



HAL
open science

Approximation de problemes lineaires de coques minces par une methode d'elements finis de type D.K.T.

Michel Bernadou, P. Mato Eiroa

► **To cite this version:**

Michel Bernadou, P. Mato Eiroa. Approximation de problemes lineaires de coques minces par une methode d'elements finis de type D.K.T.. RR-0699, INRIA. 1987. inria-00075854

HAL Id: inria-00075854

<https://inria.hal.science/inria-00075854>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

UNITE DE RECHERCHE
INRIA-ROQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tel (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 699

APPROXIMATION DE PROBLEMES LINEAIRES DE COQUES MINCES PAR UNE METHODE D'ELEMENTS FINIS DE TYPE D.K.T.

Michel BERNADOU
Pilar MATO EIROA

JUILLET 1987

APPROXIMATION DE PROBLEMES LINEAIRES DE COQUES MINCES
PAR UNE METHODE D'ELEMENTS FINIS DE TYPE D.K.T.

lère partie

Formulations continue et discrète ; exemples tests

Michel BERNADOU^(*) et Pilar MATO EIROA^(**)

Résumé : Dans ce rapport, nous rappelons tout d'abord l'énoncé des équations linéaires générales de coques minces prenant en compte les déformations de cisaillement transverse (modèle de type Mindlin-Reissner).

Nous montrons ensuite comment étendre au cas de coques générales les méthodes d'éléments finis de type D.K.T. (i.e. Discrete Kirchhoff Triangle) utilisées de façon classique maintenant pour approcher les problèmes de plaques. Pour ce faire, nous utilisons une représentation de la surface moyenne de la coque à l'aide d'une application définie sur un ouvert borné connexe du plan euclidien.

Puis, nous indiquons très précisément comment implémenter l'une de ces méthodes ; les autres méthodes pourraient être implémentées par analogie. Quelques résultats numériques obtenus sur des exemples-tests "classiques" viennent compléter cette étude.

L'analyse numérique (convergence, estimation d'erreur) sera effectuée dans un rapport ultérieur.

(*) INRIA, Centre de Rocquencourt, B.P.105,
78153 Le Chesnay Cedex, France

(**) Departamento de Matematica Aplicada, Facultad de Matematicas
Universidad de Santiago, 15706 Santiago, España

APPROXIMATION OF LINEAR THIN SHELL PROBLEMS
BY A FINITE ELEMENT METHOD OF D.K.T. TYPE

Summary : In this report, we record firstly the statement of the general linear thin shell equations which take into account the transverse shear strains (model of Mindlin-Reissner type).

Next, we show how to extend to the case of general shells the finite element methods of D.K.T. type (i.e. Discrete Kirchhoff Triangle) now classically used to solve plate problems. In this way, we use a representation of the middle surface of the shell by a mapping defined on a bounded connected open set of the euclidean plane.

Finally, we detail the implementation of one of these methods ; the other ones could be implemented analogously. Some numerical experiments realized on some classical test examples complete this work.

The numerical analysis (convergence, error estimates) will be done in a forthcoming report.

Plan

- 1 - INTRODUCTION
- 2 - LES EQUATIONS DE COQUES MINCES AVEC CISAILLEMENT TRANSVERSE
 - 2.1. Le modèle linéaire incluant les effets de cisaillement transverse
 - 2.2. Formulation variationnelle correspondante
 - 2.3. Le modèle linéaire de Koiter
- 3 - APPROXIMATION PAR DES METHODES D'ELEMENT FINIS DE TYPE D.K.T. (i.e., Discrete Kirchhoff Triangle)
 - 3.1. Le maillage de l'ouvert Ω du plan
 - 3.2. Les espaces d'éléments finis utilisés pour approcher les inconnues u et β
 - 3.3. Les contraintes de type Kirchhoff-Love imposées aux degrés de liberté
 - 3.4. Définition du problème approché
 - 3.5. Autres choix possibles des espaces d'approximation des composantes u_i et β_α
- 4 - IMPLEMENTATION
 - 4.1. Modules d'interpolation
 - 4.2. Calcul de la fonctionnelle d'énergie
 - 4.3. Calcul du second membre
- 5 - EXEMPLES
 - 5.1. Toiture cylindrique de SCORDELIS et LO
 - 5.2. Paraboloïde hyperbolique encastré sous pression uniforme
 - 5.3. Coque cylindrique pincée
- 6 - BIBLIOGRAPHIE

REMERCIEMENTS

. La réalisation de ce travail a été possible grâce aux soutiens financiers accordés par l'Université de Saint Jacques de Compostelle et par les Ministères des Affaires Etrangères français et espagnol.

. La dactylographie a été assurée par Maryse DESNOUS.

1 - INTRODUCTION

Il existe de très nombreuses méthodes d'approximation des problèmes de plaques et de coques. Cette grande diversité s'explique

- par le **nombre des modèles continus** qui varient suivant le problème traité : caractéristiques géométriques (épaisseur, courbure), petits ou grands déplacements, petites ou grandes déformations... ;
- pour un modèle donné, par le **nombre des formulations variationnelles possibles** conduisant à des méthodes d'éléments finis déplacements, mixtes, hybrides, équilibres... ;
- pour un modèle continu donné et pour une formulation variationnelle donnée, par la **variété des éléments finis** : bi ou tridimensionnels, triangulaires, quadrilatéraux, de degrés plus ou moins élevés, intégrations exactes ou approchées... approximations conformes ou non conformes...

Comme on le voit beaucoup de paramètres sont à prendre en compte pour choisir une méthode d'éléments finis et la tâche des utilisateurs est loin d'être aisée. Afin de la faciliter quelque peu, les ingénieurs numériques ont vainement essayé de proposer une "méthode universelle" fiable dans un grand nombre de cas.

Cependant, ces dernières années, les méthodes de type D.K.T. se sont avérées fiables pour un champ assez large de problèmes de plaques, linéaires ou non. Ces méthodes sont basées sur des modèles de plaques de type MINDLIN prenant en compte les effets de déformations de cisaillement transverse, modèles qui sont bien adaptés à l'étude de plaques moyennement épaisses. Malheureusement, une discrétisation directe de ces modèles de MINDLIN par des méthodes d'éléments finis conformes conduit à des instabilités numériques dès que l'épaisseur de la plaque devient trop petite.

Les idées de base des méthodes de type D.K.T. sont essentiellement :

- i) de **négliger** dans le calcul de l'énergie de déformation, la partie due aux déformations de cisaillement transverse, partie qui est petite lorsqu'on la compare à celle provenant des déformations de membrane ou de flexion ;

ii) d'introduire sur le modèle discret un certain nombre de contraintes de type :

- * des conditions de Kirchhoff-Love aux noeuds du maillage ;
- * des conditions "tangentielles" de Kirchhoff-Love en un certain nombre de noeuds situés sur les interfaces ;
- * et éventuellement quelques autres contraintes sans signification mécanique évidente, destinées à assurer une bonne définition du problème discret.

L'élargissement du champ d'utilisation de ces méthodes D.K.T., comparé à celui des autres méthodes désormais classiques, provient essentiellement de la possibilité de traiter, avec un même modèle discret, les problèmes de plaques minces, mais aussi les problèmes de plaques moyennement épaisses. D'où une grande souplesse d'utilisation, notamment pour des plaques d'épaisseur variable. En particulier, ces modèles D.K.T. ne se heurtent pas aux difficultés d'instabilités numériques signalées plus haut pour une discrétisation directe des modèles de MINDLIN.

L'idée de ces méthodes D.K.T. remonte aux travaux de WEMPNER, ODEN et KROSS [1971]. Cependant, ces méthodes ne se sont vraiment imposées qu'assez récemment, après en particulier les travaux de BATOZ, BATHE et HO [1980] et BATOZ, BENTAHAR et DHATT [1982].

Par ailleurs, F. KIKUCHI [1975, 1981] a effectué l'analyse numérique de ces méthodes D.K.T. ; pour des problèmes de plaques, cet Auteur a prouvé la convergence de ces méthodes et a obtenu les résultats d'estimations d'erreur correspondants.

Après ces succès obtenus dans l'approximation des problèmes de plaques, il était naturel d'essayer d'étendre ces méthodes au cas de problèmes de coques minces ou semi-épaisses.

L'objectif de ce travail est de proposer une extension naturelle de la méthode D.K.T. utilisée en plaques, à des problèmes généraux de coques, sans aucune autre approximation que celle de la méthode D.K.T. elle-même. Pour cela, tout comme dans KOITER [1966, 1970], NAGHDI [1963, 1972] ou BERNADOU-BOISSERIE [1982], nous supposons que la surface moyenne

de la coque est définie comme l'image d'un ouvert borné connexe du plan par une application régulière.

Une telle extension nous semble intéressante

(*) au niveau des applications, car elle est générale et est de mise en oeuvre automatique ;

(**) au niveau théorique, car l'absence d'approximations complémentaires devrait faciliter l'analyse numérique de cette approximation D.K.T. pour les coques.

Dans ce rapport, nous avons développé l'aspect (*), renvoyant à un rapport ultérieur pour (**). Plus précisément, dans le paragraphe 2, nous rappelons les équations de coques minces de type MINDLIN-REISSNER. Puis, dans le chapitre 3, nous décrivons l'approximation de ces équations par des méthodes d'éléments finis de type D.K.T. Les détails de l'implémentation de ces méthodes sont donnés dans le chapitre 4. Enfin, dans le chapitre 5 nous rendons compte des essais numériques effectués sur quelques exemples-tests largement étudiés par les ingénieurs numériciens.

2 - LES EQUATIONS DE COQUES MINCES AVEC CISAILLEMENT TRANSVERSE

La description géométrique de la coque avant déformation est donnée (par exemple) dans BERNADOU-BOISSERIE [1982, §§ 1.1 et 1.2]. Par la suite nous utilisons les notations de cet ouvrage.

2.1. Le modèle linéaire incluant les effets de cisaillement transverse

Ce modèle est présenté de manière générale dans NAGHDI [1963,1972] ou WEMPNER [1981], par exemple. Nous reprenons ici l'énoncé simplifié de BATOZ-GEOFFROY [1983] valable sous les hypothèses de contraintes planes, de déformations de cisaillement transverse constantes dans l'épaisseur, et de voiles minces.

Le champ de déplacement \vec{U} d'un point quelconque M de la coque (tridimensionnelle) est approché comme suit :

$$(2.1.1) \quad \vec{U} = \vec{u} + \zeta \beta_{\alpha} \vec{a}^{\alpha}$$

où \vec{u} est le champ de déplacement de la projection P du point M sur la surface moyenne de la coque avant déformation, i.e.,

$$(2.1.2) \quad \vec{u} = u_i \vec{a}^i,$$

où ζ désigne la coordonnée suivant l'épaisseur de la coque et où les paramètres β_α sont les composantes de la rotation de la normale \vec{a}_3 . Explicitons ce dernier point. Nous noterons \vec{a}_3 la normale unitaire à la surface moyenne déformée. Par ailleurs, la prise en compte des effets de cisaillement transverse conduit à supposer que les particules se trouvant, avant déformation, sur la normale \vec{a}_3 restent alignées après déformation, le vecteur unitaire \vec{a}_3 étant ainsi transformé en un certain vecteur (non unitaire) \vec{a}_3^* . Ces considérations sont illustrées sur la figure 2.1.1.

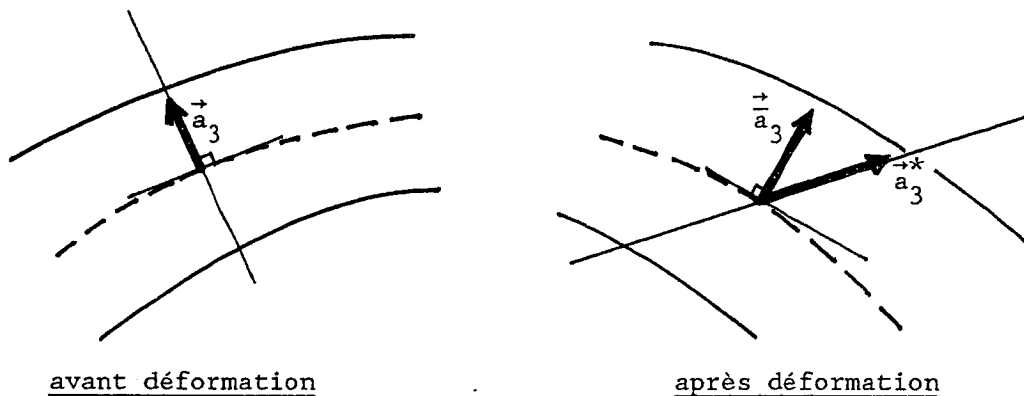


Figure 2.1.1 : Aspects géométriques de la déformation de la coque
(coupe transversale)

Avec ces définitions, on aura en première approximation :

$$(2.1.3) \quad \vec{a}_3^* = \vec{a}_3 + \beta_\alpha \vec{a}^\alpha.$$

Par ailleurs, avec les notations de BERNADOU-BOISSERIE [1982, (1.3.19)], on a dans le cadre d'hypothèses de déformations de type KIRCHHOFF-LOVE (toujours en première approximation) :

$$(2.1.4) \quad \vec{a}_3 = \vec{a}_3 - \phi_\mu \vec{a}^\mu$$

avec

$$(2.1.5) \quad \phi_{\mu}(\vec{u}) = u_{3|\mu} + b_{\mu}^{\lambda} u_{\lambda} .$$

En particulier, les hypothèses de KIRCHHOFF-LOVE sont vérifiées dès que $\vec{a}_3^* = \vec{a}_3$, soit avec (2.1.3) et (2.1.4) :

$$(2.1.6) \quad \vec{a}_3^* - \vec{a}_3 = (\beta_{\alpha} + \phi_{\alpha}) \vec{a}^{\alpha} = 0 ,$$

ou encore,

$$(2.1.7) \quad \beta_{\alpha} + \phi_{\alpha} = 0 .$$

Relations "déformation-déplacement" :

En s'en tenant à une théorie linéaire, les relations déformation-déplacement sont approchées par

$$(2.1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{\alpha\beta}(\vec{U}) = \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) + \zeta \chi_{\alpha\beta}(\vec{u}, \underline{\beta}) \quad , \quad \underline{\beta} = \beta_{\alpha} \vec{a}^{\alpha} \quad , \\ \epsilon_{3\alpha}(\vec{U}) = \frac{1}{2} (\phi_{\alpha}(\vec{u}) + \beta_{\alpha}) \\ \epsilon_{33}(\vec{U}) \text{ [sera pris en compte ultérieurement : voir (2.1.15)]} \end{array} \right.$$

où

* $\epsilon_{ij}(\vec{U})$ désignent les composantes du tenseur de déformation de la coque tridimensionnelle ;

* $\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u})$ désignent les composantes du tenseur de déformation de la surface moyenne de la coque, i.e.,

$$(2.1.9) \quad \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} u_3$$

* $\chi_{\alpha\beta}(\vec{u}, \underline{\beta})$ désignent les composantes du tenseur de changement de courbure de la surface moyenne de la coque :

$$(2.1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi_{\alpha\beta}(\vec{u}, \underline{\beta}) = \frac{1}{2} (\beta_{\alpha|\beta} + \beta_{\beta|\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} d_{\lambda\beta}(\vec{u}) - b_{\beta}^{\lambda} d_{\lambda\alpha}(\vec{u})) \\ \text{avec} \\ d_{\lambda\alpha}(\vec{u}) = u_{\lambda|\alpha} - b_{\lambda\alpha} u_3 \end{array} \right.$$

* $\phi_{\alpha}(\vec{u})$ sont les composantes de rotation définies en (2.1.4) et (2.1.5).

Remarque 2.1.1 : Dans le cas de coques peu profondes, les relations précédentes peuvent être simplifiées comme suit :

$$(2.1.5\text{bis}) \quad \phi_{\alpha}(\vec{u}) = u_{3|\alpha} ;$$

$$(2.1.9\text{bis}) \quad \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} u_3 \text{ (inchangée) ;}$$

$$(2.1.10\text{bis}) \quad \chi_{\alpha\beta}(\vec{u}, \underline{\beta}) = \chi_{\alpha\beta}(\underline{\beta}) = \frac{1}{2} (\beta_{\alpha|\beta} + \beta_{\beta|\alpha}) .$$

□

Relations contraintes-déformations

Nous supposons par la suite que la coque est constituée par un matériau élastique, homogène et isotrope. Dès lors, le tenseur des contraintes σ^{ij} est relié au tenseur des déformations par la relation

$$(2.1.11) \quad \sigma^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{U})$$

où les coefficients d'élasticité C^{ijkl} sont donnés par

$$(2.1.12) \quad C^{ijkl} = \frac{E}{2(1+\nu)} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{kl}) .$$

Les quantités E et ν désignent respectivement le module de YOUNG et le coefficient de POISSON du matériau. Par ailleurs, les coefficients g^{ij} sont ceux de la matrice inverse de la matrice (g_{kl}) définie dans BERNADOU- BOISSERIE [1982, (1.3.7)]. En particulier :

$$(2.1.13) \quad g^{\alpha 3} = g^{3\alpha} = 0 \quad , \quad g^{33} = 1 .$$

Avec ces relations, l'expression (2.1.12) entraîne notamment :

$$(2.1.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} C^{33\alpha\beta} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} g^{\alpha\beta} \quad , \quad C^{3\alpha 3\beta} = \frac{Eg^{\alpha\beta}}{2(1+\nu)} ; \\ C^{333\alpha} = C^{3\alpha\beta\lambda} = 0 ; \\ C^{3333} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} . \end{array} \right.$$

Dès lors, l'hypothèse de contraintes planes $\sigma^{33} = 0$ entraîne

$$(2.1.15) \quad \epsilon_{33} = - \frac{\nu}{1-\nu} g^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} .$$

L'énergie de déformation associée à un champ de déplacement \vec{U} de la coque s'écrit :

$$(2.1.16) \quad I_d(\vec{U}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \sigma^{ij} \epsilon_{ij}(\vec{U}) d\mathcal{C}$$

soit avec (2.1.11), (2.1.14) et (2.1.15) :

$$(2.1.17) \quad I_d = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} (B^{\alpha\beta\lambda\mu} \epsilon_{\alpha\beta}(\vec{U}) \epsilon_{\lambda\mu}(\vec{U}) + \frac{2Eg^{\alpha\beta}}{1+\nu} \epsilon_{\alpha 3}(\vec{U}) \epsilon_{\beta 3}(\vec{U})) d\mathcal{C}$$

où

$$(2.1.18) \quad B^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} (g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu}) .$$

L'intégration sur l'épaisseur de l'expression (2.1.17) permet alors de trouver une approximation de cette énergie de déformation formulée sur la surface moyenne de la coque seulement. Par analogie avec les approximations proposées par KOITER [1966] dans un cas sensiblement différent (cet Auteur suppose qu'il n'y a pas de déformations de cisaillement transverse), nous utiliserons par la suite l'approximation suivante de l'énergie de déformation (*) :

$$(2.1.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_d \sim \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ E^{\alpha\beta\lambda\mu} e[\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) \gamma_{\lambda\mu}(\vec{u}) + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}(\vec{u}, \beta) \chi_{\lambda\mu}(\vec{u}, \beta)] \\ + \frac{eEa^{\alpha\beta}}{2(1+\nu)} \{ (\phi_{\alpha}(\vec{u}) + \beta_{\alpha}) (\phi_{\beta}(\vec{u}) + \beta_{\beta}) \} \} \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \end{array} \right.$$

où

$$(2.1.20) \quad E^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} (a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu}) .$$

(*) Cette expression de l'énergie de déformation est obtenue à partir des approximations (2.1.8) qui supposent en particulier que les déformations de cisaillement transverse sont constantes dans l'épaisseur (voir WEMPNER [1981, exercice 12-33]). On obtiendrait une autre expression pour le terme de cisaillement dans I_d , en supposant que les déformations de cisaillement transverse varient de façon quadratique dans l'épaisseur, i.e.,

$$\epsilon_{3\alpha}(\vec{U}) = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{2\xi}{e} \right)^2 \right] (\epsilon_{3\alpha}(\vec{U})) \Big|_{\xi=0} .$$

C'est le point de vue adopté par WEMPNER [1981, (12-253)]. Cela conduirait à remplacer le coefficient 1/2 apparaissant en (2.1.22) par le coefficient 4/15. Le choix de l'une ou l'autre de ces possibilités est sans incidence sur la suite puisque l'une des caractéristiques de ces méthodes d'approximation D.K.T. est précisément de négliger l'énergie de cisaillement transverse associée à la forme bilinéaire (2.1.22). □

A cette approximation, on associe immédiatement les formes bilinéaires suivantes :

$$(2.1.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} a[(\vec{u}, \underline{\beta}) ; (\vec{v}, \underline{\delta})] = \int_{\Omega} eE^{\alpha\beta\lambda\mu} (\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) \gamma_{\lambda\mu}(\vec{v}) \\ + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}(\vec{u}, \underline{\beta}) \chi_{\lambda\mu}(\vec{v}, \underline{\delta})) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \end{array} \right.$$

$$(2.1.22) \quad b[(\vec{u}, \underline{\beta}) ; (\vec{v}, \underline{\delta})] = \int_{\Omega} \frac{eEa^{\alpha\beta}}{2(1+\nu)} ((\phi_{\alpha}(\vec{u}) + \beta_{\alpha}) (\phi_{\beta}(\vec{v}) + \delta_{\beta})) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2$$

Remarque 2.1.2 : Il est intéressant de noter que les formes bilinéaires $a(\dots)$ et $b(\dots)$ définies en (2.1.21) et (2.1.22) permettent de retrouver la forme bilinéaire classique du modèle de KOITER dans le cas où les déformations de cisaillement sont nulles. En effet la relation (2.1.8) entraîne alors

$$(2.1.23) \quad \beta_{\alpha} = - \phi_{\alpha}(\vec{u})$$

de telle sorte que

$$\chi_{\alpha\mu}(\vec{u}, \underline{\beta}) = - u_{3|\alpha\mu} + b_{\lambda\alpha} b_{\mu}^{\lambda} u_3 - b_{\alpha|\mu}^{\lambda} u_{\lambda} - b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda|\mu} - b_{\mu}^{\lambda} u_{\lambda|\alpha} .$$

En d'autres termes

$$(2.1.24) \quad \chi_{\alpha\mu}(\vec{u}, \underline{\beta}) = - \bar{\rho}_{\alpha\mu}(\vec{u})$$

où $\bar{\rho}_{\alpha\mu}$ n'est autre que le tenseur de changement de courbure défini dans KOITER [1966] ou BERNADOU-BOISSERIE [1982, (1.3.22)]. En reportant dans l'expression (2.1.21), on retrouve la forme bilinéaire $a(\dots)$ de BERNADOU-BOISSERIE [1982, (1.3.26)].

Par ailleurs la relation (2.1.23) entraîne alors $b(\dots) = 0$.

□

Charges appliquées à la coque :

Dans ce qui suit, nous supposons que la coque est :

- i) encastrée sur la partie Γ_0 de sa frontière $\Gamma = \partial\Omega$;
- ii) chargée par une distribution volumique de forces dont la résultante est \vec{p} et dont le moment résultant est $\vec{0}$ sur la surface moyenne S de la coque ;

iii) chargée par une distribution surfacique de forces appliquée à la partie $(\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0) \times]-e, e[$ de sa surface latérale. On désigne par \vec{N} la résultante correspondante sur Γ_1 et par $\vec{M} = \epsilon_{\alpha\beta} M^{\beta\alpha} \vec{a}^\alpha$ le moment résultant correspondant sur Γ_1 .

Le travail effectué par ces diverses charges pour un déplacement $\vec{V} = (\vec{v}, \underline{\delta})$ des particules de la coque est alors approché par

$$(2.1.25) \quad f(\vec{v}, \underline{\delta}) = \int_{\Omega} \vec{p} \vec{v} \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 + \int_{\Gamma_1} (\vec{N} \cdot \vec{v} - M^\alpha \delta_\alpha) d\gamma .$$

Remarque 2.1.3 : Pour le dernier terme on notera qu'ici, par analogie avec BERNADOU-CIARLET [1976, § 2.3], on a

$$\vec{a}_3^* = \vec{a}_3 + \vec{\phi} \times \vec{a}_3$$

avec cette fois-ci

$$\vec{\phi} = \epsilon_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu} \vec{a}^\nu + \Omega \vec{a}^3 ;$$

il s'ensuit que

$$\vec{M} \cdot \vec{\phi} = \epsilon_{\alpha\beta} M^{\beta\alpha} \epsilon_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu} \vec{a}^\nu = \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu} a^{\alpha\nu} M^{\beta\mu} ;$$

grâce à GREEN-ZERNA [1975, (1.13.26)], i.e.,

$$a_{\beta\mu} = \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\nu\mu} a^{\alpha\nu} .$$

il vient encore

$$\vec{M} \cdot \vec{\phi} = - a_{\alpha\mu} M^{\alpha\mu} = - M^\alpha \delta_\alpha .$$

□

Remarque 2.1.4 : Notons ici encore que si l'on néglige les déformations de cisaillement, la relation (2.1.23) permet de retrouver en (2.1.25) l'expression générale du travail des charges obtenue dans BERNADOU-CIARLET [1976, (2.6.3)].

□

2.2. Formulation variationnelle correspondante

Posons

$$(2.2.1) \quad V = \{v \mid v \in H^1(\Omega) , v|_{\Gamma_0} = 0\} .$$

Alors, le problème peut être énoncé comme suit :

Problème 2.2.1 : Trouver $(\vec{u}, \underline{\beta}) \in V^5$, $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, tel que

$$(2.2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a[(\vec{u}, \underline{\beta}); (\vec{v}, \underline{\delta})] + b[(\vec{u}, \underline{\beta}); (\vec{v}, \underline{\delta})] = f(\vec{v}, \underline{\delta}) \\ v(\vec{v}, \underline{\delta}) \in V^5 . \end{array} \right.$$

Théorème 2.2.1 : (COUTRIS [1976])

Le problème 2.2.1 admet une solution unique.

2.3. Le modèle linéaire de KOITER [1966]

Par la suite, il sera intéressant de disposer également du modèle linéaire de KOITER [1966]. Nous le rappelons ci-dessous. Pour l'obtenir, conformément à (2.1.7), il suffira de remplacer β_α par $-\phi_\alpha$ dans les équations (2.2.2). On obtient de la sorte :

Problème 2.3.1 : trouver $\vec{u}^* \in \vec{V}^*$ tel que

$$(2.3.1) \quad a^*(\vec{u}^*, \vec{v}) = f^*(\vec{v}) , \vec{v} \in \vec{V}^*$$

avec

$$(2.3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^*(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} eE^{\alpha\beta\lambda\mu} (\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) \gamma_{\lambda\mu}(\vec{v})) \\ + \frac{e^2}{12} \bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{u}) \bar{\rho}_{\lambda\mu}(\vec{v}) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \end{array} \right.$$

où

$\gamma_{\alpha\beta}$ et $E^{\alpha\beta\lambda\mu}$ sont donnés respectivement par (2.1.9) et (2.1.20),

$$(2.3.3) \quad \bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v}) = - (v_3|_{\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} v_3 + b_{\alpha|\beta}^{\lambda} v_{\lambda} + b_{\alpha}^{\lambda} v_{\lambda|\beta} + b_{\beta}^{\lambda} v_{\lambda|\alpha})$$

et avec

$$(2.3.4) \quad \mathbf{f}^*(\vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{p}\vec{v} \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 + \int_{\Gamma_1} \vec{N} \cdot \vec{v} + M^\alpha (v_3|_\alpha + b_\alpha^\lambda v_\lambda) d\gamma .$$

C'est bien, au signe près pour $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$, les expressions habituelles : voir BERNADOU-BOISSERIE [1982] par exemple. Le changement de signe de $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ n'affecte pas la formulation ci-dessus.

De plus

$$(2.3.5) \quad \vec{v}^* = \{ \vec{v} | \vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega) ; \vec{v}|_{\Gamma_0} = \vec{0} ; \frac{\partial v_3}{\partial n} |_{\Gamma_0} = 0 \} .$$

L'utilisation de (*) permet de distinguer les variables caractéristiques du modèle linéaire de KOITER.

Théorème 2.3.1 : (BERNADOU-CIARLET [1976])

Le problème 2.3.1 admet une solution et une seule.

□

3 - APPROXIMATION PAR DES METHODES D'ELEMENTS FINIS DE TYPE D.K.T.

(i.e., Discrete Kirchhoff Triangle)

Orientation : L'approche directe des équations (2.2.2) par des méthodes conformes d'éléments finis est facile à mettre en oeuvre car il suffit d'utiliser pour cela des éléments finis de classe \mathcal{C}^0 . Cependant, pour des épaisseurs très petites on observe des instabilités numériques ("locking phenomenon") qu'il convient de neutraliser. Pour cela, on utilise généralement des méthodes d'intégrations réduites qui n'ont malheureusement aucun caractère systématique.

D'un autre côté, l'approche directe des équations (2.3.1) par des méthodes conformes d'éléments finis conduit à l'utilisation d'éléments finis de classe \mathcal{C}^1 dont la mise en oeuvre est toujours délicate. En outre, ces équations modélisent bien les coques minces mais elles modélisent moins bien les coques semi-épaisses ou épaisses pour lesquelles il n'est guère raisonnable de négliger les déformations de cisaillement transverse.

L'objet des méthodes d'éléments finis de type D.K.T. est de proposer un modèle discret "intermédiaire" entre les deux modèles discrets que l'on peut obtenir par approximation conforme des équations (2.2.2) et (2.3.1). Pour ce faire :

- i) on définit un certain maillage de l'ouvert Ω du plan ;
- ii) on approche les composantes des inconnues \vec{u}, β dans des espaces d'éléments finis convenables ;
- iii) on introduit sur l'espace discret un certain nombre de contraintes qui imposent à la coque de se déformer suivant des hypothèses de type Love-Kirchhoff en certains noeuds, ou le long de certaines arêtes du maillage ;
- iv) dans le calcul de l'intégrale d'énergie de déformation, la partie $b(\dots)$ correspondant à l'énergie de déformation de cisaillement transverse est négligée.

Dans ce paragraphe, nous allons détailler cette approche D.K.T., renvoyant à des travaux ultérieurs pour l'étude de la convergence de la méthode.

3.1. Le maillage de l'ouvert Ω du plan

A partir de maintenant nous supposons que le domaine plan Ω est un domaine convexe et polygonal. On lui associera une partition à l'aide de triangles (resp. de quadrangles) vérifiant les propriétés de régularité habituelles des triangulations (voir CIARLET [1978]).

Par la suite nous détaillerons une des méthodes D.K.T. dans le cas de triangles ; les autres méthodes basées sur des éléments triangulaires ou quadrangulaires seront succinctement décrites.

3.2. Les espaces d'éléments finis utilisés pour approcher les inconnues

\vec{u} et β

Chacune des composantes u_i et β_α sera approchée dans un espace de dimension finie associé aux éléments finis ci-dessous :

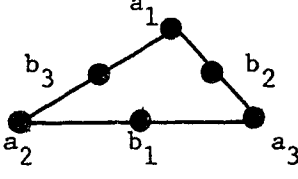
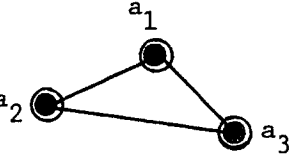
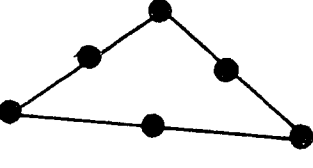
Inconnue	Nature de l'élément fini	Schématisation de l'élément fini	Espace d'élément fini associé
u_1, u_2	P_2 -Lagrange		V_{h1}
u_3	P'_3 -Hermite		V_{h2}
β_α	P_2 -Lagrange		V_{h1}

Figure 3.2.1 : Les éléments finis utilisés

3.3. Les contraintes de type Kirchhoff-Love imposées aux degrés de liberté

Pour un triangle donné, les degrés de liberté associés aux différentes inconnues sont au nombre de 33. Nous allons imposer 12 contraintes ce qui réduira ce nombre à 21 degrés de liberté effectifs :

$$(3.3.1) \quad u_{\alpha h}(a_i), u_{\alpha h}(b_i), u_{3h}(a_i), \beta_{\alpha h}(a_i), \alpha = 1, 2; i = 1, 2, 3,$$

où a_i, b_i désignent respectivement les sommets et les milieux de côtés du triangle.

Ces douze contraintes sont :

i) La condition de Kirchhoff-Love est vérifiée aux sommets du triangle, i.e., avec (2.1.5) et (2.1.7) :

$$(3.3.2) \quad \beta_{\alpha h}(a_i) = -u_{3h,\alpha}(a_i) - b_\alpha^\lambda(a_i)u_{\lambda h}(a_i)$$

ce qui introduit 6 contraintes.

ii) La condition de Kirchhoff-Love (2.1.7) est vérifiée "tangentielle-ment" aux milieux des côtés b_i du triangle :

Avec les notations de la Figure 3.3.1, une paramétrisation du côté $a_{i+1}a_{i-1}$ est donnée par

$$\xi^\alpha = s\xi_{i+1}^\alpha + (1-s)\xi_{i-1}^\alpha, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad \alpha = 1, 2.$$

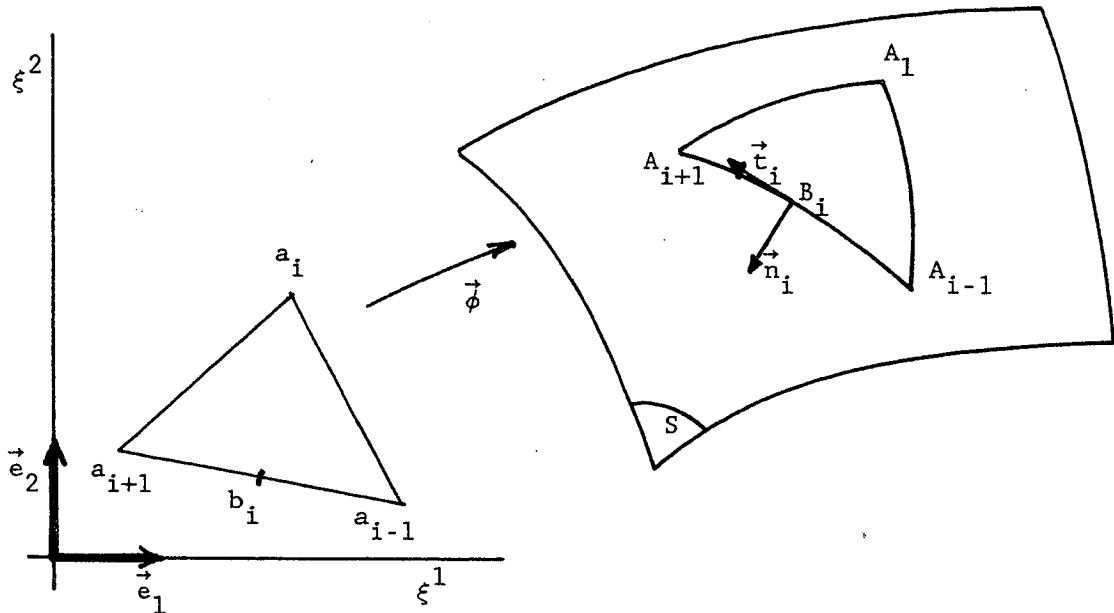


Figure 3.3.1 : Les triangles courants

Dès lors le vecteur tangent \vec{t}_i (*) au point courant du côté $A_{i+1}A_{i-1}$ du triangle "doublement courbé" $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ tracé sur la surface moyenne de la coque, image par $\vec{\phi}$ du triangle $a_{i-1}a_i a_{i+1}$, est donné par

$$(3.3.3) \quad \vec{t}_i = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial s} \Big|_{A_{i+1}A_{i-1}} = t_i^{\alpha} \vec{a}_\alpha \quad \text{où} \quad t_i^\alpha = \xi_{i+1}^\alpha - \xi_{i-1}^\alpha = c \frac{te}{\dots}$$

La composante tangentielle de rotation vaut donc

$$\beta_h \cdot \vec{t}_i = \beta_{\nu h}^{\vec{a}^\nu} \cdot t_i^{\alpha} \vec{a}_\alpha = t_i^\nu \beta_{\nu h}$$

Dire que la condition de Kirchhoff-Love (2.1.7) est vérifiée tangentielle-ment, c'est dire avec (2.1.5) que l'on a

$$t_i^\nu \beta_{\nu h}(b_i) = - t_i^\nu (u_{3h,\nu}(b_i) + b_\nu^\lambda(b_i) u_{\lambda h}(b_i))$$

(*) Ici et par la suite l'indice i est fixé, donc pas de sommations.

ou encore, grâce à (3.3.3)

$$(3.3.4) \quad t_{i\nu h}^\nu \beta_{\nu h}(b_i) = Du_{3h}(b_i) \overrightarrow{a_{i+1} a_{i-1}} - t_{i\nu}^\nu b_{\nu}^\lambda(b_i) u_{\lambda h}(b_i) .$$

Ainsi pour deux triangles adjacents ayant le côté $a_{i+1}a_{i-1}$ en commun, cette contrainte permet d'assurer la continuité à l'interface de $Du_{3h}(b_i) \overrightarrow{a_{i+1} a_{i-1}}$, donc de $\beta_{\nu h}(b_i)$ et donc de $\beta_{\nu h}$.

iii) La composante "normale" du vecteur $\beta_h(b_i)$ est égale à la demi-somme des composantes normales aux sommets adjacents a_{i-1} et a_{i+1} , i.e., avec les notations de la Figure 3.3.1 :

$$(3.3.5) \quad (\beta_h \cdot \vec{n}_i)(b_i) = \frac{1}{2} \{ (\beta_h \cdot \vec{n}_i)(a_{i+1}) + (\beta_h \cdot \vec{n}_i)(a_{i-1}) \} .$$

Mais ici $\vec{n}_i = \vec{a}_3 \times \vec{t}_i$, d'où

$$\begin{aligned} \beta_h \cdot \vec{n}_i &= \beta_h \cdot (\vec{a}_3 \times \vec{t}_i) = \vec{a}_3 \cdot (\vec{t}_i \times \beta_h) \\ &= \vec{a}_3 \cdot (t_{\alpha i}^{\alpha} \times \beta_{\lambda h}^{\lambda}) = \epsilon^{\alpha\lambda} t_{\alpha i}^{\alpha} \beta_{\lambda h} \end{aligned}$$

avec

$$\epsilon^{\alpha\lambda} = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\alpha\lambda} \quad \text{et} \quad e^{11} = e^{22} = 0 \quad , \quad e^{12} = -e^{21} = 1 .$$

Dans l'expression ci-dessus, nous avons introduit les composantes covariantes du vecteur \vec{t}_i ; ceci va nous permettre d'utiliser par la suite la propriété suivante :

$$(3.3.6) \quad |\vec{t}_i|^2 = \vec{t}_i \cdot \vec{t}_i = t_{\alpha i}^{\alpha} t_i^{\alpha} = a_{\alpha\lambda} (\xi_{i+1}^{\alpha} - \xi_{i-1}^{\alpha}) (\xi_{i+1}^{\lambda} - \xi_{i-1}^{\lambda}) .$$

Il convient de noter au passage que sur un triangle donné les composantes contravariantes t_i^{α} sont constantes alors que les composantes covariantes $t_{\lambda i} = a_{\lambda\alpha} t_i^{\alpha}$ sont "a priori" variables. En particulier $|\vec{t}_i|^2$ est variable sur le côté $A_{i+1}A_{i-1}$.

Nous écrirons donc les contraintes (3.3.5) sous la forme

$$(3.3.7) \quad (\epsilon^{\alpha\lambda} t_{\alpha i}^{\alpha} \beta_{\lambda h})(b_i) = \frac{1}{2} \{ (\epsilon^{\alpha\lambda} t_{\alpha i}^{\alpha} \beta_{\lambda h})(a_{i+1}) + (\epsilon^{\alpha\lambda} t_{\alpha i}^{\alpha} \beta_{\lambda h})(a_{i-1}) \} .$$

Remarque 3.3.1 : Pour les contraintes iii), on pourrait être tenté d'imposer une condition de Kirchhoff-Love sur les composantes "normales" de $(\beta_\alpha + \phi_\alpha) \vec{a}^\alpha$. Cela n'est pas souhaitable car il apparaîtrait alors, par analogie avec (3.3.4), un terme du type $u_{3h, n_i}^{(b_i)}$ qui dans le cas général est discontinu d'un triangle au suivant.

□

Il reste maintenant à donner explicitement l'expression des 33 degrés de liberté locaux des éléments finis de la Figure 3.2.1 à l'aide des 21 degrés de liberté effectifs donnés en (3.3.1). Pour plus de clarté, pour un triangle T donné dans le plan (ξ^1, ξ^2) , nous distinguerons les notions de degrés de liberté locaux et globaux.

Degrés de liberté locaux et globaux

D'après la Figure 3.2.1, deux éléments finis sont utilisés par la suite, i.e., l'élément P_2 -Lagrange et l'élément P'_3 -Hermite ; on note $[DL_2(v)]$ et $[DLLC_3(v)]$ leurs degrés de liberté respectifs :

$$(3.3.8) \quad [DL_2(v)]_{1 \times 6} = [v(a_1) \ v(a_2) \ v(a_3) \ v(b_1) \ v(b_2) \ v(b_3)]$$

$$(3.3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} [DLLC_3(v)]_{1 \times 9} = [v(a_1) \ v(a_2) \ v(a_3) \ Dv(a_1)(a_3 - a_1) \\ Dv(a_1)(a_2 - a_1) \ Dv(a_2)(a_1 - a_2) \ Dv(a_2)(a_3 - a_2) \\ Dv(a_3)(a_2 - a_3) \ Dv(a_3)(a_1 - a_3)] \end{array} \right.$$

Nous avons qualifié les degrés de liberté (3.3.9) de locaux car ils utilisent les dérivées selon la direction des côtés du triangle. Nous leur associons les degrés de liberté globaux $[DLGL_3(v)]$ suivants :

$$(3.3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} [DLGL_3(v)]_{1 \times 9} = [v(a_1) \ v(a_2) \ v(a_3) \ v_{,1}(a_1) \ v_{,2}(a_1) \\ v_{,1}(a_2) \ v_{,2}(a_2) \ v_{,1}(a_3) \ v_{,2}(a_3)] \end{array} \right.$$

où $v_{,\alpha} = \frac{\partial v}{\partial \xi^\alpha}$. Si l'on remarque que

$$(3.3.11) \quad Dv(a_i)(a_{i-1} - a_i) = (\xi_{i-1}^\alpha - \xi_i^\alpha) v_{,\alpha}(a_i),$$

alors la relation (3.3.3) permet d'écrire

$$(3.3.17) \quad [DLGL(\vec{u}_h, \vec{\beta}_h)]_{1 \times 33} = [DLDKT(\vec{u}_h, \vec{\beta}_h)]_{1 \times 21} [Dkt]_{21 \times 33} .$$

Calcul de la matrice [Dkt]

Tout d'abord, grâce à la relation (3.3.2), on obtient :

$$(3.3.18) \quad u_{3h, \alpha}(a_i) = -\beta_{\alpha h}(a_i) - b_{\alpha}^{\lambda}(a_i) u_{\lambda h}(a_i) .$$

Dès lors, il vient avec les notations (3.3.10) et (3.3.15) :

$$(3.3.19) \quad [DLGL_3(u_{3h})]_{1 \times 9} = [DLDKT(\vec{u}_h, \vec{\beta}_h)]_{1 \times 21} [Dkt3]_{21 \times 9}$$

avec

$$(3.3.20) \quad [Dkt3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -b_1^1(a_1) & -b_2^1(a_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1^1(a_2) & -b_2^1(a_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1^1(a_3) & -b_2^1(a_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_1^2(a_1) & -b_2^2(a_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1^2(a_2) & -b_2^2(a_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1^2(a_3) & -b_2^2(a_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, les contraintes (3.3.4) font intervenir $Du_{3h}(b_i) \overrightarrow{a_{i+1}a_{i-1}}$ qui s'exprime en fonction de $u_{3h}(a_{i+1})$, $u_{3h}(a_{i-1})$, $u_{3h,t_i}(a_{i+1})$ et $u_{3h,t_i}(a_{i-1})$ sous la forme suivante (t_i désigne ici la direction du côté $a_{i+1}a_{i-1}$) :

$$\left\{ \begin{aligned} Du_{3h}(b_i) \overrightarrow{a_{i+1}a_{i-1}} &= \frac{3}{2} (u_{3h}(a_{i-1}) - u_{3h}(a_{i+1})) \\ &+ \frac{1}{4} (Du_{3h}(a_{i-1})(a_{i+1}-a_{i-1}) - Du_{3h}(a_{i+1})(a_{i-1}-a_{i+1})) \end{aligned} \right.$$

soit avec (3.3.3) et (3.3.11) :

$$\left\{ \begin{aligned} Du_{3h}(b_i) \overrightarrow{a_{i+1}a_{i-1}} &= \frac{3}{2} (u_{3h}(a_{i-1}) - u_{3h}(a_{i+1})) \\ &+ \frac{1}{4} t_i^\alpha (u_{3h,\alpha}(a_{i-1}) + u_{3h,\alpha}(a_{i+1})) \end{aligned} \right.$$

ou encore avec (3.3.18)

$$(3.3.21) \left\{ \begin{aligned} Du_{3h}(b_i) \overrightarrow{a_{i+1}a_{i-1}} &= \frac{3}{2} (u_{3h}(a_{i-1}) - u_{3h}(a_{i+1})) \\ &- \frac{1}{4} t_i^\alpha (\beta_{\alpha h}(a_{i-1}) + \beta_{\alpha h}(a_{i+1}) + b_\alpha^\lambda(a_{i+1})u_{\lambda h}(a_{i+1}) \\ &\quad + b_\alpha^\lambda(a_{i-1})u_{\lambda h}(a_{i-1})) . \end{aligned} \right.$$

Par ailleurs, les relations (3.3.4) et (3.3.7) s'écrivent

$$t_i^1 \beta_{1h}(b_i) + t_i^2 \beta_{2h}(b_i) = Du_{3h}(b_i) \overrightarrow{a_{i+1}a_{i-1}} - t_i^\nu b_\nu^\lambda(b_i) u_{\lambda h}(b_i)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & - \frac{t_{2i}(b_i)}{\sqrt{a(b_i)}} \beta_{1h}(b_i) + \frac{t_{1i}(b_i)}{\sqrt{a(b_i)}} \beta_{2h}(b_i) \\ & = \frac{1}{2} \left(- \frac{t_{2i}(a_{i+1})}{\sqrt{a(a_{i+1})}} \beta_{1h}(a_{i+1}) - \frac{t_{2i}(a_{i-1})}{\sqrt{a(a_{i-1})}} \beta_{1h}(a_{i-1}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{t_{1i}(a_{i+1})}{\sqrt{a(a_{i+1})}} \beta_{2h}(a_{i+1}) + \frac{t_{1i}(a_{i-1})}{\sqrt{a(a_{i-1})}} \beta_{2h}(a_{i-1}) \right) \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit avec (3.3.6) :

$$\begin{aligned}
 \beta_{1h}(b_i) &= \frac{\sqrt{a(b_i)}}{|\vec{t}_i(b_i)|^2} \left\{ \frac{t_{1i}(b_i)}{\sqrt{a(b_i)}} [Du_{3h}(b_i) \overrightarrow{a_{i+1}a_{i-1}} - t_i^{\nu} b_i^{\lambda}(b_i) u_{\lambda h}(b_i)] \right. \\
 &\quad + \frac{t_i^2}{2} \left[\frac{t_{2i}(a_{i+1})}{\sqrt{a(a_{i+1})}} \beta_{1h}(a_{i+1}) + \frac{t_{2i}(a_{i-1})}{\sqrt{a(a_{i-1})}} \beta_{1h}(a_{i-1}) \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{t_{1i}(a_{i+1})}{\sqrt{a(a_{i+1})}} \beta_{2h}(a_{i+1}) - \frac{t_{1i}(a_{i-1})}{\sqrt{a(a_{i-1})}} \beta_{2h}(a_{i-1}) \right] \right\} \\
 \beta_{2h}(b_i) &= \frac{\sqrt{a(b_i)}}{|\vec{t}_i(b_i)|^2} \left\{ \frac{t_{2i}(b_i)}{\sqrt{a(b_i)}} [Du_{3h}(b_i) \overrightarrow{a_{i+1}a_{i-1}} - t_i^{\nu} b_i^{\lambda}(b_i) u_{\lambda h}(b_i)] \right. \\
 &\quad - \frac{t_i^1}{2} \left[\frac{t_{2i}(a_{i+1})}{\sqrt{a(a_{i+1})}} \beta_{1h}(a_{i+1}) + \frac{t_{2i}(a_{i-1})}{\sqrt{a(a_{i-1})}} \beta_{1h}(a_{i-1}) \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{t_{1i}(a_{i+1})}{\sqrt{a(a_{i+1})}} \beta_{2h}(a_{i+1}) - \frac{t_{1i}(a_{i-1})}{\sqrt{a(a_{i-1})}} \beta_{2h}(a_{i-1}) \right] \right\} .
 \end{aligned}
 \tag{3.3.22}$$

En reportant (3.3.21) dans (3.3.22), on obtient alors les relations

$$[DL_2(\beta_{1h})]_{1 \times 6} = [DLDKT(\vec{u}_h, \beta_h)]_{1 \times 21} [Dkt1]_{21 \times 6}
 \tag{3.3.23}$$

$$[DL_2(\beta_{2h})]_{1 \times 6} = [DLDKT(\vec{u}_h, \beta_h)]_{1 \times 21} [Dkt2]_{21 \times 6}
 \tag{3.3.24}$$

Les expressions $[Dkt1]_{21 \times 6}$ et $[Dkt2]_{21 \times 6}$ sont données dans les pages ci-après.

Les relations (3.3.15) (3.3.17) (3.3.19) (3.3.23) (3.3.24) entraînent alors

$$[Dkt]_{21 \times 33} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} I_{12 \times 12} & & & \\ \hline 0_{9 \times 12} & Dkt3 & Dkt1 & Dkt2 \end{array} \right]
 \tag{3.3.25}$$

3.4. Définition du problème approché

Conformément à ce que nous avons dit au point iv) de l'orientation de ce paragraphe 3, nous allons négliger l'énergie de déformation due au cisaillement transverse. Alors la formulation (2.2.2) permet d'écrire le problème approché correspondant sous la forme :

0	0	0	0	$-\frac{1}{4 \tau_2(b_2) ^2} \tau_2^\alpha \tau_{12}(b_2) b_\alpha^1(a_1)$	$-\frac{1}{4 \tau_3(b_3) ^2} \tau_3^\alpha \tau_{13}(b_3) b_\alpha^1(a_1)$
0	0	0	0	0	$-\frac{1}{4 \tau_3(b_3) ^2} \tau_3^\alpha \tau_{13}(b_3) b_\alpha^1(a_2)$
0	0	0	0	$-\frac{1}{4 \tau_2(b_2) ^2} \tau_2^\alpha \tau_{12}(b_2) b_\alpha^1(a_3)$	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$-\frac{1}{ \tau_2(b_2) ^2} \tau_2^\alpha \tau_{12}(b_2) b_\alpha^1(b_2)$	0
0	0	0	0	0	$-\frac{1}{ \tau_3(b_3) ^2} \tau_3^\alpha \tau_{13}(b_3) b_\alpha^1(b_3)$
0	0	0	0	$-\frac{1}{4 \tau_2(b_2) ^2} \tau_2^\alpha \tau_{12}(b_2) b_\alpha^2(a_1)$	$-\frac{1}{4 \tau_3(b_3) ^2} \tau_3^\alpha \tau_{13}(b_3) b_\alpha^2(a_1)$
0	0	0	0	0	$-\frac{1}{4 \tau_3(b_3) ^2} \tau_3^\alpha \tau_{13}(b_3) b_\alpha^2(a_2)$
0	0	0	0	$-\frac{1}{4 \tau_2(b_2) ^2} \tau_2^\alpha \tau_{12}(b_2) b_\alpha^2(a_3)$	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$-\frac{1}{ \tau_2(b_2) ^2} \tau_2^\alpha \tau_{12}(b_2) b_\alpha^2(b_2)$	0
0	0	0	0	0	$-\frac{1}{ \tau_3(b_3) ^2} \tau_3^\alpha \tau_{13}(b_3) b_\alpha^2(b_3)$
0	0	0	0	$\frac{3}{2 \tau_2(b_2) ^2} \tau_{12}(b_2)$	$\frac{3}{2 \tau_3(b_3) ^2} \tau_{13}(b_3)$
0	0	0	0	0	$\frac{3}{2 \tau_3(b_3) ^2} \tau_{13}(b_3)$
1	0	0	0	$-\frac{1}{ \tau_2(b_2) ^2} \tau_2^\alpha \tau_{22}(a_1) \tau_{12}(b_2) - \frac{\tau_2^\alpha \tau_{12}(b_2)}{4}$	0
0	1	0	0	$\frac{1}{ \tau_2(b_2) ^2} \tau_2^\alpha \tau_{22}(a_1) \tau_{12}(b_2) - \frac{\tau_2^\alpha \tau_{12}(b_2)}{4}$	$\frac{1}{ \tau_3(b_3) ^2} \tau_3^\alpha \tau_{23}(a_1) \tau_{13}(b_3) - \frac{\tau_3^\alpha \tau_{13}(b_3)}{4}$
0	0	1	0	$\frac{1}{ \tau_2(b_2) ^2} \tau_2^\alpha \tau_{22}(a_3) \tau_{12}(b_2) - \frac{\tau_2^\alpha \tau_{12}(b_2)}{4}$	$\frac{1}{ \tau_3(b_3) ^2} \tau_3^\alpha \tau_{23}(a_2) \tau_{13}(b_3) - \frac{\tau_3^\alpha \tau_{13}(b_3)}{4}$
0	0	0	0	$-\tau_2^2 \tau_{12}(b_2) \tau_{12}(b_2) + \frac{\tau_{12}(b_2)}{4} + \frac{\tau_{12}(a_1) \tau_{12}(b_2)}{2\sqrt{a(a_1)}}$	$-\tau_3^2 \tau_{13}(b_3) \tau_{13}(b_3) + \frac{\tau_{13}(b_3)}{4} + \frac{\tau_{13}(a_1) \tau_{13}(b_3)}{2\sqrt{a(a_1)}}$
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$-\tau_2^2 \tau_{12}(b_2) \tau_{12}(b_2) + \frac{\tau_{12}(b_2)}{4} + \frac{\tau_{12}(a_3) \tau_{12}(b_2)}{2\sqrt{a(a_3)}}$	$-\tau_3^2 \tau_{13}(b_3) \tau_{13}(b_3) + \frac{\tau_{13}(b_3)}{4} + \frac{\tau_{13}(a_2) \tau_{13}(b_3)}{2\sqrt{a(a_2)}}$
0	0	0	0	0	0

[DktI]₂₁ × 6 =

0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{4 \tilde{t}_2(b_2) ^2} t_{22}^\alpha(b_2) b_\alpha^1(a_1)$	$-\frac{1}{4 \tilde{t}_3(b_3) ^2} t_{33}^\alpha(b_3) b_\alpha^1(a_1)$
0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{4 \tilde{t}_3(b_3) ^2} t_{33}^\alpha(b_3) b_\alpha^1(a_2)$
0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{4 \tilde{t}_2(b_2) ^2} t_{22}^\alpha(b_2) b_\alpha^1(a_3)$	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{ \tilde{t}_2(b_2) ^2} t_{22}^\alpha(b_2) b_\alpha^1(b_2)$	0
0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{ \tilde{t}_3(b_3) ^2} t_{33}^\alpha(b_3) b_\alpha^1(b_3)$
0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{4 \tilde{t}_2(b_2) ^2} t_{22}^\alpha(b_2) b_\alpha^2(a_1)$	$-\frac{1}{4 \tilde{t}_3(b_3) ^2} t_{33}^\alpha(b_3) b_\alpha^2(a_1)$
0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{4 \tilde{t}_3(b_3) ^2} t_{33}^\alpha(b_3) b_\alpha^2(a_2)$
0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{4 \tilde{t}_2(b_2) ^2} t_{22}^\alpha(b_2) b_\alpha^2(a_3)$	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{ \tilde{t}_2(b_2) ^2} t_{22}^\alpha(b_2) b_\alpha^2(b_2)$	$-\frac{1}{ \tilde{t}_3(b_3) ^2} t_{33}^\alpha(b_3) b_\alpha^2(b_3)$
0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{2 \tilde{t}_2(b_2) ^2} t_{22}(b_2)$	$\frac{3}{2 \tilde{t}_3(b_3) ^2} t_{23}(b_3)$
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{2 \tilde{t}_3(b_3) ^2} t_{23}(b_3)$
0	0	0	0	0	0	$-\frac{2}{ \tilde{t}_2(b_2) ^2} t_{22}(b_2)$	0
0	0	0	0	0	0	$-\frac{t_1}{4 \tilde{t}_2(b_2) ^2} \left[\frac{2t_{22}(a_1)/\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} + t_{22}(b_2) \right]$	$-\frac{t_1}{4 \tilde{t}_3(b_3) ^2} \left[\frac{2t_{23}(a_1)/\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_1}} + t_{23}(b_3) \right]$
0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{t_1}{4 \tilde{t}_3(b_3) ^2} \left[\frac{2t_{23}(a_1)/\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_1}} + t_{23}(b_3) \right]$
0	0	0	0	0	0	$-\frac{t_1}{4 \tilde{t}_1(b_1) ^2} \left[\frac{2t_{21}(a_2)/\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}} + t_{21}(b_1) \right]$	0
0	0	0	0	0	0	$-\frac{t_1}{4 \tilde{t}_2(b_2) ^2} \left[\frac{2t_{21}(a_3)/\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_3}} + t_{21}(b_1) \right]$	0
1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4 \tilde{t}_2(b_2) ^2} \left[\frac{2t_{12}^\alpha(a_1)/\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}} - t_{22}^\alpha(b_2) \right]$	$\frac{1}{4 \tilde{t}_3(b_3) ^2} \left[\frac{2t_{13}^\alpha(a_1)/\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}} - t_{23}^\alpha(b_3) \right]$
0	1	0	0	0	0	$\frac{1}{4 \tilde{t}_1(b_1) ^2} \left[\frac{2t_{11}^\alpha(a_2)/\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2}} - t_{21}^\alpha(b_1) \right]$	0
0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{4 \tilde{t}_1(b_1) ^2} \left[\frac{2t_{11}^\alpha(a_3)/\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_3}} - t_{21}^\alpha(b_1) \right]$	0

Problème approché 3.4.1 :

Trouver $(\vec{u}_h, \beta_h) \in \tilde{V}_h$ tel que

$$(3.4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a[(\vec{u}_h, \beta_h) ; (\vec{v}_h, \delta_h)] = f(\vec{v}_h, \delta_h) \\ v(\vec{v}_h, \delta_h) \in \tilde{V}_h \end{array} \right.$$

où l'espace \tilde{V}_h est défini comme suit :

$$(3.4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{V}_h = \{(\vec{v}_h, \delta_h) \text{ telles que } \vec{v}_h \in V_{h1} \times V_{h1} \times V_{h2}, \\ \delta_h \in V_{h1} \times V_{h1} \text{ et } \vec{v}_h, \delta_h \text{ satisfont les contraintes} \\ (3.3.2) (3.3.4) \text{ et } (3.3.7)\} . \end{array} \right.$$

Les espaces V_{h1} et V_{h2} ont été définis sur la Figure 3.2.1.

□

Il reste à prouver que le problème (3.4.1) a une solution unique qui converge vers la solution du problème (2.3.1). Ceci fera l'objet d'un rapport ultérieur.

3.5. Autres choix possibles des espaces d'approximation des composantes

u_i et β_α :

Dans le cas où l'on utilise des triangles, il apparaît dans BATOZ, BENTAHAR et DHATT [1982] deux autres choix possibles pour approcher les u_i et les β_α . Les contraintes imposées dans la section 3.3. restent inchangées :

2ème possibilité : 15 degrés de liberté effectifs

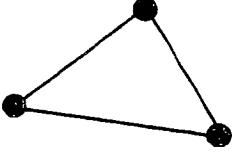
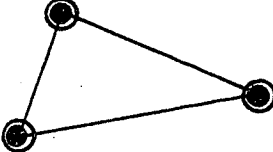
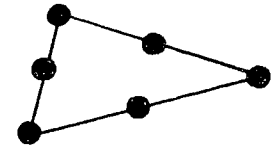
Inconnue	Nature de l'élément fini	Schématisation de l'élément fini	Espace d'éléments finis associés
u_1, u_2	P_1 -Lagrange		V_{h3}
u_3	P'_3 -Hermite		V_{h2}
β_1, β_2	P_2 -Lagrange		V_{h1}

Figure 3.5.1 : Un second choix d'éléments finis D.K.T.

3ème possibilité : 27 degrés de liberté effectifs

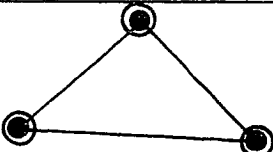
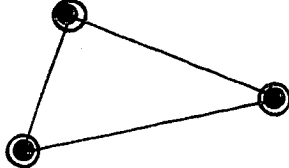
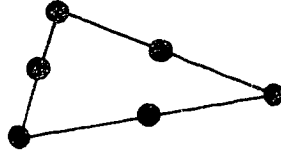
Inconnue	Nature de l'élément fini	Schématisation de l'élément fini	Espace d'éléments finis associés
u_1, u_2	P'_3 -Hermite		V_{h2}
u_3	P'_3 -Hermite		V_{h2}
β_1, β_2	P_2 -Lagrange		V_{h1}

Figure 3.5.2 : Un troisième choix d'éléments finis D.K.T.

Remarque 3.5.1 : Eléments D.K.Q. (Discrete Kirchhoff Quadrilateral)

D'une façon analogue, on pourrait définir des méthodes d'approximation de type Discrete Kirchhoff non plus sur des triangles mais maintenant sur des quadrilatères. Nous renvoyons pour cela à BATOZ, BENTAHAR et DHATT [1982] ou BATOZ et BENTAHAR [1982].

□

4 - IMPLEMENTATION

Orientation : Dans ce paragraphe nous décrivons très précisément

- i) la construction des différents modules d'interpolation associés aux diverses inconnues du problème ;
- ii) la construction du module "fonctionnelle d'énergie" ;
- iii) la construction du module "second membre".

4.1. Modules d'interpolation

Deux étapes sont à considérer dans la construction de ces modules d'interpolation :

Etape 1 : Modules d'interpolation associés aux éléments finis classiques de la Figure 3.2.1

Par la suite nous supposons que le plan euclidien \mathcal{E}^2 est rapporté à un repère de référence orthonormé $(0, \vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2)$. Les coordonnées d'un point P sont notées (x, y) , i.e.,

$$(4.1.1) \quad \vec{OP} = x\vec{\epsilon}_1 + y\vec{\epsilon}_2 .$$

En particulier, nous supposons par la suite que les coordonnées curvilignes (ξ^1, ξ^2) (voir Figure 3.3.1) sont définies de telle sorte que $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$.

Considérons alors un triangle non dégénéré ayant pour sommets les points $a_1(x_1, y_1)$, $a_2(x_2, y_2)$, $a_3(x_3, y_3)$. Nous avons $\vec{a_1a_2} \times \vec{a_1a_3} \neq \vec{0}$. Les coordonnées cartésiennes (x, y) du point P sont données par les expressions

$$(4.1.2) \quad \begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \end{cases}$$

où les coordonnées barycentriques $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ du triangle satisfont la relation

$$(4.1.3) \quad 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 .$$

Inversement,

$$(4.1.4) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{(x-x_2)(y_2-y_3) + (x_3-x_2)(y-y_2)}{\Delta} \\ \lambda_2 = \frac{(x-x_3)(y_3-y_1) + (x_1-x_3)(y-y_3)}{\Delta} \\ \lambda_3 = \frac{(x-x_1)(y_1-y_2) + (x_2-x_1)(y-y_1)}{\Delta} \end{cases}$$

où

$$(4.1.5) \quad \begin{cases} \Delta = x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2) \\ = (x_1-x_3)(y_2-y_3) + (x_2-x_3)(y_3-y_1) \\ = (\vec{a}_1 \vec{a}_3 \times \vec{a}_2 \vec{a}_3) \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \neq 0. \end{cases}$$

Implémentation du triangle P_2 -Lagrange

Avec les notations de la Figure 3.3.1, l'interpolée $\Pi_{T_2} v$ d'une fonction $v \in \mathcal{C}^0(v)$ est donnée par

$$(4.1.6) \quad \Pi_{T_2} v = [DL_2(v)]_{1 \times 6} [P_2]_{6 \times 1}$$

où

$$(4.1.7) \quad [DL_2(v)]_{1 \times 6} = [v(a_1) \ v(a_2) \ v(a_3) \ v(b_1) \ v(b_2) \ v(b_3)]$$

$$(4.1.8) \quad [P_2]_{6 \times 1} = [A_2]_{6 \times 6} [\lambda_2]_{6 \times 1}$$

avec

$$(4.1.9) \quad [A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

et

$$(4.1.10) \quad \tau[\lambda^2] = [\lambda_1^2 \ \lambda_2^2 \ \lambda_3^2 \ \lambda_2\lambda_3 \ \lambda_3\lambda_1 \ \lambda_1\lambda_2] .$$

Ainsi

$$(4.1.11) \quad \Pi_{T_2} v = [DL_2(v)]_{1 \times 6} [A_2]_{6 \times 6} [\lambda^2]_{6 \times 1} .$$

De cette expression, on déduit

$$(4.1.12) \quad \begin{cases} \partial_x \Pi_{T_2} v = [DL_2(v)]_{1 \times 6} [A_2]_{6 \times 6} [\partial_x \lambda^2]_{6 \times 1} \\ \partial_y \Pi_{T_2} v = [DL_2(v)]_{1 \times 6} [A_2]_{6 \times 6} [\partial_y \lambda^2]_{6 \times 1} \end{cases}$$

où les matrices colonnes $[\partial_x \lambda^2]_{6 \times 1}$ et $[\partial_y \lambda^2]_{6 \times 1}$ sont données à partir de la relation (4.1.4) par

$$(4.1.13) \quad \begin{cases} [\partial_x \lambda^2] = \frac{1}{\Delta} ((y_2 - y_3)[\partial_1 \lambda^2] + (y_3 - y_1)[\partial_2 \lambda^2] + (y_1 - y_2)[\partial_3 \lambda^2]) \\ [\partial_y \lambda^2] = \frac{1}{\Delta} ((x_3 - x_2)[\partial_1 \lambda^2] + (x_1 - x_3)[\partial_2 \lambda^2] + (x_2 - x_1)[\partial_3 \lambda^2]) . \end{cases}$$

La notation $\partial_i \lambda^2$ signifie $\frac{\partial \lambda^2}{\partial \lambda_i}$, $i = 1, 2, 3$.

Implémentation du triangle P'_3 -Hermite

Avec les notations de la Figure 3.2.1, l'interpolée $\Pi_{T_3} v$ d'une fonction $v \in \mathcal{C}^1(T)$ est donnée par

$$(4.1.14) \quad \Pi_{T_3} v = [DLLC3(v)]_{1 \times 9} [P_3]_{9 \times 1}$$

où

$$(4.1.15) \quad \begin{cases} [DLLC3(v)]_{1 \times 9} = [v(a_1) \ v(a_2) \ v(a_3) \ Dv(a_1)(a_3 - a_1) \ Dv(a_1)(a_2 - a_1) \\ \quad Dv(a_2)(a_1 - a_2) \ Dv(a_2)(a_3 - a_2) \ Dv(a_3)(a_2 - a_3) \ Dv(a_3)(a_1 - a_3)] \end{cases}$$

$$(4.1.16) \quad [P_3]_{9 \times 1} = [A_3]_{9 \times 10} [\lambda^3]_{10 \times 1}$$

avec

$$(4.1.17) \quad [A_3]_{9 \times 10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

et

$$(4.1.18) \quad \tau_{[\lambda^3]} = [\lambda_1^3 \lambda_2^3 \lambda_3^3 \lambda_1^2 \lambda_3 \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_2^2 \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 \lambda_3^2 \lambda_2 \lambda_3^2 \lambda_1 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3]$$

Ainsi

$$(4.1.19) \quad \Pi_{T^3} v = [DLG3(v)]_{1 \times 9} [A_3]_{9 \times 10} [\lambda^3]_{10 \times 1}$$

Par la suite il sera plus commode d'utiliser les degrés de liberté globaux associés aux degrés de liberté locaux attachés au triangle T. Avec la relation (3.3.12) il vient alors

$$(4.1.20) \quad \Pi_{T^3} v = [DLGL3(v)]_{1 \times 9} [D]_{9 \times 9} [A_3]_{9 \times 10} [\lambda^3]_{10 \times 1}$$

Etape 2 : Modules d'interpolation associés à l'approximation D.K.T.

L'approximation de type DKT introduit certaines contraintes sur les interpolations des inconnues u_3 , β_1 , β_2 . Ces contraintes équivalent, pour un triangle donné, à une réduction du nombre de degrés de liberté attachés à ces inconnues, ce qui est traduit par les relations (3.3.15) et (3.3.17).

Avec les relations (4.1.11) et (4.1.12) on a tout d'abord

$$(4.1.21) \quad u_{\alpha h} = [DL_2(u_{\alpha h})]_{1 \times 6} [A_2]_{6 \times 6} [\lambda^2]_{6 \times 1}$$

$$(4.1.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_x u_{\alpha h} = [DL_2(u_{\alpha h})]_{1 \times 6} [A_2]_{6 \times 6} [\partial_x \lambda^2]_{6 \times 1} \\ \partial_y u_{\alpha h} = [DL_2(u_{\alpha h})]_{1 \times 6} [A_2]_{6 \times 6} [\partial_y \lambda^2]_{6 \times 1} \end{array} \right.$$

ceci pour $\alpha = 1$ ou 2 .

Les relations (3.3.19) et (4.1.20) entraînent ensuite que dans le cadre d'une approximation DKT de u_3 et de $\underline{\beta}$, on a

$$(4.1.23) \quad u_{3h} = [DLDKT(\vec{u}_h, \underline{\beta}_h)]_{1 \times 21} [Dkt3]_{21 \times 9} [D]_{9 \times 9} [A_3]_{9 \times 10} [\lambda^3]_{10 \times 1}$$

Enfin, les relations (3.3.23), (3.3.24), (4.1.11) et (4.1.12) entraînent que dans le cadre d'une approximation DKT de u_3 et de $\underline{\beta}$, on a pour $\alpha = 1$ ou 2 :

$$(4.1.24) \quad \beta_{\alpha h} = [DLDKT(\vec{u}_h, \underline{\beta}_h)]_{1 \times 21} [Dkt\alpha]_{21 \times 6} [A_2]_{6 \times 6} [\lambda^2]_{6 \times 1}$$

$$(4.1.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_x \beta_{\alpha h} = [DLDKT(\vec{u}_h, \underline{\beta}_h)]_{1 \times 21} [Dkt\alpha]_{21 \times 6} [A_2]_{6 \times 6} [\partial_x \lambda^2]_{6 \times 1} \\ \partial_y \beta_{\alpha h} = [DLDKT(\vec{u}_h, \underline{\beta}_h)]_{1 \times 21} [Dkt\alpha]_{21 \times 6} [A_2]_{6 \times 6} [\partial_y \lambda^2]_{6 \times 1} \end{array} \right.$$

4.2. Calcul de la fonctionnelle d'énergie

Nous distinguerons deux cas

- i) cas où les intégrales sont calculées exactement ;
- ii) cas où l'on utilise des schémas d'intégration numérique.

Cas d'intégrations exactes

Suivant (3.4.1), la fonctionnelle d'énergie s'écrit grâce aux relations (2.1.9), (2.1.10), (2.1.20) et (2.1.21) :

$$(4.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a[(\vec{u}_h, \underline{\beta}_h); (\vec{v}_h, \underline{\delta}_h)] = \int_{\Omega} \frac{Ee}{1-\nu} \{ (1-\nu) \gamma_{\beta}^{\alpha}(\vec{u}_h) \gamma_{\alpha}^{\beta}(\vec{v}_h) \\ + \nu \gamma_{\alpha}^{\alpha}(\vec{u}_h) \gamma_{\beta}^{\beta}(\vec{v}_h) + \frac{e^2}{12} [(1-\nu) \chi_{\beta}^{\alpha}(\vec{u}_h) \chi_{\alpha}^{\beta}(\vec{v}_h) \\ + \nu \chi_{\alpha}^{\alpha}(\vec{u}_h) \chi_{\beta}^{\beta}(\vec{v}_h)] \} \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \end{array} \right.$$

avec

$$(4.2.2) \quad \gamma_{\beta}^{\alpha}(\vec{v}_h) = \frac{1}{2} a^{\alpha\lambda} (u_{\lambda h, \beta} + u_{\beta h, \lambda}) - a^{\alpha\lambda} \Gamma_{\lambda\beta}^{\nu} u_{\nu h} - b_{\beta}^{\alpha} u_{3h}$$

$$(4.2.3) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi_{\beta}^{\alpha}(\vec{v}_h, \delta_h) &= a^{\alpha\lambda} \chi_{\lambda\beta}(\vec{v}_h, \delta_h) \\ &= \frac{1}{2} a^{\alpha\lambda} (\beta_{\lambda h, \beta} + \beta_{\beta h, \lambda}) - a^{\alpha\lambda} \Gamma_{\lambda\beta}^{\nu} \beta_{\nu h} \\ &\quad - \frac{1}{2} b^{\alpha\nu} (u_{\nu h, \beta} - \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} u_{\mu h}) + b^{\alpha\nu} b_{\nu\beta} u_{3h} \\ &\quad - \frac{1}{2} b_{\beta}^{\nu} a^{\alpha\lambda} (u_{\nu h, \lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} u_{\mu h}) \end{aligned} \right.$$

Il sera commode par la suite d'écrire la fonctionnelle d'énergie (4.2.1) sous la forme suivante :

$$(4.2.4) \quad a[(\vec{u}_h, \beta_h); (\vec{v}_h, \delta_h)] = \int_{\Omega} t_{U_h} [A_{IJ}] V_h \, dx dy$$

où

$$(4.2.5) \quad \left\{ \begin{aligned} t_{U_h} &= [u_{1h} \ u_{1h,x} \ u_{1h,y} \ u_{2h} \ u_{2h,x} \ u_{2h,y} \ u_{3h} \\ &\quad \beta_{1h} \ \beta_{1h,x} \ \beta_{1h,y} \ \beta_{2h} \ \beta_{2h,x} \ \beta_{2h,y}] \end{aligned} \right.$$

et une expression similaire pour V_h . Il reste alors à expliciter la matrice $[A_{IJ}]$. Notons tout d'abord que

$$(4.2.6) \quad \gamma_{\beta}^{\alpha}(\vec{v}_h) = \Lambda_{\beta}^{\alpha} V_h,$$

où les quatre matrices Λ_{β}^{α} , de dimension (1,13), sont données par

$$(4.2.7) \quad \left\{ \begin{aligned} \Lambda_{\beta}^{\alpha} &= [-a^{\alpha\nu} \Gamma_{\beta\nu}^1 ; a^{\alpha\delta} \delta_{\beta 1} ; \frac{1}{2} a^{\alpha\lambda} \Delta_{\lambda\beta} ; -a^{\alpha\nu} \Gamma_{\beta\nu}^2 ; \frac{1}{2} a^{\alpha\lambda} \Delta_{\lambda\beta} ; \\ &\quad a^{2\alpha\delta} \delta_{\beta 2} ; -b_{\beta}^{\alpha} ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0] \end{aligned} \right.$$

avec

$$(4.2.8) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_{11} = \delta_{22} = 1 \quad , \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 0 \quad , \\ \Delta_{11} = \Delta_{22} = 0 \quad , \quad \Delta_{12} = \Delta_{21} = 1 \quad . \end{aligned} \right.$$

De même

$$(4.2.9) \quad \chi_{\beta}^{\alpha}(\vec{v}_h; \delta_h) = N_{\beta}^{\alpha} V_h$$

avec

$$(4.2.10) \quad \left\{ \begin{aligned} N_{\beta}^{\alpha} = & \left[\frac{1}{2} (b^{\alpha\nu} \Gamma_{\nu\beta}^1 + b_{\beta}^{\nu} a^{\alpha\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^1) ; -\frac{1}{2} (b^{\alpha 1} \delta_{\beta 1} + a^{\alpha 1} b_{\beta}^1) ; \right. \\ & -\frac{1}{2} (b^{\alpha 1} \delta_{\beta 2} + a^{\alpha 2} b_{\beta}^1) ; \frac{1}{2} (b^{\alpha\nu} \Gamma_{\nu\beta}^2 + b_{\beta}^{\nu} a^{\alpha\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^2) ; \\ & -\frac{1}{2} (b^{\alpha 2} \delta_{\beta 1} + a^{\alpha 1} b_{\beta}^2) ; -\frac{1}{2} (b^{\alpha 2} \delta_{\beta 2} + a^{\alpha 2} b_{\beta}^2) ; \\ & b^{\alpha\nu} b_{\nu\beta} ; -a^{\alpha\lambda} \Gamma_{\lambda\beta}^1 ; a^{\alpha 1} \delta_{\beta 1} ; \frac{1}{2} a^{\alpha\lambda} \Delta_{\lambda\beta} ; \\ & \left. -a^{\alpha\lambda} \Gamma_{\lambda\beta}^2 ; \frac{1}{2} a^{\alpha\lambda} \Delta_{\lambda\beta} ; a^{\alpha 2} \delta_{\beta 2} \right] . \end{aligned} \right.$$

Ici encore les coefficients $\delta_{\alpha\beta}$ et $\Delta_{\alpha\beta}$ sont donnés par les relations (4.2.8). En substituant les relations (4.2.6) (4.2.9) dans la relation (4.2.1) et en comparant avec (4.2.4), nous obtenons

$$(4.2.11) \quad \left\{ \begin{aligned} [A_{IJ}]_{13 \times 13} = & \frac{Ee}{1-\nu} \sqrt{a} \left\{ (1-\nu) t_{\Lambda_{\beta}^{\alpha} \Lambda_{\alpha}^{\beta}} + \nu t_{\Lambda_{\alpha}^{\beta} \Lambda_{\beta}^{\alpha}} \right. \\ & \left. + \frac{e^2}{12} (1-\nu) t_{N_{\beta}^{\alpha} N_{\alpha}^{\beta}} + \frac{e^2}{12} \nu t_{N_{\alpha}^{\beta} N_{\beta}^{\alpha}} \right\} . \end{aligned} \right.$$

Pour calculer effectivement l'intégrale (4.2.4), on ajoutera les contributions de chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$. Sur chacun des triangles, il reste alors à exprimer chacune des matrices colonnes U_h et V_h en fonction des degrés de liberté associés au triangle considéré. En se reportant à l'expression (4.2.5) et en utilisant les relations (4.1.21) (4.1.22) (4.1.23) (4.1.24) et (4.1.25), on obtient sur chaque triangle T (la référence explicite au triangle T est omise afin de ne pas alourdir les notations) :

$$(4.2.12) \quad {}^t U_h = [DLDKT(\vec{u}, \beta)]_{1 \times 21} [B]_{21 \times 34} [LAMBDA]_{34 \times 13}$$

avec

$$(4.2.13) \quad [B]_{21 \times 34} =$$

		6	12	22	28	34
		6	12	21	27	33
		A_2	0			
		0	A_2	$[Dkt3][D][A_3]$	$[Dkt1][A_2]$	$[Dkt2][A_2]$
		0	0			

et

$$(4.2.14) \quad [LAMBDA]_{34 \times 13} =$$

		3	6	7	10	13
		6	12	18	24	30
		Λ_2				
			Λ_2			
				λ_3		
					Λ_2	
						Λ_2

où

$$(4.2.15) \quad [\Lambda_2]_{6 \times 3} = [\lambda_2 ; \partial_x \lambda_2 ; \partial_y \lambda_2]$$

En reportant l'expression (4.2.12) dans la relations (4.2.4) il vient finalement :

$$(4.2.16) \quad \left\{ \begin{aligned} & a[(\vec{u}_h, \beta_h); (\vec{v}_h, \delta_h)] = \\ & = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [DLDKT(\vec{u}_h, \beta_h)]_{1 \times 21} [B]_{21 \times 34} \left(\int_T [LAMBDA]_{34 \times 13} [A_{IJ}]^t [LAMBDA] dx dy \right) \\ & \quad \times {}^t [B] {}^t [DLDKT(\vec{v}_h, \delta_h)] . \end{aligned} \right.$$

A ce stade il convient de remarquer que :

- i) dans l'expression (4.2.16), nous n'avons laissé sous le signe \int que les quantités dépendant effectivement de x et de y (via les $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) ;
- ii) d'une façon générale, le calcul exact de \int_T est impossible et, sinon, fastidieux. D'où le recours aux techniques d'intégration numérique.

Cas d'intégrations approchées

Pour évaluer l'intégrale $\int_T(\)$ apparaissant en (4.2.16), nous allons utiliser un schéma d'intégration numérique du type

$$(4.2.17) \quad \int_T \phi(x) \, dx dy \sim \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,T} \phi(b_{\ell,T}) .$$

Un exemple de tel schéma sera donné plus loin.

L'utilisation de schémas du type (4.2.17) conduit à approcher la forme bilinéaire $a(.;.)$ par une forme $a_h(.;.)$ définie par :

$$(4.2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_h[(\vec{u}_h, \beta_h) ; (\vec{v}_h, \delta_h)] = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [\text{DLDKT}(\vec{u}_h, \beta_h)]_{1 \times 21} [B]_{21 \times 34} \\ \times \left\{ \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,T} ([\text{LAMBDA}] [A_{IJ}]^t [\text{LAMBDA}]) (b_{\ell,T}) \right\}^t [B]^t [\text{DLDKT}(\vec{v}_h, \delta_h)] . \end{array} \right.$$

Il reste à préciser quel type de schéma d'intégration numérique utiliser. Une réponse définitive ne pourra être donnée qu'après l'étude mathématique précise de l'approximation. Le choix du schéma proposé ci-après est basé sur les remarques suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'opérateur différentiel associé à la forme bilinéaire } a(.;.) \\ \text{est d'ordre 2 en } u_1, u_2, \beta_1, \beta_2 \\ \text{l'opérateur différentiel associé à la forme bilinéaire } a_h(.;.) \\ \text{est d'ordre 0 en } u_3 . \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{les composantes } u_1, u_2, \beta_1, \beta_2 \text{ sont approchées dans} \\ \text{l'espace polynomial } P_2 \\ \text{la composante } u_3 \text{ est approchée dans l'espace polynomial } P_3 . \end{array} \right.$$

Ces remarques "conduiraient" à l'intégration exacte de polynômes $P_1 \times P_1 \subset P_2$ pour u_1, u_2, β_1 et $\beta_2 \dots$ et de polynômes de degré 6 pour u_3 (en effet, nous avons vérifié dans BERNADOU-BOISSERIE [1982] que ce qui importe c'est la partie principale des opérateurs, soit des termes du type $\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} \dots$ ce qui conduit à $P_1 \times P_1 \dots$). C'est là une incitation supplémentaire pour faire l'étude mathématique de cette approximation : une telle exigence paraît disproportionnée eu égard à l'estimation d'erreur que l'on peut attendre (vraisemblablement $O(h)$ en norme de l'énergie).

En attendant une telle étude mathématique, nous ferons les tests numériques pour des schémas d'intégration exacts pour les polynômes de degré 2, de degré 4 ou de degré 6.

Schéma d'intégration exact pour les polynômes de degré 2

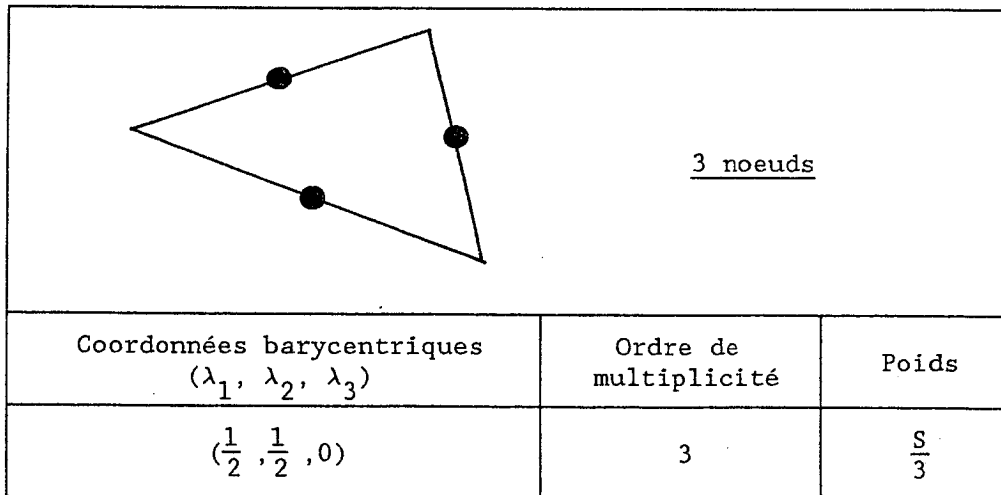


Figure 4.2.1 : Schéma d'intégration exact pour les polynômes de degré 2

Schéma d'intégration exact pour les polynômes de degré 4

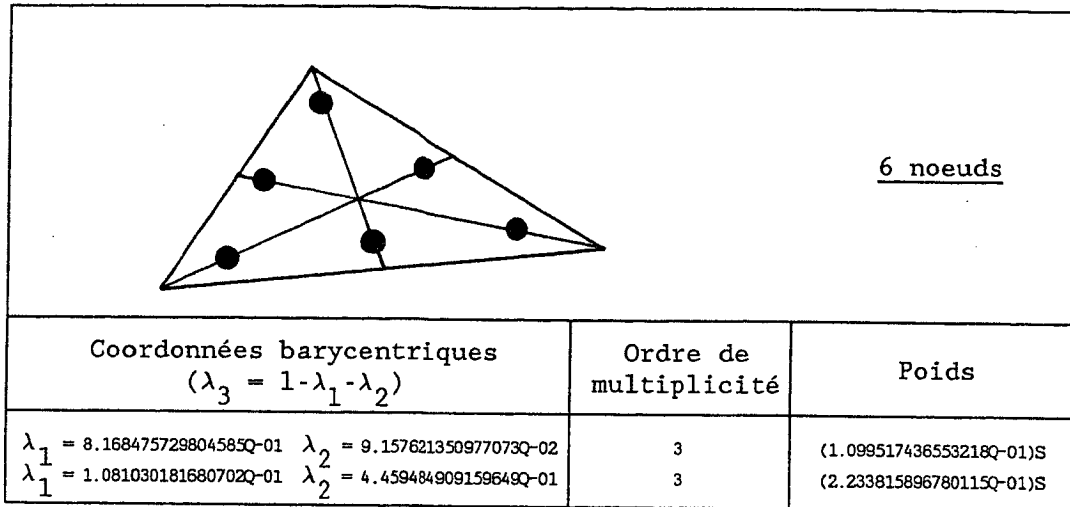


Figure 4.2.2 : Schéma d'intégration exact pour les polynômes de degré 4

Schéma d'intégration exact pour les polynômes de degré 6

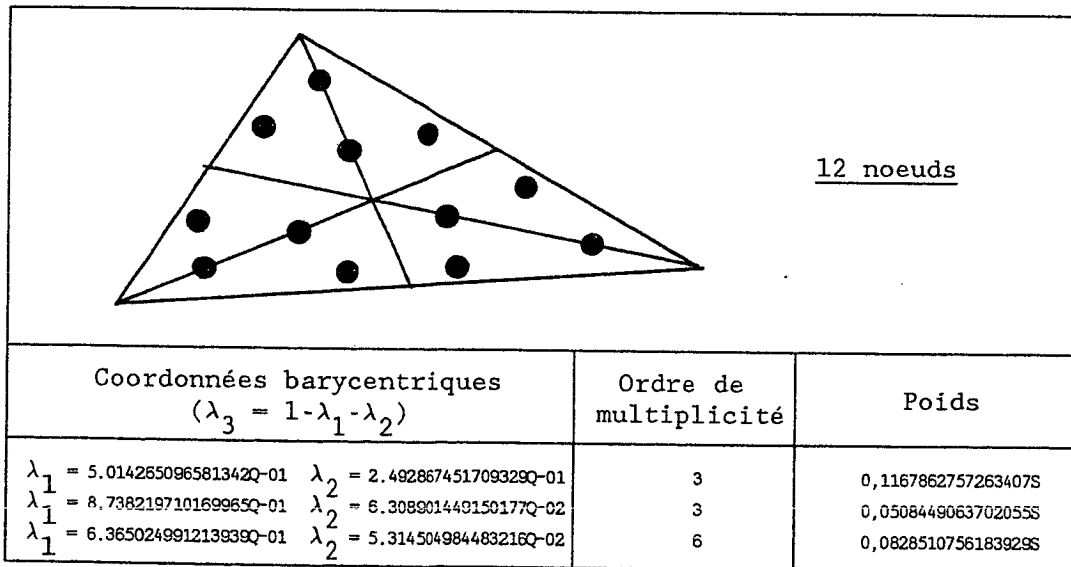


Figure 4.2.3 : Schéma d'intégration exact pour les polynômes de degré 6

4.3. Calcul du second membre

Ici encore nous distinguerons entre les cas de calcul exact ou approché des intégrales :

Cas d'intégrations exactes

Suivant (2.1.25) et (3.4.1), le second membre s'écrit :

$$(4.3.1) \quad f(\vec{v}_h, \delta_h) = \int_{\Omega} \vec{p} \cdot \vec{v}_h \sqrt{a} \, dx dy + \int_{\Gamma_1} (\vec{N} \cdot \vec{v}_h - M^\alpha \delta_{\alpha h}) \, d\gamma .$$

Avec les notations (4.2.5), cette forme linéaire s'écrit encore :

$$(4.3.2) \quad f(\vec{v}_h, \delta_h) = \int_{\Omega} {}^t P \, V_h \, dx dy + \int_a^b {}^t Q \, V_h \, dt$$

avec

$$(4.3.3) \quad {}^t P = \sqrt{a} \, [p^1 \, 0 \, 0 \, p^2 \, 0 \, 0 \, p^3 \, 0 \, 0 \, 0 \, 0 \, 0]$$

$$(4.3.4) \quad {}^t Q = \sqrt{a_{\alpha\lambda} (f^\alpha)' (f^\lambda)'} \, [N^1 \, 0 \, 0 \, N^2 \, 0 \, 0 \, N^3 \, -M^1 \, 0 \, 0 \, -M^2 \, 0 \, 0]$$

où $x = \xi^1 = f^1(t)$, $y = \xi^2 = f^2(t)$, $t \in [a, b]$; désignent les équations paramétriques de la courbe $\vec{\phi}(\Gamma_1)$. L'expression $\sqrt{a_{\alpha\lambda} (f^\alpha)' (f^\lambda)'}$ dt donne l'élément linéaire dy de cette courbe $\vec{\phi}(\Gamma_1)$ (voir GREEN-ZERNA [1975, (1.13.18)]).

Les expressions (4.2.12) et (4.3.2) donnent alors

$$(4.3.5) \quad \left\{ \begin{aligned} f(\vec{v}_h, \delta_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T {}^t P \, {}^t [LAMBDA] \, dx dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{a_T}^{b_T} {}^t Q \, {}^t [LAMBDA] \, dt \right) {}^t [B] \, {}^t [DLDKT(\vec{v}_h, \delta_h)] \end{aligned} \right. .$$

où $x = f^1(t)$, $y = f^2(t)$, $t \in [a_T, b_T]$, désignent les équations paramétriques de la courbe $\vec{\phi}(\partial T \cap \Gamma_1)$.

Remarque 4.3.1 : Ces formulations prennent en compte des charges réparties sur tout la surface moyenne et des charges aux bords. D'autres cas de charges pourraient être considérés. En particulier, dans l'exemple 5.3.1, on traitera le cas d'une charge concentrée.

□

Cas d'intégrations approchées

Outre le schéma (4.2.17), il convient maintenant d'introduire un schéma d'intégration pour une fonction d'une seule variable :

$$(4.3.6) \quad \int_{a_T}^{b_T} \phi(t) \, dt \sim \sum_{m=1}^M \omega_{m, \partial T} \phi(b_{m, \partial T}) .$$

Ce schéma sera appliqué chaque fois que $\partial T \Gamma_1$ = un côté de triangle porté par Γ_1 .

L'utilisation des schémas (4.2.17) et (4.3.6) permet alors de définir la forme linéaire approchée suivante :

$$(4.3.7) \quad \left\{ \begin{aligned} f_h(\vec{v}_h, \delta_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell, T} ({}^t_P \quad {}^t_{[LAMBDA]}) (b_{\ell, T}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^M \omega_{m, \partial T} ({}^t_Q \quad {}^t_{[LAMBDA]}) (b_{m, \partial T}) \quad {}^t_{[B]} \quad {}^t_{[DLDKT(\vec{v}_h, \delta_h)]} \right) . \end{aligned} \right.$$

5 - EXEMPLES

Orientation : Afin de tester cette méthode d'approximation D.K.T. nous allons l'appliquer à un certain nombre d'exemples utilisés comme "benchmarks" par un grand nombre d'Auteurs.

5.1. Toiture cylindrique de SCORDELIS-LO [1964] :

Le problème physique (voir FORSBERG [1971], DVORKIN-BATHE [1984], ADINA [1983, ex.A.30] et MEEK-TAN [1986])

On considère ici une toiture cylindrique assimilable à une coque mince et soumise à un chargement gravitationnel : voir Figure 5.1.1. La coque est supportée à ses extrémités par des diaphragmes rigides et elle est libre le long des côtés longitudinaux.

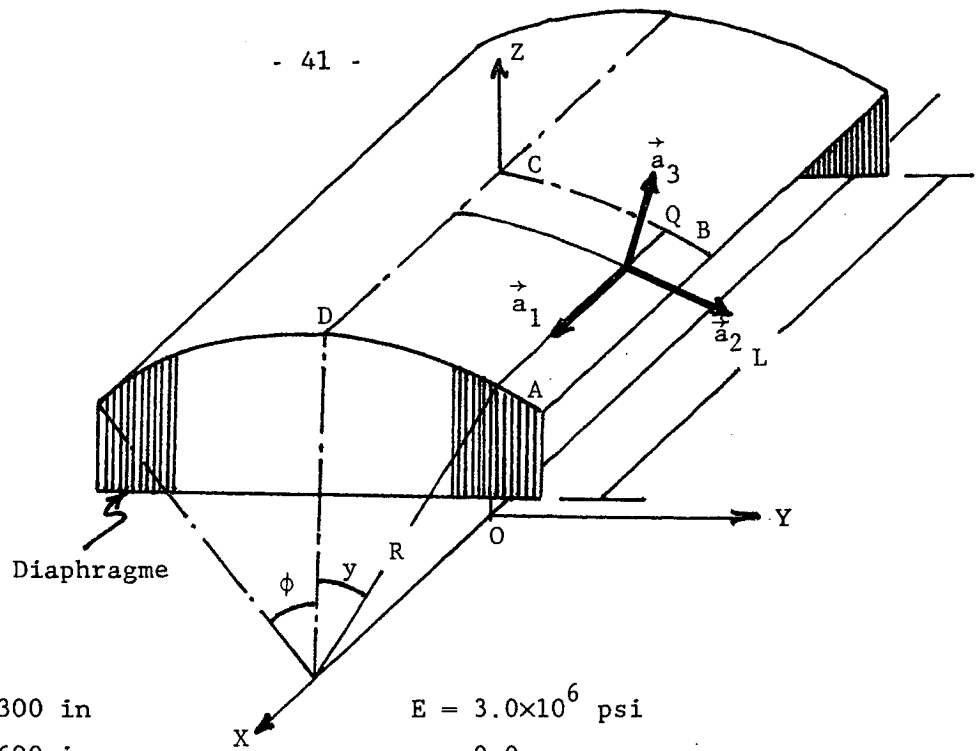
Modélisation géométrique

La coque est rapportée au repère fixe OXYZ indiqué sur la Figure 5.1.1. Avec les notations de cette figure, le point courant P de la surface moyenne a pour coordonnées :

$$(5.1.1) \quad \vec{OP} = \vec{\phi}(x, y) = \begin{cases} x(=X) \\ R \sin y \\ R \cos y \end{cases}$$

où l'angle y est défini par

$$(5.1.2) \quad y = (\vec{OQ}, \vec{OC})_{\vec{OX}}$$



$R = 300$ in $E = 3.0 \times 10^6$ psi
 $L = 600$ in $\nu = 0.0$
 $e = 3.0$ in (épaisseur) $\phi = 40^\circ$
 poids de la coque = 90.0 lb/sq.ft = 0.625 lb/sq.in

Figure 5.1.1 : la toiture cylindrique étudiée
 (les unités de mesure sont anglaises)

De la représentation (5.1.1) de la surface moyenne, on déduit les caractéristiques géométriques suivantes :

(5.1.3) {

$$\vec{a}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \vec{a}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ R \cos y \\ -R \sin y \end{Bmatrix} ; \quad \vec{a}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin y \\ \cos y \end{Bmatrix}$$

$$a_{11} = 1 ; a_{12} = a_{21} = 0 ; a_{22} = R^2 ; a = R^2$$

$$a^{11} = 1 ; a^{12} = a^{21} = 0 ; a^{22} = \frac{1}{R^2}$$

$$\vec{a}^1 = \vec{a}_1 ; \vec{a}^2 = \frac{1}{R^2} \vec{a}_2 ; \vec{a}^3 = \vec{a}_3$$

$$b_{11} = b_{12} = b_{21} = 0 ; b_{22} = -R$$

$$b_1^1 = b_2^1 = b_1^2 = 0 ; b_2^2 = -\frac{1}{R}$$

$$b^{11} = b^{12} = b^{21} = 0 ; b^{22} = -\frac{1}{R^3}$$

$$\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha = 0$$

Calcul de la fonctionnelle d'énergie

D'où les expressions suivantes pour les matrices Λ_β^α et N_β^α données par les relations (4.2.7) et (4.2.10) :

$$(5.1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_\beta^\alpha = [0 ; \delta^{\alpha 1} \delta_{\beta 1} ; \frac{1}{2} \nabla_\beta^\alpha ; 0 ; \frac{1}{2} \nabla_\beta^\alpha ; \frac{1}{R^2} \delta^{\alpha 2} \delta_{\beta 2} ; \\ \frac{1}{R} \delta^{\alpha 2} \delta_{\beta 2} ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0] \end{array} \right.$$

avec

$$(5.1.5) \quad \delta^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} ; \quad \nabla_\beta^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = 1, \beta = 2 \\ \frac{1}{R} & \text{si } \alpha = 2, \beta = 1 \end{cases}$$

et,

$$(5.1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_\beta^\alpha = [0 ; 0 ; 0 ; 0 ; \frac{1}{2R^3} (\delta^{\alpha 2} \delta_{\beta 1} + R^2 \delta^{\alpha 1} \delta_{\beta 2}) ; \frac{1}{R^3} \delta^{\alpha 2} \delta_{\beta 2} ; \\ \frac{1}{R^2} \delta^{\alpha 2} \delta_{\beta 2} ; 0 ; \delta^{\alpha 1} \delta_{\beta 1} ; \frac{1}{2} \nabla_\beta^\alpha ; 0 ; \frac{1}{2} \nabla_\beta^\alpha ; \frac{1}{R^2} \delta^{\alpha 2} \delta_{\beta 2}] . \end{array} \right.$$

En y joignant $\sqrt{a} = R$, $E = 3.0 \times 10^6$ psi, $\nu = 0$ et $e = 3.0$ in, nous pouvons de la sorte calculer la matrice $[A_{IJ}]$ donnée en (4.2.11) et évaluer ainsi la fonctionnelle d'énergie : (4.2.16) dans le cas d'intégrations exactes, (4.2.18) dans le cas d'intégrations approchées.

Calcul du second membre

Le poids de la coque est fixé à 0.625 lb/sq.in. L'énergie potentielle correspondante de la coque associée à un champ de déplacement \vec{v}_h s'exprime sous la forme suivante (comparer avec (4.3.1)) :

$$(5.1.7) \quad f(\vec{v}_h, \delta_h) = - \int_{\Omega} 0.625 \vec{e}_Z \cdot \vec{v}_h \sqrt{a} \, dx dy .$$

Mais il est facile de vérifier à partir de (5.1.3) que

$$(5.1.8) \quad \vec{v}_h \cdot \vec{e}_Z = - \frac{1}{R} v_{2h} \sin y + v_{3h} \cos y$$

d'où l'on déduit avec (4.3.3) et (4.3.4) :

$$(5.1.9) \quad {}^tP = [0 \ 0 \ 0 \ 0.625 \sin y \ 0 \ 0 \ -0.625 R \cos y \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$(5.1.10) \quad {}^tQ = [0]_{1 \times 13}$$

Il reste maintenant à préciser les conditions aux limites.

Prise en compte des conditions aux limites

Nous reprenons ici les conditions aux limites proposées dans SCORDELIS-LO [1964] :

i) du fait des symétries, on se limite au quart ABCD de la coque. Ceci conduit à introduire des conditions de symétrie sur les côtés CD et BC :

Sur le côté CD

$$(5.1.11) \quad u_2(x,0) = \beta_2(x,0) = 0$$

Pour réaliser ces conditions dans le cadre de l'approximation DKT, on procédera comme indiqué sur la Figure 5.1.2. Tous les degrés de liberté portés par CD sont libres à l'exception de ceux qui sont fixés égaux à 0.

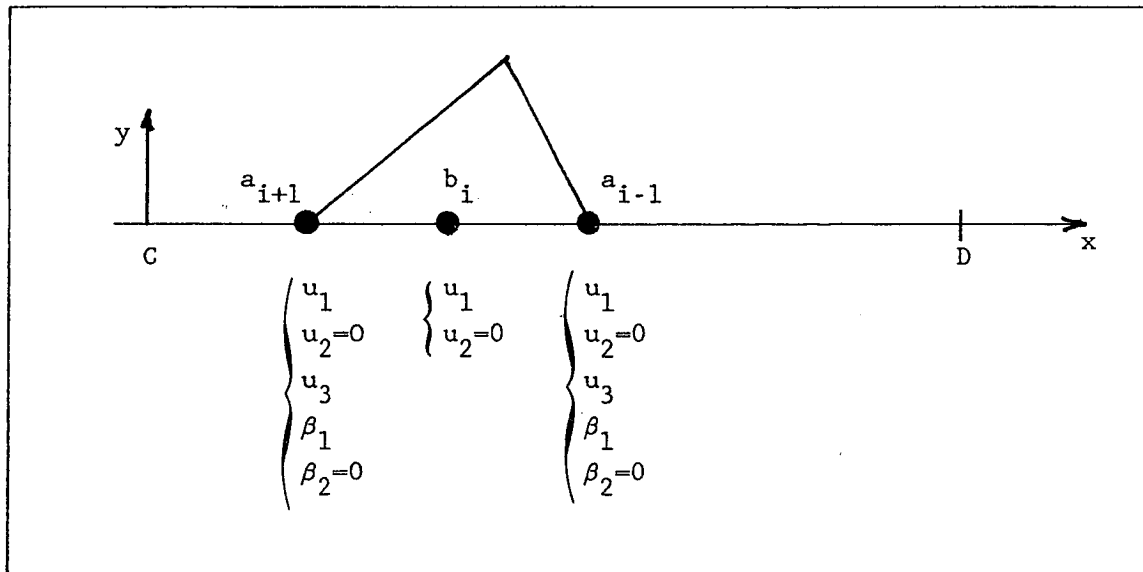


Figure 5.1.2 : Prise en compte des conditions de symétrie sur le côté CD

Avec ces choix, la restriction de u_{2h} au côté CD est évidemment nulle : c'est un polynôme de degré 2 sur chaque côté du triangle s'annulant en trois points distincts. Il en ira de même pour β_{2h} si l'on vérifie que $\beta_{2h}(b_i) = 0$. Pour cela, il suffit de se reporter aux relations (3.3.3) et (3.3.22) puis d'observer que $t_i^2 = t_{2i} = 0$, $\beta_{2h}(a_{i+1}) = 0$, $\beta_{2h}(a_{i-1}) = 0$ ce qui entraîne immédiatement $\beta_{2h}(b_i) = 0$.

Sur le côté BC

$$(5.1.12) \quad u_1(0,y) = \beta_1(0,y) = 0 .$$

Ces conditions seront réalisées dans le cadre de l'approximation DKT en procédant comme indiqué sur la Figure 5.1.3. On pourra vérifier que les annulations de degré de liberté proposées entraînent effectivement les conditions (5.1.12) en procédant par analogie avec l'analyse conduite sur le côté CD.

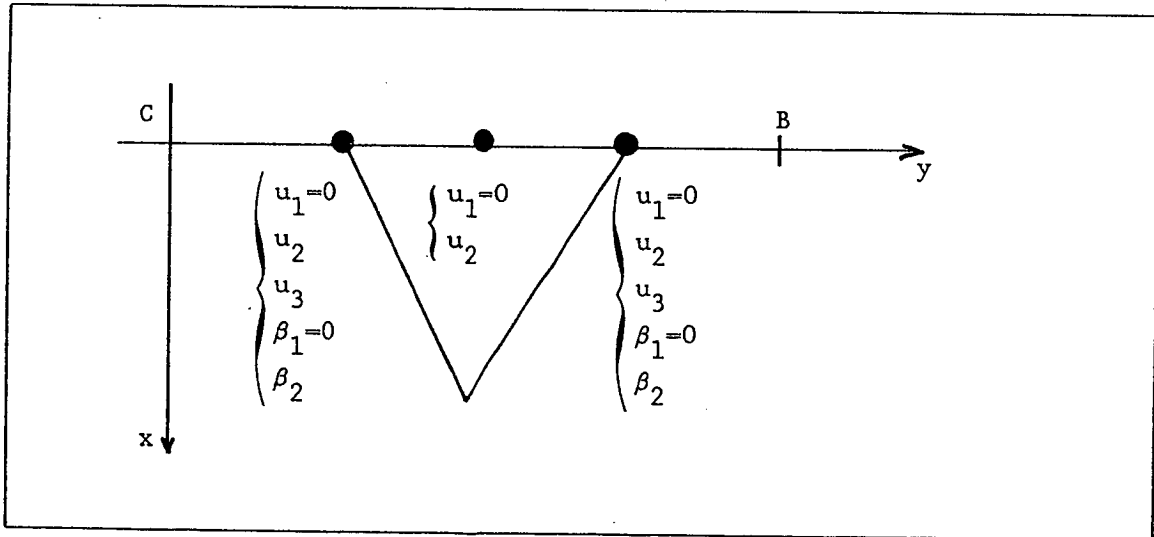


Figure 5.1.3 : Prise en compte des conditions de symétrie sur le côté CB

ii) la toiture est simplement appuyée sur les diaphragmes. Dès lors :

sur le côté AD

$$(5.1.13) \quad u_2(300,y) = u_3(300,y) = \beta_2(300,y) = 0 .$$

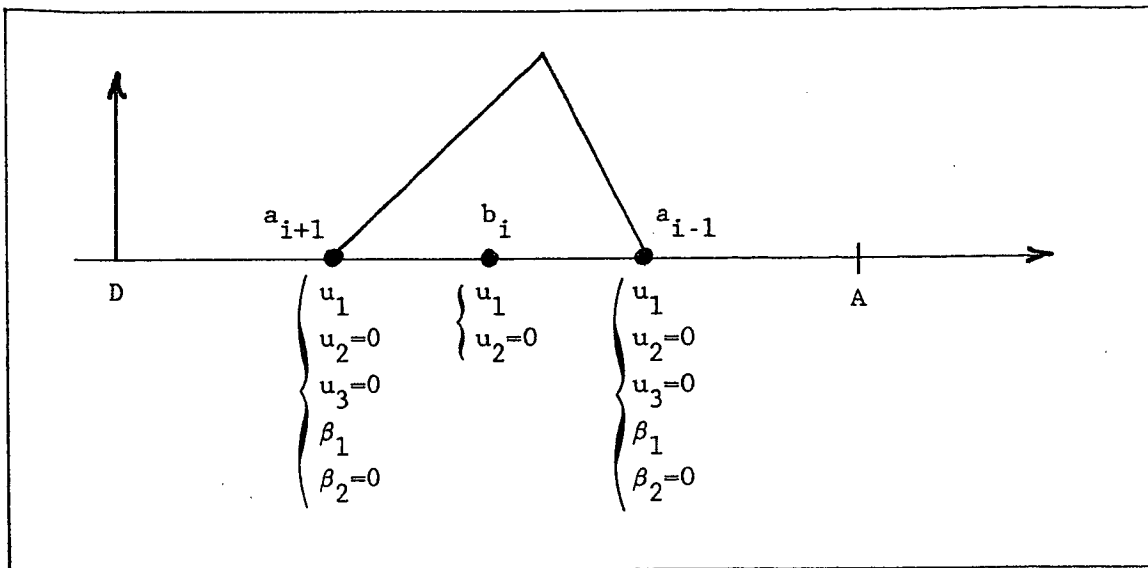


Figure 5.1.4 : Prise en compte des conditions aux limites sur le côté AD

Pour réaliser ces conditions dans le cadre de l'approximation DKT, on procédera comme indiqué sur la Figure 5.1.4. L'analyse menée sur le côté CD entraîne immédiatement $u_{2h}(300,y) = \beta_{2h}(300,y) = 0$. Reste à vérifier que $u_{3h}(300,y) = 0$. Pour cela il suffira de vérifier que $u_{3h,2}(a_{i+1}) = u_{3h,2}(a_{i-1}) = 0$, ce qui est une conséquence immédiate de (3.3.18) et (5.1.3).

iii) la toiture est libre sur le bord AB : Il s'ensuit que tous les degrés de liberté situés sur AB sont libres.

Résultats numériques

Compte tenu des symétries, on s'est limité au quart du domaine, i.e., la partie ABCD de la toiture. Les résultats obtenus sont donnés sur les Figures 5.1.6 à 5.1.8. Il convient de noter :

i) Figure 5.1.5 : quatre types de maillages ont été considérés. C'est le premier maillage, - le plus régulier -, qui donne les meilleurs résultats.

ii) Figure 5.1.6 : sur cette figure on indique la valeur de la composante verticale u_z du déplacement du point B. Ce tracé est fait en fonction du nombre de degrés de liberté effectifs (les inconnues du problème) et du maillage utilisé. Il fait apparaître une bonne convergence, le meilleur résultat correspondant au maillage 1.

iii) Figure 5.1.7 : sur cette figure nous avons positionné nos résultats (approche DKT) par rapport à ceux obtenus par d'autres auteurs tels qu'il apparaissent sur la Figure 3 de MEEK et TAN [1986].

iv) Figure 5.1.8 : sur cette figure nous indiquons le déplacement vertical des points situés sur l'arête CB obtenu par notre approche.

iv) **Influence des schémas d'intégration numérique** : Nous avons utilisé successivement trois types de schémas d'intégration (voir Figure 5.1.9)

- *) un schéma à 3 noeuds (P_2 -exact)
- *) un schéma à 6 noeuds (P_4 -exact)
- *) un schéma à 12 noeuds (P_6 -exact)

Les schémas à 6 et 12 noeuds conduisent à des résultats similaires tandis que le schéma à 3 noeuds conduit à une légère détérioration de la solution (environ 1%, selon les maillages utilisés). Une étude mathématique de cette approximation s'avèrera intéressante pour déterminer les schémas "théoriquement" admissibles.

v) **Temps de calcul** : Le temps de calcul est approximativement proportionnel au nombre de degrés de liberté effectifs (inconnues). Pour fixer les idées, l'exemple le plus raffiné, associé au maillage 1, a nécessité :

Nombre de degrés de liberté	881
Nombre d'inconnues	816
Nombre de noeuds d'intégration	1728
Temps de calcul (sur BULL DPS8/70)	
Matrice de rigidité	640.6S
Second membre	14.6S
Résolution	146.4S
Total	<u>801.6S</u>

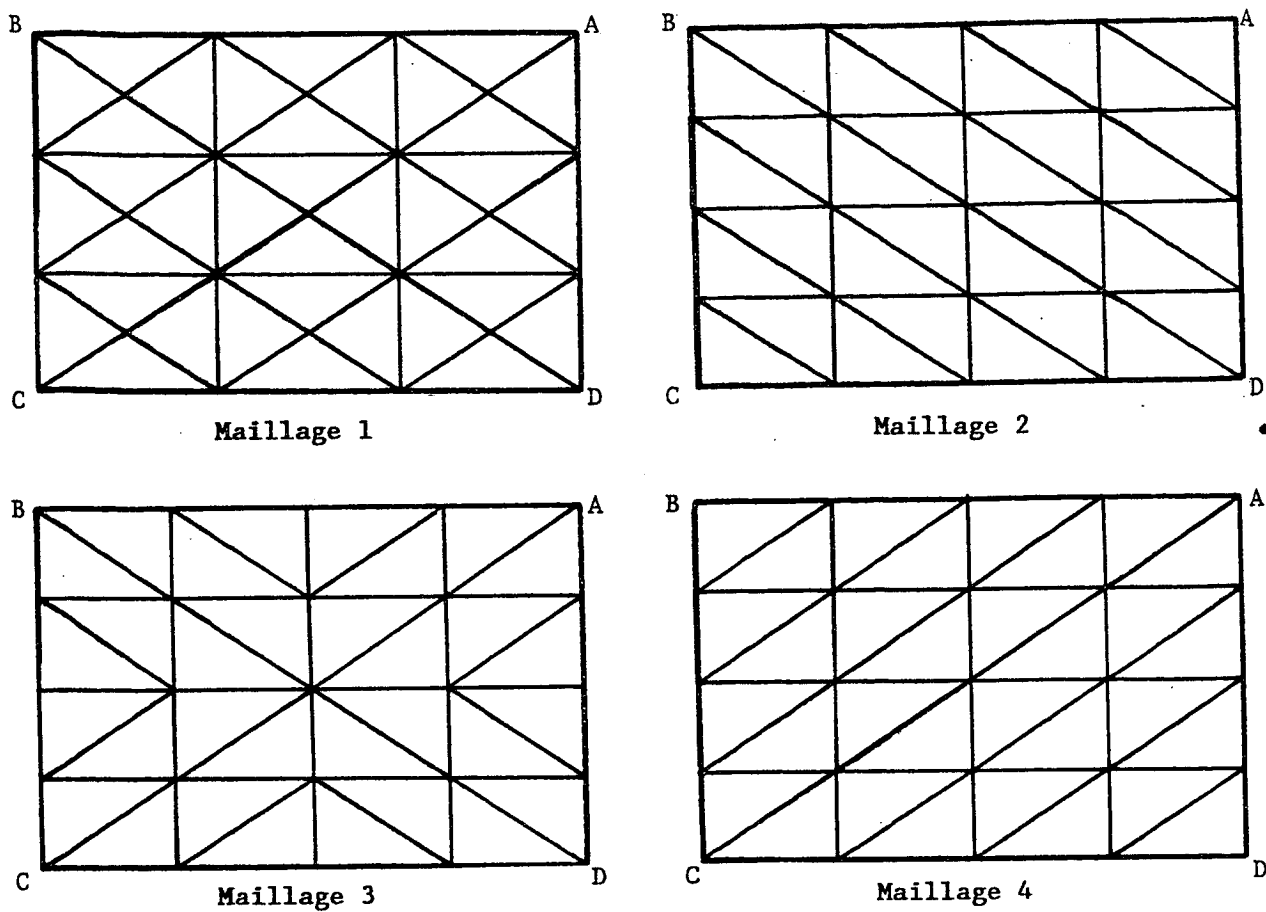


Figure 5.1.5 : les différents maillages utilisés

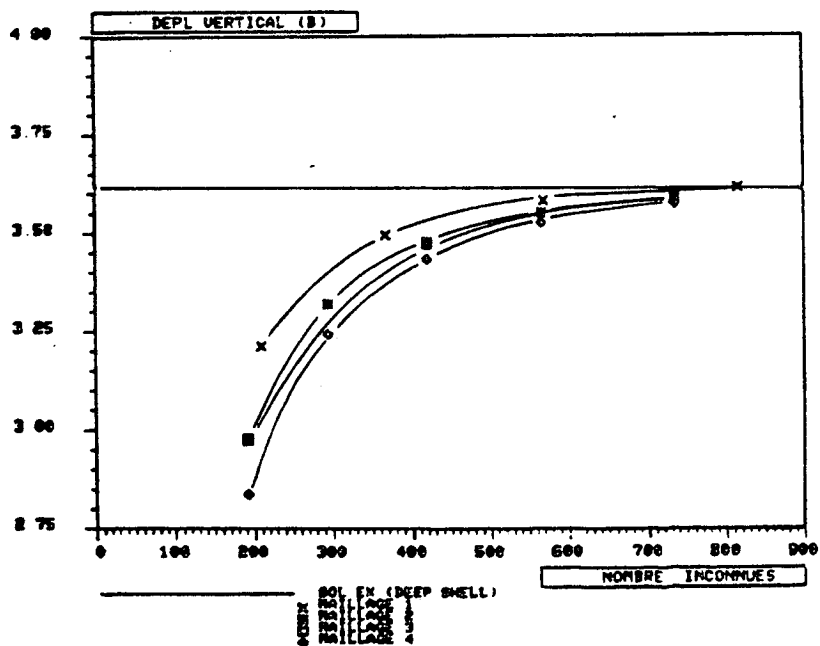
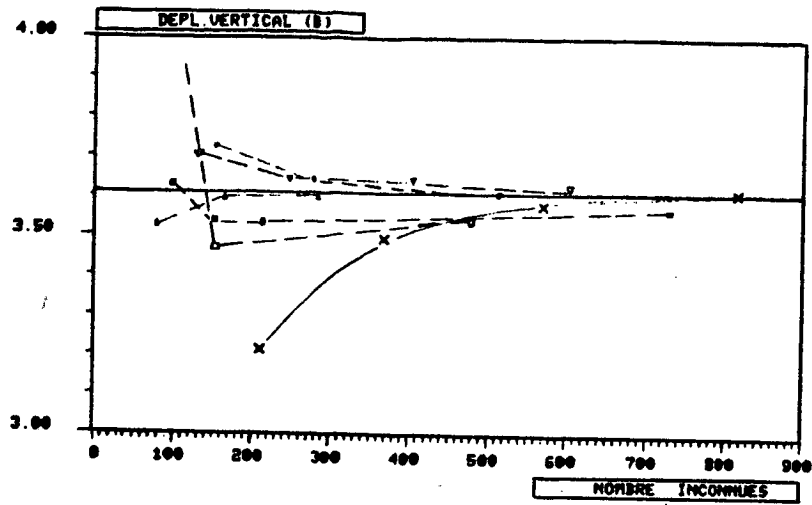


Figure 5.1.6 : valeur de la composante $u_z(B)$



- SOL. EXACTE (DEEP SHELL THEORY)
- × notre approche DKT (Maillage 1)
- MEEK-TAN
- OLSON-BEARDEN
- ▲ DAWE
- NUKILCHAI
- ▽ LAGRANGE 9-NODE

Figure 5.1.7 : comparaison des valeurs $u_z(B)$ données par différents Auteurs

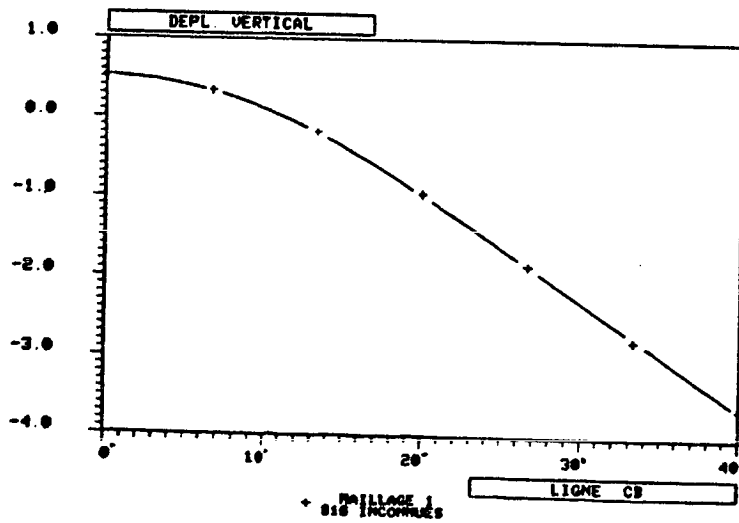


Figure 5.1.8 : valeur de u_z sur l'arête CB

	192 INCONNUES	210 INCONNUES	295 INCONNUES	368 INCONNUES	420 INCONNUES	567 INCONNUES	570 INCONNUES	736 INCONNUES	816 INCONNUES
MAILLAGE 1		0.8900858		0.9680249			0.9921052		1.000975
MAILLAGE 2	0.8240027		0.9196454		0.9630637	0.9835955		0.9939972	
MAILLAGE 3	0.8250166				0.9616398			0.9931191	
MAILLAGE 4	0.7862465		0.8983767		0.9510304	0.9765213		0.9896565	

Figure 5.1.9 : Pourcentage d'erreur entre solution approchée et solution exacte pour la déflexion du point B, suivant les maillages considérés

5.2. Paraboloïde hyperbolique encastré sous pression uniforme

(voir CONNOR-BREBBIA [1967], BATOZ [1977], ADINA [1983, ex.A.26], et MEEK-TAN [1986])

Le problème physique

Le paraboloïde hyperbolique considéré est décrit par la Figure 5.2.1. Il est encastré sur la totalité de son pourtour et est assimilable à une coque mince. Il est chargé par une pression uniforme.

Modélisation géométrique

La coque est rapportée au repère fixe OXYZ indiqué sur la Figure 5.2.1 (O et A sont confondus). Avec les notations de cette figure, le point courant P de la surface moyenne a pour coordonnées :

$$(5.2.1) \quad \vec{OP} = \vec{\phi}(x,y) = \begin{cases} x(=X) \\ y(=Y) \\ \frac{c}{2b^2} (y^2 - x^2) \end{cases}$$

De la représentation (5.2.1) de la surface moyenne, on déduit les caractéristiques géométriques suivantes :

$$(5.2.2) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{c}{b^2} x \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c}{b^2} y \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{b^4} (x^2 + y^2)}} \begin{pmatrix} \frac{c}{b^2} x \\ -\frac{c}{b^2} y \\ 1 \end{pmatrix} \\ a_{11} = 1 + \frac{c^2}{b^4} x^2 \quad a_{12} = a_{21} = -\frac{c^2}{b^4} xy \quad a_{22} = 1 + \frac{c^2}{b^4} y^2 \\ a = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 = 1 + \frac{c^2}{b^4} (x^2 + y^2) \end{array} \right.$$

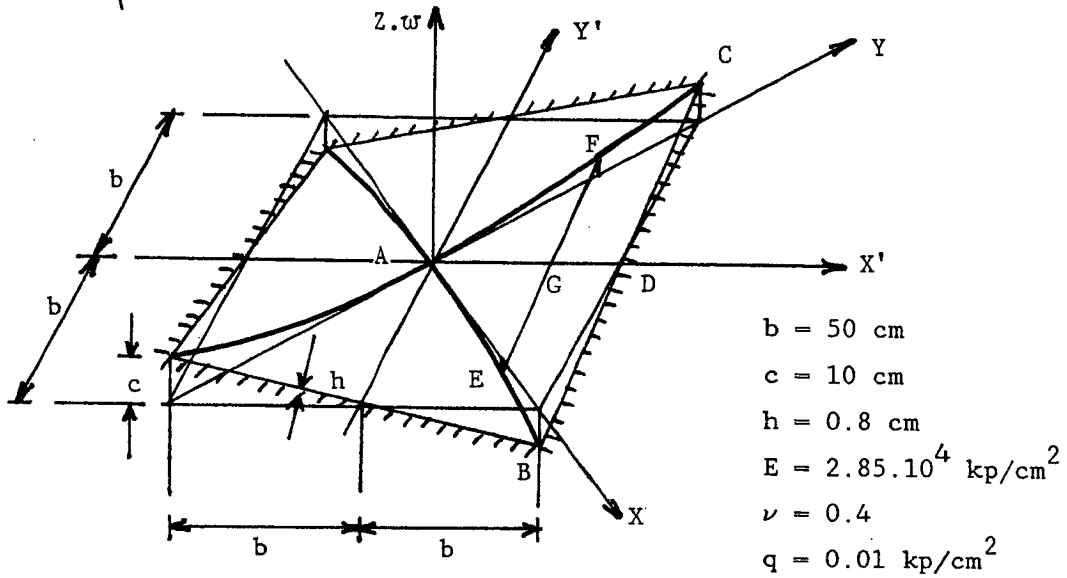


Figure 5.2.1 : Le paraboloid hyperbolique consideré

$$(5.2.3) \left\{ \begin{array}{l} a^{11} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{c^2}{b^4} y^2 \right) \quad a^{12} = a^{21} = \frac{c^2}{ab^4} xy \quad a^{22} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{c^2}{b^4} x^2 \right) \\ \vec{a}_1 = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 1 + \frac{c^2}{b^4} y^2 \\ \frac{c^2}{b^4} xy \\ -\frac{cx}{b^2} \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \frac{c^2}{b^4} xy \\ 1 + \frac{c^2}{b^4} x^2 \\ \frac{c}{b^2} y \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \vec{a}_3 \end{array} \right.$$

$$(5.2.4) \quad b_{11} = -\frac{c}{b^2 \sqrt{a}} ; \quad b_{12} = b_{21} = 0 ; \quad b_{22} = \frac{c}{b^2 \sqrt{a}}$$

$$(5.2.5) \quad \begin{cases} b_1^1 = -\frac{c}{b^2 a \sqrt{a}} \left(1 + \frac{c^2}{b^4} y^2\right) ; & b_1^2 = -\frac{c^3}{b^6 a \sqrt{a}} xy \\ b_2^1 = \frac{c^3}{b^6 a \sqrt{a}} xy ; & b_2^2 = \frac{c}{ab^2 \sqrt{a}} \left(1 + \frac{c^2}{b^4} x^2\right) \end{cases}$$

$$(5.2.6) \quad \begin{cases} b^{11} = -\frac{c}{b^2 a^2 \sqrt{a}} \left[1 + 2\frac{c^2}{b^4} y^2 + \frac{c^4 y^2}{b^8} (y^2 - x^2)\right] \\ b^{12} = b^{21} = \frac{c^5 xy}{b^{10} a^2 \sqrt{a}} (x^2 - y^2) \\ b^{22} = \frac{c}{b^2 a^2 \sqrt{a}} \left[1 + 2\frac{c^2}{b^4} x^2 + \frac{c^4 x^2}{b^8} (x^2 - y^2)\right] \end{cases}$$

$$(5.2.7) \quad \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{c^2 x}{ab^4} ; & \Gamma_{11}^2 = -\frac{c^2 y}{ab^4} ; & \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0 ; \\ \Gamma_{22}^1 = -\frac{c^2 x}{ab^4} ; & \Gamma_{22}^2 = \frac{c^2 y}{ab^4} \end{cases}$$

Remarque 5.2.1 : Lorsque les calculs permettant de définir les caractéristiques géométriques ci-dessus s'avèrent trop fastidieux, on peut comme dans BERNADOU-BOISSERIE [1982, pp. 20 et 21] se limiter au calcul des dérivées partielles premières et secondes de la carte $\vec{\phi}$ (pour cette approche DKT, l'absence de termes en $b^{\alpha\beta}|_\gamma$ rend inutile le calcul des dérivées partielles troisièmes de $\vec{\phi}$). On a donc

$$(5.2.8) \quad \begin{cases} \vec{\phi}_{,1} = \vec{a}_1 ; & \vec{\phi}_{,2} = \vec{a}_2 \\ \vec{\phi}_{,11} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\frac{c}{b^2} \end{cases} ; & \vec{\phi}_{,12} = \vec{0} ; & \vec{\phi}_{,22} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{c}{b^2} \end{cases} \end{cases}$$

□

Calcul de la fonctionnelle d'énergie

En reportant les résultats (5.2.2) à (5.2.7) dans les relations (4.2.7) et (4.2.10), on obtiendrait les matrices Λ_β^α et N_β^α . Puis en y joignant les données indiquées sur la Figure 5.2.1 on calculerait la matrice $[A_{IJ}]$ explicitée en (4.2.11). D'où l'on déduit l'expression de la fonctionnelle d'énergie : (4.2.16) dans le cas d'intégration exactes, (4.2.18) dans le cas d'intégrations approchées.

Calcul du second membre

La coque est chargée par une pression uniforme $q = p^3 = 0.01 \text{ kp/cm}^2$. D'où l'expression suivante de l'énergie potentielle correspondante associée à un champ de déplacement \vec{v}_h :

$$(5.2.9) \quad f(\vec{v}_h, \delta_h) = - \int_{\Omega} 0.01 v_{3h} \sqrt{a} \, dx dy$$

soit encore avec les notations (4.3.3) et (4.3.4) :

$$(5.2.10) \quad t_P = \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^4} (x^2 + y^2)} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0.01 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$(5.2.11) \quad t_Q = [0]_{1 \times 13}$$

Il reste à préciser les conditions aux limites.

Prise en compte des conditions aux limites

On reprend ici les conditions aux limites proposées dans ADINA [1983] :

i) du fait des symétries, on se limite au quart de la coque, i.e., ABDC suivant les notations de la Figure 5.2.1. Ceci conduit aux conditions de symétrie suivantes sur les côtés AB et AC :

Sur le côté AB

$$(5.2.12) \quad u_2(x,0) = \beta_2(x,0) = 0$$

La prise en compte de ces conditions de symétrie est en tous points analogue à celle des conditions (5.1.11).

Sur le côté AC

$$(5.2.13) \quad u_1(0,y) = \beta_1(0,y) = 0$$

La prise en compte de ces conditions de symétrie est en tous points analogue à celle des conditions (5.1.12).

ii) encastrement du côté BDC : ce côté est décrit par le point P tel que

$$\vec{OP} = \begin{cases} x \\ \sqrt{2b-x} \\ \frac{c}{b} (b-\sqrt{2x}) \end{cases} .$$

Sur ce côté on aura

$$(5.2.14) \quad \vec{u}|_{BDC} = \vec{0} \quad ; \quad \beta_1|_{BDC} = \beta_2|_{BDC} = 0 .$$

Pour réaliser les conditions (5.2.14) dans le cadre d'une approximation DKT, il suffira d'annuler tous les degrés de liberté afférant au côté BDC.

Distribution de la "force de cisaillement de membrane" le long de AD

Désignons par \underline{n} le tenseur des contraintes résultantes sur la surface moyenne. Sur la base covariante (\vec{a}_α) , ce tenseur admet pour composantes :

$$(5.2.15) \quad n^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\vec{u})$$

c'est à dire

$$(5.2.16) \quad \underline{n} = n^{\alpha\beta} \vec{a}_\alpha \otimes \vec{a}_\beta$$

où $E^{\alpha\beta\lambda\mu}$ et $\gamma_{\lambda\mu}$ sont respectivement donnés par (2.1.20) et (2.1.9). Avec les notations de la Figure 5.2.1, la "force de cisaillement de membrane $N_{x'y'}$ ", en tout point G de AD est la composante du tenseur \underline{n} associée à $\frac{\vec{AG}}{|\vec{AG}|} \otimes \frac{\vec{GF}}{|\vec{GF}|}$. Donc, pour la trouver on exprimera \vec{a}_1 et \vec{a}_2 en fonction des vecteurs $\frac{\vec{AG}}{|\vec{AG}|}$ et $\frac{\vec{GF}}{|\vec{GF}|}$, i.e.,

$$(5.2.17) \quad \begin{cases} \vec{a}_1 = A_{11} \frac{\vec{AG}}{|\vec{AG}|} + A_{12} \frac{\vec{GF}}{|\vec{GF}|} \\ \vec{a}_2 = A_{21} \frac{\vec{AG}}{|\vec{AG}|} + A_{22} \frac{\vec{GF}}{|\vec{GF}|} \end{cases}$$

puis on les reportera dans (5.2.16). De cette façon :

$$\begin{aligned}
 \vec{n} &\cong n^{11} \vec{a}_1 \vec{a}_1 + n^{12} \vec{a}_1 \vec{a}_2 + n^{21} \vec{a}_2 \vec{a}_1 + n^{22} \vec{a}_2 \vec{a}_2 = \\
 &= (n^{11} A_{11}^2 + 2n^{12} A_{11} A_{21} + n^{22} A_{21}^2) \frac{\vec{AG}}{|\vec{AG}|} \otimes \frac{\vec{AG}}{|\vec{AG}|} \\
 &+ (n^{11} A_{11} A_{12} + n^{12} (A_{11} A_{22} + A_{21} A_{12}) + n^{22} A_{21} A_{22}) \frac{\vec{AG}}{|\vec{AG}|} \otimes \frac{\vec{GF}}{|\vec{GF}|} \\
 &+ (n^{11} A_{11} A_{12} + n^{12} (A_{11} A_{22} + A_{21} A_{12}) + n^{22} A_{21} A_{22}) \frac{\vec{GF}}{|\vec{GF}|} \otimes \frac{\vec{AG}}{|\vec{AG}|} \\
 &+ (n^{11} A_{12}^2 + 2n^{12} A_{12} A_{22} + n^{22} A_{22}^2) \frac{\vec{GF}}{|\vec{GF}|} \otimes \frac{\vec{GF}}{|\vec{GF}|} .
 \end{aligned}$$

Alors :

$$(5.2.18) \quad N_{x',y'} = n^{11} A_{11} A_{12} + n^{12} (A_{11} A_{22} + A_{21} A_{12}) + n^{22} A_{21} A_{22} .$$

On calcule A_{11} , A_{12} , A_{21} et A_{22} ; en désignant par x l'ordonnée du point F , les coordonnées curvilignes (x,y) des points A , G et F situées sur la surface moyenne sont respectivement

$$A(0,0) \quad ; \quad G\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) \quad ; \quad F(0,x)$$

et, grâce à (5.2.1), les coordonnées cartésiennes correspondantes sont :

$$A(0,0,0) \quad ; \quad G\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, 0\right) \quad ; \quad F\left(0, x, \frac{cx^2}{2b}\right) .$$

Dès lors, on vérifie avec (5.2.2) que :

$$(5.2.19) \quad \begin{cases} \vec{AG} = \frac{x}{2} (\vec{a}_1(G) + \vec{a}_2(G)) \\ \vec{GF} = \frac{x}{2} (\vec{a}_2(G) - \vec{a}_1(G)) \end{cases} .$$

En notant par ailleurs que :

$$(5.2.20) \quad \begin{cases} |\vec{AG}| = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ |\vec{GF}| = \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{c^2 x^2}{2b^4}} \end{cases}$$

on obtient :

$$(5.2.21) \quad \begin{cases} \frac{\vec{AG}}{|\vec{AG}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{a}_1(G) + \vec{a}_2(G)) \\ \frac{\vec{GF}}{|\vec{GF}|} = \frac{b^2}{\sqrt{2b^4 + c^2 x^2}} (\vec{a}_2(G) - \vec{a}_1(G)) \end{cases}$$

soit :

$$(5.2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1(G) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\vec{AG}}{|\vec{AG}|} - \frac{\sqrt{2b^4 + c^2 x^2}}{2b^2} \frac{\vec{GF}}{|\vec{GF}|} \\ \vec{a}_2(G) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\vec{AG}}{|\vec{AG}|} + \frac{\sqrt{2b^4 + c^2 x^2}}{2b^2} \frac{\vec{GF}}{|\vec{GF}|} \end{array} \right.$$

d'où

$$(5.2.23) \quad N_{x'y'} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{c^2 x^2}{2b^4}} (n^{22} - n^{11}) .$$

Mais ici $b = 50 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$, d'où approximativement :

$$(5.2.24) \quad N_{x'y'} \approx \frac{1}{2} (n^{22} - n^{11}) .$$

résultat qui était prévisible dans la mesure où $\vec{a}_1 \approx \vec{e}_1$ et $\vec{a}_2 \approx \vec{e}_2$ (voir aussi FLÜGGE [1973, pp.1-11]).

Que l'on choisisse l'expression (5.2.23) ou l'expression (5.2.24) il reste maintenant à indiquer comment calculer $n^{\alpha\beta}$ à partir du champ de déplacement approché (\vec{u}_h). Pour cela nous utilisons la relation (5.2.15), i.e.,

$$(5.2.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} n^{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} \{ (1-\nu) a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + \nu a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \} \gamma_{\lambda\mu}(\vec{u}) \\ n^{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} \{ (1-\nu) a^{\beta\mu} \gamma_{\mu}^{\alpha}(\vec{u}) + \nu a^{\alpha\beta} \gamma_{\lambda}^{\lambda}(\vec{u}) \} . \end{array} \right.$$

Sur un triangle donné $T \in \mathcal{T}_h$, les relations (4.2.6) (4.2.12) et (5.2.25) entraînent :

$$(5.2.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} (n^{\alpha\beta}(\vec{u}_h)|_{T \in \mathcal{T}_h})(G) = \frac{E}{1-\nu^2} \{ (1-\nu) a^{\beta\mu}(G) \Lambda_{\mu}^{\alpha}(G) + \nu a^{\alpha\beta}(G) \Lambda_{\lambda}^{\lambda}(G) \} \times \\ \times {}^t[\text{LAMBDA}(G)] {}^t[B] {}^t[\text{DLDKT}(\vec{u}_h, \beta_h)] . \end{array} \right.$$

Ce calcul fait intervenir les dérivées partielles premières des u_{1h} et u_{2h} qui sont de classe \mathcal{C}^0 seulement. Dès lors, pour un même point G situé sur un côté de triangle porté par AD, les valeurs de $(n^{\alpha\beta}(\vec{u}_h))(G)$ vont différer selon le triangle retenu pour effectuer le calcul

Par la suite nous utiliserons les moyennes suivantes pour calculer les $n^{11}(G)$ et $n^{22}(G)$ qui apparaissent en (5.2.24) :

$$(5.2.27) \quad n^{\alpha\beta}(G) = \frac{1}{2} \left((n^{\alpha\beta}(\vec{u}_h)|_{T^+})(G) + (n^{\alpha\beta}(\vec{u}_h)|_{T^-})(G) \right) .$$

Dans le cas où le point G coïncide avec un des sommets de triangle, on adoptera la valeur moyenne suivante :

$$(5.2.28) \quad n^{\alpha\beta}(G) = \frac{1}{n_T} \left(\sum_{k=1}^{n_T} n^{\alpha\beta}(\vec{u}_h)|_T(G) \right)$$

où la sommation porte sur les n_T triangles ayant ce point G pour sommet.

Résultats numériques

Les résultats obtenus sont donnés sur les Figures 5.2.2 à 5.2.5. Il convient de noter :

i) Figure 5.2.2 : du fait des symétries, on se limite, comme nous l'avons dit, au quart de la coque ; dans la Figure 5.2.2.a apparaît le type de maillage sur lequel nous travaillons et dans la Figure 5.2.2.b apparaît le maillage complet correspondant.

ii) Figure 5.2.3 : dans cette figure, on indique la valeur de la composante verticale du déplacement u_z du point A, multipliée par 100, en fonction du nombre d'inconnues du maillage complet. A partir du nombre d'inconnues relatif à chaque maillage du type 5.2.2.a on a trouvé le nombre d'inconnues à celui du type 5.2.2.b pour pouvoir faire la comparaison de nos résultats avec ceux de Meek et Tan [1986].

iii) Figure 5.2.4 : dans cette figure, on indique les valeurs de la composante verticale du déplacement, u_z , multipliées par 100, le long de AB(x) et AD(+), quand le maillage (du type 5.2.2.a) a 98 éléments.

iv) Figure 5.2.5 : dans cette figure, on indique la valeur de $N_{x,y}$, multipliée par 10, le long de AD, quand le maillage (du type 5.2.2.a) a 98 éléments.

v) Tableau 5.2.1 : dans ce tableau on indique le pourcentage d'erreur entre la solution obtenue par notre approche et la solution en "différences finies" donnée par Meek et Tan [1986], ceci pour la déflexion du point A, en fonction du nombre d'inconnues de la coque complète.

vi) Tableau 5.2.2 : dans ce tableau, on indique le temps de calcul, quand le maillage (du type 5.2.2.a) a 98 éléments.

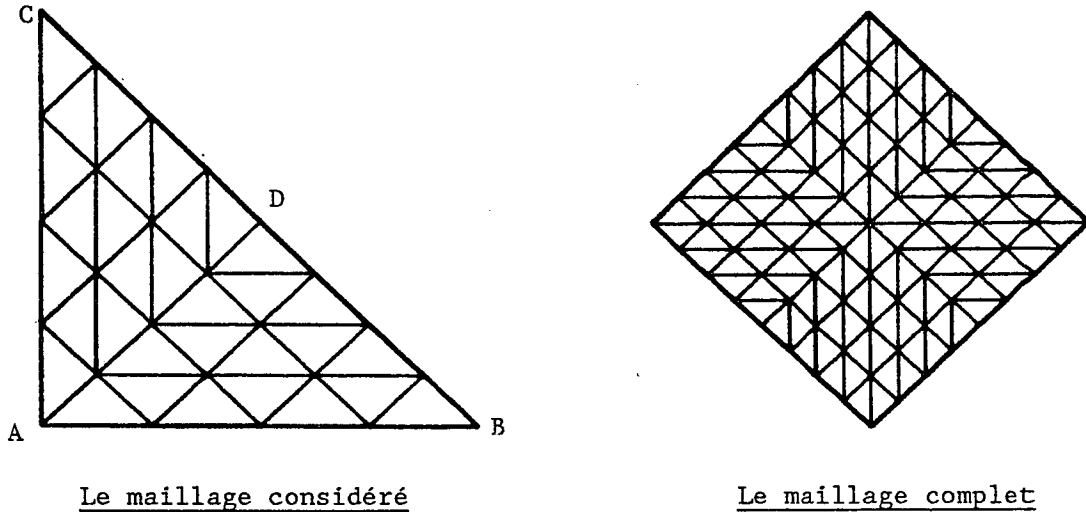


Figure 5.2.2 : les maillages

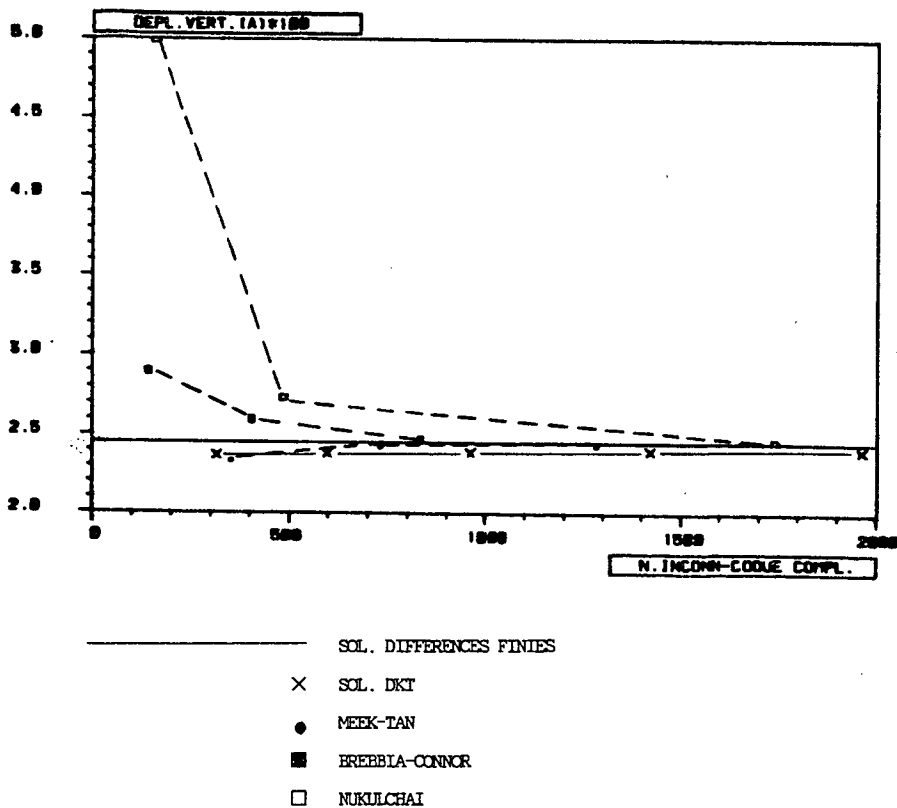


Figure 5.2.3 : comparaison des valeurs $u_z(A)$

données par différents Auteurs

(Ces résultats ont été obtenus par symétrie à partir du maillage 5.2.1a mais le nombre d'inconnues est relatif au maillage 5.2.1b)

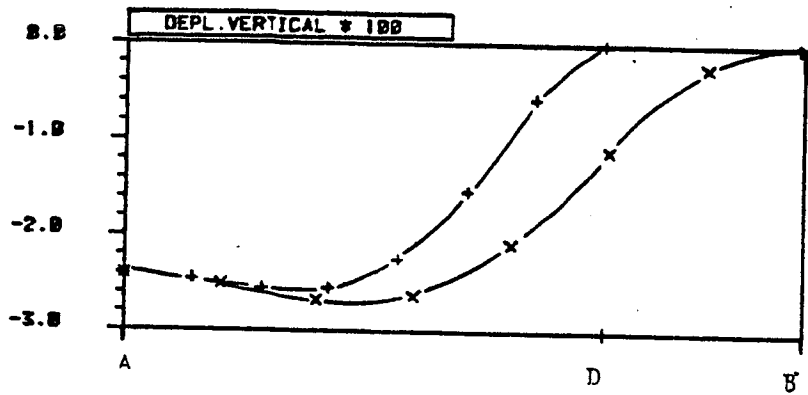


Figure 5.2.4 : valeur de la composante u_z multipliée par 100, le long de AB(x) et de AD(+)

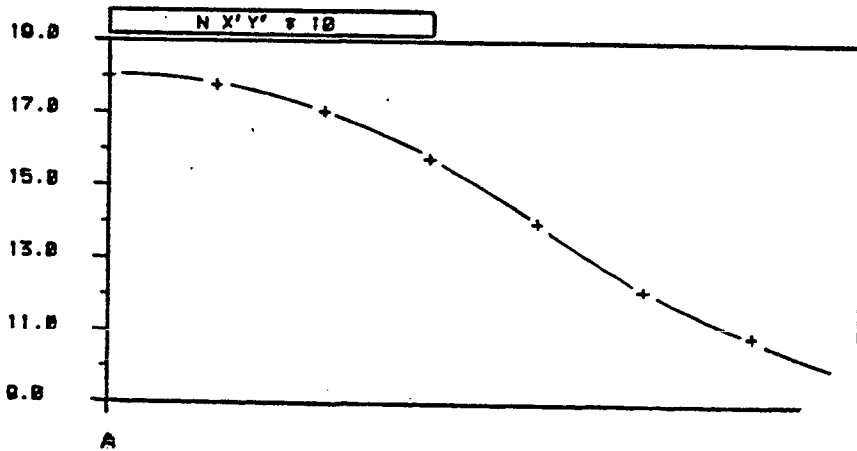


Figure 5.2.5 : valeur de $N_{x'y'}$ multipliée par 10, le long de AD

Nombre inconnues coque complète	317	597	965	1421	1965
SOL_{EF}/SOL_{DF}	0.9631548	0.9684573	0.9733125	0.9767567	0.9791396

Tableau 5.2.1 : Pourcentage d'erreur entre solution approchée et solution "différences finies" pour la déflexion du point A

Nombre de degrés de liberté (1/4 coque)	642
Nombre d'inconnues	497
Nombre de noeuds d'intégration	1176
Temps de calcul (sur BULL DPS8/70)	
Matrice de rigidité	431.3s
Second membre	9.9s
Contraintes	40.9s
Résolution	53.1s
Total	<u>535.2s</u>

Tableau 5.2.2 : Temps de calcul pour le maillage le plus fin

Exemple 5.3 : Coque cylindrique pincée

(voir LINDBERG-OLSON-COWPER [1969], ADINA [1983, ex.A.32] ; DVORKIN-BATHE [1984] et MEEK-TAN [1986])

Le problème physique

La coque cylindrique est schématisée sur la Figure 5.3.1. Elle est librement supportée à ses deux extrémités et est chargée par deux forces concentrées, diamétralement opposées agissant au centre de la coque.

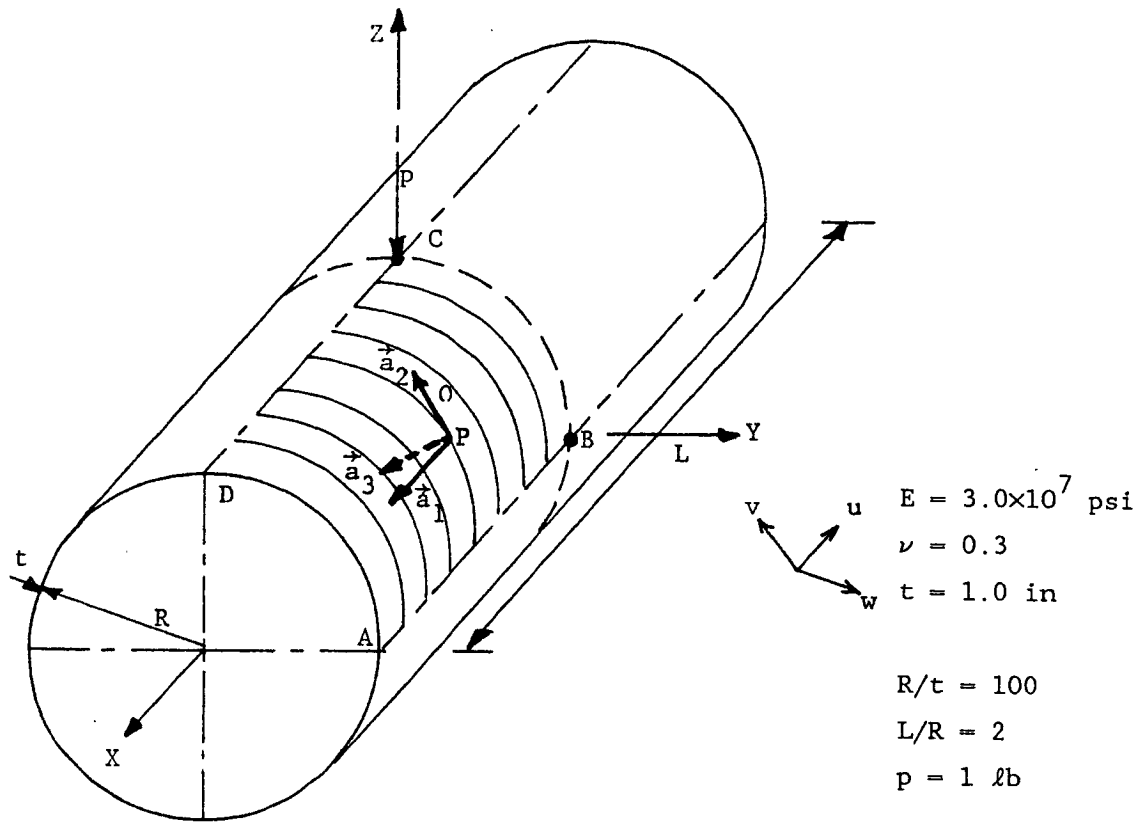


Figure 5.3.1 : Coque cylindrique pincée

Modélisation géométrique

La coque est rapportée au repère fixe OXYZ indiqué sur la Figure 5.3.1. Le point courant P de la surface moyenne a pour coordonnées

$$(5.3.1) \quad \vec{OP} = \vec{\phi}(x,y) = \begin{cases} x & (x=X) \\ R \cos y & (y=\phi) \\ R \sin y \end{cases}$$

De la représentation (5.3.1) de la surface moyenne, on déduit les caractéristiques suivantes :

$$(5.3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \vec{a}_2 = \begin{cases} 0 \\ -R \sin y \\ R \cos y \end{cases} \quad \vec{a}_3 = \begin{cases} 0 \\ -\cos y \\ -\sin y \end{cases} \\ a_{11} = 1 \quad ; \quad a_{12} = a_{21} = 0 \quad ; \quad a_{22} = R^2 \quad ; \quad a = R^2 \\ a^{11} = 1 \quad ; \quad a^{12} = a^{21} = 0 \quad ; \quad a^{22} = \frac{1}{R^2} \\ \vec{a}^1 = \vec{a}_1 \quad ; \quad \vec{a}^2 = \frac{1}{R^2} \vec{a}_2 \quad ; \quad \vec{a}^3 = \vec{a}_3 \end{array} \right.$$

$$(5.3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{11} = b_{12} = b_{21} = 0 \quad ; \quad b_{22} = R \\ b_1^1 = b_2^1 = b_1^2 = 0 \quad ; \quad b_2^2 = \frac{1}{R} \\ b^{11} = b^{12} = b^{21} = 0 \quad ; \quad b^{22} = \frac{1}{R^3} \\ \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha = 0 . \end{array} \right.$$

Calcul de la fonctionnelle d'énergie

Les relations (5.3.2) et (5.3.3) permettent de calculer les matrices Λ_β^α et N_β^α données par les relations (4.2.7) et (4.2.10) :

$$(5.3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_\beta^\alpha = [0 ; \delta^{\alpha 1} \delta_{\beta 1} ; \frac{1}{2} \nabla_\beta^\alpha ; 0 ; \frac{1}{2} \nabla_\beta^\alpha ; \frac{1}{R^2} \delta^{\alpha 2} \delta_{\beta 2} ; -\frac{1}{R} \delta^{\alpha 2} \delta_{\beta 2} ; \\ 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0] \end{array} \right.$$

avec

$$(5.3.5) \quad \delta^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha=\beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} ; \quad \nabla_\beta^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha=\beta \\ 1 & \text{si } \alpha=1, \beta=2 \\ \frac{1}{R^2} & \text{si } \alpha=2, \beta=1 \end{cases}$$

$$(5.3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_\beta^\alpha = [0 ; 0 ; 0 ; 0 ; -\frac{1}{2R^3} (\delta^{\alpha 2} \delta_{\beta 1} + R^2 \delta^{\alpha 1} \delta_{\beta 2}) ; -\frac{1}{R^3} \delta^{\alpha 2} \delta_{\beta 2} ; \\ \frac{1}{R^2} \delta^{\alpha 2} \delta_{\beta 2} ; 0 ; \delta^{\alpha 1} \delta_{\beta 1} ; \frac{1}{2} \nabla_\beta^\alpha ; 0 ; \frac{1}{2} \nabla_\beta^\alpha ; \frac{1}{R^2} \delta^{\alpha 2} \delta_{\beta 2}] \end{array} \right.$$

En y joignant $\sqrt{a} = R$, $E = 3.0 \times 10^7$ psi, $\nu = 0.3$ et $e = 1.0$ in , nous pouvons calculer la matrice $[A_{IJ}]$ donnée en (4.2.11) et évaluer ainsi la fonctionnelle d'énergie : (4.2.16) dans le cas d'intégrations exactes, (4.2.18) dans le cas d'intégrations approchées.

Calcul du second membre

Soit un champ de déplacement (\vec{v}_h, δ_h) ; l'énergie potentielle de la coque associée aux forces concentrées supérieure et inférieure appliquées en $(x = 0, y = \frac{\pi}{2})$ et $(x = 0, y = -\frac{\pi}{2})$ vaut :

$$(5.3.7) \quad f(\vec{v}_h, \delta_h) = v_{h3}(0, \frac{\pi}{2}) + v_{h3}(0, -\frac{\pi}{2}) .$$

Prise en compte des conditions aux limites

Compte tenu des symétries des données, nous nous limiterons à la portion ABCD du cylindre correspondant à $x \in [0,100]$ et $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Les conditions aux limites et les conditions de symétrie sont alors :

i) Sur le côté AB ($y=0$)

$$(5.3.8) \quad u_2(x,0) = \beta_2(x,0) = 0 ;$$

ii) Sur le côté BC ($x=0$)

$$(5.3.9) \quad u_1(0,y) = \beta_1(0,y) = 0 ;$$

iii) Sur le côté CD ($y=\frac{\pi}{2}$)

$$(5.3.10) \quad u_2(x, \frac{\pi}{2}) = \beta_2(x, \frac{\pi}{2}) = 0 .$$

En pratique, la prise en compte des conditions (5.3.8) et (5.3.10) (resp. (5.3.9)) s'effectue suivant les indications de la Figure (5.1.2) (resp. (5.1.3)).

iv) Sur le côté DA ($x=L$)

Il s'agit là d'une condition aux limites qui doit traduire le fait que la coque est simplement supportée par un diaphragme rigide. Il s'ensuit les conditions suivantes :

$$(5.3.11) \quad u_2(L,y) = u_3(L,y) = \beta_2(L,y) = 0 .$$

La prise en compte de ces conditions aux limites s'effectuera suivant les indications de la Figure 5.1.4.

Calcul effectif du second membre

Lorsqu'on se limite au domaine ABCD indiqué sur la Figure 5.3.1, le second membre se réduit à

$$f(\vec{v}_h, \delta_h) = v_{3h}(0, \frac{\pi}{2}) .$$

Ce type de second membre n'a pas été prévu en (4.3.2). En fait il est plus simple de mise en oeuvre : pour ce chargement, il n'y a pas lieu d'assembler ! Le seul terme non nul du second membre assemblé est le coefficient de $v_{3h}(0, \frac{\pi}{2})$ qui vaut 0.25 (le point d'application de la force de 1 lb est commun aux 4 sous-domaines rectangulaires ; par symétrie, on ne considère que le sous-domaine ABCD que l'on charge en C à l'aide du quart de la force seulement, soit 0.25 lb).

Résultats numériques

Les résultats obtenus sont donnés sur les Figures 5.3.2 à 5.3.5. Il convient de noter :

i) Figure 5.3.2 : cette figure présente le type de maillage employé, correspondant à 1/8 de la coque.

ii) Figure 5.3.3 : soit E le module de Young, t l'épaisseur de la coque, w le déplacement radial et P l'intensité de la force appliquée ; dans cette figure, on représente Etw/P le long de la ligne OC, en fonction des différents raffinements du maillage de type 5.3.2. Ici et par la suite, les résultats exacts font référence à la solution de l'équation de Flügge employant des séries doubles de Fourier, avec 80 termes pour chaque direction (voir LINDBERG, OLSON, COWPER [1969]).

iii) Figure 5.3.4 : dans cette figure, on représente Etw/P le long de la ligne BC, en fonction des différents raffinements du maillage de type 5.3.2.

iv) Figure 5.3.5 : soit u le déplacement suivant la direction de \vec{a}_1 ; dans cette figure on représente Etw/P le long de la ligne AD, en fonction des différents raffinements du maillage de type 5.3.2.

v) Tableau 5.3.1 : dans ce tableau, on indique le temps de calcul, quant le maillage de type 5.3.2 a 196 éléments.

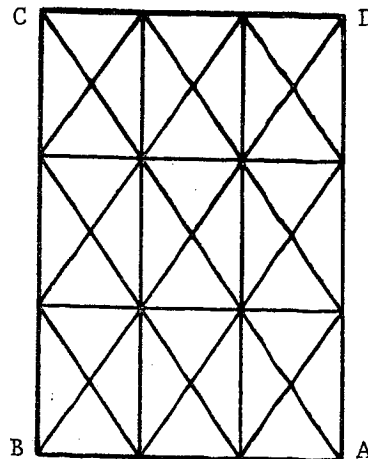


Figure 5.3.2 :
le maillage considéré

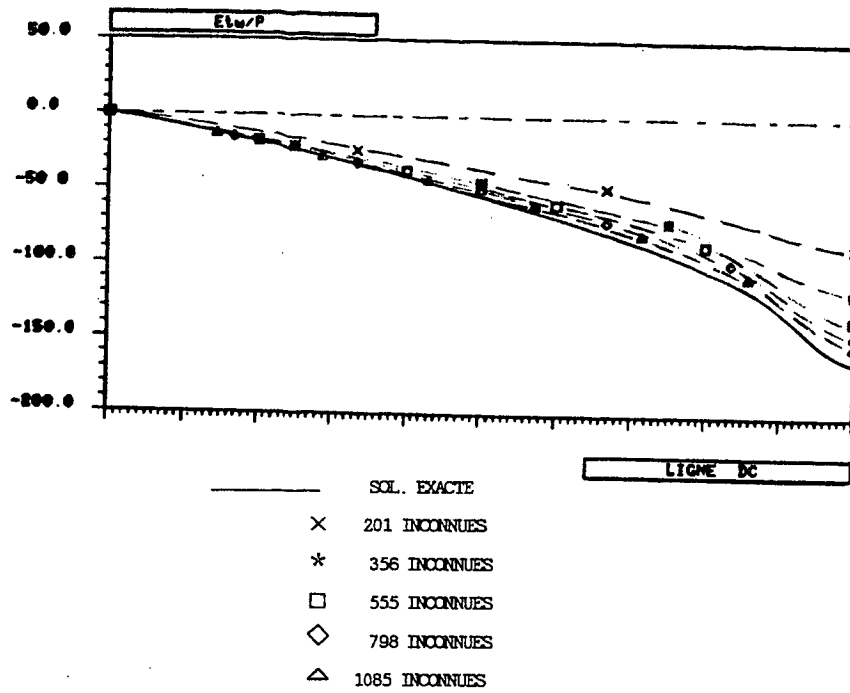


Figure 5.3.3 : E_{tw}/P le long de la ligne DC

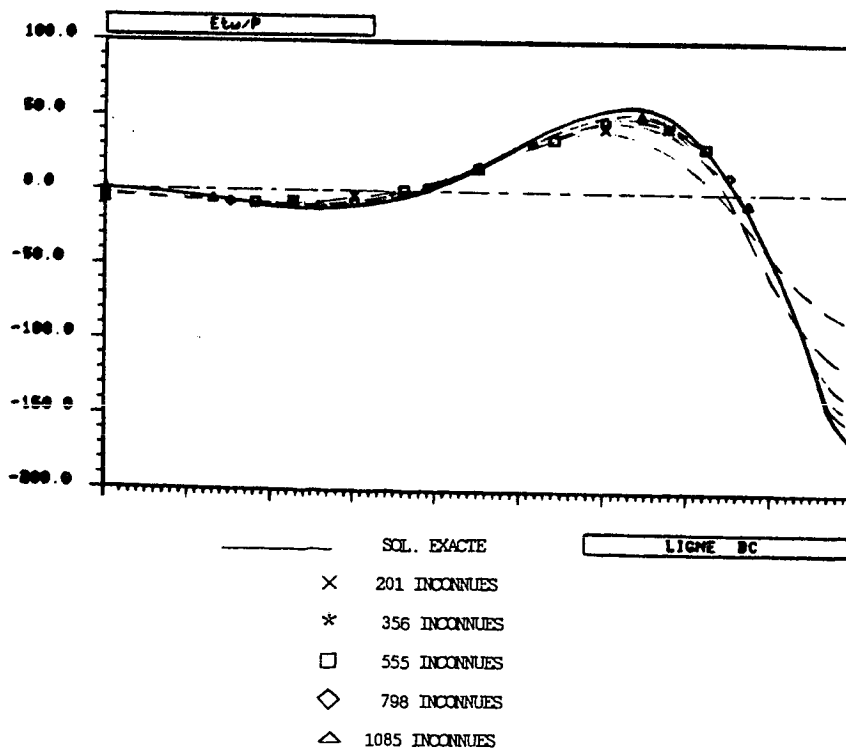


Figure 5.3.4 : E_{tw}/P le long de la ligne BC

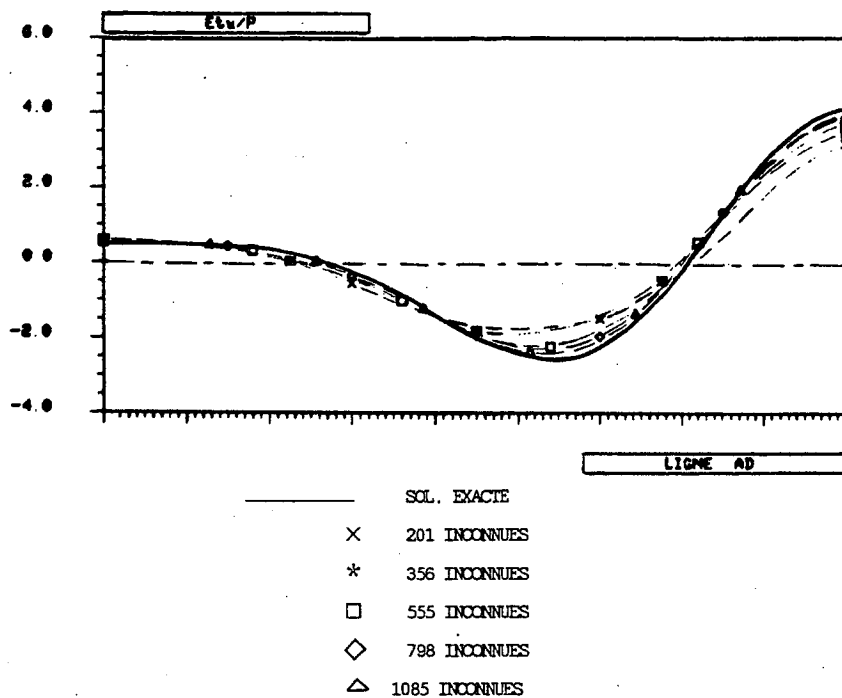


Figure 5.3.5 : Etu/P le long de la ligne AD

Nombre de degrés de liberté	1181
Nombre d'inconnues	1085
Nombre de noeuds d'intégration	2352
Temps de calcul (sur BULL DPS8/70)	
Matrice de rigidité	868.5s
Second membre	18.9s
Résolution	252.1s
Total	1139.5s

Tableau 5.3.1 : Temps de calcul pour le maillage le plus fin (1085 inconnues)

6 - BIBLIOGRAPHIE

- ADINA [1983] : System verification manual, Report AE 83-5.
- BATHE, K.J [1982] : "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Pentice-Hall, Inc.
- BATOZ, J.L. [1977] : "Analyse Non Linéaire des Coques Minces Elastiques de Formes Arbitraires par Eléments Triangulaires Courbés", Ph. D., Dept. de Génie Civil, Université Laval, Québec.
- BATOZ, J.L. - BATHE, K.J. - HO, L.W. [1980] : "A study of three-node triangular plate bending elements", Int. J. Num. Meth. Engng., 15, 1771-1812.
- BATOZ, J.L. - BEN TAHAR, M. [1982] : "Evaluation of a new thin plate quadrilateral element", Int. J. for Num. Meth. in Engng., vol. 18, 1655-1677.
- BATOZ, J.L. - BEN TAHAR, M. - DHATT, G.S. [1982] : "Les éléments DKT et DKQ et l'analyse des plaques et coques minces", Présenté à la conférence "Tendances Actuelles en Calcul des Structures" tenue à Sophia-Antipolis, 1-2-3 Février 1982.
- BATOZ, J.L. - GEOFFROY, P. [1983] : "Evaluation d'un élément fini triangulaire pour l'analyse non linéaire statique de coques minces", Contrat UTC/DRET N° 81/032, Avril 1983. Division Modèles Numériques en Mécanique, Université de Technologie de Compiègne.
- BERNADOU, M. - BOISSERIE, J.M. [1982] : "The Finite Element Method in Thin Shell Theory : Application to Arch Dam Simulations", Birkhäuser, Boston.
- BERNADOU, M. - CIARLET, P.G. [1976] : Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. Koiter. Dans "Computing Methods in Applied Sciences and Engineering", Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems, Vol. 134, pp. 89-136, Springer-Verlag, Berlin.
- CIARLET, P.G. [1978] : "The Finite Element Method for Elliptic Problems", North-Holland.
- CONNOR, J.J. - BREBBIA, C. [1967] : "Stiffness Matrix for Shallow Rectangular Shell Elements", Proc. ASCE, Vol. 93, N° EM5, Oct., pp. 43-65.

- COUTRIS, N. [1976] : "Théorème d'existence et d'unicité pour un problème de flexion élastique de coques dans le cadre de la modélisation de P.M. Naghdi", C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, 283, pp. 951-953.
- DVORKIN, N. - BATHE, K.J. [1984] : "A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis", Eng. Comput., Vol. 1, March 1984.
- FLUGGE, W. [1973] : "Stresses in Shells", Springer-Verlag, 2nd ed.
- FORSBERG, K. [1971] : "An Evaluation of Finite Difference and Finite Element Techniques for Analysis of General Shells", Proceedings of the Symposium of International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Liège, August 23-28, 1970.
- GREEN, A.E. - ZERNA, W. [1975] : "*Theoretical Elasticity*", Oxford Press.
- KIKUCHI, F. [1975] : "On a finite element scheme based on the discrete Kirchhoff assumption", Numer. Math., 24, pp. 211-231.
- KIKUCHI, F. [1981] : "On the discrete Kirchhoff approach for plate bending Problems", Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 31, University of Tokyo Press.
- KOITER, W.T. [1966] : "On the Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells", Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., B69, 1-54.
- KOITER, W.T. [1970] : "On the foundations of the linear theory of thin elastic shells", Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., B73, 169-195.
- LINDBERG, G.M. - OLSON, M.D. - COWPER, E.R. [1969] : "New Developments in the Finite Element Analysis of Shells", National Research Council of Canada, Quarterly Bulletin of the Division of Mechanical Engineering and the National Aeronautical Establishment, 4, pp. 1-38.
- MEEK, J.L. - TAN, H.S. [1986] "A faceted shell element with Loof nodes", Int. J. Numer. Meth. Engng., 23, pp. 49-67.
- NAGHDI, P.M. [1963] : "Foundations of Elastic Shell Theory", Progress in Solid Mechanics, Vol. 4, pp. 1-90, North-Holland, Amsterdam.
- NAGHDI, P.M. [1972] : "The Theory of Shell and Plates", Handbuch der Physik, Vol. VI a-2, pp. 425-640, Springer-Verlag, Berlin.
- SCORDELIS, A.C. - LO, K.S. [1964] : "Computer Analysis of Cylindrical Shells", J. Amer. Concr. Inst., 61, pp. 561-593.

TIMOSHENKO, S. [1955] : "Strength of Materials", Part. I, Elementary theory and Problems, 3rd ed., D. Van Nostrand.

WEMPNER, G. [1981] : "*Mechanics of Solids with Applications to Thin Bodies*", Sijthoff and Noordhoff.

WEMPNER, G. - ODEN, J.T. - KROSS, D. [1971] : "Finite element analysis of thin shells", J. Engng. Mech. Div., ASCE, 94, 1273-1294.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

