control", **Presentation at the Winter Annual Meeting of ASME, Dynamics System and Control Division**, Chicago, 1980.
- [84] E.P. Ferreira, M. Renaud : "Commande dynamique adaptative des robots manipulateurs",
(théorie) :
- [85] B. Egardt, C. Samson : "Stable adaptive control of non-minimum phase systems", **Systems and Control Letters**, vol. 2, n° 3, 1982.
- [86] C. Samson : "Problèmes en identification et commande de systèmes dynamiques", **Thèse d'Etat, Université de Rennes I**, 1983.
- [87] L. Praly : "Robustness of indirect adaptive control based on pole placement design", **IFAC Workshop on Adaptive Systems on Control and Signal**, San Francisco, 1983.

- [88] Ph. De Larminat : "On the stabilization condition in indirect adaptive control", *Automatica*, vol. 20, n° 6, p. 793-796, 1984.

c) Sliding surfaces

- [90] K.D. Young : "Controller design for a manipulator using the theory of variable structure systems", *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern., SMC-8*, p. 101-109, 1978.
- [91] J.J. Slotine, S.S. Sastry : "Tracking control of non linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators", *Int. J. Control*, vol. 38, n° 2, p. 465-492, 1983.
- [92] J.J.E. Slotine : "The robust control of robot manipulators", *Int. J. of Robotics Research*, vol. 4, N° 2, p. 49-64, 1985.

d) Commande robuste

- [100] C. Samson : "Commande non linéaire robuste des robots manipulateurs", *Rapport interne*, n° 184, IRISA/INRIA, 1983.
- [101] C. Samson : "Robust non linear control of robotic manipulators", *The 22nd IEEE Conf. on Decision and Control, San Antonio*, P. 1211-1216, 1983.
- [102] E.G. Gilbert, I.J. Ha : "An approach to non linear feedback control with applications to robotics", *22nd IEEE Conf. on Decision and Control, San Antonio*, p. 134-138, 1983.

- [103] A. Solomon, E.J. Davison : "Design of controllers to solve the robust servo mechanism problem for a class of non linear systems", **22nd IEEE Conf. on Decision and Control, San Antonio, p. 335-341, 1983.**
- [104] S. Arimoto, F. Miyazaki : "Stability and robustness of P.I.D. feedback control for robotic manipulator of sensory capability", **proc. 1st Int. Symp. Robotics Res., Cambridge : MIT Press, 1983.**
- [105] H. Bremer, A. Truckenbrodt : "Robust control for industrial robots", **Fifth CISM-IFT.MM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators, p. 155-163, 1984.**
- [106] M.W. Spong, J.S. Thorp, J.W. Kleinwaks : "The control of robot manipulators with bounded control. Part II : Robustness and disturbance rejection", **Proc. 23rd IEEE Conf. on Decision and Control, Las Vegas, NV, 1984.**
- [107] M.W. Spong, M. Vidyasagar : "Robust linear compensator design for non linear robotic control", **Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1985.**
- [108] I.J. Ha, E.G. Gilbert : "Robust tracking in non linear systems and its applications to robotics", **Proc. of the 24th Conf. on Decision and Control, A. Lauderdale, FL, p. 1009-1017, 1985.**
- [109] I.H. Mufti : "Model reference adaptive control for manipulators - A review", **IFAC Symp. on Robot Control, Barcelona, p. 27-32, 1985.**
- [110] K.D. Young, P.V. Kokotovic, V.I. Utkin : "A singular perturbation analysis of high gain feedback systems", **IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC 22, p. 931-938, 1977.**
- [111] R. Dumas, C. Samson : "Robust non linear control of robotic manipulators : implementation aspects and simulations", **First World Conference on Robotics Research, Lehigh University, pennsylvanie, 1984.**

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

