



HAL
open science

Etude numérique des instabilités cellulaires d'un front de flamme par une méthode pseudo-spectrale

Hervé Guillard, Bernard Larrouturou, Nathan Maman

► **To cite this version:**

Hervé Guillard, Bernard Larrouturou, Nathan Maman. Etude numérique des instabilités cellulaires d'un front de flamme par une méthode pseudo-spectrale. [Rapport de recherche] RR-0721, INRIA. 1987. inria-00075831

HAL Id: inria-00075831

<https://inria.hal.science/inria-00075831>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

UNITÉ DE RECHERCHE
IRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tel. (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N°721

ETUDE NUMERIQUE DES INSTABILITES CELLULAIRES D'UN FRONT DE FLAMME PAR UNE METHODE PSEUDO-SPECTRALE

Hervé GUILLARD
Bernard LARROUTUROU
Nothan MAMAN

AOUT 1987

ETUDE NUMERIQUE DES INSTABILITES CELLULAIRES

D UN FRONT DE FLAMME

PAR UNE METHODE PSEUDO-SPECTRALE^(g)

H. GUILLARD, B. LARROUTUROU, N. MAMAN

INRIA, Sophia-Antipolis, 06560 VALBONNE, FRANCE

RESUME:

Nous étudions la propagation d'une flamme plissée bidimensionnelle dans un milieu gazeux prémélangé, dans le cadre de l'approximation de densité constante. La méthode numérique utilise un développement des variables en séries de Fourier dans la direction du front, et une approximation en différences finies adaptatives dans la direction de propagation, associés à une intégration temporelle semi-implicite. Le schéma résultant permet le calcul (original) des instabilités cellulaires d'un front de flamme.

NUMERICAL INVESTIGATION

OF TWO-DIMENSIONAL FLAME FRONT INSTABILITIES

USING A PSEUDO-SPECTRAL METHOD^(g)

ABSTRACT:

We investigate the propagation of a curved two-dimensional premixed flame in a gaseous medium, in the framework of the constant-density approximation. The numerical method uses an expansion in Fourier series in the direction parallel to the front, and an adaptive finite-difference approximation in the direction of propagation, associated to a semi-implicit temporal integration. This scheme allows to simulate (for the first time) the cellular instabilities of a flame front.

(g) Cette étude a été partiellement supportée par la D.R.E.T. (Direction des Recherches, Etudes et Techniques) sous le contrat 84-209.

I. INTRODUCTION

Le but de ce travail est la mise au point d'une méthode numérique performante pour simuler la propagation d'une flamme plissée bidimensionnelle dans un milieu gazeux prémélangé. Plus précisément on cherche à simuler les instabilités cellulaires d'un front de flamme dans le cadre de l'approximation de densité constante, classique en combustion.

Même dans ce cadre simplifié, cette étude présente des difficultés numériques liées au fait que les variables du problème ont de fortes dérivées première et seconde dans une zone très mince du domaine de calcul qu'il importe de représenter avec précision. De plus, une simulation correcte des instabilités exige de considérer un tube dont la largeur est très supérieure à l'épaisseur de la flamme, et d'autre part de calculer avec précision l'évolution du phénomène pendant un temps très supérieur au temps caractéristique de la propagation de la flamme. Une méthode numérique précise et performante est donc nécessaire pour réaliser une simulation satisfaisante en évitant des coûts de calcul trop importants.

La méthode employée utilise un maillage adaptatif non-uniforme, construit de telle sorte que l'erreur de troncature du schéma numérique, ou une fonction très proche de celle-ci, soit presque également répartie d'une maille à l'autre.

D'autre part, la méthode numérique utilise un développement des variables en série de Fourier dans la direction transverse à la direction de propagation, ce qui présente l'avantage de découpler les différents modes qui n'interagissent plus qu'à travers le terme de réaction.

Le schéma spatial utilisé pour évaluer les dérivées première et seconde dans la direction de propagation est un schéma de différences finies classique monodimensionnel. Le schéma temporel est un δ -schéma explicite pour les termes de convection et de réaction, et implicite pour le terme de diffusion.

Le chapitre II est consacré à un bref rappel du modèle régissant le phénomène considéré. Nous décrivons en détail la méthode numérique employée pour sa résolution dans le chapitre III, et présentons quelques résultats significatifs au chapitre IV.

Ce travail fait suite à des études menées à l'INRIA par Hervé Guillard et Bernard Larroutou ([5], [6], [7], [8]).

II. FORMULATION DU PROBLEME

1. Le modèle

Nous nous intéressons à la propagation d'une flamme adiabatique bidimensionnelle dans un mélange gazeux combustible, dans le cadre du modèle simplifié décrit ci-dessous :

Nous supposons que la réaction chimique est simple du type $A \implies B$. Cette hypothèse peut être faite notamment dans le cas d'une réaction qui a lieu dans un mélange où tous les réactants sauf un sont présents en large excès. Par exemple, si on brûle beaucoup de fuel avec très peu d'oxygène, on peut se ramener à une réaction simple en choisissant la fraction massique de l'oxydant comme variable, le fuel restant toujours surabondant.

Nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation de densité constante, classique en combustion. Elle consiste à négliger les effets hydrodynamiques devant les effets diffusifs et réactifs ([10]).

Ces hypothèses conduisent au modèle thermo-diffusif (1) dont nous donnons les équations ci-après.

2. Les équations

La propagation de la flamme est alors régie par le système normalisé suivant :

$$\begin{cases} T_t = \Delta T + \Omega(C, T) \\ C_t = \frac{1}{Le} \Delta C - \Omega(C, T) \end{cases} \quad (1)$$

où T est la température, C la fraction massique de réactant, Ω le taux de réaction et Le le nombre de Lewis, rapport des diffusivités thermique et moléculaire. Les signes + et - devant le terme Ω dans les deux équations traduisent le fait que la réaction produit de la chaleur et consomme du réactant.

La loi d'Arrhenius et la loi d'action de masse pour le taux de réaction normalisé donnent :

$$\Omega(C, T) = \frac{\beta^2}{2Le} C \exp\left(\frac{-\beta(1-T)}{1-\alpha(1-T)}\right) \quad (2)$$

où β est l'énergie d'activation réduite et où α est le rapport entre l'élévation de température due à la réaction et la température des gaz brûlés. Nous supposons dans la suite que Le , α et β sont des constantes.

Nous associons aux équations précédentes les conditions initiales :

$$\begin{cases} T(t=0) = T_0(x, y) = \begin{cases} e^y, & \text{si } y \leq 0 \\ 1, & \text{si } y \geq 0 \end{cases} \\ C(t=0) = C_0(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{Le y}, & \text{si } y \leq 0 \\ 0, & \text{si } y \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(y = -\infty) = 0 \\ T(y = +\infty) = 1 \\ C(y = -\infty) = 1 \\ C(y = +\infty) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Les données initiales (3) sont fournies par l'analyse asymptotique pour les grandes valeurs de l'énergie d'activation β (voir ci-dessous)

3. La stabilité du front

Considérons maintenant le problème de la stabilité d'un front de flamme plan dont la propagation est régie par les équations (1), L'analyse de ce problème a été réalisée par les physiciens dans le cadre du modèle à grande énergie d'activation (voir [2], [10], [11]). Ses conclusions nous guideront pour le choix d'essais numériques conduisant ou ne conduisant pas à l'observation d'instabilités cellulaires. Dans la limite des énergies d'activation infinies, le taux de réaction (2) tend vers une fonction de Dirac.

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \Omega = \delta_{y=0}$$

En effet, lorsque β est grand, le taux de réaction est nul dans les gaz frais ($T \sim 0$) car le terme exponentiel l'emporte, et nul aussi dans les gaz brûlés car il n'y a plus de réactant ($C \sim 0$). Il n'y a donc plus que sur une épaisseur de l'ordre de $O(1/\beta)$ autour de $y = 0$ que la réaction se fait, avec une valeur de l'ordre de $O(\beta)$.

Dans le cas d'une énergie d'activation tendant vers l'infini, on peut trouver la solution plane exacte du système (1) :

$$T_p(y, t) = \begin{cases} e^{y-t}, & \text{si } y \leq t \\ 1, & \text{si } y \geq t \end{cases}$$

$$C_p(y, t) = \begin{cases} 1 - e^{Le(y-t)}, & \text{si } y \leq t \\ 0, & \text{si } y \geq t \end{cases}$$

Cette solution est stationnaire dans un repère (R_1) qui bouge à la vitesse 1 par rapport au repère de référence (R_0).

Pour l'étude de la stabilité, on se place dans le repère mobile (R_1) et on écrit que la solution du système est la somme de sa solution plane stationnaire et d'une perturbation périodique en x ayant un coefficient d'amplification de la forme $\exp(\gamma t)$:

$$\begin{cases} T(x, y) = T'_p(y) + aT_1(y)e^{\gamma t}e^{ikx} \\ C(x, y) = C'_p(y) + aC_1(y)e^{\gamma t}e^{ikx} \end{cases}$$

avec $T'_p(y) = T_p(y, 0)$ et $C'_p(y) = C_p(y, 0)$.

Une étude linéaire de stabilité, fournit alors la relation de dispersion:

$$\gamma = (\eta - 1 - 4\eta^2 k^2)k^2$$

avec

$$\eta = \frac{\beta}{2}(1 - Le)$$

Si η est inférieur ou égal à 1, γ est strictement négatif quel que soit k , ce qui implique que la flamme plane est stable : un front initialement plissé a tendance à s'aplatir au cours du temps.

Pour η plus grand que 1, la courbe qui donne γ en fonction de k a l'allure d'une parabole. Elle coupe l'axe des k en $k = 0$ et $k = k_0 = \frac{\sqrt{\eta-1}}{2\eta}$. Son maximum est en $k_c = \frac{\sqrt{2(\eta-1)}}{4\eta}$; γ est négatif si k est compris entre 0 et k_0 , positif sinon:

$$\eta > 1 \implies \begin{cases} \gamma > 0 & , \text{ si } k \in]0, k_0[\\ \gamma < 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

D'autre part, la longueur d'onde λ de la perturbation est reliée au nombre d'onde k par la relation:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

En conclusion, la flamme plane est instable si elle est perturbée avec des longueurs d'onde supérieures à $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$: on pourra alors observer une flamme plissée.

III. RESOLUTION NUMERIQUE

Dans cette partie nous présentons en détail la méthode numérique utilisée pour résoudre le problème (1)-(4).

1. Formulation du problème

Comme indiqué dans l'introduction, nous faisons l'hypothèse que la flamme est périodique dans la direction x transverse à sa propagation. La température T et la fraction massique C sont donc supposées périodiques en x , de période X_{long} .

D'autre part, l'étude numérique utilise dans la direction y un domaine de longueur finie $[0, Y_{long}]$. Sur ce domaine, les conditions aux limites (4) deviennent :

$$\begin{cases} T(y=0) = 0 \\ C(y=0) = 1 \\ T_y(y=Y_{long}) = 0 \\ C_y(y=Y_{long}) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

On remarque que les conditions aux limites aux deux bords $y = 0$ et $y = Y_{long}$ ne sont pas traitées de la même manière. En effet, du côté des gaz frais (au bord $y = 0$), on peut imposer des conditions de Dirichlet car la fraction massique et la température du mélange frais dans lequel la flamme se propage sont connues. Par contre, les essais numériques ont montré que des conditions de Neumann homogènes sont plus appropriées pour le bord $y = Y_{long}$, dans la région des gaz brûlés.

Le problème à résoudre numériquement se compose des équations (1), (2), (3), des conditions aux limites (5), et de l'hypothèse de périodicité dans la direction x .

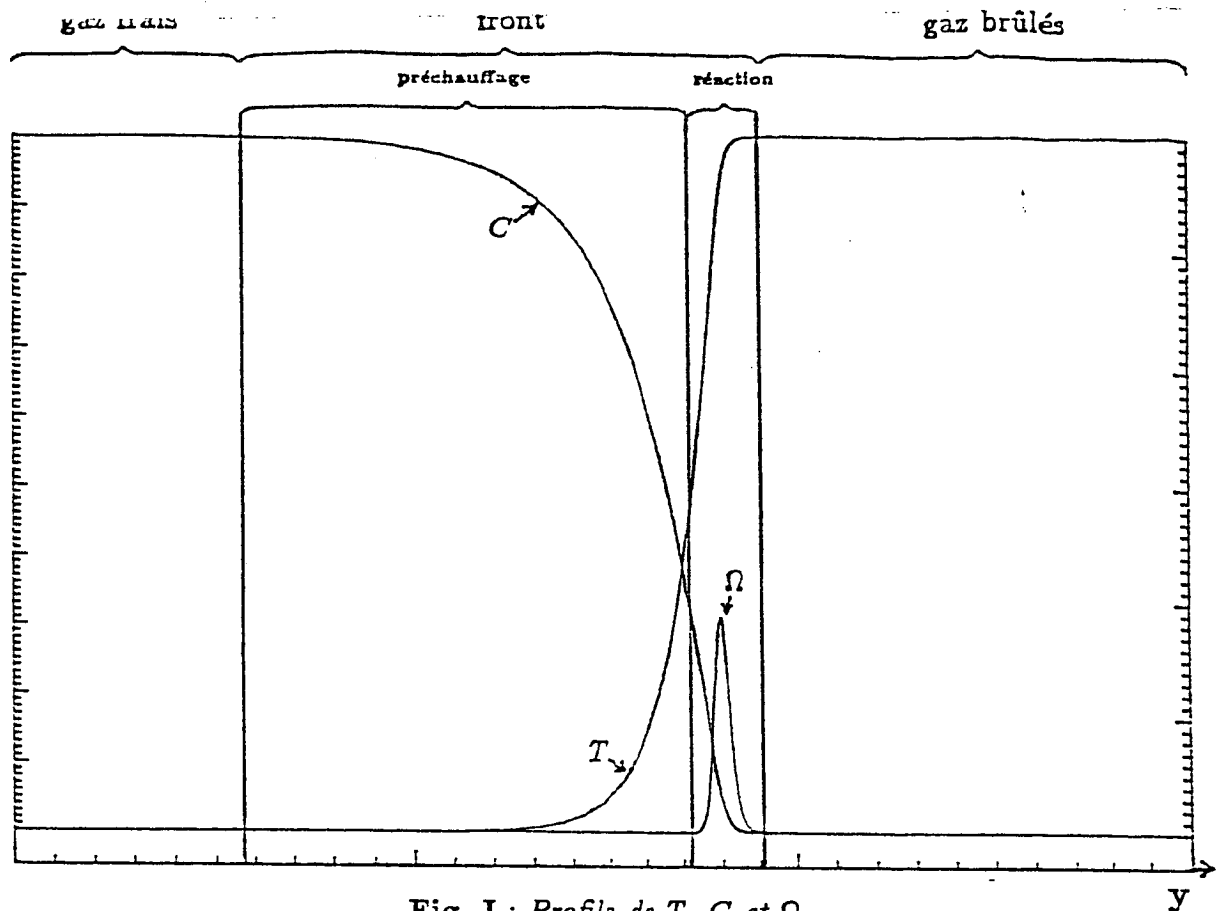


Fig. I : Profils de T , C et Ω

2. Maillage adaptatif

Un phénomène de propagation de flamme présente trois zones bien distinctes, comme le montre un profil typique de température $T(y)$ présenté sur la Figure I.

Dans la zone située à gauche, on trouve le mélange frais; la température est basse et pratiquement constante, la fraction massique pratiquement égale à 1. Sur la droite se trouvent les gaz brûlés, dont la température est élevée et presque constante et la fraction massique pratiquement nulle.

La zone de transition, très mince, est appelée le *front de flamme*. Cette région se subdivise elle-même en deux parties. La flamme s'alimente par diffusion dans la première partie, dite *zone de préchauffage*. La température y a l'allure d'une exponentielle croissante. La réaction chimique proprement dite a lieu dans la deuxième partie, située au voisinage des gaz brûlés, et qui se caractérise par de fortes dérivées secondes.

L'évolution de la flamme, et en particulier sa vitesse de propagation, c'est-à-dire la "vitesse" à laquelle brûle le mélange gazeux, sont déterminés par la structure interne du front de flamme, et notamment par les valeurs de la température et de la fraction massique dans la zone de réaction. Il importe donc de résoudre avec précision le front de flamme et surtout la très mince zone de réaction, sous peine de réaliser une simulation numérique très erronée de ce phénomène de propagation de flamme.

Ceci rend nécessaire l'emploi d'un maillage de calcul non uniforme. En effet, supposons que nous utilisions un maillage régulier. Un maillage relativement grossier représenterait

mal le front de flamme, la densité de points y étant trop faible. Un maillage fin, par contre, impliquerait de sur-mailler les régions où les variables sont constantes, et induirait un gaspillage de temps de calcul.

Pour représenter de façon satisfaisante le phénomène tout en évitant un temps de calcul trop long, il faut donc employer dans la direction y un maillage non-uniforme, assez grossier dans les régions des gaz frais ou brûlés, et fin dans sa partie centrale (comparer les figures II et III et leurs agrandissements sur les figures IV et V; voir également [12]).

Nous devons aussi tenir compte du fait que le front de flamme va se déplacer. Afin de garder celui-ci dans la partie fine, il faudra bouger le maillage au cours du calcul. Pour obtenir un maillage qui reste continuellement adapté aux profils de température et de fraction massique au cours du calcul, nous utiliserons donc deux procédures complémentaires de *maillage adaptatif*, utilisées dans [6] et [7] pour des problèmes monodimensionnels analogues:

- une procédure d'*adaptation statique*, qui construit, à un instant donné, un maillage non uniforme adapté aux profils de température et de fraction massique;
- et une procédure d'*adaptation dynamique*, qui déplace le maillage à chaque pas de temps.

Ces procédures sont détaillées dans les paragraphes suivants.

2.1 L'adaptation dynamique

Le but de cette procédure est de déterminer à chaque pas de temps la vitesse des noeuds du maillage. Pour réaliser cette adaptation dynamique de façon simple et peu coûteuse, nous choisissons de déplacer, à chaque instant t , tous les noeuds à la même vitesse $V(t)$. Ceci revient à observer la propagation de la flamme dans un repère mobile, ayant la vitesse $V(t)$ par rapport au repère fixe. Dans ce repère mobile, lié au maillage, les équations (1) deviennent:

$$\begin{cases} T_t = \Delta T + \Omega(C, T) + V(t)T_y \\ C_t = \frac{1}{Le} \Delta C - \Omega(C, T) + V(t)C_y \end{cases} \quad (6)$$

Ainsi, pour résoudre le système (1) sur un maillage mobile, nous résoudrons simplement (6) dans un repère fixe. Il reste à déterminer la vitesse $V(t)$ à chaque instant.

Pour évaluer $V(t)$, on intègre le système (6) sur tout le domaine de calcul, et on choisit $V(t)$ telle que l'intégrale de la température T dans le domaine de calcul reste constante (en termes plus physiques, ceci revient à garder constante l'énergie thermique contenue dans ce domaine). On veut donc que

$$\frac{d}{dt} \int_0^{X_{long}} \int_0^{Y_{long}} T \, dx \, dy = 0 = \int_0^{X_{long}} \int_0^{Y_{long}} T_t \, dx \, dy \quad (7)$$

Cela revient aussi à considérer que nous cherchons la vitesse $V(t)$ telle que les dérivées en temps moyennes soient nulles. Si nous parvenons à un état "stationnaire" du front, c'est-à-dire si le front ne change plus de forme mais avance seulement (dans les essais numériques,

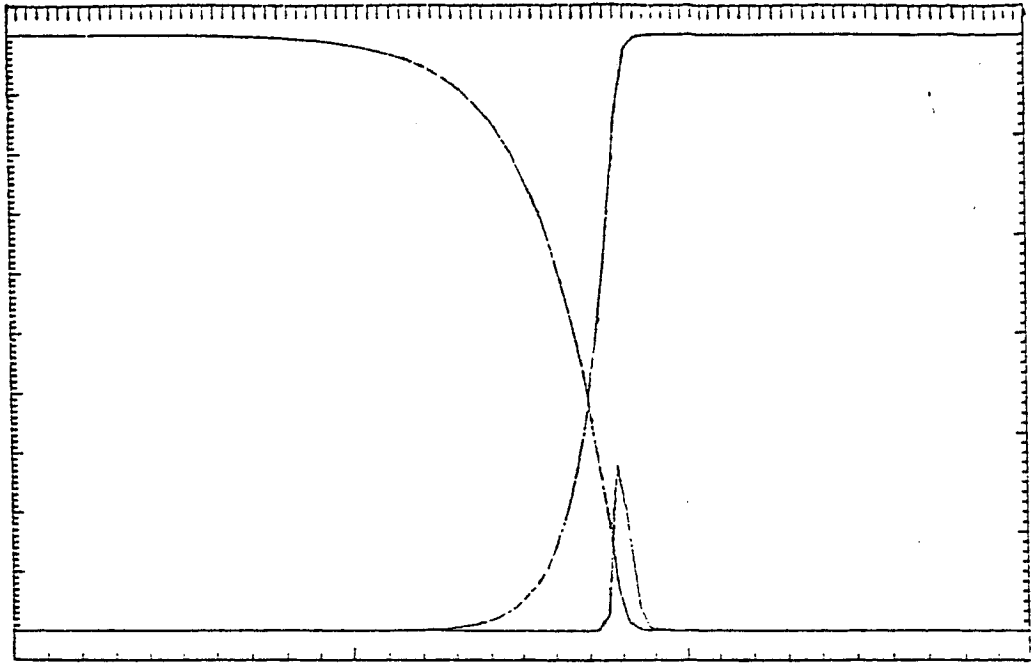


Fig. II : Variables sur un maillage uniforme

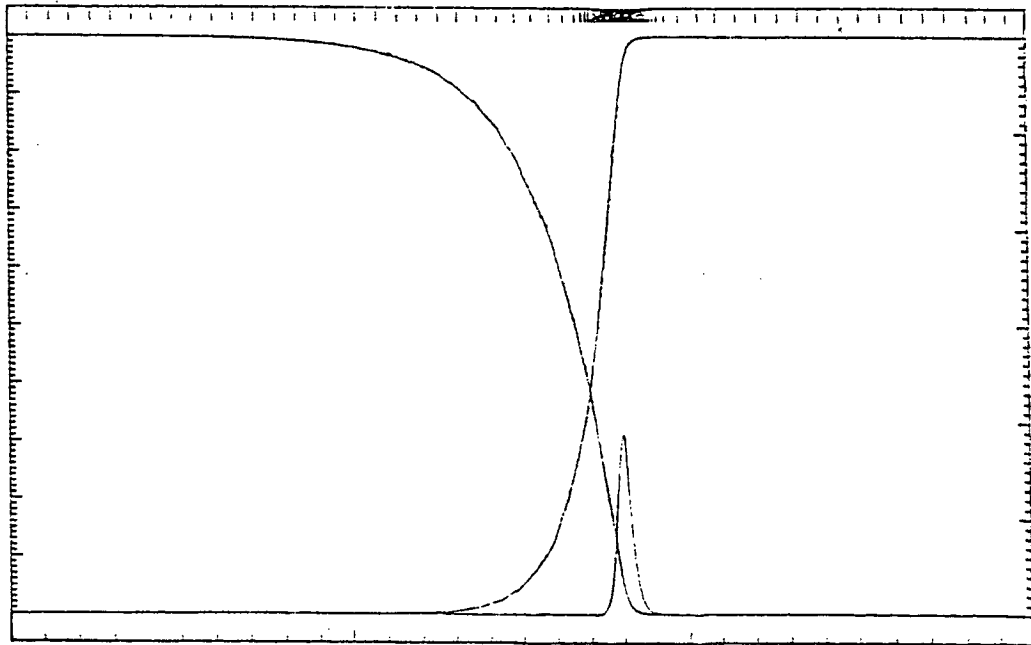


Fig. III : Variables sur un maillage adapté

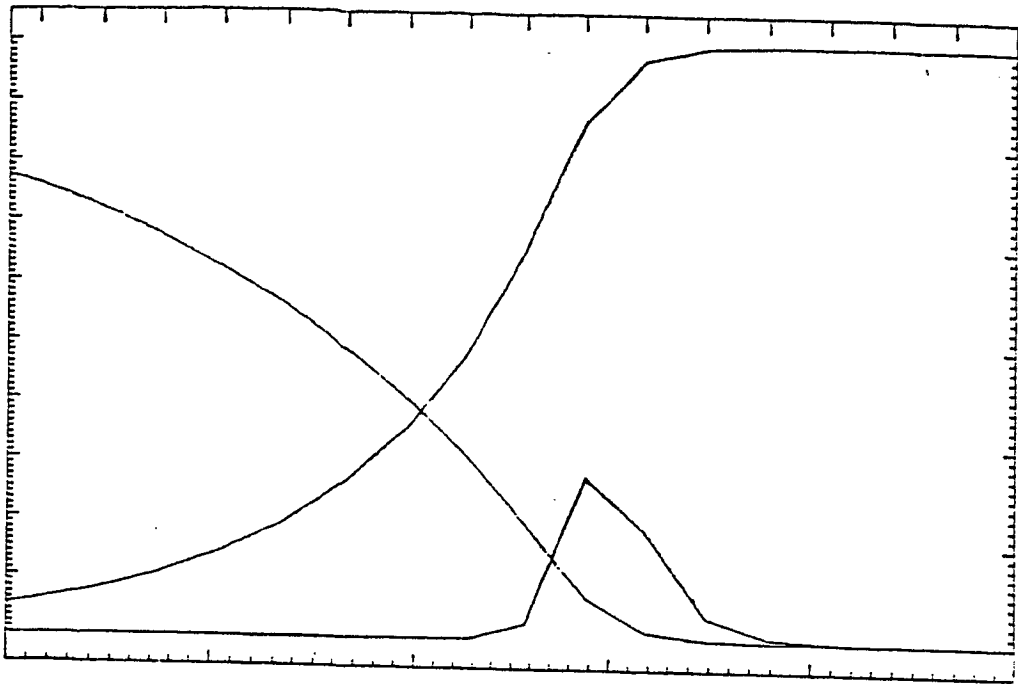


Fig. IV : Variables sur un maillage uniforme dans le front

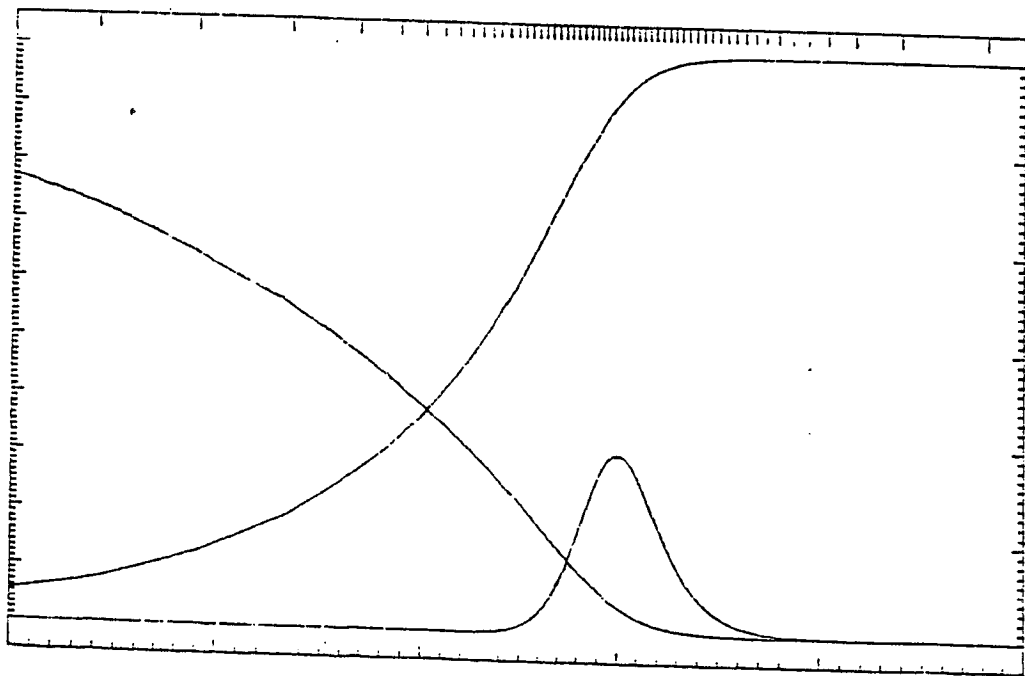


Fig. V : Variables sur un maillage adapté dans le front

ce sera souvent le cas pour l'état asymptotique obtenu pour des grandes valeurs de t), la flamme ne bougerait plus du tout dans le repère mobile lié au maillage. Cette adaptation dynamique présente donc l'avantage de transformer un état d'onde simple (*traveling wave*) en solution stationnaire.

En utilisant les relations (6) et (7), et en supposant que l'extrémité $y = 0$ du domaine est assez éloignée du front de flamme pour pouvoir négliger les dérivées $T_y(x, 0)$, nous obtenons l'expression suivante pour la vitesse du maillage:

$$V(t) = \frac{\int_0^{Y_{long}} \int_0^{X_{long}} \Omega \, dx \, dy}{\int_0^{X_{long}} [T(y=0) - T(y=Y_{long})] \, dx} \quad (8)$$

Nous verrons que ce calcul sera très simplifié grâce à l'utilisation de transformées de Fourier dans la direction de périodicité x .

2.2 L'adaptation statique

Comme nous l'avons expliqué précédemment, il est nécessaire pour obtenir une bonne représentation des variables tout en conservant un coût de calcul raisonnable, d'utiliser un maillage non uniforme adapté aux profils des variables T et Y . La détermination de cette répartition des noeuds adaptée à des profils de variables donnés est l'objet de la procédure d'adaptation statique.

Cette opération est effectuée à plusieurs reprises au cours du calcul. Autrement dit, à différents instants au cours de la simulation, lorsque la solution a beaucoup évolué sur un même maillage, la procédure d'adaptation statique est utilisée pour améliorer la distribution spatiale des noeuds du maillage en l'adaptant aux nouveaux profils de température et de fraction massique.

Nous verrons dans la prochaine section que l'utilisation de transformations de Fourier dans la direction de périodicité x conduit en fait à résoudre un système d'équations *monodimensionnelles*. C'est pourquoi nous présentons maintenant une procédure monodimensionnelle d'adaptation statique, qui fournit une répartition non uniforme des noeuds dans la direction y de la propagation de la flamme.

Cette procédure, appelée à un instant donné t , utilise donc les valeurs "anciennes" $F(y_j)$ des variables, connues aux noeuds y_j du maillage "ancien", et calcule les nouvelles positions Y_j des noeuds, ainsi que les nouvelles valeurs des variables en ces points. Le calcul se poursuit alors sur le nouveau maillage.

La nouvelle distribution des noeuds est déterminée en cherchant à répartir l'erreur du schéma numérique de façon égale entre toutes les mailles. Pour cela, on calcule d'abord l'erreur de troncature du schéma employé pour discrétiser les dérivées premières et secondes en y .

Les dérivées premières en y sont évaluées par la formule:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y_j) \simeq \frac{F(y_{j+1}) - F(y_{j-1})}{y_{j+1} - y_{j-1}} \quad (9)$$

où j est le numéro d'un point du maillage; j est compris entre 1 et N_y , nombre de noeuds dans la direction y . L'erreur de troncature correspondant à la formule précédente est:

$$\frac{\hat{D}_j}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(y_j) + \frac{\tilde{D}_j}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}(y_j)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{D}_j &= y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1} \\ \tilde{D}_j &= (y_{j+1} - y_j)\hat{D}_j + (y_j - y_{j-1})^2 \end{aligned}$$

Les dérivées secondes, quant à elles, sont évaluées comme suit :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \simeq 2 \frac{\frac{F(y_{j+1}) - F(y_j)}{y_{j+1} - y_j} - \frac{F(y_j) - F(y_{j-1})}{y_j - y_{j-1}}}{y_{j+1} - y_{j-1}} \quad (10)$$

L'erreur de troncature est

$$\frac{\hat{D}_j}{3} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}(y_j) + \frac{\tilde{D}_j}{12} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}(y_j)$$

Si le maillage "ancien" est assez régulier, les coefficients \hat{D} sont petits devant les \tilde{D} ($\hat{D}_j = 0$ pour un maillage uniforme). Nous négligerons donc les termes faisant intervenir \hat{D}_j dans le calcul de l'erreur de troncature: $\hat{D}_j \simeq 0$, $\forall j$. Un exemple de la répartition de l'erreur de troncature w_0 sur le maillage "ancien" est représenté sur les Figures VI et VII. La représentation en fonction du numéro de maille j permet d'avoir une idée de cette répartition lorsque l'on donne la même importance à chaque maille.

Puis, pour pouvoir anticiper un peu l'évolution future de la flamme, et justifier l'hypothèse $\hat{D}_j \ll \tilde{D}_j$, on régularise cette erreur w_0 en effectuant une convolution: on évalue l'erreur régularisée w_1 définie par

$$w_1(y) = \frac{\int_0^{Y_{iong}} w_0(u) \Lambda(y-u) du}{\int_0^{Y_{iong}} \Lambda(y-u) du}$$

où la fonction positive à petit support Λ est donnée par:

$$\Lambda(u) = \begin{cases} 1 - \frac{|u|}{H_{reg}} & \text{si } u \in [-H_{reg}; H_{reg}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

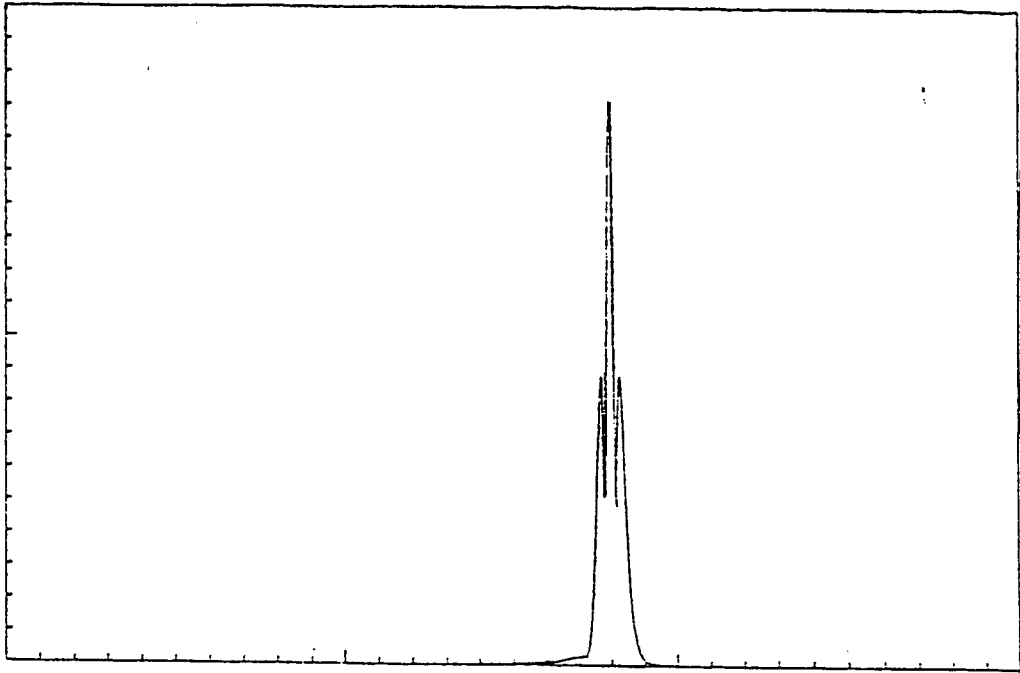


Fig. VI : Erreur de troncature w_0 sur un maillage adapté en fonction de y

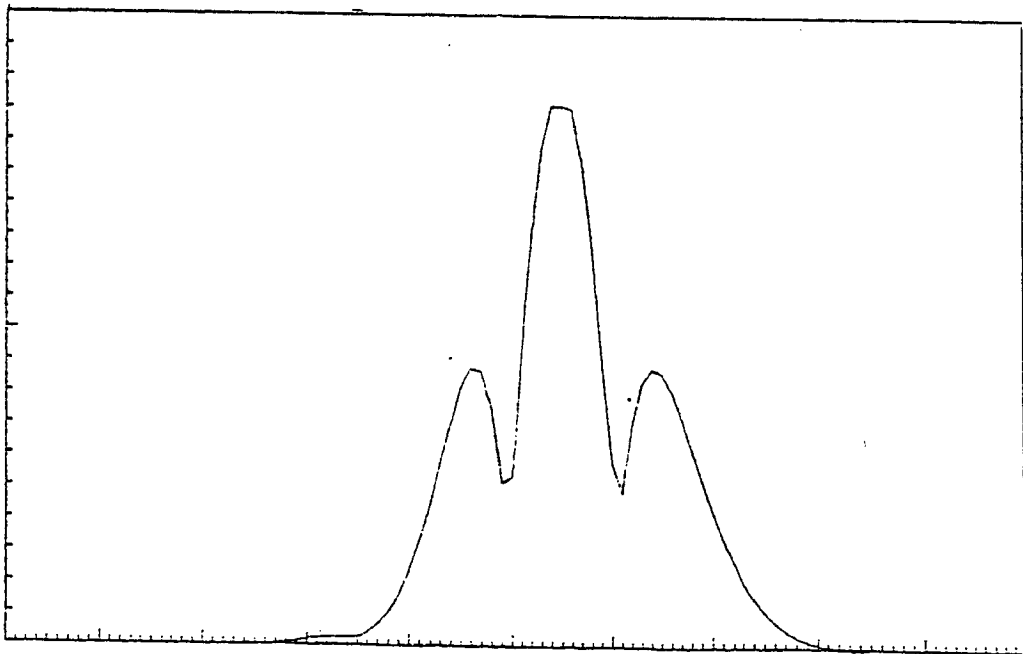


Fig. VII : Erreur de troncature w_0 sur un maillage adapté en fonction de j

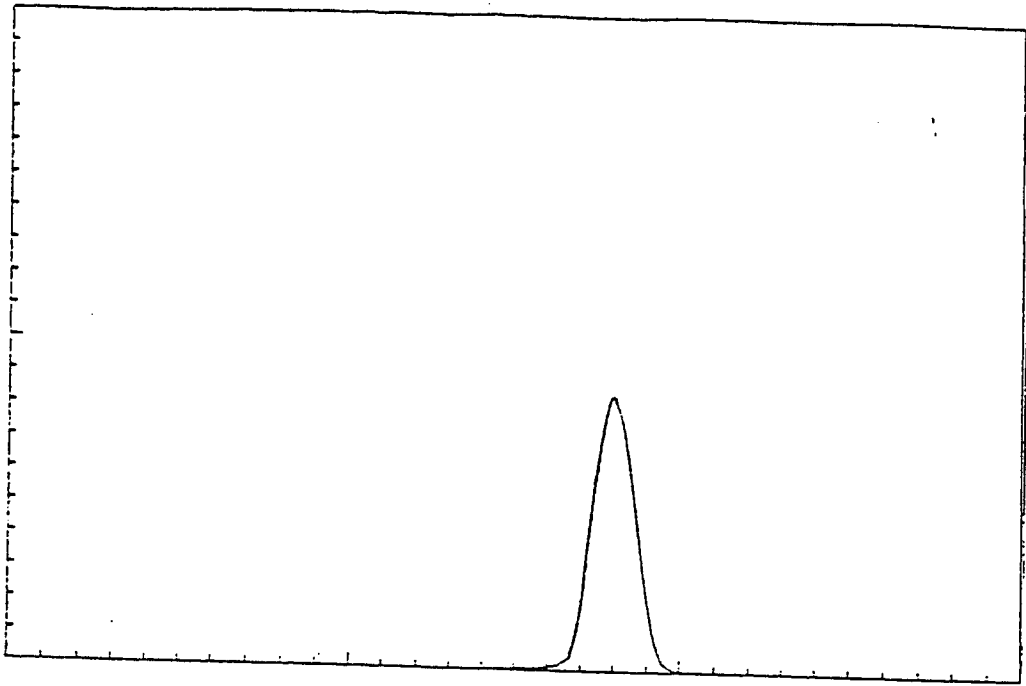


Fig. VIII : Erreur de troncature régularisée w_1 en fonction de y

(Hreg est un réel positif fixé). Dans notre cas, les problèmes de bords ne sont pas importants car l'erreur de troncature y est nulle. C'est pourquoi nous ne traitons pas à part les points $y = 0$ et $y = Y_{long}$.

Comme l'erreur w_1 est nulle dans les régions où les variables sont constantes (voir figure VIII), mais qu'il faut quand même y placer des points, on rajoute à l'erreur une constante, i.e. on calcule "l'erreur augmentée" $w_2(y) = w_1(y) + Constante$ telle que:

$$(1 + \phi) \int_0^{Y_{long}} w_1(y) dy = \int_0^{Y_{long}} w_2(y) dy \quad (11)$$

avec ϕ donné. On peut aussi se dire qu'on rajoute ϕ fois l'erreur moyenne.

Après avoir "régularisé" et "augmenté" la fonction d'erreur, on peut évaluer l'erreur w_2 commise dans chaque maille, ainsi que l'erreur moyenne, les erreurs minimale et maximale. Si ces erreurs minimale et maximale sont suffisamment différentes l'une de l'autre, on modifie effectivement le maillage: on calcule un nouveau maillage Y_j qui équirépartit l'erreur w_2 , c'est-à-dire tel que:

$$\int_{Y_j}^{Y_{j+1}} w_2(y) dy = K, \quad \forall j \in [1, N_y - 1]$$

avec

$$\begin{aligned} Y_1 &= 0 \\ Y_{N_y} &= Y_{long} \end{aligned}$$

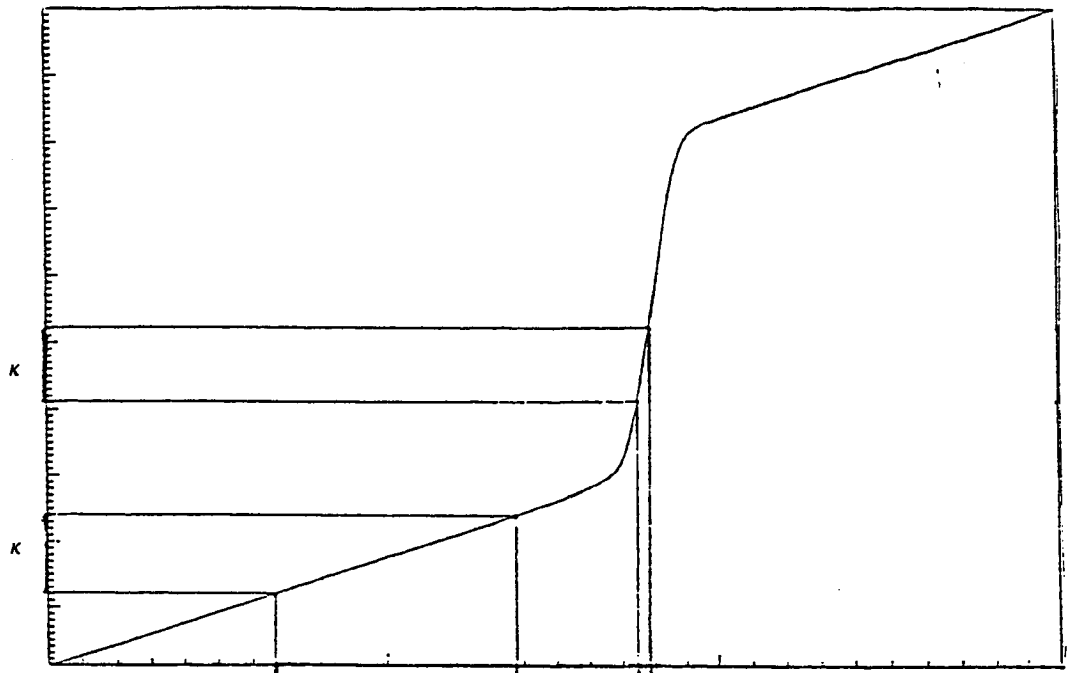


Fig. IX : Erreur intégrée $\int_0^y w_2(u)du$ en fonction de y

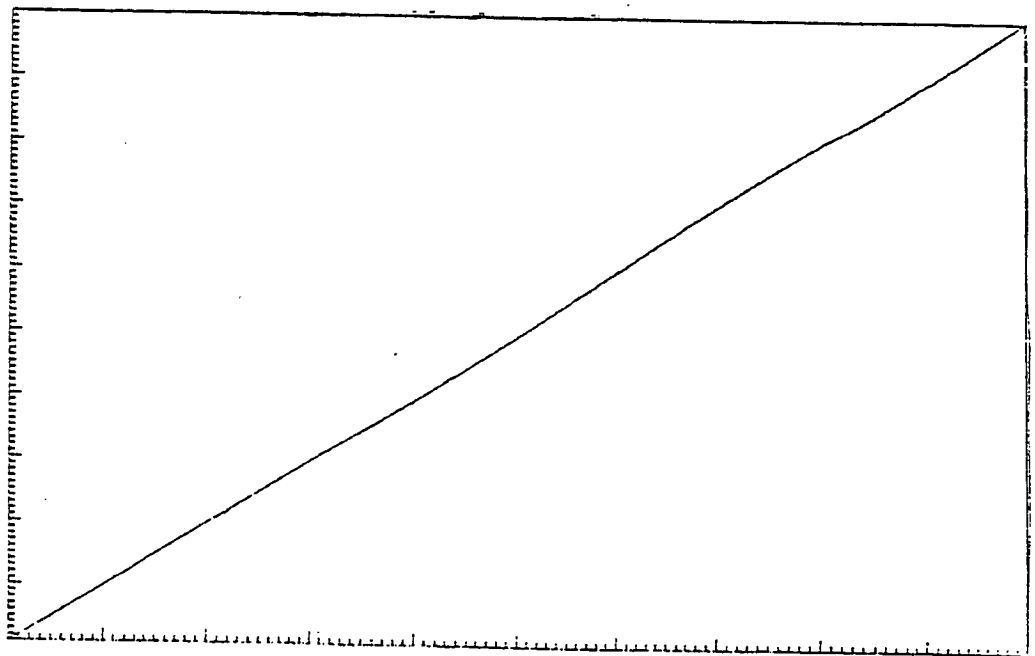


Fig. X : Erreur intégrée $\int_0^Y w_2(u)du$ en fonction de j (sur le nouveau maillage)

(voir figures IX et X).

On pourra remarquer que (11) revient aussi à imposer la longueur l_0 de la maille dans les zones où l'erreur w_1 est nulle.

$$l_0 = \frac{1 + \phi}{\phi} \frac{Y_{long}}{N_y - 1}$$

Pour pouvoir continuer les calculs, il nous faut connaître les variables T et C sur le nouveau maillage. Pour cela, les variables sont interpolées sur l'ancien maillage, soit linéairement (voir [6], [7]), soit conservativement suivant le principe des volumes finis (voir [8]).

3. Utilisation des transformées de Fourier

L'hypothèse de périodicité des variables dans la direction x nous permet d'utiliser une décomposition en modes de Fourier. En utilisant un développement tronqué à l'ordre N_x , on peut écrire:

$$T(x, y, t) = \sum_{k=-N_x+1}^{+N_x-1} T_k(y, t) \cdot e^{i \cdot k \cdot \phi \cdot x} \quad (12)$$

$$C(x, y, t) = \sum_{k=-N_x+1}^{+N_x-1} C_k(y, t) \cdot e^{i \cdot k \cdot \phi \cdot x} \quad (13)$$

avec

$$\phi = \frac{2\pi}{X_{long}}$$

Les équations d'évolution des coefficients de Fourier $T_k(y, t)$ et $C_k(y, t)$ s'écrivent alors:

$$\begin{cases} (T_k)_t = -k^2(T_k) + (T_k)_{yy} + \Omega_k + V(t)(T_k)_y \\ (C_k)_t = \frac{1}{Le}(-k^2(C_k) + (C_k)_{yy}) - \Omega_k + V(t)(C_k)_y \end{cases} \quad (14)$$

pour k variant de 0 à N_x . Dans ces relations, Ω_k désigne le k^{ieme} mode de Fourier de Ω , qui est calculé par:

$$\Omega_k(y, t) = \frac{1}{N_x} \cdot \sum_{j=0}^{N_x-1} \Omega_j(y, t) \cdot e^{-i \cdot \frac{2\pi}{N_x} \cdot j \cdot k},$$

les valeurs $\Omega_j(y, t)$, approximations de $\Omega[T(j\Delta x, y, t), C(j\Delta x, y, t)]$ s'obtenant par les formules (2) et (12)-(13).

L'utilisation de la transformation de Fourier nous ramène donc à un système d'équations monodimensionnelles instationnaires pour les coefficients $T_k(y, t)$, $C_k(y, t)$. (En particulier, la procédure monodimensionnelle d'adaptation statique présentée au paragraphe

précédent est appliquée en utilisant pour l'erreur w_0 la somme des erreurs réalisées sur les coefficients de Fourier T_k et Y_k).

Pour implémenter cette méthode, nous aurons à effectuer plusieurs transformations de Fourier discrètes, pour évaluer les valeurs T_j et C_j , puis les modes de Fourier Ω_k . A chaque fois, nous avons N_y transformées de Fourier discrètes indépendantes d'ordre N_x à effectuer, une par point en y . Nous renvoyons le lecteur à [3], [4], [14], [15] pour plus de détails sur les transformations de Fourier discrètes (12) et (13), et sur les algorithmes de transformées rapides. Dans cette étude, nous employons l'algorithme proposé par Temperton [15], qui, au lieu de vectoriser chaque transformation d'ordre N_x , vectorise sur le nombre N_y de transformations. Ceci permet d'utiliser des boucles vectorisées qui traitent des vecteurs de taille N_y ($N_y \simeq 100$) alors que la vectorisation de chaque transformée discrète porterait sur des vecteurs beaucoup plus courts (par le principe même de la transformation rapide), et conduirait sur un Cray1-S à une puissance de calcul très inférieure à la puissance nominale.

• Les transformées de Fourier nous permettent donc:

- de découpler partiellement les différents modes, qui sont les fonctions propres de l'opérateur $\partial^2/\partial x^2$
- de disposer d'une procédure très rapide et très précise sur le Cray1-S
- d'éviter de faire des différences finies en x
- de n'avoir aucune intégrale en x à calculer pour estimer la vitesse $V(t)$. En effet, les intégrales suivant x correspondent au mode 0, et l'expression (8) de la vitesse du maillage devient:

$$V(t) = [(T_0)(y=0) - (T_0)(y=Y_{long})]^{-1} \int_0^{Y_{long}} (\Omega_0) dy$$

• Mais les transformées de Fourier nous imposent un maillage uniforme en x de pas $\Delta x = X_{long}/N_x$; Le nombre de modes N_x doit être choisi en fonction de la précision désirée.

4. Discrétisation en y et t

Nous utilisons un schéma d'intégration temporelle où les termes de diffusion sont calculés implicitement par un θ -schéma, dans le but d'avoir une condition de stabilité moins contraignante que pour un schéma explicite. De plus, nous employons une formulation en δ -schéma, plus favorable du point de vue de la propagation des erreurs d'arrondi au cours du calcul: à chaque pas de temps t^n , on calcule la différence entre les valeurs des variables aux temps t^{n+1} et t^n , au lieu de calculer directement les nouvelles variables au temps t^{n+1} .

En notant $(T_k)^n$ le k^{ieme} mode de Fourier au temps t^n , l'équation en T du système (14) devient:

$$\left[1 + \theta \Delta t \left(k^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \left[(T_k)^{n+1} - (T_k)^n \right] = (1 - \theta) \Delta t \left[-k^2 (T_k)^n + \frac{\partial^2 (T_k)^n}{\partial y^2} + (\Omega_k)^n + V^n \frac{\partial (T_k)^n}{\partial y} \right]$$

où $(T_k)^r$ est le $k^{i\text{eme}}$ mode de Fourier de T au temps t_r . Le schéma est totalement explicite si θ est nul, et traite les termes de diffusion de façon implicite si θ est égal à un. Les dérivées spatiales en y sont évaluées en utilisant les formules déjà indiquées (9) et (10). Nous renvoyons le lecteur à l'Appendice pour l'expression complète du schéma numérique totalement discrétisé. En écrivant ce schéma sous la forme:

$$A [(T_k)^{n+1} - (T_k)^n] = \Delta t \text{Fct}(T^n, C^n)$$

on observe que la matrice tridiagonale A ne dépend pas du temps. Ceci permet de ne recalculer la matrice et sa factorisation qu'à chaque changement de maillage.

D'un point de vue pratique, on a à chaque pas de temps $2N_x$ systèmes tridiagonaux à résoudre, un pour chaque coefficient de Fourier T_k, C_k . Ces $2N_x$ systèmes sont résolus en parallèle en utilisant une procédure disponible sur le Cray1-S.

L'étude mathématique du système parabolique (1) montre que les variables T et Y satisfont à chaque instant les inégalités $0 \leq C \leq 1$ et $0 \leq T$, évidentes du point de vue physique (voir [1]). Ces inégalités restent bien sûr valables pour les modes de Fourier C_0 et T_0 . Comme l'apparition au cours du calcul de fractions massiques ou de températures négatives se traduit presque toujours par des instabilités numériques, il importe que le schéma respecte les inégalités $0 \leq C_0 \leq 1$ et $0 \leq T_0$. A chaque adaptation statique du maillage, le pas de temps Δt est donc calculé pour que le schéma soit positif pour T et C , c'est-à-dire que les valeurs $(T_k)^{n+1}$ et $(C_k)^{n+1}$ fournies par le schéma soient nécessairement positives dès que $(T_k)^n$ et $(C_k)^n$ le sont. On vérifie d'ailleurs que les contraintes sur le pas de temps Δt qui assurent la positivité du schéma sont plus sévères que celles qui garantissent sa stabilité (voir l'Appendice).

Nous présentons dans la section suivante quelques résultats obtenus avec ce schéma numérique. Pour étudier la convergence de la solution vers un état stationnaire au cours du temps, nous utiliserons la quantité

$$\frac{1}{\Delta t} \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x \\ 1 \leq j \leq N_y}} \left(\left| (T_k)^{n+1}(i, j) - (T_k)^n(i, j) \right|, \left| (C_k)^{n+1}(i, j) - (C_k)^n(i, j) \right| \right)$$

appelée le *résidu* au temps t_n . Cette valeur est une approximation du maximum des dérivées en temps des différents modes de T et C dans tout le domaine.

IV. RESULTATS

1. Flamme plane

Dans un premier temps, nous avons choisi des paramètres correspondant au cas d'une flamme plane stable. Les variables sont initialisées de telle façon qu'elles soient constantes dans la direction x . Ces calculs ont déjà fait l'objet de plusieurs travaux (voir [6], [7], [8], [9], [12], [13]) et sont présentés ici au titre de tests pour le code numérique.

La flamme plane est bien simulée pour différents nombre de Lewis et différentes énergies d'activation. En particulier, nous avons pu constater que le taux de réaction restait dans la partie finement maillée. Ceci permet de penser que la vitesse de flamme est calculée de façon satisfaisante et donc que l'adaptation dynamique du maillage est bien réalisée et efficace.

Tous les calculs sont faits avec $\alpha = 0.8$, valeur assez proche des cas réels, et avec $X_{long} = 2\pi$, $Y_{long} = 30$, $N_x = 2$, $N_y = 100$, $\theta = 0.75$, $\phi = 1.02$ et $H_{reg} = 0.9$, avec une interpolation conservative.

Les cas testés sont ceux proposés dans [9]. Pour chaque cas on donne la valeur de la vitesse de flamme fournie par l'analyse asymptotique pour les grandes énergies d'activation, ainsi que la valeur numérique et le résidu.

(a) $Le = 0.5$, $\beta = 10$.

La vitesse asymptotique est : $V \simeq 0.946$, la vitesse calculée est : $V = 0.959$ avec un résidu de 10^{-6} .

(b) $Le = 0.5$, $\beta = 20$.

La vitesse asymptotique est : $V \simeq 0.973$, la vitesse calculée est : $V = 0.978$ avec un résidu de 10^{-6} .

(c) $Le = 1$, $\beta = 10$.

La vitesse asymptotique est : $V \simeq 0.9$, la vitesse calculée est : $V = 0.918$ avec un résidu de 10^{-8} .

(d) $Le = 1$, $\beta = 20$.

La vitesse asymptotique est : $V \simeq 0.949$, la vitesse calculée est : $V = 0.954$ avec un résidu de 10^{-8} .

(e) $Le = 2$, $\beta = 10$.

La vitesse asymptotique est : $V \simeq 0.818$, la vitesse calculée est : $V = 0.850$ avec un résidu de 10^{-8} .

(f) $Le = 2$, $\beta = 20$.

La vitesse asymptotique est : $V \simeq 0.904$; on observe numériquement une instabilité de vitesse prévue par l'analyse théorique (voir [11]).

2. Flammes plissées

2.1 Relaxation d'une flamme plissée

Comme nous l'avons vu au II-3, la flamme plissée n'est stable que pour certains choix des paramètres.

Nous avons choisi de prendre ici $Le = 0.7$, $\beta = 10$, $\alpha = 0.8$, $X_{long} = 2\pi$, $Y_{long} = 30$, $N_y = 100$ et $N_x = 60$. Plusieurs essais effectués avec des nombres plus faibles de modes de Fourier ont montré que $N_x = 60$ modes sont nécessaires pour obtenir une bonne

représentation des phénomènes. Nous avons de plus initialisé la flamme avec une perturbation $A \sin(6\pi x/X_{long})$. La flamme est donc plissée en forme de sinus dans la direction x .

Les résultats montrent que la flamme s'est relaxée vers une flamme plane, comme prévu par la théorie (voir figures XI à XV).

2.2 Une flamme cellulaire

Dans ce cas, nous avons simplement changé X_{long} qui devient $3\lambda_0$. C'est-à-dire $X_{long} = 18\sqrt{2}\pi$.

Les résultats font effectivement apparaître que l'amplitude des plissements du front de flamme augmente au cours du temps. La solution converge vers un état stationnaire cellulaire. On observe en particulier que les pics des cellules sont tournés vers les gaz brûlés, et que les régions du front tournées vers les gaz brûlés sont moins chaudes que les parties tournées vers le mélange non brûlé, ainsi que le prévoit l'analyse asymptotique (voir [10]) (voir figures XVI à XXIII).

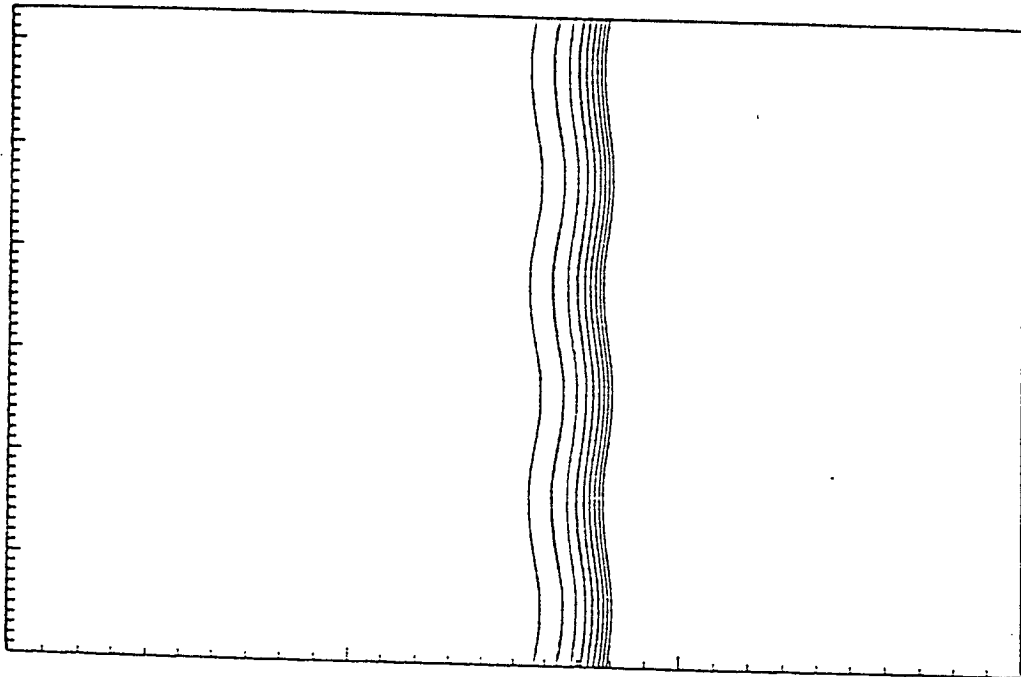


Fig. XI : Isovaleurs dans le domaine entier à $t_0 = 0.0$

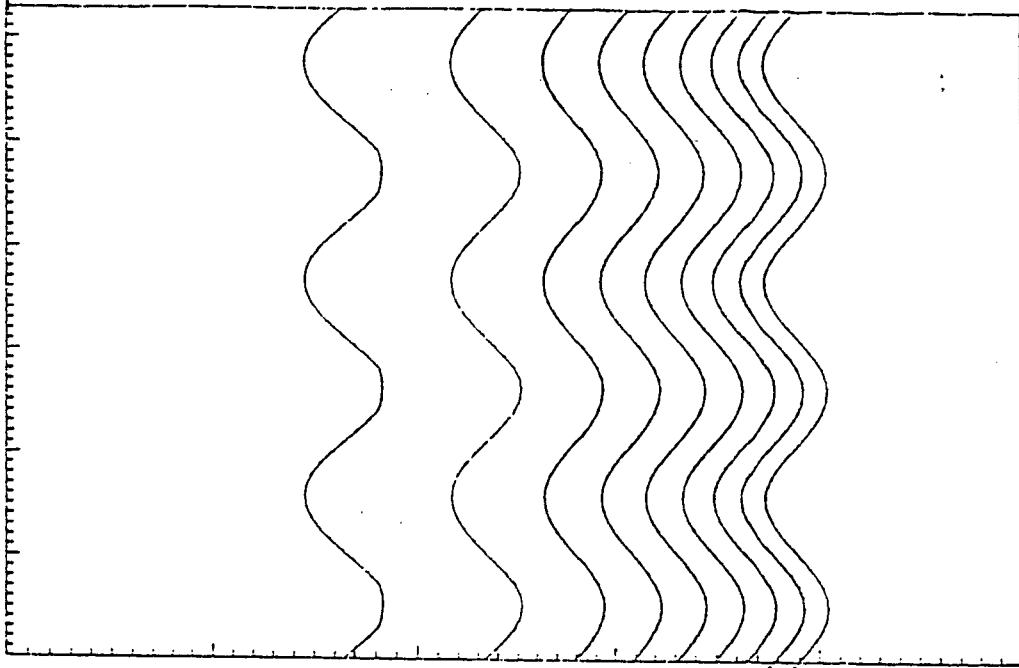


Fig. XII : Isovaleurs dans le front de flamme au même temps

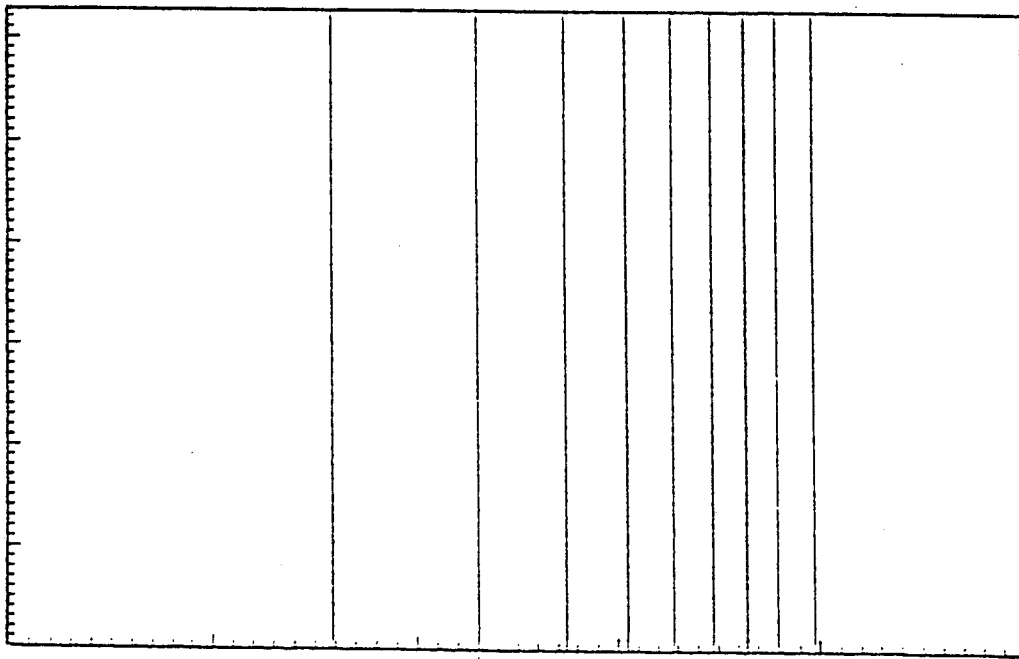


Fig. XIII : Isovaleurs dans le front de flamme à $t_{10000} = 5.1$

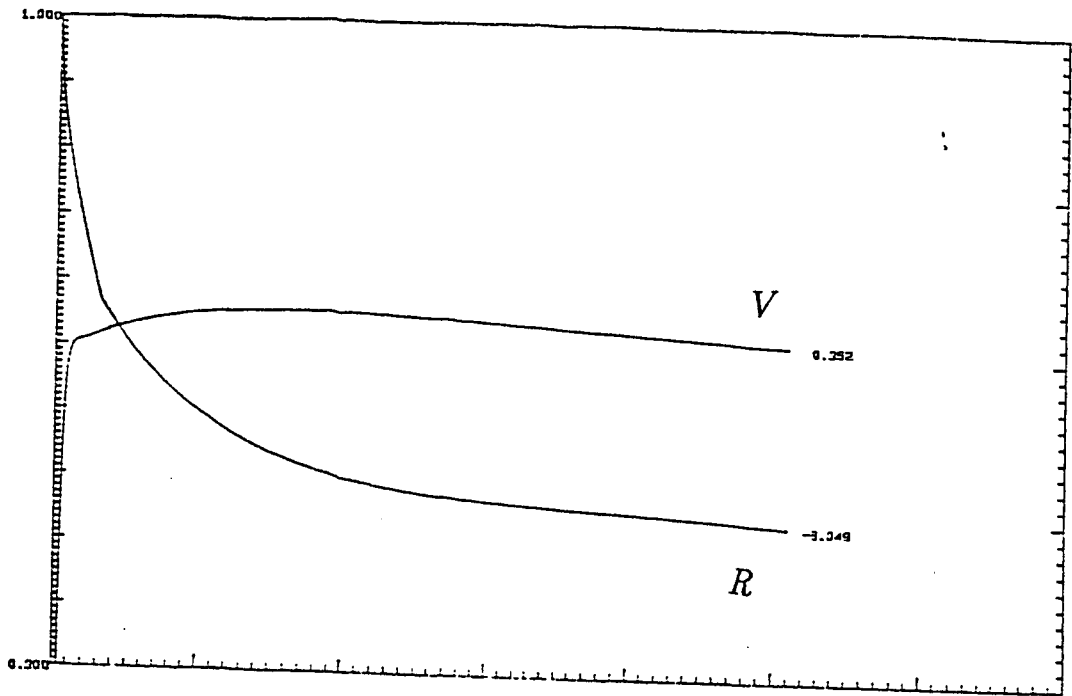


Fig. XIV : *Vitesse et Résidu*

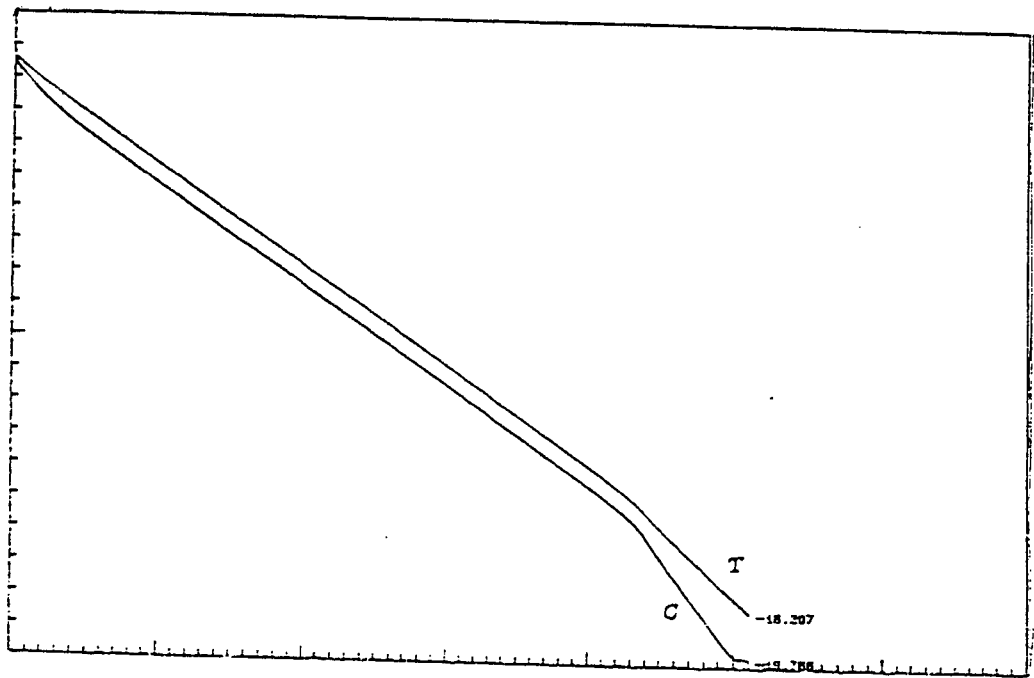


Fig. XV : *Amplitudes de T et C*

$$Le = 0.7, \beta = 10, X_{long} = 18\sqrt{2}\pi, \theta = 0.75, H_{reg} = 3.0, \phi = 0.4$$

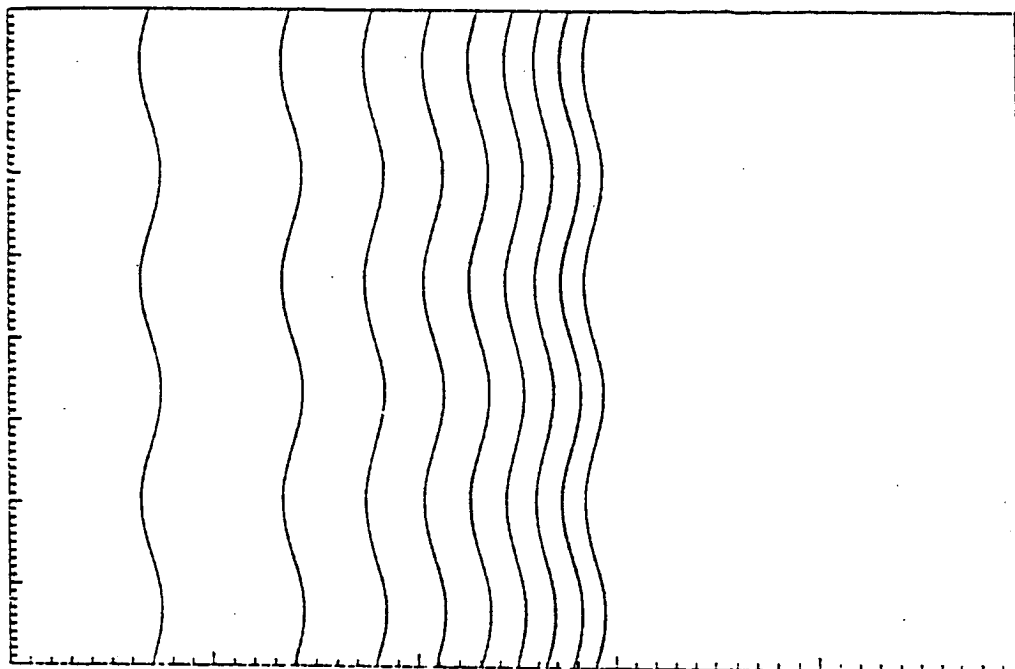


Fig. XVI : Isovaleurs dans le front à $t_0 = 0.0$

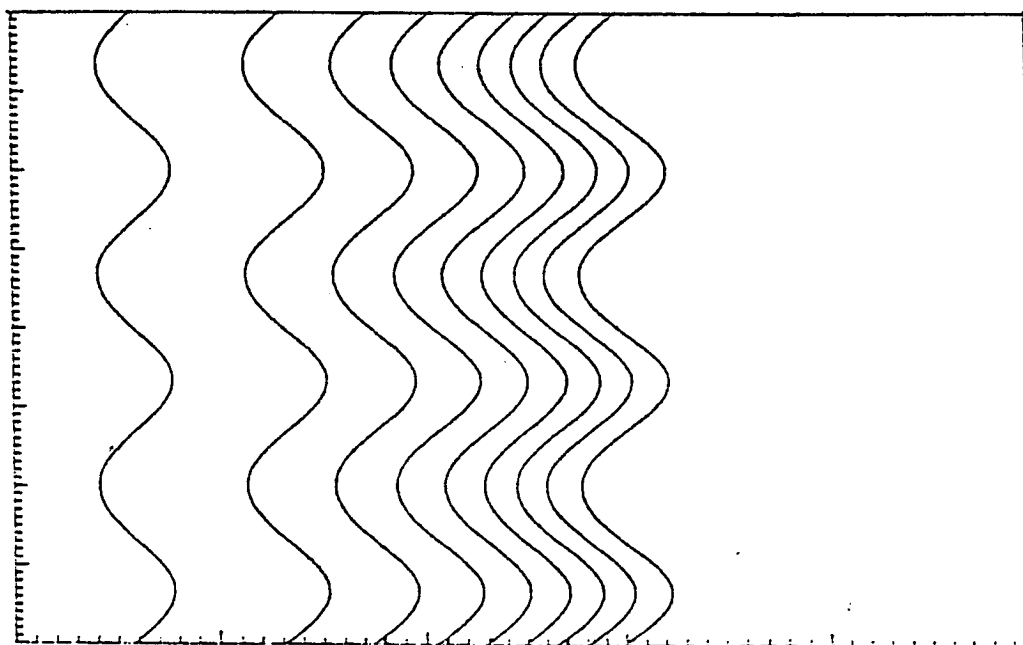


Fig. XVII : Isovaleurs dans le front à $t_{20000} = 60.87$

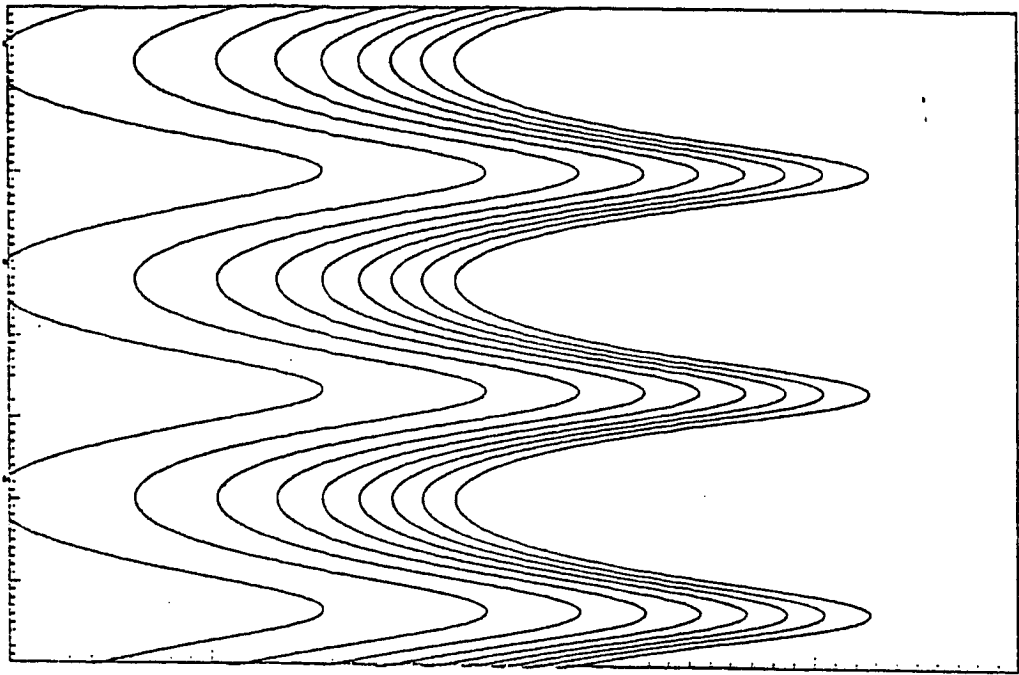


Fig. XVIII : Isovaleurs dans le front à $t_{40000} = 126.0$

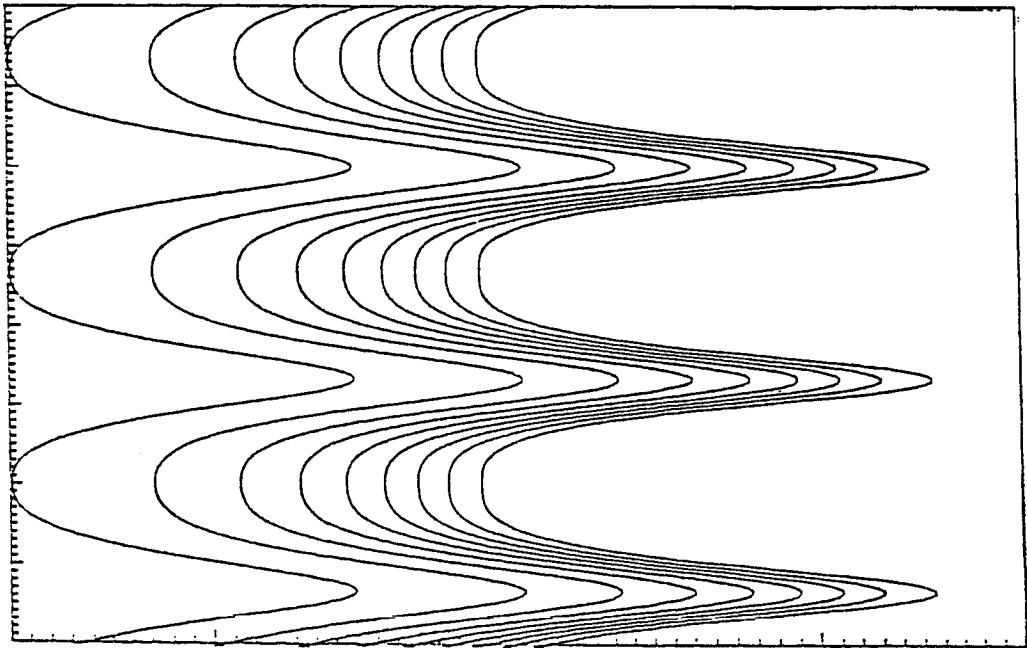


Fig. XIX : Isovaleurs dans le front à $t_{60000} = 208.3$

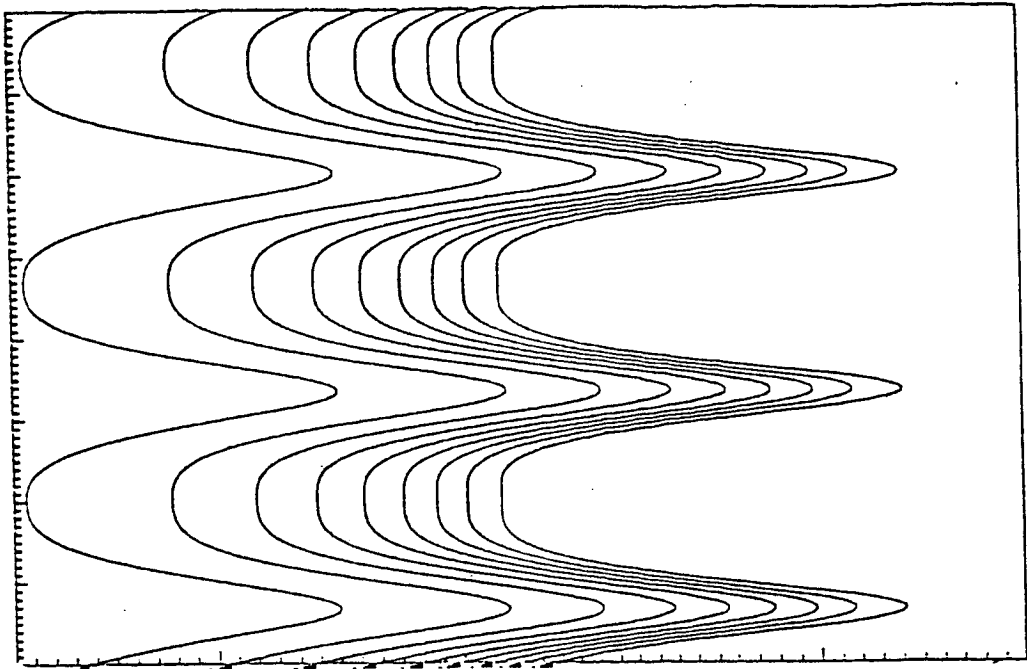


Fig. XX : Isovaleurs dans le front à $t_{80000} = 282.8$

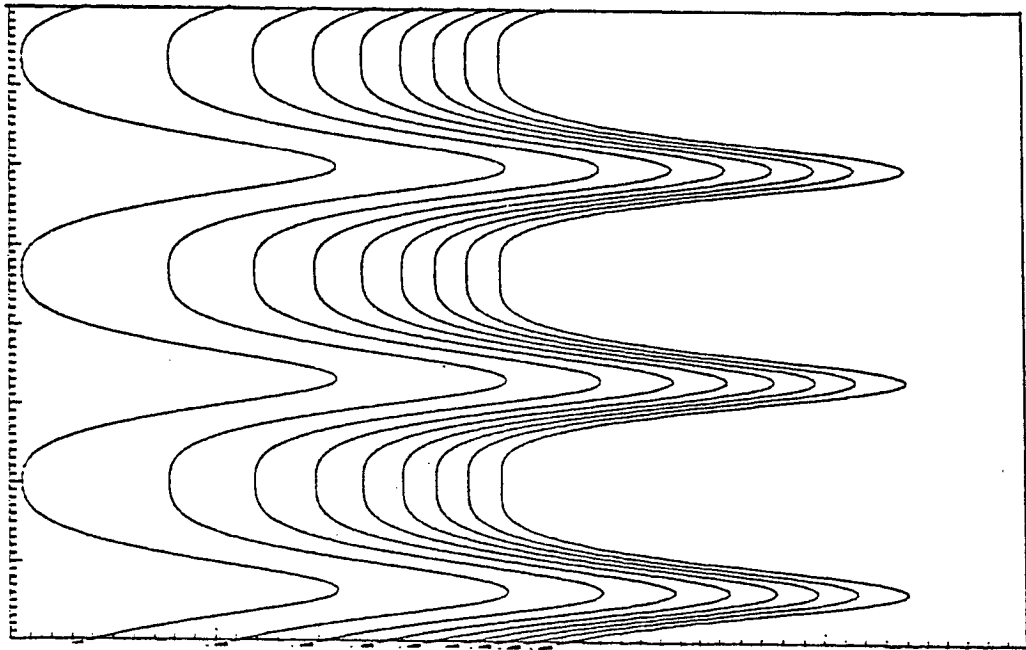


Fig. XXI : Isovaleurs dans le front à $t_{176431} = 641.9$

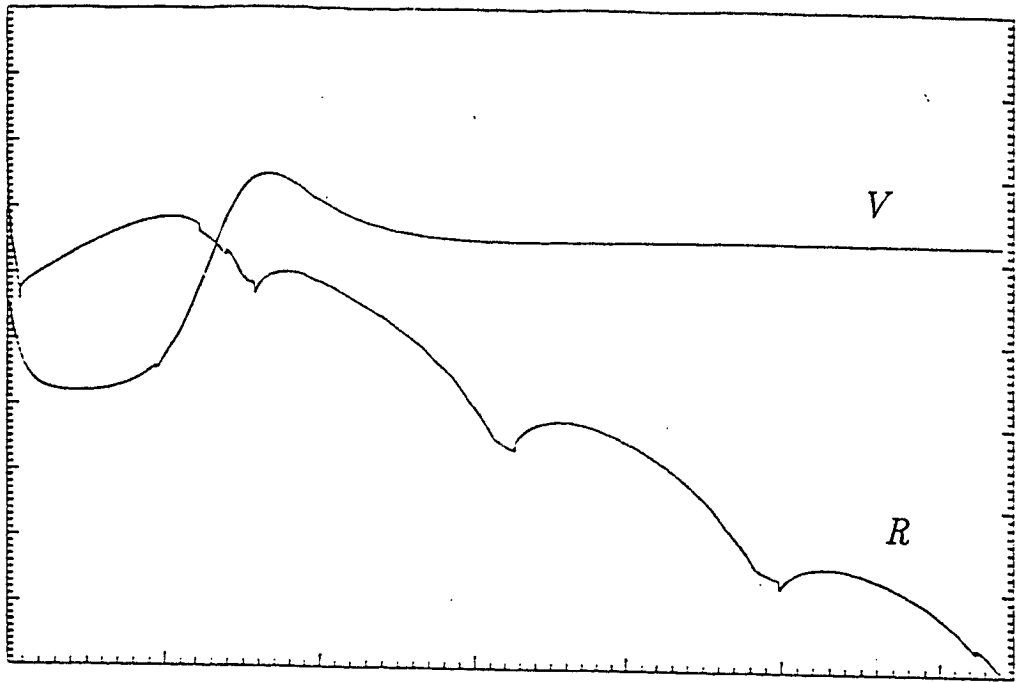


Fig. XXII : *Vitesse et Résidu*

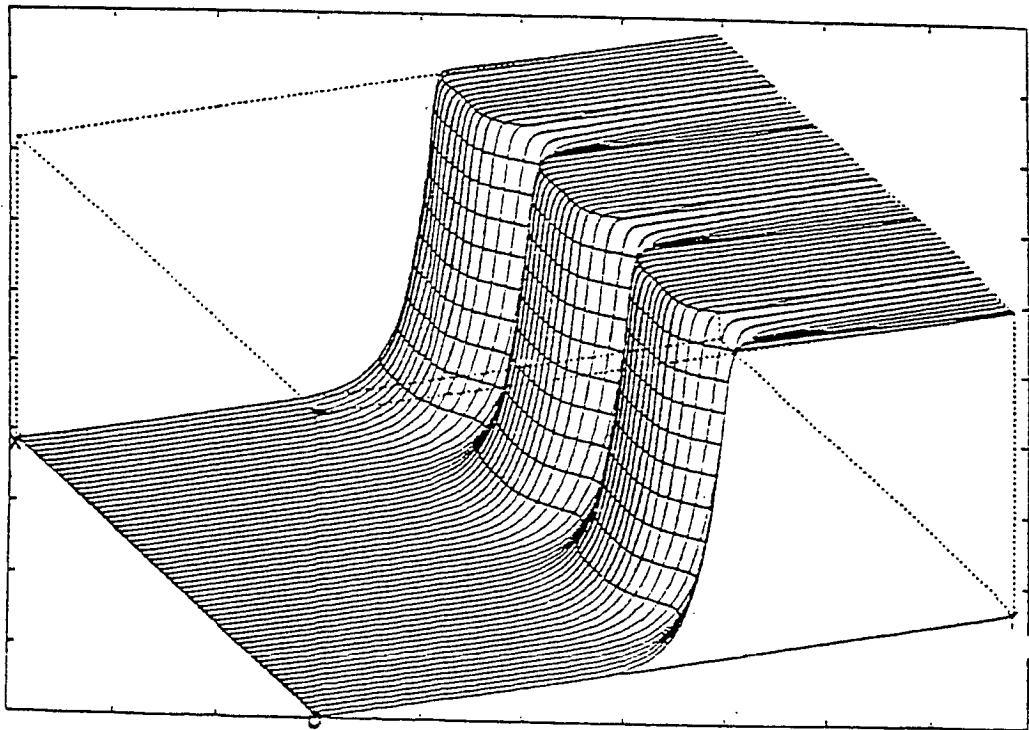


Fig. XXIII : *Température en 3D à $t_{176431} = 641.9$*

V. CONCLUSION

De par leur intérêt théorique, les instabilités thermo-diffusives ont attiré l'attention d'un grand nombre de chercheurs. Cependant jusqu'ici ce problème n'a été abordé qu'à travers l'approximation de l'énergie d'activation infinie et de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky. Dans ce travail, on utilise le modèle thermo-diffusif avec une énergie d'activation finie et on lui applique une méthode numérique mise au point pour le calcul de flammes plissées.

Cette méthode utilise une décomposition en modes de Fourier dans le sens transverse à la propagation de la flamme et une discrétisation par différence finies dans le sens de la propagation de la flamme. La discrétisation par différences finies est rendue efficace par l'utilisation d'un algorithme de maillage adaptatif déjà utilisé avec succès pour d'autres études [6], [7]. D'autre part la méthode utilise de façon intensive les possibilités des ordinateurs vectoriels (utilisation de FFT hautement vectorisées, résolution de système tridiagonaux en parallèle).

L'efficacité de cette méthode numérique est démontrée par plusieurs essais numériques, et notamment par le calcul d'une flamme plissée stationnaire qui semble être réalisé ici pour la première fois.

APPENDICE

Pour un point y_j intérieur au domaine, notons $\Delta^+ = y_{j+1} - y_j$ et $\Delta^- = y_j - y_{j-1}$. Les formules utilisées pour les dérivées spatiales s'écrivent alors:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \approx \frac{F_{j+1} - F_{j-1}}{\Delta^+ + \Delta^-}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \approx 2 \frac{\Delta^- (F_{j+1} - F_j) - \Delta^+ (F_j - F_{j-1})}{\Delta^+ \Delta^- (\Delta^+ + \Delta^-)}$$

L'équation donnant le mode C_k s'écrit alors:

$$\begin{aligned} & (C_k)_{j+1}^{n+1} \left[-\frac{\theta \Delta t}{Le} \frac{2}{\Delta^+ (\Delta^+ + \Delta^-)} \right] \\ + & (C_k)_j^{n+1} \left[1 + \frac{\theta \Delta t}{Le} \left(k^2 + \frac{2}{\Delta^+ \Delta^-} \right) \right] \\ + & (C_k)_{j-1}^{n+1} \left[-\frac{\theta \Delta t}{Le} \frac{2}{\Delta^- (\Delta^+ + \Delta^-)} \right] \\ = & (C_k)_{j+1}^n \left[\frac{\Delta t (1-\theta)}{Le} \frac{2}{\Delta^+ (\Delta^+ + \Delta^-)} + \Delta t V^n \frac{1}{\Delta^+ + \Delta^-} \right] \\ + & (C_k)_j^n \left[1 - \frac{\Delta t (1-\theta)}{Le} \left(k^2 + \frac{2}{\Delta^+ \Delta^-} \right) \right] \\ + & (C_k)_{j-1}^n \left[\frac{\Delta t (1-\theta)}{Le} \frac{2}{\Delta^- (\Delta^+ + \Delta^-)} - \Delta t V^n \frac{1}{\Delta^+ + \Delta^-} \right] \\ - & (\Omega_k)_j^n \Delta t \end{aligned} \quad (15)$$

1. Etude de la positivité du schéma

Intéressons nous à la positivité du schéma donnant le mode 0 de la fraction massique C_0 .

La matrice tridiagonale A correspondant à la partie implicite est une "M-matrice" (i.e. tous les éléments de A^{-1} sont positifs). En effet, les éléments non diagonaux de A sont négatifs, les éléments diagonaux sont positifs et la diagonale est strictement dominante.

D'autre part, le coefficient de $(C_0)_{j-1}^n$ est toujours positif. Le coefficient de $(C_k)_{j+1}^n$ est positif sous la condition (du type "Reynolds de maille"):

$$\Delta^+ \leq -\frac{2(1-\theta)}{V^n Le} = \frac{2(1-\theta)}{|V^n| Le} \quad (16)$$

Enfin, puisque le terme de réaction Ω est proportionnel à la fraction massique d'après (2), on peut poser

$$(\Omega_0)_j^n = \frac{\beta^2}{2Le} (C_0)_j^n \zeta$$

le terme ζ représentant la partie dépendant de la température. Le coefficient de $(C_k)_j^n$ est alors positif si

$$\Delta t \leq \frac{2Le\Delta^+\Delta^-}{2(1-\theta)(2+k^2\Delta^+\Delta^-) + \beta^2\zeta\Delta^+\Delta^-} \quad (17)$$

Les conditions (16) et (17) sont donc suffisantes pour assurer la positivité du mode C_0 à chaque instant (dans (17), on peut prendre pour ζ la valeur maximale de $\exp\left(\frac{-\beta(1-T)}{1-\alpha(1-T)}\right)$ sur le domaine). On obtient très facilement des conditions similaires pour que le schéma préserve les inégalités $C_0 \leq 1$ et $0 \leq T_0$.

2. Etude de la stabilité du schéma

Etudions la stabilité linéaire du schéma (15) donnant les modes de Fourier de la fraction massique. On supposera pour ce calcul que le maillage est uniforme de pas Δy et on approximera encore $(\Omega_k)_j^n$ par $\frac{\beta^2}{2Le} (C_k)_j^n \zeta$.

En injectant dans le schéma (15) un "mode de Fourier" (au sens de l'analyse de Fourier d'un schéma de différences finies) $(C_k)_j^n = g_\psi^n e^{ij\psi}$, on obtient:

$$\begin{aligned} & g_\psi e^{i\psi} \\ + & g_\psi \left[1 + \frac{\theta\Delta t}{Le} \left(k^2 + \frac{2}{\Delta y^2} \right) \right] \\ + & g_\psi e^{-i\psi} \left[-\frac{\theta\Delta t}{Le\Delta y^2} \right] \\ = & e^{i\psi} \left[\frac{\Delta t(1-\theta)}{Le\Delta y^2} + \frac{\Delta t V^n}{2\Delta y} \right] \\ + & \left[1 - \frac{\Delta t(1-\theta)}{Le} \left(k^2 + \frac{2}{\Delta y^2} \right) - \frac{\beta^2\zeta\Delta t}{2Le} \right] \\ + & e^{-i\psi} \left[\frac{\Delta t(1-\theta)}{Le\Delta y^2} - \frac{\Delta t V^n}{2\Delta y} \right] \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$g_{\psi} = \frac{1 - \frac{\beta^2 \zeta \Delta t}{2Le} - \frac{\Delta t(1-\theta)}{Le} \left(k^2 + \frac{2}{\Delta y^2} \right) + \frac{2\Delta t(1-\theta)}{Le\Delta y^2} \cos \psi + i \frac{\Delta t V^n}{\Delta y} \sin \psi}{1 + \frac{\theta \Delta t}{Le} \left(k^2 + \frac{2}{\Delta y^2} \right) - \frac{2\theta \Delta t}{Le\Delta y^2} \cos \psi}$$

qui s'écrit aussi

$$g_{\psi} = \frac{1 - \frac{\beta^2 \zeta \Delta t}{2Le} - \frac{\Delta t(1-\theta)}{Le} \left(k^2 + \frac{2(1-\cos \psi)}{\Delta y^2} \right) + i \frac{\Delta t V^n}{\Delta y} \sin \psi}{1 + \frac{\theta \Delta t}{Le} \left(k^2 + \frac{2(1-\cos \psi)}{\Delta y^2} \right)}$$

Etudions d'abord le cas où $V^n = 0$.

- On veut que $-1 \leq g_{\psi}$, ce qui donne:

$$2\Delta t(1-2\theta)[k^2\Delta y^2 + 2(1-\cos \psi)] + \beta^2 \zeta \Delta t \Delta y^2 \leq 4Le\Delta y^2$$

et il faut étudier deux cas.

$-0 \leq \theta < 1/2 \iff 0 < 1-2\theta \leq 1$. Alors:

$$\Delta t \leq \frac{4Le\Delta y^2}{2(1-2\theta)(4+k^2\Delta y^2) + \beta^2 \zeta \Delta y^2} \quad (18)$$

$-1/2 < \theta \leq 1 \iff -1 \leq 1-2\theta < 0$. La condition s'écrit:

$$\Delta t \leq \frac{4Le}{2(1-2\theta)k^2 + \beta^2 \zeta} \quad (19)$$

si le dénominateur est positif (pas de condition sinon).

- On veut que $g_{\psi} \leq 1$, ce qui donne:

$$0 \leq 2k^2 + \beta^2 \zeta$$

condition toujours réalisée.

On vérifie facilement que les conditions (18) et (19) sur le pas de temps sont moins restrictives que les conditions suffisantes de positivité du schéma.

L'étude du cas où la vitesse V^n est non nulle est analogue mais plus technique; nous la laissons au lecteur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. BENKHALDOUN, B. LARROUTUROU, "Numerical analysis of the two-dimensional thermo-diffusive model for flame propagation", à paraître.
- [2] J. D. BUCKMASTER, G. S. S. LUDFORD, "Theory of laminar flames", Cambridge Univ. Press, (1982).
- [3] J. W. COOLEY, J. W. TUKEY, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series", *Mathematical Computational*, 19, pp. 297-301, (1965).
- [4] G. DURAND, "Etude de l'approximation par interpolation polynomiale et des algorithmes de transformations de Fourier rapides: application à la méthode spectrale", Thèse de 3^{ème} cycle, Université de Nice, (1985).
- [5] H. GUILLARD, R. PEYRET, "On the use of spectral methods for the numerical solution of stiff problems", *Rapport INRIA 553*, (1986).
- [6] B. LARROUTUROU, "Adaptive numerical methods for unsteady flame propagation", "Reacting flows : combustion and chemical reactors", Ludford Ed., *Lect. in Appl. Math.*, Vol. 24, pp. 415-436, (1986).
- [7] B. LARROUTUROU, "Utilisation de maillages adaptatifs pour la simulation de flammes monodimensionnelles instationnaires", "Numerical Simulation of Combustion Phenomena", Glowinski Larrourou Temam Eds., *Lect. Notes in Physics*, Vol. 241, pp. 300-312, Springer Verlag, Heidelberg, (1985).
- [8] B. LARROUTUROU, "A conservative adaptive method for unsteady flame propagation", à paraître.
- [9] N. PETERS, J. WARNATZ, "Numerical methods in laminar flame propagation", *Notes on Num. Fluid Mech.*, Vol. 6, Vieweg, Wiesbaden, (1982).
- [10] G. I. SIVASHINSKY, "Diffusional-thermal theory of cellular flames", *Comb. Sc. Techn.*, 15, pp.137-145, (1977).
- [11] G. I. SIVASHINSKY, "Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 15, pp. 179-199, (1983).
- [12] M. D. SMOOKE, "On the use of adaptive methods in premixed combustion", "Combustion and nonlinear phenomena", Clavin Larrourou Pelcé Eds., pp. 213-228, *Les Editions de Physique*, Paris, (1986).
- [13] M. D. SMOOKE, M. L. KOSZYKOWSKI, "Fully adaptive solutions of one-dimensional mixed initial-boundary value problems with applications to unstable problems in combustion", *Sandia Nat. Lab.*, SAND-83-8219, (1983).
- [14] C. TEMPERTON, "A note on prime factor FFT algorithms", *J. of Comp. Phys.*, 52, pp. 198-204, (1983).
- [15] C. TEMPERTON, "Self-sorting mixed-radix fast Fourier transform", *J. of Comp. Phys.*, 52, pp. 1-23, (1983).

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

