



HAL
open science

Approximations nonconformes de problemes generaux de coques minces par elements finis du type "Morley"

P. Trounev

► **To cite this version:**

P. Trounev. Approximations nonconformes de problemes generaux de coques minces par elements finis du type "Morley". RR-0766, INRIA. 1987. inria-00075786

HAL Id: inria-00075786

<https://inria.hal.science/inria-00075786>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

UNITÉ DE RECHERCHE
IRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 766

**APPROXIMATIONS
NONCONFORMES DE PROBLEMES
GENERAUX DE COQUES MINCES
PAR ELEMENTS FINIS DU TYPE
"MORLEY"**

Pascal TROUVÉ

DECEMBRE 1987

APPROXIMATIONS NONCONFORMES DE PROBLEMES GENERAUX DE
COQUES MINCES PAR ELEMENTS FINIS DU TYPE "MORLEY"

Pascal TROUVÉ

INRIA, Rocquencourt, B.P. 105, 78153 LE CHESNAY

Résumé

Dans ce rapport, nous établissons divers résultats de convergence et d'estimations d'erreurs pour une méthode "déplacement" nonconforme utilisant l'élément de Morley et différentes approximations de la géométrie des coques minces. En particulier, nous proposons une approximation par éléments finis plats, et nous évaluons le correcteur à introduire sur les composantes du tenseur de changement de courbure pour assurer la convergence de la méthode pour des coques générales.

NONCONFORMING APPROXIMATIONS OF GENERAL THIN SHELLS
PROBLEMS BY MORLEY'S TYPE FINITE ELEMENT

Summary

In this report, we give an account of convergence results and error estimates for a nonconforming "displacement" method using the element of Morley and several approximations of the geometry of thin shells. Particularly, we propose an approximation by flat plate elements, and we evaluate the corrector to be introduced in the components of the change of curvature tensor in order to ensure the convergence of the method for general shells.

SOMMAIRE

1. INTRODUCTION

1.1. Le problème continu.

2. UNE METHODE D'ELEMENTS FINIS NONCONFORMES

2.1. L'espace d'éléments finis \vec{V}_h .

2.2. Le problème discret.

2.3. D'autres éléments finis nonconformes.

3. CONVERGENCE ET ESTIMATIONS D'ERREURS

3.1. Une estimation abstraite de l'erreur.

3.2. Erreur d'interpolation.

3.3. Erreur de consistance.

3.4. Existence et unicité d'une solution pour le problème discret ; convergence.

4. APPROXIMATION CONFORME DE LA GEOMETRIE

4.1. Approximation explicite de la carte.

4.2. Approximation implicite de la géométrie.

5. UNE APPROXIMATION NONCONFORME DE LA GEOMETRIE

5.1. La surface approchée \bar{S}_h ; l'élément de DAWE.

5.2. Les conditions de compatibilité et l'espace discret \vec{V}_h .

5.3. Le problème discret associé à la surface à facettes.

5.4. Estimation du correcteur sur $\tilde{\rho}_{h\alpha\beta}$ et convergence.

6. CONCLUSIONS

REFERENCES.

1. INTRODUCTION

L'analyse de problèmes généraux de coques minces par des méthodes *nonconformes* d'éléments finis est une pratique courante de l'ingénierie ; on trouve une grande variété d'éléments pour l'étude de la flexion des plaques (par exemple : ADINI-CLOUGH [1], BAZELEY-CHEUNG-IRONS-ZIENKIEWICZ [3], FRAEIJIS DE VEUBEKE [13], MELOSH [20], MORLEY [21]), et leur extension aux problèmes de coques minces tient essentiellement à la simplicité de leur mise en oeuvre (citons BATHE-HO [2], DAWE [12], MEEK-TAN [19], OLSON-BEARDEN [23]). Cependant, s'il existe un certain nombre de résultats de *convergence* et d'*estimations d'erreurs* pour des problèmes de plaques en flexion (cf. CIARLET [8], KIKUCHI [15], LASCAUX-LESAINT [18], RANNACHER [24] [25]), l'analyse mathématique de ces méthodes est peu développée dans le cadre plus général des coques. Mentionnons les résultats obtenus par KIKUCHI [16] pour l'approximation d'un problème de coques cylindriques à l'aide d'un élément rectangulaire nonconforme (courbe ou plat).

Nous envisageons ici l'étude de la convergence et des estimations d'erreurs pour le plus simple des éléments de coque, composé d'un triangle de type (1) pour l'approximation des déplacements tangentiels et d'un triangle de MORLEY pour l'approximation du déplacement transverse. Pour les problèmes de plaques, cet élément est à déformation constante par triangle. Une telle approximation est nonconforme dans la mesure où la composante u_{h3} du vecteur déplacement n'est pas continue sur le domaine ; cet élément passe le *Patch Test* d'IRONS-RAZZAQUE [14] (et le *generalized Patch Test* de STUMMEL [27]). Toutefois, dans le cas présent, celui d'un problème linéaire du quatrième ordre à coefficients variables, on ne peut se contenter d'un tel critère heuristique (cf. STRANG [26]), et nous sommes amenés à estimer une erreur de *consistance*, caractéristique essentielle de ces méthodes (cf. NITSCHKE [22]). Notre étude utilise notamment un théorème de Rellich généralisé introduit par STUMMEL [28]. Puis, nous considérons des approximations conformes (au sens de CIARLET [9]) de la géométrie de la coque, et nous prenons en compte l'effet de l'intégration numérique (selon BERNADOU [4]).

Enfin, nous prouvons la convergence d'une méthode d'éléments finis (du type MORLEY) à *facettes planes*, à partir de la construction d'un correcteur pour le tenseur de changement de courbure. A cette occasion, il est intéressant de noter que nous retrouvons des résultats similaires à ceux établis par BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6] et BERNADOU-TROUVE [7] dans le cas d'une approximation par éléments finis conformes de CLOUGH-JOHNSON. Nous montrons comment le choix des conditions aux limites pour le problème discret semble être déterminant du point de vue de l'analyse de l'erreur.

1.1. Le problème continu

Dans ce paragraphe, nous donnons une brève description du modèle linéaire de coques minces de W.T. KOITER [17], et des résultats d'existence et d'unicité obtenus par BERNADOU-CIARLET [5] (dont nous reprenons les notations).

Soit Ω un ouvert borné du plan \mathbb{E}^2 (dont $(\omega, \vec{i}_1, \vec{i}_2)$ sera un repère orthonormé), de frontière Γ . La surface moyenne $\bar{\mathcal{I}}$ de la coque peut être définie comme l'image de $\bar{\Omega}$ par une application $\vec{\phi} : \bar{\Omega} \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ (l'espace Euclidien usuel, dont $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sera un système orthonormal de référence), i.e.

$$\bar{\mathcal{I}} = \{ \vec{\phi}(\xi), \xi = (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega} \} \quad (1.1.1)$$

Nous supposons que l'application $\vec{\phi}$ vérifie les hypothèses suivantes :

i) $\vec{\phi} \in (\mathcal{C}^3(\bar{\Omega}))^3$; (1.1.2)

ii) tous les points de la surface $\bar{\mathcal{I}}$ sont réguliers, i.e. }
 les deux vecteurs $\vec{a}_\alpha = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \xi^\alpha} = \vec{\phi}_{,\alpha}$ sont linéairement indépendants } (1.1.3)

On définit ainsi la base covariante (\vec{a}_α) (cf. figure 1.1.1) :

$$\vec{a}_\alpha = \vec{\phi}_{,\alpha}, \quad \vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \quad (1.1.4)$$

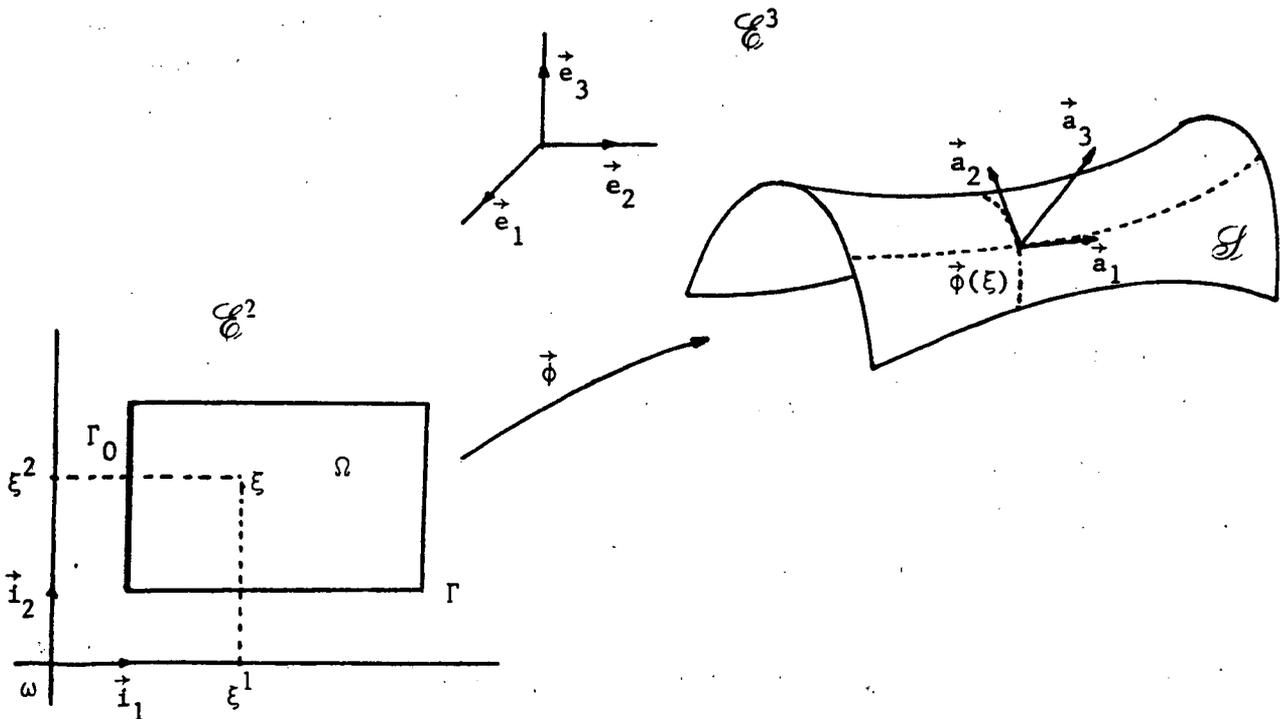


Figure 1.1.1 : Définition de la surface moyenne d'une coque.

La première forme fondamentale $(a_{\alpha\beta})$ de la surface \mathcal{S} est alors donnée par : $a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta$ et on note a le déterminant de la matrice $(a_{\alpha\beta})$. En tout point $\xi \in \bar{\Omega}$, on associe à la base covariante (\vec{a}_i) la base contravariante (\vec{a}^i) à l'aide des relations : $\vec{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta$, où $(a^{\alpha\beta})$ est la matrice inverse de $(a_{\alpha\beta})$, et $\vec{a}^3 = \vec{a}_3$. La seconde forme fondamentale $(b_{\alpha\beta})$ de la surface est donnée par : $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_{3,\beta} = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta}$, de laquelle on déduit la troisième forme fondamentale $(c_{\alpha\beta})$: $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha} = b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}$, où $b_\alpha^\lambda = a^{\lambda\beta} b_{\alpha\beta}$.

Les inconnues du problème sont les composantes covariantes du déplacement $\vec{u} = \vec{u}(\xi)$ du point $\vec{\phi}(\xi)$, soient les fonctions $u_i : \xi \in \bar{\Omega} \rightarrow u_i(\xi) \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. La solution \vec{u} rend minimale, sur une espace \vec{V} que l'on va définir, l'énergie de la coque, qui se présente sous la forme habituelle :

$$J : \vec{v} \in \vec{V} \rightarrow J(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) - f(\vec{v})$$

L'énergie de déformation $a(\vec{v}, \vec{v})$ s'exprime dans le cas d'une coque élastique, homogène et isotrope, à partir de la forme bilinéaire :

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \frac{Ee}{1-\nu^2} \left\{ (1-\nu) \gamma_\beta^\alpha(\vec{u}) \gamma_\alpha^\beta(\vec{v}) + \nu \gamma_\alpha^\alpha(\vec{u}) \gamma_\beta^\beta(\vec{v}) + \frac{e^2}{12} [(1-\nu) \bar{\rho}_\beta^\alpha(\vec{u}) \bar{\rho}_\beta^\alpha(\vec{v}) + \bar{\rho}_\alpha^\alpha(\vec{u}) \bar{\rho}_\beta^\beta(\vec{v})] \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \right\} \quad (1.1.5)$$

où les paramètres E, ν, e représentent respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson, et l'épaisseur de la coque. Le tenseur de déformation $(\gamma_\beta^\alpha(\vec{v}))$ et le tenseur de changement de courbure $(\bar{\rho}_\beta^\alpha(\vec{v}))$ de la surface moyenne ont pour composantes covariantes :

$$\gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) = \frac{1}{2} (v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} v_3 \quad (1.1.6)$$

$$\bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v}) = v_{3|\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} v_3 + b_\beta^\lambda v_{\lambda|\alpha} + b_\alpha^\lambda v_{\lambda|\beta} + b_{\beta|\alpha}^\lambda v_\lambda \quad (1.1.7)$$

où les notations $v_{\alpha|\beta}$, $v_{3|\alpha\beta}$, $b_{\alpha|\beta}^\lambda$ désignent les dérivées covariantes par rapport à la surface \mathcal{S} , données par les relations :

$$\left. \begin{aligned} v_{\alpha|\beta} &= v_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda v_\lambda \\ v_{3|\alpha\beta} &= v_{3,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda v_{3,\lambda}, \quad v_{3|\alpha} = v_{3,\alpha} \\ b_{\beta|\alpha}^\lambda &= b_{\beta,\alpha}^\lambda + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda b_{\beta}^\mu - \Gamma_{\beta\alpha}^\mu b_{\mu}^\lambda \end{aligned} \right\} \quad (1.1.8)$$

avec : $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda = \vec{a}^{\lambda\alpha} \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta}$ (les symboles de Christoffel).

Enfin, l'énergie potentielle des forces extérieures se met sous la forme linéaire :

$$f(\vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{p} \cdot \vec{v} \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \quad (1.1.9)$$

Soit Γ_0 une partie mesurable de Γ telle que $\text{mes}(\Gamma_0) > 0$. Nous supposons que la coque est encastrée sur la partie $\partial S_0 = \vec{\phi}(\Gamma_0)$ de la frontière ∂S de la surface moyenne, i.e.

$$\vec{u}|_{\Gamma_0} = \vec{0}, \quad \partial_{\nu} u_3|_{\Gamma_0} = 0, \quad (1.1.10)$$

où ∂_{ν} représente l'opérateur de dérivation selon la normale extérieure à Γ_0 ; sur $\Gamma - \Gamma_0$ nous aurons des conditions du type bord libre (cf. KOITER [17]). Dans ce cas, l'espace des déplacements admissibles \vec{V} est défini par :

$$\vec{V} = \{ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega) ; \vec{v}|_{\Gamma_0} = \vec{0}, \partial_{\nu} v_3|_{\Gamma_0} = 0 \}. \quad (1.1.11)$$

Muni du produit scalaire usuel : $(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{\alpha=1}^2 (u_{\alpha}, v_{\alpha})_{1,\Omega} + (u_3, v_3)_{2,\Omega}$, \vec{V} est un espace de Hilbert ; la norme correspondante sera notée :

$$\|\vec{v}\|_{\vec{V}} = [(\vec{v}, \vec{v})]^{1/2}.$$

Le problème de la déformation de la coque \mathcal{S} selon le modèle linéaire de KOITER admet alors la formulation variationnelle :

Problème 1.1.1 : pour $\vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$, trouver $\vec{u} \in \vec{V}$ tel que

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \vec{V} \quad (1.1.12)$$

où les formes $a(\dots)$ et $f(\cdot)$ sont définies par (1.1.5) et (1.1.9). Par ailleurs, on remarque que ces formes sont uniformément continues sur \vec{V} dès que :

$$a_{\alpha\beta} ; a^{\alpha\beta} ; a ; b_{\alpha\beta} ; b_{\alpha}^{\beta} ; b_{\beta,\gamma}^{\alpha} ; \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} ; E ; e \in L^{\infty}(\Omega) \quad (1.1.13)$$

(avec $0 < \nu < \frac{1}{2}$), soit dès que $\vec{\phi} \in (W^{3,\infty}(\Omega))^3$.

En prouvant la \vec{V} -ellipticité uniforme de la forme bilinéaire $a(\dots)$, c'est-à-dire l'existence d'une constante $\alpha > 0$ telle que l'on ait uniformément sur Ω :

$$\alpha \|\vec{v}\|_{\vec{V}}^2 \leq a(\vec{v}, \vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \vec{V} \quad (1.1.14)$$

on établit le résultat suivant :

Théorème 1.1.1 : (BERNADOU-CIARLET [5, théorème 6.4.1])

Le problème 1.1.1 admet une solution unique.

□

Sous des hypothèses de régularité plus fortes, on énonce le système des équations d'équilibres (cf. KOITER [17, (3.11), (3.12)]).

$$\left. \begin{aligned} (\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + b_{\lambda}^{\alpha} \bar{m}^{\lambda\beta}(\vec{u}))|_{\beta} + b_{\lambda}^{\alpha} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\beta} + p^{\alpha} &= 0, \\ -\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + p^3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.15)$$

où les tenseurs de résultantes de contraintes ($\bar{n}^{\alpha\beta}$) et de couples de contraintes ($\bar{m}^{\alpha\beta}$) sont donnés par les expressions :

$$\left. \begin{aligned} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) &= \frac{Ee}{1-\nu^2} [(1-\nu) a^{\alpha\lambda} \gamma_{\lambda}^{\beta}(\vec{u}) + \nu a^{\alpha\beta} \gamma_{\lambda}^{\lambda}(\vec{u})], \\ \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) &= \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} [(1-\nu) a^{\alpha\lambda} \rho_{\lambda}^{\beta}(\vec{u}) + \nu a^{\alpha\beta} \rho_{\lambda}^{\lambda}(\vec{u})], \end{aligned} \right\} \quad (1.1.16)$$

et les conditions aux limites (cf. KOITER [17, (3.13) à (3.15)])

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ et } \partial_{\nu} u_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad (1.1.17)$$

$$\left. \begin{aligned} (\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + 2 b_{\lambda}^{\alpha} \bar{m}^{\lambda\beta}(\vec{u})) \nu_{\beta} &= 0 \\ -\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\alpha} \nu_{\beta} - \partial_{\tau} (\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) \nu_{\alpha} \tau_{\beta}) &= 0 \\ \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) \nu_{\alpha} \nu_{\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ sur } \Gamma-\Gamma_0, \quad (1.1.18)$$

qui expriment le fait que la coque $\bar{\mathcal{S}}$ est encastrée sur le bord $\vec{\phi}(\Gamma_0)$, et libre sur $\vec{\phi}(\Gamma-\Gamma_0)$ (dans (1.1.18), $\vec{\nu} = \nu_{\alpha} \vec{i}^{\alpha}$ désigne le vecteur unitaire normal à $\Gamma-\Gamma_0$).

2. UNE METHODE D'ELEMENTS FINIS NONCONFORMES

Dans ce paragraphe, nous ne considérons que l'approximation des composantes du déplacement \vec{u} , à l'aide d'éléments finis de type P_1 -Lagrange pour les composantes tangentielles u_α d'une part, et d'un élément fini nonconforme de MORLEY [21] pour la composante normale u_3 d'autre part.

2.1. L'espace d'élément fini \vec{V}_h

Nous supposons que le domaine $\hat{\Omega}$ est *polygonal* ce qui permet de le recouvrir exactement par des familles régulières de triangulation \mathcal{T}_h , i.e.

i) il existe une constante σ telle que

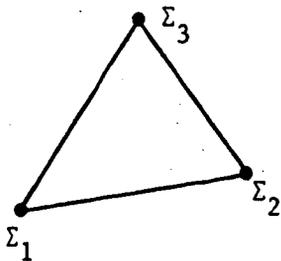
$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma, \quad (2.1.1)$$

où $h_T = \text{diam}(T)$ et $\rho_T = \sup \{ \text{diam}(D) ; D \text{ est un disque contenu dans } T \}$;

ii) la quantité $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ approche zéro, et il existe une constante τ , indépendante de h , telle que : $\forall h, \forall T \in \mathcal{T}_h, h_T/h \geq \tau$. (2.1.2)

A chaque triangulation \mathcal{T}_h , nous associons l'espace produit d'élément fini $\vec{X}_h = X_{h1} \times X_{h1} \times X_{h2}$, puis nous définissons le sous-espace $\vec{V}_h = V_{h1} \times V_{h1} \times V_{h2}$ de \vec{X}_h qui prend en compte les conditions aux limites ; l'appellation "méthodes d'éléments finis nonconformes" est justifiée par le fait que \vec{V}_h ne sera pas un sous-espace de l'espace des déplacements admissibles \vec{V} , i.e. $\vec{V}_h \not\subset \vec{V}$.

L'espace X_{h1} est l'espace d'élément fini associé aux triangles de type (1),



i.e. les fonctions v_h de X_{h1} sont telles que :

i) sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$, $v_h|_T \in P_1(T)$;

ii) sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$, leur restriction

$v_h|_T$ sont complètement déterminées par leurs

valeurs aux sommets de T , soient $v_h(\Sigma_i)$,

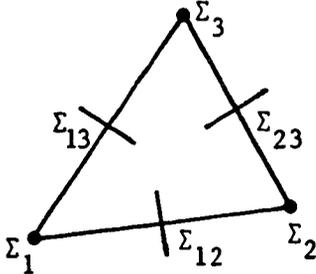
$i=1,2,3$;

iii) $X_{h1} \subset C^0(\hat{\Omega})$.

(2.1.3)

L'espace V_{h1} est défini par : $V_{h1} = \{v_h \in X_{h1}, v_h(\Sigma) = 0, \forall \Sigma \in \Gamma_0\}$, et l'on a l'inclusion $V_{h1} \subset V_1 = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_0} = 0\}$.

L'espace X_{h2} est l'espace associé à l'élément fini de MORLEY [21], i.e. sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$, la restriction $v_h|_T$ de toute fonction $v_h \in X_{h2}$ vérifie :



- i) $v_h|_T \in P_2(T)$;
 - ii) $v_h|_T$ est complètement déterminé par les valeurs $v_h(\Sigma_i)$ aux sommets $\Sigma_i, 1 \leq i \leq 3$, de T, et par les valeurs $\partial_n v_h(\Sigma_{ij})$ aux noeuds $\Sigma_{ij}, 1 \leq i < j \leq 3$, de mi-côté de T (où ∂_n désigne la dérivée selon la normale extérieure au côté $\Sigma_i \Sigma_j$).
- (2.1.4)

On note que : $X_{h2} \not\subset C^0(\hat{\Omega})$.

L'espace V_{h2} est donné par :

$$V_{h2} = \{v_h \in X_{h2} ; v_h(\Sigma_i) = 0, \forall \Sigma_i \in \Gamma_0, \text{ et } \partial_n v_h(\Sigma_{ij}) = 0, \forall \Sigma_{ij} \in \Gamma_0\},$$

avec : $V_{h2} \subset V_2 = \{v \in H^2(\Omega), v|_{\Gamma_0} = 0 \text{ et } \partial_\nu v|_{\Gamma_0} = 0\}$.

Dans la suite, l'espace $\vec{V}_h \subset \prod_{T \in \mathcal{T}_h} [(H^1(T))^2 \times H^2(T)]$ sera muni de la norme induite :

$$\|\vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} = \left(\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v_{h\alpha}\|_{1,T}^2 + \|v_{h3}\|_{2,T}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.1.5)$$

2.2 Le problème discret

Pour les définitions précédentes, l'énergie de déformation de la coque \mathcal{L} est donc approchée triangle par triangle. En ce sens, nous introduisons la forme bilinéaire approchée $a_h(\dots)$:

$$a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \frac{Ee}{1-\nu^2} \left((1-\nu) \gamma_\beta^\alpha(\vec{u}_h) \gamma_\alpha^\beta(\vec{v}_h) + \nu \gamma_\alpha^\alpha(\vec{u}_h) \gamma_\beta^\beta(\vec{v}_h) + \right. \\ \left. + \frac{e^2}{12} [(1-\nu) \bar{\rho}_\beta^\alpha(\vec{u}_h) \bar{\rho}_\alpha^\beta(\vec{v}_h) + \nu \bar{\rho}_\alpha^\alpha(\vec{u}_h) \bar{\rho}_\beta^\beta(\vec{v}_h)] \right) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \quad (2.2.1)$$

En remarquant que par construction, nous avons :

$$\vec{V}_h \subset (L^2(\Omega))^3, \quad (2.2.2)$$

(de sorte que l'expression $f(\vec{v}_h)$ selon (1.1.9) conserve un sens), l'approximation du problème 1.1.1 se formule comme suit :

Problème 2.2.1 : Trouver $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$ tel que :

$$a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = f(\vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h \quad (2.2.3)$$

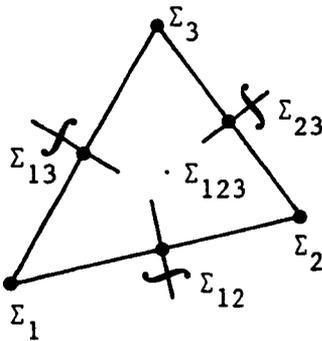
Enfin, il est possible d'étendre les domaines de définition des applications $a_h(\dots)$ et $\|\cdot\|_{\vec{V}_h}$ à l'espace $\vec{V} + \vec{V}_h$. En particulier, la continuité uniforme de la forme bilinéaire $a_h(\dots)$ sur cet espace se déduit de l'hypothèse (1.1.13), i.e. il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$|a_h(\vec{u}, \vec{v})| \leq M \|\vec{u}\|_{\vec{V}_h} \|\vec{v}\|_{\vec{V}_h}, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{V} + \vec{V}_h \quad (2.2.4)$$

2.3 D'autres éléments finis nonconformes

Signalons que les résultats qui seront établis aux paragraphes 3 et 4.1, s'étendent aux éléments de FRAEIJIS DE VEUBEKE [13] (voir également LASCAUX-LESAIN [18], STUMMEL [27] [28]). La définition de l'espace X_{h2} prendra alors la forme :

F.V.I. : sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$, la restriction $v_h|_T$ de toute fonction $v_h \in X_{h2}$ vérifie :



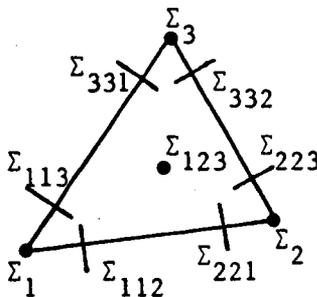
i) $v_h|_T \in P_T = (p \in P_3(T) ; \phi(p) = 0)$, où nous avons noté :

$$\phi(p) = 27p(\Sigma_{123}) - \sum_{i=1}^3 p(\Sigma_i) - 8 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} p(\Sigma_{ij}) + 2 \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Sigma_i \Sigma_{i+1}} \int_{\Sigma_i}^{\Sigma_{i+1}} Dp(\Sigma_{123} - \Sigma_{i+2}) ds ;$$

ii) $v_h|_T$ est complètement déterminé par les valeurs $v_h|_T(\Sigma_i)$, $i = 1, 2, 3$, aux sommets Σ_i de T , par les valeurs $v_h|_T(\Sigma_{ij})$, $1 \leq i < j \leq 3$, aux points Σ_{ij} de mi-côté de T , et par la valeur moyenne (sur chaque côté) de la dérivée première selon la normale, i.e. $\frac{1}{\Sigma_i \Sigma_{i+1}} \int_{\Sigma_i}^{\Sigma_{i+1}} \partial_n v_h|_T ds$, $i=1, 2, 3$;

ou encore :

F.V.II : sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$ la restriction $v_h|_T$ de toute fonction $v_h \in X_{h2}$ vérifie :



i) $v_h|_T \in P_3(T)$;

ii) $v_h|_T$ est complètement déterminé par les valeurs $v_h|_T(\Sigma_{123})$, et $v_h|_T(\Sigma_i)$, $i = 1, 2, 3$, aux sommets Σ_i de T ; et par les valeurs des dérivées premières selon la normale $\partial_n v_h|_T(\Sigma_{jjk})$, $1 \leq j < k \leq 3$, $j \neq k$, aux points de Gauss Σ_{jjk} (i.e. $\Sigma_j \Sigma_{jjk} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \Sigma_j \Sigma_k$) ;

(les définitions des espaces V_{h2} ayant des extensions évidentes). Ces

deux éléments, tout comme l'élément de MORLEY, présentent la particularité : $X_{h2} \notin \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$. Enfin, on notera qu'il est possible de donner une variante de la définition F.V.II en condensant le degré de liberté $v_{h|T}(\Sigma_{123})$ sans que les performances de l'élément en soient fondamentalement affectées.

Remarque 2.3.1 : Selon RANNACHER [24], l'approximation d'une plaque en flexion par éléments finis nonconformes de MORLEY admet une estimation L^∞ de l'erreur du type : $h^2 |\ln h|$ (ce qui corrobore certaines observations numériques de "lenteur" de convergence). De ce point de vue, l'ingénieur sera tenté par l'alternative que présente les éléments précédents, pour lesquels l'estimation d'erreur en norme L^∞ est meilleure.

□

3. CONVERGENCE ET ESTIMATIONS D'ERREURS

Dans ce paragraphe, nous donnons des estimations d'erreurs qui permettront d'établir la convergence de la méthode. En particulier, l'erreur de consistance est estimée à partir d'une propriété locale de "continuité en moyenne" sur le bord commun à deux triangles de MORLEY. Parce que les coefficients géométriques sont variables, il apparaît que le critère heuristique du *Patch Test* (cf. FRAEIJIS DE VEUBEKE [13], IRONS-RAZZAQUE [14], STRANG [26], STUMMEL [29]) n'est pas une condition suffisante (ni nécessaire) de convergence. De même, les techniques développées par CIARLET [8] [10], LASCAUX-LESAINTE [18] s'appuyant sur une forme locale du *Patch Test*, pour le problème des plaques, ne peuvent être directement appliquées au cas de coques.

Sachons que l'élément de MORLEY satisfait le *patch test généralisé* --condition assurant, selon STUMMEL [27], la consistance de la méthode--, mais l'étude de la convergence pour un élément de coque de MORLEY n'a jamais été effectué à notre connaissance. En ce qui concerne l'existence et l'unicité d'une solution \vec{u}_h pour le problème 2.2.1, nous utiliserons des résultats de compacité des espaces d'approximation \vec{V}_h (cf. STUMMEL [28]) pour démontrer la \vec{V}_h -ellipticité uniforme de la forme bilinéaire $a_h(\dots)$, propriété sur laquelle repose l'estimation de l'erreur $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{\vec{V}_h}$.

3.1 Une estimation abstraite de l'erreur

L'étude d'erreur qui va suivre s'appuie sur le résultat suivant (dû à STRANG [26]) :

Théorème 3.1.1 : Soit une famille de problèmes discrets 2.2.1 pour lesquels les formes bilinéaires $a_h(\dots)$ sont uniformément \vec{V}_h -elliptiques, au sens où il existe une constante $\beta > 0$, indépendante de h , telle que :

$$\beta \|\vec{v}_h\|_{\vec{V}_h}^2 \leq a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h. \quad (3.1.1)$$

Alors, il existe une constante C , indépendante de h , telle que :

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{\vec{V}_h} \leq C \left(\inf_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} \|\vec{u} - \vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f(\vec{w}_h) - a_h(\vec{u}, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_{\vec{V}_h}} \right) \quad (3.1.2)$$

où \vec{u} (resp. \vec{u}_h) désigne la solution du problème continu 1.1.1 (resp. du problème discret 2.2.1).

Preuve : L'hypothèse (3.1.1) suffit à établir l'existence et l'unicité de la solution \vec{u}_h du problème discret 2.2.1. De plus, pour tout $\vec{v}_h \in \vec{V}_h$, on peut écrire :

$$\beta \|\vec{u}_h - \vec{v}_h\|_{\vec{V}_h}^2 \leq a_h(\vec{u}_h - \vec{v}_h, \vec{u}_h - \vec{v}_h) - a_h(\vec{u}_h - \vec{v}_h, \vec{u}_h - \vec{v}_h) + [f(\vec{u}_h - \vec{v}_h) - a_h(\vec{u}_h, \vec{u}_h - \vec{v}_h)].$$

Ainsi la continuité (2.2.4) de la forme bilinéaire $a_h(\dots)$ implique :

$$\beta \|\vec{u}_h - \vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} \leq M \|\vec{u}_h - \vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} + \frac{|f(\vec{u}_h - \vec{v}_h) - a_h(\vec{u}_h, \vec{u}_h - \vec{v}_h)|}{\|\vec{u}_h - \vec{v}_h\|_{\vec{V}_h}}$$

Soit encore :

$$\beta \|\vec{u}_h - \vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} \leq M \|\vec{u}_h - \vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f(\vec{w}_h) - a_h(\vec{u}_h, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_{\vec{V}_h}}$$

En combinant cette inégalité avec l'inégalité triangulaire d'une part, i.e.

$$\|\vec{u}_h - \vec{u}_h\|_{\vec{V}_h} \leq \|\vec{u}_h - \vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} + \|\vec{v}_h - \vec{u}_h\|_{\vec{V}_h},$$

puis en prenant le minimum par rapport à $\vec{v}_h \in \vec{V}_h$, on déduit l'estimation (3.1.2), où : $C = \max(1+M/\beta, 1/\beta)$. \square

Remarque 3.1.1 : Le premier terme du second membre de l'inégalité (3.1.2) mesure la distance qui "sépare \vec{u} de l'espace \vec{V}_h " ; en particulier, on a :

$$\inf_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} \|\vec{u} - \vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} \leq \|\vec{u} - \pi_h \vec{u}\|_{\vec{V}_h},$$

où π_h désigne l'opérateur d'interpolation associé aux définitions (2.1.3) et (2.1.4). Le second terme représente l'erreur de consistance due à la nonconformité de la méthode. Sous les hypothèses (2.2.4) et (3.1.1), on montre que les conditions nécessaires et suffisantes pour que la méthode converge, i.e. $\lim_{h \rightarrow 0} \|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{\vec{V}_h} = 0$, sont : d'une part une condition sur l'interpolation, i.e. :

$$\lim_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} \inf_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} \|\vec{u} - \vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} = 0, \quad (3.1.3)$$

d'autre part une condition de consistance :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|a_h(\vec{u}, \vec{w}_h) - f(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_{\vec{V}_h}} = 0. \quad (3.1.4)$$

En effet, d'après l'inégalité (3.1.2), il est clair que les conditions (3.1.3) (3.1.4) établissent des conditions suffisantes de convergence. Ces conditions sont également nécessaires : en notant P_h l'opérateur de projection sur \vec{V}_h , on a (par le théorème de Pythagore) :

$$\| \vec{u} - \vec{u}_h \|_{\vec{V}_h}^2 = \| \vec{u} - P_h \vec{u} \|_{\vec{V}_h}^2 + \| \vec{u}_h - P_h \vec{u} \|_{\vec{V}_h}^2,$$

et à l'aide de (2.2.4) :

$$a_h(\vec{u}_h - P_h \vec{u}, \vec{w}_h) - a_h(\vec{u} - P_h \vec{u}, \vec{w}_h) + [f(\vec{w}_h) - a_h(\vec{u}, \vec{w}_h)] \leq M \| \vec{u} - P_h \vec{u} \|_{\vec{V}_h} \| \vec{w}_h \|_{\vec{V}_h}, \quad \forall \vec{w}_h \in \vec{V}_h,$$

puis en prenant $\vec{w}_h = \vec{u} - P_h \vec{u}$, on a :

$$\frac{\beta}{M} \| \vec{u} - P_h \vec{u} \|_{\vec{V}_h} + \frac{1}{M} \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f(\vec{w}_h) - a_h(\vec{u}, \vec{w}_h)|}{\| \vec{w}_h \|_{\vec{V}_h}} \leq M \| \vec{u} - P_h \vec{u} \|_{\vec{V}_h},$$

d'où en combinant :

$$[1 + (\frac{\beta}{M})^2] \| \vec{u} - P_h \vec{u} \|_{\vec{V}_h}^2 + \frac{1}{M^2} \left(\sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f(\vec{w}_h) - a_h(\vec{u}, \vec{w}_h)|}{\| \vec{w}_h \|_{\vec{V}_h}} \right)^2 \leq \| \vec{u} - \vec{u}_h \|_{\vec{V}_h}^2,$$

ce qui établit le caractère nécessaire des conditions de convergence (3.1.3) (3.1.4).

La validation des conditions (3.1.3) et (3.1.4) au moyen d'estimations d'erreurs (cf. CIARLET [8] [9], LASCAUX-LESAIN [18], RANNACHER [24]) n'est envisageable que sous certaines hypothèses de régularité sur les coefficients de (1.1.13) et sur la solution \vec{u} du problème continu -- nous précisons plus loin ces différents points. Dans le cas de problèmes "insuffisamment réguliers", il est néanmoins possible d'établir la convergence de la méthode (au moins pour l'hypothèse (1.1.13)). Ainsi, selon STUMMEL [27, théorème 1.3.5], la condition (3.1.4) est équivalente à la condition de fermeture de la suite $(\vec{V}_h)_{h \rightarrow 0}$ (i.e. la limite de toute suite $(\vec{v}_h, \vec{v}_h \in \vec{V}_h)_{h \rightarrow 0}$ faiblement convergente appartient à \vec{V}), propriété qui est démontrée à partir du "generalized patch test" introduit par STUMMEL [27, proposition 1.4.7 et théorèmes 1.4.8, 1.4.9], soit dans notre cas :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \phi \cdot \vec{D}^\mu \vec{v}_h |T| \vec{n} \, ds = 0, \quad \forall \phi \in C^\infty(\Omega), \quad |\mu| \leq 1,$$

où \vec{n} représente la normale extérieure au bord ∂T du triangle T de \mathcal{T}_h . En ce qui concerne l'élément de MORLEY, cette propriété est satisfaite (cf.

CIARLET [8, exemple 7], LASCAUX-LESAINT [18, lemme 3.5], RANNACHER [24, théorème 1], STUMMEL [27, théorème 2.5.1]) : c'est une conséquence de la continuité des valeurs moyennes des dérivées premières de la fonction v_{h3} le long de chaque côté commun à deux triangles de \mathcal{T}_h , i.e.

$$\text{et } \left. \begin{aligned} \int_{\Sigma_i}^{\Sigma_j} \overrightarrow{Dv_{h3}} \cdot \overrightarrow{\Sigma_i \Sigma_j} \, ds &= \overline{\Sigma_i \Sigma_j} (v_{h3}(\Sigma_j) - v_{h3}(\Sigma_i)) \\ \int_{\Sigma_i}^{\Sigma_j} \partial_n v_{h3} \, ds &= \overline{\Sigma_i \Sigma_j} \partial_n v_{h3}(\Sigma_{ij}), \quad 1 \leq i < j \leq 3. \end{aligned} \right\}$$

□

3.2 Erreur d'interpolation

Afin d'établir la condition de convergence (3.1.3), nous donnons le résultat suivant :

Théorème 3.2.1 : Si la solution \vec{u} du problème continu 1.1.1 appartient à l'espace : $\vec{V} \cap [(H^2(\Omega))^2 \times H^3(\Omega)]$, alors il existe une constante C, indépendante de h, telle que :

$$\inf_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} \|\vec{u} - \vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} \leq Ch (|u_1|_{2,\Omega}^2 + |u_2|_{2,\Omega}^2 + |u_3|_{3,\Omega}^2)^{1/2} \quad (3.2.1)$$

Preuve : Soient π_{h1}, π_{h2} les opérateurs d'interpolations respectivement associés aux espaces X_{h1} et X_{h2} . Les estimations d'erreurs d'interpolation pour des familles affines d'éléments finis (cf. CIARLET [9, théorème 3.1.6]) nous permettent d'écrire en premier lieu :

$$\|u_\alpha - \pi_{h1} u_\alpha\|_{1,T} \leq C h_T |u_\alpha|_{2,T}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.2.2)$$

En second lieu, on montre (cf LASCAUX-LESAINT [18, lemme 3.4]) que l'on a pour des familles presque affines d'éléments finis de MORLEY :

$$\|u_3 - \pi_{h2} u_3\|_{2,T} \leq C h_T |u_3|_{3,T}. \quad (3.2.3)$$

L'inégalité (3.2.1) se déduit alors de (3.2.2) (3.2.3) par sommation sur tous les triangles $T \in \mathcal{T}_h$ (selon la définition (2.1.5) de la norme). □

Remarque 3.2.1 : L'hypothèse de régularité sur \vec{u} est satisfaite dans le cas d'une plaque, pour tout $\vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$, si $\tilde{\Omega}$ est un domaine polygonal convexe ; la démonstration de cette propriété dans le cadre général des coques minces reste un problème ouvert. □

3.3. Erreur de consistance

Nous allons prouver que la condition de consistance (3.1.4) est satisfaite en établissant une estimation asymptotique de l'erreur. Pour cela, on commence par donner une décomposition de l'expression :

$$E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = a_h(\vec{u}, \vec{w}_h) - f(\vec{w}_h) \quad (3.3.1)$$

Lemme 3.3.1 : Supposons que la solution \vec{u} du problème continu 1.1.1 appartient à l'espace $\vec{V} \cap [(H^2(\Omega))^2 \times H^3(\Omega)]$. Alors pour tout $\vec{w}_h \in \vec{V}_h$, on a :

$$E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = R_h(\vec{u}, \vec{w}_h) + E_h^*(\vec{u}, \vec{w}_h) \quad (3.3.2)$$

avec

$$R_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T ([b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + p^3] w_{h3} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha} w_{h3, \beta}) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 + S_h(\vec{u}, \vec{w}_h), \quad (3.3.3)$$

$$E_h^*(\vec{u}, \vec{w}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} ([\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} t_{\beta}] \partial_t w_{h3} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} n_{\beta}] \partial_n w_{h3}) ds - S_h(\vec{u}, \vec{w}_h), \quad (3.3.4)$$

$$S_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = \sum_{\substack{SC(\Gamma - \Gamma_0) \\ SC\partial T, T \in \mathcal{T}_h}} \int_S ([\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} t_{\beta}] \partial_t w_{h3} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} n_{\beta}] \partial_n w_{h3}) ds, \quad (3.3.5)$$

selon les définitions (1.1.16), où $\vec{t} = t_{\lambda}^{\rightarrow\lambda}$ (resp. $\vec{n} = n_{\lambda}^{\rightarrow\lambda}$) représente le vecteur unitaire tangent (resp. la normale extérieure) à ∂T , où ∂_t (resp. ∂_n) désigne l'opérateur de dérivation première le long du bord ∂T (resp. selon la normale extérieure à ∂T).

Preuve : Rappelons tout d'abord que l'expression $f(\vec{w}_h)$ a un sens pour tout $\vec{w}_h \in \vec{V}_h$, puisque $\vec{V}_h \subset (L^2(\Omega))^3$; ainsi, nous avons :

$$f(\vec{w}_h) = \int_{\Omega} \vec{p} \cdot \vec{w}_h \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T p^i w_{hi} \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \quad (3.3.6)$$

Puis, on réécrit l'expression (2.2.1) avec les définitions (1.1.16) :

$$a_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T [\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) \gamma_{\alpha\beta}(\vec{w}_h) + \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) \bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{w}_h)] \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2. \quad (3.3.7)$$

Il est alors possible d'appliquer la formule de Green en coordonnées curvilignes à l'expression (3.3.7) sous l'hypothèse $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2 \times H^3(\Omega)$, soit au niveau de chaque triangle T de \mathcal{T}_h — chaque triangle peut être considéré comme un domaine de \mathbb{R}^2 à frontière Lipschitz-continue — en supposant les coefficients de (1.1.13) dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ et bornés sur Γ :

$$\begin{aligned}
a_h(\vec{u}, \vec{w}_h)|_T &= \int_T [\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) \gamma_{\alpha\beta}(\vec{w}_h) + \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) \bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{w}_h)] \sqrt{ad\xi^1 d\xi^2} \\
&- \int_T \left[\frac{1}{2} (\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\beta} w_{h\alpha} + \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\alpha} w_{h\beta}) + b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) w_{h3} + \right. \\
&\quad \left. + \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\alpha} w_{h3} + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) w_{h3} + \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} w_{h\lambda} + \right. \\
&\quad \left. + (b_{\alpha}^{\lambda} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}))|_{\beta} w_{h\lambda} \right] \sqrt{ad\xi^1 d\xi^2} \\
&+ \int_{\partial T} \left[\frac{1}{2} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) (n_{\beta} w_{h\alpha} + n_{\alpha} w_{h\beta}) + \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\beta} w_{h3} + \right. \\
&\quad \left. + \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} w_{h\lambda} + b_{\alpha}^{\lambda} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) w_{h\lambda} \right] ds
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

où $\vec{n} = n_{\lambda} \vec{i}_{\lambda}$ représente la normale extérieure unitaire à ∂T . En posant :

$$w_{h3}|\beta = \partial_t w_{h3} \cdot t_{\beta} + \partial_n w_{h3} \cdot n_{\beta} \tag{3.3.9}$$

où $\vec{t} = t_{\lambda} \vec{i}_{\lambda}$ désigne le vecteur unitaire tangent à ∂T , nous obtenons dans (3.3.8) :

$$\begin{aligned}
a_h(\vec{u}, \vec{w}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left([\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\beta} + b_{\lambda}^{\alpha} \bar{m}^{\lambda\beta}(\vec{u})|_{\beta} + (b_{\lambda}^{\alpha} \bar{m}^{\lambda\beta}(\vec{u}))|_{\beta}] w_{h\alpha} + \right. \\
&\quad \left. + [b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})] w_{h3} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\alpha}] w_{h3, \beta} \right) \sqrt{ad\xi^1 d\xi^2} \\
&+ \int_{\partial T} \left([(\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + 2b_{\lambda}^{\alpha} \bar{m}^{\lambda\beta}(\vec{u})) n_{\beta}] w_{h\alpha} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} t_{\beta}] \partial_t w_{h3} \right. \\
&\quad \left. + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} n_{\beta}] \partial_n w_{h3} \right) ds
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

d'où en reportant (3.3.6) (3.3.10) dans (3.3.1) :

$$\begin{aligned}
E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left([(\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + b_{\lambda}^{\alpha} \bar{m}^{\lambda\beta}(\vec{u}))|_{\beta} + b_{\lambda}^{\alpha} \bar{m}^{\lambda\beta}(\vec{u})|_{\beta} + p^{\alpha}] w_{h\alpha} + \right. \\
&\quad \left. + [b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + p^3] w_{h3} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\alpha}] w_{h3, \beta} \right) \sqrt{ad\xi^1 d\xi^2} \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \left([(\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + 2b_{\lambda}^{\alpha} \bar{m}^{\lambda\beta}(\vec{u})) n_{\beta}] w_{h\alpha} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} t_{\beta}] \partial_t w_{h3} + \right. \\
&\quad \left. + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} n_{\beta}] \partial_n w_{h3} \right) ds
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Selon la théorie de KOITER [17, p175], les équations d'équilibre (1.1.15) nous conduisent, pour tout $\vec{w}_h \in (L^2(\Omega))^3$, à :

$$\begin{aligned}
&\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left([(\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + b_{\lambda}^{\alpha} \bar{m}^{\lambda\beta}(\vec{u}))|_{\beta} + b_{\lambda}^{\alpha} \bar{m}^{\lambda\beta}(\vec{u})|_{\beta} + p^{\alpha}] w_{h\alpha} \sqrt{ad\xi^1 d\xi^2} \right) \\
&- \int_{\Omega} \left([(\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + b_{\lambda}^{\alpha} \bar{m}^{\lambda\beta}(\vec{u}))|_{\beta} + b_{\lambda}^{\alpha} \bar{m}^{\lambda\beta}(\vec{u})|_{\beta} + p^{\alpha}] w_{h\alpha} \sqrt{ad\xi^1 d\xi^2} - 0 \right)
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

De plus, en vertu de la définition de l'espace V_{h1} d'une part (i.e. $w_{h\alpha}|_{\Gamma_0} = 0$), et des conditions aux limites (1.1.18)₁ vérifiées par \vec{u} sur $\Gamma - \Gamma_0$ d'autre part (i.e. $\int_{\Gamma - \Gamma_0} (\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + 2b_{\lambda m}^{\alpha-\lambda\beta}(\vec{u})) n_{\beta} v_{\alpha} d\gamma = 0$, $\forall v_{\alpha} \in L^2(\Gamma - \Gamma_0)$), nous obtenons pour tout $w_{h\alpha} \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ (voir (2.1.3)) :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} [(\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + 2b_{\lambda m}^{\alpha-\lambda\beta}(\vec{u})) n_{\beta}] w_{h\alpha} ds = 0 \quad (3.3.13)$$

La conjonction de (3.3.11) (3.3.12) (3.3.13) établit la décomposition (3.2.2). □

Remarque 3.3.1 : Il est possible de réduire l'expression $E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)$ pour une hypothèse de régularité plus grande sur \vec{u} . Ainsi, $\vec{u} \in (H^3(\Omega))^2 \times H^4(\Omega)$ nous conduirait (en supposant les coefficients de (1.1.13) appartenant à $W^{1,\infty}(\Omega)$ et bornés sur Γ) à :

$$E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = \left. \begin{aligned} & \sum_{\substack{S \subset T, T \in \mathcal{T}_h \\ S \subset (\Gamma - \Gamma_0)_h}} \int_S ([-\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha} n_{\beta} \cdot \partial_t (\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} t_{\beta})] w_{h3} + \\ & + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} n_{\beta}] \partial_n w_{h3}) ds, \end{aligned} \right\}$$

avec une intégration par partie supplémentaire dans (3.3.3), et en prenant $\partial_t w_{h3}$ au sens des distributions dans (3.3.4). Cependant, pour un domaine polygonal, nous ne pouvons pas nous attendre à avoir ce type de régularité, même pour un problème de plaque (c'est néanmoins l'hypothèse d'étude de LASCAUX-LESAIN [18], de ce point de vue on préférera l'analyse de RANNACHER [24]). □

Dans la suite, on considérera que $E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)$ est une forme bilinéaire continue de $[(H^2(\Omega))^2 \times H^3(\Omega)] \times \prod_{T \in \mathcal{T}_h} [(P_1(T))^2 \times P_2(T)]$.

Dès lors, pour établir la convergence de la méthode, nous cherchons à montrer une estimation du type :

$$E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) \leq c h (\|u_1\|_{2,\Omega}^2 + \|u_2\|_{2,\Omega}^2 + \|u_3\|_{3,\Omega}^2)^{1/2} \|\vec{w}_h\|_{\vec{V}_h}$$

Cependant contrairement au problème de la flexion d'une plaque (cf. CIARLET [8], LASCAUX-LESAIN [18]), il n'est pas envisageable de prouver une telle estimation directement à partir du "lemme bilinéaire" de CIARLET [10, théorème 4.2.5] ; en particulier, du fait de la variabilité des coefficients (E, e) , $a^{\alpha\beta}$, $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$, etc..., il est impossible de prouver une relation du type :

$$E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)|_T = 0, \quad \forall \vec{u}|_T \in [(P_k(T))^2 \times P_l(T)], \quad \forall \vec{w}_h \in \vec{V}_h$$

où k et l sont des entiers (désignant des degrés de polynômes, notamment $k=0$ ou 1 et $l = 1$ ou 2). C'est d'ailleurs pour cette même raison que le "Patch Test" d'IRONS-RAZZAQUE [14] ne constitue ni une condition nécessaire de convergence pour des applications aux problèmes de coques, ni une condition suffisante (dans la mesure la géométrie n'intervient pas dans ce test).

Nous nous proposons d'établir une estimation de l'erreur de consistance en faisant apparaître une invariance polynomiale locale satisfaite par l'élément de MORLEY (cf. CIARLET [8], LASCAUX-LESAINT [18], STUMMEL [27]). De façon analogue à CROUZEIX-RAVIART [11, p.40-42], nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.3.2 : Supposons l'existence d'un entier k tel que l'espace W_h satisfait les inclusions :

$$P_k(T) \subset W_h \subset H^{k+1}(T) \quad (3.3.14)$$

où $P_k(T)$ est l'espace des polynômes de degré k ; on munit l'espace W_h de la norme induite $\|\cdot\|_{k+1,T}$. Alors, pour tout entier m , $0 \leq m \leq k$, il existe une constante $c > 0$, indépendante de h_T , telle que :

$$\left| \int_S (M - \pi_S^k M) v_h ds \right| \leq c h_T^{m+k+1} |M|_{m+1,T} |v_h|_{k+1,T}, \quad \forall M \in H^{m+1}(T), \forall v_h \in W_h, \quad (3.3.15)$$

où S représente l'un des trois côtés du triangle T , et où π_S^k désigne l'opérateur de projection de $L^2(S)$ sur $P_k(S)$ (espace des restrictions à S d'éléments de $P_k(T)$) défini par la relation :

$$\int_S p \pi_S^k \phi ds = \int_S p \phi ds, \quad \forall p \in P_k(S), \quad \forall \phi \in L^2(S). \quad (3.3.16)$$

Preuve :

Désignons par :

$$F_T : \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow F_T(\mathbf{x}) = B_T \mathbf{x} + b_T, \quad B_T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), \quad b_T \in \mathbb{R}^2, \quad (3.3.17)$$

l'application affine inversible telle que : $\xi = (\xi^1, \xi^2) = F_T(\mathbf{x})$, $T = F_T(\hat{T})$, $S = F_T(\hat{S})$, où \hat{T} est considéré comme un triangle de référence, et \hat{S} l'un de ses trois côtés. Pour toute fonction f défini sur T (ou sur S), on écrit : $\hat{f} = f \circ F_T$. En particulier on posera :

$$\widehat{\pi_S^k M} = \pi_{\hat{S}}^k \hat{M}. \quad (3.3.18)$$

Soit F_S la restriction de F_T à \hat{S} , i.e.

$$F_S : \hat{x} \in \hat{S} \rightarrow F_S(\hat{x}) = B_S \hat{x} + b_T = \xi \in S, B_S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), \quad (3.3.19)$$

Alors, en utilisant la formule de changement de variables dans les intégrales multiples, on obtient pour tout $M \in H^{m+1}(T)$ et pour tout $v_h \in W_h$:

$$\left| \int_S (M - \pi_S^k M) v_h ds \right| = |\det(B_S)| \left| \int_{\hat{S}} (\hat{M} - \pi_{\hat{S}}^k \hat{M}) \hat{v}_h d\hat{s} \right| \quad (3.3.20)$$

Enfin, en remarquant avec CROUZEIX-RAVIART [11, p42, (3.17)] que :

$$|\det(B_S)| \leq |\det(B_T)| \cdot \|B_T^{-1}\|,$$

avec: $\|B_T^{-1}\| = O(h_T^{-1})$ et $|\det(B_T)| = O(\text{mes}(T)) = O(h_T^2)$ (cf CIARLET [10, théorème 3.13]), on en déduit l'estimation :

$$\left| \int_S (M - \pi_S^k M) v_h ds \right| \leq c_1 h_T \left| \int_{\hat{S}} (\hat{M} - \pi_{\hat{S}}^k \hat{M}) \hat{v}_h d\hat{s} \right| \quad (3.3.21)$$

où c_1 est une constante positive indépendante de h_T .

Puis, nous considérons la forme bilinéaire continue sur $H^{m+1}(T) \times W_h$:

$$(\hat{M}, \hat{v}_h) \rightarrow \int_{\hat{S}} (\hat{M} - \pi_{\hat{S}}^k \hat{M}) \hat{v}_h d\hat{s}$$

D'une part, nous avons pour tout entier m , $0 \leq m \leq k$:

$$\int_{\hat{S}} (\hat{M} - \pi_{\hat{S}}^k \hat{M}) \hat{v}_h d\hat{s} = 0, \forall \hat{M} \in P_m(\hat{T}), \forall \hat{v}_h \in W_h \quad (3.3.22)$$

d'autre part, nous déduisons de la définition (3.3.16) :

$$\int_{\hat{S}} (\hat{M} - \pi_{\hat{S}}^k \hat{M}) \hat{v}_h d\hat{s} = 0, \forall \hat{M} \in H^{m+1}(\hat{T}), \forall \hat{v}_h \in P_k(\hat{T}) \quad (3.3.23)$$

Nous pouvons alors (en vertu de (3.3.14)) appliquer le lemme bilinéaire de CIARLET [10, théorème 4.2.5] (qui consiste en une extension du lemme de Bramble-Hilbert aux formes bilinéaires) ; pour les conditions (3.3.22) (3.3.23), on trouve :

$$\left. \begin{aligned} \left| \int_{\hat{S}} (\hat{M} - \pi_{\hat{S}}^k \hat{M}) \hat{v}_h d\hat{s} \right| &\leq c_2 \left| \hat{M} - \pi_{\hat{S}}^k \hat{M} \right|_{m+1, \hat{S}} \left| \hat{v}_h \right|_{k+1, \hat{T}} \\ &\forall \hat{M} \in H^{m+1}(\hat{T}), \forall \hat{v}_h \in W_h \end{aligned} \right\} \quad (3.3.24)$$

où c_2 est une constante positive (indépendante de h_T).

De plus, une simple application du lemme Bramble-Hilbert (cf. CIARLET [10, théorème 4.1.3]), nous conduit à (c_3 constante positive) :

$$\left| \hat{M} - \pi_{\hat{S}}^k \hat{M} \right|_{m+1, \hat{S}} \leq c_3 \left| \hat{M} \right|_{m+1, \hat{T}} \quad (3.3.25)$$

Finalement, en combinant les inégalités (3.3.21) (3.3.24) (3.3.25) aux résultats de l'interpolation dans les espaces de Sobolev (cf. CIARLET [10, théorème 3.1.2]), soit :

$$|\hat{\phi}|_{\ell, \hat{T}} \leq c_4 \|B_T\|^\ell |\det(B_T)|^{-1/2} |\phi|_{\ell, T} \leq c_5 h_T^{\ell-1} |\phi|_{\ell, T}, \quad \forall \phi \in H^\ell(T) \quad (3.3.26)$$

où c_4 et c_5 sont deux constantes positives indépendantes de h_T , on établit l'estimation (3.3.15) pour tout entier m tel que : $0 \leq m \leq k$.

□

Remarque 3.3.2 : Dans la suite, nous utiliserons le lemme 3.3.2 avec les valeurs $m=0$ (car $\vec{u} \in (H(\Omega))^2 \times H^3(\Omega)$) et $k=0$ (car $Dw_{h3} \in H^1(T)$) afin d'estimer $E_h^*(\vec{u}, \vec{w}_h)$. Soulignons que l'estimation (3.3.15) s'obtient sous la contrainte $m \leq k$, de sorte que, pour une hypothèse plus grande de régularité, ce résultat n'est plus optimal.

Cependant, il est possible d'en donner une extension au cas où $0 \leq k \leq m$. En utilisant la continuité de la forme linéaire : $v_h \rightarrow \int_S (\hat{M} - \pi_S^k \hat{M}) v_h ds$ sur $H^1(\hat{T})$, on a :

$$|\int_S (\hat{M} - \pi_S^k \hat{M}) v_h ds| \leq c_6 \|(\hat{M} - \pi_S^k \hat{M})\|_{0, \hat{S}} \|v_h\|_{1, \hat{T}} \leq c_7 |\hat{M}|_{k+1, \hat{T}} \|v_h\|_{1, \hat{T}}$$

(où l'on a utilisé le lemme de Bramble-Hilbert pour obtenir la seconde inégalité) d'où avec (3.3.26)

$$|\int_S (M - \pi_S^k M) v_h ds| \leq c_8 h_T^k |M|_{k+1, T} \|v_h\|_{1, T}$$

$$\forall M \in H^{m+1}(T), \quad \forall v_h \in W_h CH^1(T), \quad 0 \leq k \leq m \quad \square$$

L'application du lemme 3.3.2 pour l'estimation du terme de consistance $E_h^*(\vec{u}, \vec{w}_h)$, (3.3.4), s'appuie sur l'hypothèse de *compatibilité* —plus faible que l'hypothèse de continuité des fonctions d'un élément à l'autre pour les méthodes d'éléments finis conformes—, soit :

Hypothèse de compatibilité : Pour tout bord S commun à deux triangles T_1 et T_2 de \mathcal{T}_h , il existe un entier $l \geq 0$ tel que :

$$\int_S p (v_h|_{T_1} - v_h|_{T_2}) ds = 0, \quad \forall p \in P_l(S), \quad \forall v_h \in W_h; \quad (3.3.27)$$

et pour tout bord S (du triangle T) appartenant à la frontière Γ_0 , on suppose que l'on a :

$$\int_S p v_h|_T ds = 0, \quad \forall p \in P_l(S), \quad \forall v_h \in W_h. \quad (3.3.28)$$

□

Dans notre cas, on identifiera : v_h à $\partial_t w_{h3}$, puis à $\partial_n v_{h3}$, w_h à $(v_h \in \Pi_{T \in \mathcal{T}_h} H^1(T), v_h(\Sigma) = 0, \forall \Sigma \in \Gamma_0)$, M à $\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_\alpha t_\beta$, puis à $\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_\alpha n_\beta$. La relation (3.3.27) exprime une invariance polynomiale (locale) satisfaite par l'espace des fonctions associées à l'élément de MORLEY au moins pour $l = 0$: en effet, pour tout $w_{h3} \in P_2(S)$, on vérifie aisément que l'on a pour $S = (\Sigma_i, \Sigma_j)$, $\Sigma_{ij} = 1/2(\Sigma_i + \Sigma_j)$, $1 \leq i < j \leq 3$, et $\vec{t} = \frac{\Sigma_i \Sigma_j}{\Sigma_i \Sigma_j}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S \partial_t w_{h3} ds &= \frac{1}{\Sigma_i \Sigma_j} (w_{h3}(\Sigma_j) - w_{h3}(\Sigma_i)) , \\ \frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S \partial_n w_{h3} ds &= \partial_n w_{h3}(\Sigma_{ij}), \end{aligned} \right\} \quad (3.3.29)$$

de sorte que la continuité des degrés de liberté nous conduit aux relations (3.3.27) et (3.3.28) pour tout $w_{h3} \in V_{h2}$ lorsque $v_h = \partial_t w_{h3}$ ou $v_h = \partial_n w_{h3}$. On obtient alors l'estimation suivante :

Proposition 3.3.1 Supposons que la solution \vec{u} du problème continu 1.1.1 appartient à l'espace $\vec{V} \cap [H^2(\Omega)]^2 \times H^3(\Omega)$. Alors pour tout $\vec{w}_h \in \vec{V}_h$, on a :

$$|E_h^*(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq \text{ch} (\|u_1\|_{2,\Omega}^2 + \|u_2\|_{2,\Omega}^2 + \|u_3\|_{3,\Omega}^2)^{1/2} \cdot \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{2,T}^2 \right)^{1/2} \quad (3.3.30)$$

Preuve : On écrit à la place de (3.3.27) (3.3.28), pour tout $w_{h3} \in V_{h2}$

$$\left. \begin{aligned} \int_S [\pi_S^0(\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_\alpha t_\beta)] (\partial_t w_{h3}|_{T_1} - \partial_t w_{h3}|_{T_2}) ds &= 0, \\ \int_{S \subset \Gamma_0} [\pi_S^0(\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_\alpha t_\beta)] (\partial_t w_{h3}|_T) ds &= 0, \\ \int_S [\pi_S^0(\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_\alpha n_\beta)] (\partial_n w_{h3}|_{T_1} - \partial_n w_{h3}|_{T_2}) ds &= 0, \\ \int_{S \subset \Gamma_0} [\pi_S^0(\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_\alpha n_\beta)] (\partial_n w_{h3}|_T) ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.31)$$

Par suite, nous en déduisons dans (3.3.4) :

$$E_h^*(\vec{u}, \vec{w}_h) = \sum_{\substack{S \subset \partial T, T \in \mathcal{T}_h \\ S \subset \Gamma_0}} \int_S \left([\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_\alpha t_\beta - \pi_{S_i}^0(\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_\alpha t_\beta)] \partial_t w_{h3} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_\alpha n_\beta - \pi_{S_i}^0(\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_\alpha n_\beta)] \partial_n w_{h3} \right) ds, \quad (3.3.32)$$

$\vec{w}_h \in \vec{V}_h$.

Comme $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2 \times H^3(\Omega)$, et sous l'hypothèse (1.1.13) (en prenant les coefficients $E, e, a_{\alpha\beta}$, etc.. bornés sur Γ), on a : $\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) \in H^1(\Omega)$, et l'on peut appliquer le lemme 3.3.2 avec $m=0$ et $k=l=0$. Par sommation sur tous les triangles T de \mathcal{T}_h , on obtient l'estimation (3.3.30).

□

Il nous reste à estimer $R_h(\vec{u}, \vec{w}_h)$:

Proposition 3.3.2 : Sous les hypothèses de la proposition 3.3.1., on a pour tout $\vec{w}_h \in \vec{V}_h$:

$$|R_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch((\|u_1\|_{2,\Omega}^2 + \|u_2\|_{2,\Omega}^2 + \|u_3\|_{3,\Omega}^2)^{1/2} + h\|p_3\|_{0,\Omega}) (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w_3|_{2,T}^2)^{1/2} \quad (3.3.33)$$

Preuve : On procède de manière similaire, mais cette fois on considère la V_{h1} -interpolée de la fonction $w_{h3} \in V_{h2}$, notée \tilde{w}_{h3} , et construite de façon à vérifier $\tilde{w}_{h3}(\Sigma) = w_{h3}(\Sigma)$, en tous les sommets Σ de \mathcal{T}_h . On note que : $\tilde{w}_{h3}|_T = \pi_T^1 w_{h3}$, et par construction on a : $\tilde{w}_{h3} \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. On montre tout d'abord que :

$$R_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = 0, \text{ pour tout } \vec{w}_h = w_{h\alpha} \vec{a} + \tilde{w}_{h3} \vec{a}^3, w_{h\alpha} \in V_{h1}, \tilde{w}_{h3} \in V_{h1} \quad (3.3.34)$$

En effet, comme $\tilde{w}_{h3} \in H^1(\Omega)$, on considère une suite $(w_{h3}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions $w_{h3}^k \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ telle que : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\tilde{w}_{h3} - w_{h3}^k\|_{1,\Omega} = 0$ —ou de façon équivalente, on considère une suite de vecteurs $(\vec{w}_h^k = w_{h\alpha} \vec{a} + w_{h3}^k \vec{a}^3)_{k \in \mathbb{N}}$ fortement convergente vers \vec{w}_h dans $(H^1(\Omega))^3$; on a alors par densité dans (3.3.3) :

$$R_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = - \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} ([b_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + p^3] w_{h3}^k + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha} w_{h3,\beta}^k) \sqrt{ad\xi^1 d\xi^2} + \lim_{k \rightarrow +\infty} S_h(\vec{u}, \vec{w}_h^k),$$

et en utilisant la formule de Green (voir lemme 3.3.1) :

$$R_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (a(\vec{u}, \vec{w}_h^k) - f(\vec{w}_h^k) - \int_{\Gamma_0} [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha}] w_{h3,\beta}^k ds) ;$$

ainsi, avec les conditions : $w_{h3}|_{\Gamma_0} = 0, \partial_{\nu} w_{h3}|_{\Gamma_0} = 0$, nous obtenons (3.3.34).

En supposant les coefficients de (1.1.13) dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ et bornés sur Γ , on peut donc écrire pour tout $\vec{w}_h \in \vec{V}_h$:

$$R_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = \left. \begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T ([b_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + p^3] (\tilde{w}_{h3} - w_{h3}) + \\ & \quad + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha} (\tilde{w}_{h3,\beta} - w_{h3,\beta})) \sqrt{ad\xi^1 d\xi^2} \\ & + \sum_{\substack{S \subset (\Gamma - \Gamma_0) \\ S \subset \partial T, T \in \mathcal{T}_h}} \int_S [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha}] (w_{h3,\beta} - \tilde{w}_{h3,\beta}) ds. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.35)$$

D'une part, en posant $M_1 = b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})$ et $M_2 = \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\alpha}$, et en notant que $M_1 \in H^1(\Omega)$ et $M_2 \in L^2(\Omega)$, l'application (3.3.17) permet d'écrire :

$$\left. \begin{aligned} & \left| \int_T [(M_1 + p^3)(w_{h3} - \pi_T^1 w_{h3}) + M_2(w_{h3} - \pi_T^1 w_{h3})]_{,\beta} dx \right| = \\ & = |\det(B_T)| \cdot \left| \int_{\hat{T}} [(\hat{M}_1 + \hat{p}^3)(\hat{w}_{h3} - \pi_{\hat{T}}^1 \hat{w}_{h3}) + \hat{M}_2(\hat{w}_{h3} - \pi_{\hat{T}}^1 \hat{w}_{h3})]_{,\beta} d\hat{x} \right|, \end{aligned} \right\} (3.3.36)$$

avec $|\det(B_T)| = O(h_T^2)$. En utilisant la continuité de la forme linéaire précédente sur V_{h2} , puis en appliquant le lemme de Bramble-Hilbert, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} & \left| \int_{\hat{T}} [(\hat{M}_1 + \hat{p}^3)(\hat{w}_{h3} - \pi_{\hat{T}}^1 \hat{w}_{h3}) + \hat{M}_2(\hat{w}_{h3} - \pi_{\hat{T}}^1 \hat{w}_{h3})]_{,\beta} d\hat{x} \right| \leq \\ & \leq c_1 (|\hat{M}_1 + \hat{p}^3|_{0,\hat{T}} |\hat{w}_{h3} - \pi_{\hat{T}}^1 \hat{w}_{h3}|_{0,\hat{T}} + |\hat{M}_2|_{0,\hat{T}} |\hat{w}_{h3} - \pi_{\hat{T}}^1 \hat{w}_{h3}|_{1,\hat{T}}) \\ & \leq c_2 (|\hat{M}_1 + \hat{p}^3|_{0,\hat{T}} + |\hat{M}_2|_{0,\hat{T}}) |\hat{w}_{h3}|_{2,\hat{T}} \end{aligned} \right\} (3.3.37)$$

d'où, en combinant (3.3.26) (3.3.36) (3.3.37), on déduit l'existence d'une constante c_3 positive, indépendante de h , telle que :

$$\left. \begin{aligned} & \left| \int_T [(M_1 + p^3)(w_{h3} - \pi_T^1 w_{h3}) + M_2(w_{h3} - \pi_T^1 w_{h3})]_{,\beta} dx \right| \leq \\ & \leq c_3 h_T^2 (|M_1|_{0,T} + |p^3|_{0,T} + |M_2|_{0,T}) |w_{h3}|_{2,T} \end{aligned} \right\} (3.3.38)$$

D'autre part, en posant $M_3 = \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})n_{\alpha}$, $M_3 \in H^1(\Omega)$, l'application (3.3.19) permet d'écrire :

$$\left| \int_S M_3(w_{h3} - \pi_T^1 w_{h3})_{,\beta} ds \right| = |\det(B_S)| \cdot \left| \int_{\hat{S}} \hat{M}_3(\hat{w}_{h3} - \pi_{\hat{T}}^1 \hat{w}_{h3})_{,\beta} d\hat{s} \right| \quad (3.3.39)$$

avec $|\det(B_S)| = O(h_T)$. En reprenant les mêmes arguments que précédemment, on a :

$$\left| \int_{\hat{S}} \hat{M}_3(\hat{w}_{h3} - \pi_{\hat{T}}^1 \hat{w}_{h3})_{,\beta} d\hat{s} \right| \leq c_4 |\hat{M}_3|_{0,\hat{S}} |\hat{w}_{h3}|_{2,\hat{T}}$$

ou encore :

$$\left| \int_{\hat{S}} \hat{M}_3(\hat{w}_{h3} - \pi_{\hat{T}}^1 \hat{w}_{h3})_{,\beta} d\hat{s} \right| \leq c_5 \|\hat{M}_3\|_{1,\hat{T}} |\hat{w}_{h3}|_{2,\hat{T}} \quad (3.3.40)$$

En combinant (3.3.26) (3.3.39) (3.3.40), on déduit l'existence d'une c_6 positive, indépendante de h , telle que :

$$\left| \int_S M_3(w_{h3} - \pi_T^1 w_{h3})_{,\beta} ds \right| \leq c_6 h \|\hat{M}_3\|_{1,T} |w_{h3}|_{2,T} \quad (3.3.41)$$

A partir des estimations élémentaires (3.3.38) et (3.3.41), on établit, par sommation sur les triangles T de \mathcal{T}_h , l'inégalité (3.3.33).

□

Remarque 3.3.3 : Lorsque $\text{mes}(\Gamma - \Gamma_0) = 0$, nous obtenons l'estimation :

$$|R_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch^2 (\|u_1\|_{2,\Omega}^2 + \|u_2\|_{2,\Omega}^2 + \|u_3\|_{3,\Omega}^2)^{1/2} + \|p_3\|_{0,\Omega} (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{2,T}^2)^{1/2} \quad \square$$

En définitive, en réunissant les résultats des propositions 3.3.1. et 3.3.2 avec la décomposition du lemme 3.3.1, nous obtenons :

Théorème 3.3.1 : Supposons : $\vec{\phi} \in (W^{4,\infty}(\Omega))^3$; $E, e \in W^{1,\infty}(\Omega)$; et $E, e, a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}, a, b_{\alpha\beta}, b_{\alpha}^{\beta}, b_{\beta,\gamma}^{\alpha}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ bornés sur Γ ; si la solution \vec{u} du problème continu 1.1.1 appartient à l'espace $\vec{V} \cap [(H^2(\Omega))^2 \times H^3(\Omega)]$, alors il existe une constante C , indépendante de h , telle que l'on ait :

$$|f(\vec{w}_h) - a_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch (\|u_1\|_{2,\Omega}^2 + \|u_2\|_{2,\Omega}^2 + \|u_3\|_{3,\Omega}^2)^{1/2} + h \|p_3\|_{0,\Omega} \| \vec{w}_h \|_{\vec{V}_h} \quad (3.3.42) \square$$

Remarque 3.3.4 : Ce résultat nous apparaît comme optimal du point de vue de l'hypothèse sur la régularité de \vec{u} . LASCAUX-LESAINTE [18] ont mené leur étude sous l'hypothèse $u_3 \in H^4(\Omega)$ (ce qui ne peut correspondre au cas où Ω est un domaine polygonal convexe). Remarquons que l'hypothèse $\vec{u} \in (H^3(\Omega))^2 \times H^4(\Omega)$ nous aurait permis d'obtenir une décomposition du type :

$$E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} ([-\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha} n_{\beta} - \partial_t (\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} t_{\beta})] w_{h3} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} n_{\beta}] \partial_n w_{h3}) ds$$

conduisant à l'estimation (en utilisant le lemme 3.3.2) :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch (\|u_1\|_{2,\Omega}^2 + \|u_2\|_{2,\Omega}^2 + \|u_3\|_{3,\Omega}^2)^{1/2} + h (\|u_1\|_{3,\Omega}^2 + \|u_2\|_{3,\Omega}^2 + \|u_3\|_{4,\Omega}^2)^{1/2} \| \vec{w}_h \|_{\vec{V}_h} \quad \left. \vphantom{|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)|} \right\}$$

(à comparer avec (3.3.42)).

□

3.4 Existence et unicité d'une solution pour le problème discret ; convergence

Les conditions sur l'interpolation (3.1.3), et de consistance (3.1.4) étant respectivement établies au moyen des estimations d'erreurs (3.2.1) et (3.3.42), nous sommes en mesure d'appliquer un résultat de STUMMEL [28] assurant la \vec{V}_h -ellipticité uniforme de la forme bilinéaire $a_h(\dots)$. Dès lors, nous pourrions conclure : d'une part sur l'existence et l'unicité de la solution \vec{u}_h du problème 2.2.1, d'autre part sur la convergence de \vec{u}_h vers \vec{u} (la solution du problème continu 1.1.1) au moyen d'une estimation du type : $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{\vec{V}_h} = O(h)$.

On commence par énoncer le théorème qui assure la bistabilité de la forme bilinéaire $a_h(\dots)$ pour des triangulations quasi-uniformes (cf. STUMMEL [28, 3.2 (10)]) :

Théorème 3.4.1 : (STUMMEL [28, 3.2 (13)])

Supposons que :

- i) le problème 1.1.1 est bien posé ;
- ii) la forme bilinéaire $a_h(\dots)$ définie par (2.2.1) est symétrique, positive (i.e. $a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) \geq 0, \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h$), et uniformément coercive, i.e. il existe deux constantes $C_0 > 0$ et $C_1 \geq 0$, indépendante de h , telles que l'on ait pour tout $\vec{v}_h \in \vec{V}_h$:

$$\left. \begin{aligned}
 a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) \geq C_0 (\|v_{h1}\|_{1,\Omega}^2 + \|v_{h2}\|_{1,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v_{h3}\|_{2,T}^2) \\
 - C_1 (\|v_{h1}\|_{0,\Omega}^2 + \|v_{h2}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v_{h3}\|_{1,T}^2)^{1/2} ;
 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.1)$$

- iii) l'inclusion : $v_{h2} \subset \prod_{T \in \mathcal{T}_h} [P_2(T) \cap H^2(T)]$, est satisfaite ;

iv) à chaque côté S (d'un triangle T) de \mathcal{T}_h , on peut associer une forme linéaire continue g_S sur $\mathcal{C}^0(S)$ telle que :

- α) $g_S(p_0) = p_0$, où p_0 est une constante sur S ,
- β) g_S est une contraction, i.e. $\sup_{v \in \mathcal{C}^0(S)} |g_S(v)| \leq \max_S |v|$;
- γ) $g_S(v_h|_{T_1}) = g_S(v_h|_{T_2})$, où $S = T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$,

et où v_h s'identifie successivement à w_{h3} , $\partial_t w_{h3}$, $\partial_n w_{h3}$, pour tout $w_{h3} \in \vec{V}_{h2}$;

v) la condition sur l'interpolation est satisfaite, i.e.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} \|\vec{v} - \vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} = 0, \forall \vec{v} \in \vec{V}; \quad (3.4.2)$$

vi) la condition de fermeture est vérifiée, i.e. la limite de toute suite faiblement convergente de fonctions $w_{h3} \in V_{h2}$ (lorsque $h \rightarrow 0$) appartient à $H^2(\Omega)$;

alors il existe deux constantes positives, α_0 et α_1 indépendantes de h , telles que l'on ait uniformément :

$$\alpha_0 \|\vec{v}_h\|_{\vec{V}_h}^2 \leq a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) \leq \alpha_1 \|\vec{v}_h\|_{\vec{V}_h}^2, \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h \quad (3.4.3)$$

□

A l'aide des résultats précédents, nous obtenons alors :

Théorème 3.4.2 : Supposons : $\vec{f} \in (W^{4,\infty}(\Omega))^3$; $E, e \in W^{1,\infty}(\Omega)$; et les coefficients $E, e, a_{\alpha\beta}, a, b_{\alpha\beta}, b_{\alpha}^{\beta}, b_{\beta,\gamma}^{\alpha}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ bornés sur Γ ; supposons de plus que la solution \vec{u} du problème 1.1.1 appartient à l'espace $\vec{V} \cap [(H^2(\Omega))^2 \times H^3(\Omega)]$.

Alors pour tout $\vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$, le problème discret 2.2.1 admet une solution unique $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$, et il existe une constante C , indépendante de h , telle que :

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{\vec{V}_h} \leq Ch \left(\|\| u_1 \|_{2,\Omega}^2 + \| u_2 \|_{2,\Omega}^2 + \| u_3 \|_{3,\Omega}^2 \right)^{1/2} + h \| p_3 \|_{0,\Omega}. \quad (3.4.4)$$

Preuve :

On applique tout d'abord le théorème 3.4.1. La condition i) se vérifie à l'aide du théorème 1.1.1 (cf BERNADOU-CIARLET [5]). De la définition (2.2.1), on vérifie aisément que la forme bilinéaire approchée $a_h(\dots)$ est symétrique ; elle est positive en vertu du fait que sa restriction à chaque triangle T de \mathcal{T}_h est positive : en effet, d'après BERNADOU-CIARLET [6, théorème 6.1.2], on a pour tout $\vec{v}_h \in (H^1(T))^2 \times H^2(T)$, l'existence d'une constante $K > 0$, telle que :

$$a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h)|_T \geq K \left(|\gamma_{11}(\vec{v}_h)|^2 + |\gamma_{12}(\vec{v}_h)|^2 + |\gamma_{22}(\vec{v}_h)|^2 + |\bar{\rho}_{11}(\vec{v}_h)|^2 + |\bar{\rho}_{12}(\vec{v}_h)|^2 + |\bar{\rho}_{22}(\vec{v}_h)|^2 \right) \quad (3.4.5)$$

par sommation sur T , on en déduit la propriété. La coercivité uniforme de la forme bilinéaire $a_h(\dots)$ s'obtient également au niveau de chaque triangle T , d'une part à l'aide de l'inégalité (3.4.5), et d'autre part

en appliquant le résultat algébrique suivant (cf BERNADOU-CIARLET [5, § 3.2, 3.3, 3.4, (6.1.6)]) :

$$\left. \begin{aligned} & (|\gamma_{11}(\vec{v}_h)|^2 + |\gamma_{12}(\vec{v}_h)|^2 + |\gamma_{22}(\vec{v}_h)|^2 + |\bar{\rho}_{11}(\vec{v}_h)|^2 + |\bar{\rho}_{12}(\vec{v}_h)|^2 + |\bar{\rho}_{22}(\vec{v}_h)|^2) \geq \\ & \geq \frac{1}{L} (\|v_{h1}\|_{1,T}^2 + \|v_{h2}\|_{1,T}^2 + \|v_{h3}\|_{2,T}^2) - \frac{M}{L} (\|v_{h1}\|_{0,T}^2 + \|v_{h2}\|_{0,T}^2 + \|v_{h3}\|_{1,T}^2), \end{aligned} \right\} (3.4.6)$$

$\vec{v}_h \in (H^1(T))^2 \times H^2(T)$,

où M et L sont deux constantes positives, indépendantes de h. Par sommation sur T, en combinant (3.4.5) et (3.4.6), on déduit l'inégalité (3.4.1).

De plus, la définition (2.1.4) satisfait la condition iii). Par ailleurs, deux exemples classiques de formes linéaires continues ξ_S vérifiant iv) α) β) γ) sont :

- la fonctionnelle de Dirac en un point de S, i.e. :

$$\xi_S(v_h|_T) = v_h|_T(x_0), \quad x_0 \in S ;$$

- la valeur moyenne de $v_h|_T$ sur S, i.e. :

$$\xi_S(v_h|_T) = \frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S v_h|_T \, ds ;$$

(remarquons que dans ce dernier cas la condition γ) est équivalente à l'hypothèse de compatibilité (3.3.27) pour $l=0$). Or, la définition de l'élément fini de Morley permet d'associer à S les formes $\xi_{S,i}(v_h|_T) = v_h|_T(\Sigma_i)$, $i=1,2$ (Σ_i étant les sommets de T appartenant à S) lorsque $v_h = w_{h3}$; puis, à l'aide des relations (3.3.29), on associe à S la valeur moyenne de $v_h|_T$ lorsque $v_h = \partial_t w_{h3}$ ou $v_h = \partial_n w_{h3}$. Ainsi la condition iv) est vérifiée.

L'estimation de l'erreur d'interpolation suffit à assurer la condition v). Enfin, selon STUMMEL [27, 1-3 (5)], la condition vi) est équivalente à la condition de consistance (3.1.4). Celle-ci se déduit de l'estimation (3.3.42).

En conséquence, le théorème 3.4.1 établit la \vec{v}_h -ellipticité uniforme de la forme bilinéaire $a_h(\dots)$, ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$ du problème discret 2.2.1. Puis, en vertu de l'inégalité (3.4.3) et des théorèmes 3.1.1, 3.2.1, 3.3.1, on obtient l'estimation d'erreur (3.4.4), qui prouve la convergence lorsque h tend vers 0.

□

4. APPROXIMATION CONFORME DE LA GEOMETRIE

Dans ce paragraphe, nous montrons comment étendre certains résultats obtenus par CIARLET [9] d'une part, en considérant une approximation polynomiale par triangle de la carte $\vec{\phi}$ qui définit la surface moyenne de la coque, par BERNADOU [4] d'autre part, en prenant en compte l'effet de l'intégration numérique, au cas des méthodes d'éléments finis nonconformes - le problème 2.2.1 supposait en effet une connaissance exacte de la géométrie de la coque, et une intégration exacte des expressions (1.1.9) et (2.2.1). Nous formulons les problèmes discrets associés à chacune de ces approximations, et étudions l'influence de celles-ci sur les estimations d'erreurs précédentes.

4.1 Approximation explicite de la carte

Selon CIARLET [10, théorème 8.1.1], il est possible de réécrire la forme bilinéaire $a_h(\dots)$, définie en (2.2.1) par :

$$a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T {}^t v_h [A_{IJ}(\xi)] w_h d\xi, \quad \forall \vec{v}_h, \vec{w}_h \in \vec{V}_h \quad (4.1.1)$$

où nous avons noté :

$${}^t v_h = {}^t (v_{hI})_{I=1,12} = (v_{h1}; v_{h1,1}; v_{h1,2}; v_{h2}; v_{h2,1}; v_{h2,2}; v_{h3}; v_{h3,1}; v_{h3,2}; v_{h3,11}; v_{h3,12}; v_{h3,22}) \quad \left. \vphantom{{}^t v_h} \right\}$$

avec une définition similaire pour w_h ; et où les termes $A_{IJ}(\xi)$ représentent des fonctions quotient entre un polynôme dont les arguments sont les dérivées premières, secondes et troisièmes des composantes ϕ_i de la carte $\vec{\phi} = \phi_i \vec{e}_i^1$, et un dénominateur qui est une puissance entière de l'expression :

$$\sqrt{a} = [(\sum_{i=1}^3 (\phi_{i,1})^2)(\sum_{j=1}^3 (\phi_{j,2})^2) - (\sum_{i=1}^3 \phi_{i,1} \phi_{i,2})^2]^{1/2} \quad (4.1.2)$$

En particulier, les hypothèses (1.1.2) (1.1.3) nous conduisent à $A_{IJ} \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, $1 \leq I, J \leq 12$. De même, la forme linéaire $f(\cdot)$ définie par (1.1.9) s'écrit comme :

$$f(\vec{w}_h) = \int_{\Omega} {}^t F w_h d\xi \quad (4.1.3)$$

avec :

$${}^t F = \sqrt{a} (p^1; 0; 0; p^2; 0; 0; p^3; 0; 0; 0; 0; 0) \quad (4.1.4)$$

Maintenant, nous associons à chaque triangulation \mathcal{T}_h un espace d'élément fini $\vec{\Phi}_h$, et sur chaque triangle T de \mathcal{T}_h , on définit la $\vec{\Phi}_h$ -interpolée de la carte $\vec{\phi}$, de sorte que la carte approchée $\vec{\phi}_h = \phi_{hi} \vec{e}^i$, avec $\phi_{hi} = \theta_h \phi_i$, $1 \leq i \leq 3$, où θ_h désigne l'opérateur d'interpolation sur $\vec{\Phi}_h$, est seulement définie sur l'union des intérieurs de chaque triangle, i.e. $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \overset{\circ}{T}$ (a priori $\vec{\phi}_h \in (\mathcal{C}^0(\Omega))^3$).

On définit ainsi un nouveau problème discret :

Problème 4.1.1 : Trouver $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$ tel que :

$$\tilde{a}_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = \tilde{f}_h(\vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h, \quad (4.1.5)$$

où la forme bilinéaire approchée $\tilde{a}_h(\dots)$ est donnée par :

$$\tilde{a}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T {}^t v_h [A_{hIJ}(\xi)] w_h d\xi, \quad (4.1.6)$$

et où la forme linéaire approchée $\tilde{f}_h(\cdot)$ est donnée par :

$$\tilde{f}_h(\vec{w}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T {}^t F_h w_h d\xi, \quad (4.1.7)$$

A_{hIJ} et F_h ayant respectivement les mêmes expressions que A_{IJ} et F , mais leurs arguments étant cette fois les dérivées jusqu'au troisième ordre des composantes ϕ_{hi} . En d'autres termes, la modification de la forme bilinéaire par (4.1.6) équivaut à remplacer chaque dérivée covariante par rapport à la surface moyenne continue \mathcal{S} par la dérivée covariante correspondante par rapport à la surface moyenne approchée $\mathcal{S}_h = \vec{\phi}_h(\Omega)$.

Suivant CIARLET [9], on établit le résultat suivant (à comparer avec CIARLET [10, théorème 8.2.4, (8.2.29)] dans le cas des méthodes conformes) :

Théorème 4.1.1 : Supposons que les espaces $\vec{\Phi}_h$ sont tels que les inclusions :

$$\forall T \in \bigcup_h \mathcal{T}_h, P_m(T) \subset P_\phi \subset \mathcal{C}^3(T), \quad m \in \mathbb{N}, m \geq 3, \quad (4.1.8)$$

où les \mathcal{T}_h sont des familles régulières de triangulation. Alors, sous les hypothèses du théorème 3.4.2, il existe deux constantes $h_0 > 0$ et $C > 0$,

indépendantes de h , telles que, pour tout $\vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$, et pour tout $h \leq h_0$, le problème 4.1.1 admet une solution unique $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$, et on a :

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\| \leq Ch (\|u_1\|_{2,\Omega}^2 + \|u_2\|_{2,\Omega}^2 + \|u_3\|_{3,\Omega}^2)^{1/2} + h \|\vec{p}\|_{0,\Omega} \quad (4.1.9)$$

Preuve (en trois étapes) :

Etape 1 : Estimations des erreurs $|a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - \tilde{a}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h)|$,
 $|f(\vec{w}_h) - \tilde{f}_h(\vec{w}_h)|$

L'hypothèse (4.1.8) nous donne pour $1 \leq i \leq 3$ et $\alpha, \beta, \gamma \in (1, 2)$:

$$\left. \begin{aligned} \sup_{\xi \in T} |\phi_{i,\alpha}(\xi)| &\leq C_1 h^m |\phi_i|_{m+1,\infty,\tilde{\Omega}} \\ \sup_{\xi \in T} |\phi_{i,\alpha\beta}(\xi)| &\leq C_2 h^{m-1} |\phi_i|_{m+1,\infty,\tilde{\Omega}} \\ \sup_{\xi \in T} |\phi_{i,\alpha\beta\gamma}(\xi)| &\leq C_3 h^{m-2} |\phi_i|_{m+1,\infty,\tilde{\Omega}} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.10)$$

(ce qui conserve un sens pour $m=3$ si $\vec{\phi} \in (W^{4,\infty}(\tilde{\Omega}))^3$). En particulier, on remarque (cf. CIARLET [10, théorème 8.2.1]) qu'il existe $h_1 > 0$ tel que pour tout $h \leq h_1$, on ait selon (4.1.2) :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{a_h} - |(\phi_{hi,1} \vec{e}^i) \times (\phi_{hj,2} \vec{e}^j)| &= \sqrt{a} - (\sqrt{a} - \sqrt{a_h}) \\ &\geq (C_4 - C_5 h^m) \sum_{i=1}^3 |\phi_i|_{m+1,\infty,\tilde{\Omega}} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1.11)$$

de sorte que les coefficients A_{hIJ} sont bornés. Ainsi la forme bilinéaire $\tilde{a}_h(\dots)$ donnée par (4.1.6) est bien définie sur $(\vec{V} + \vec{V}_h)^2$; elle est même continue sur $(\vec{V} + \vec{V}_h)^2$.

En observant que, pour tout $\vec{v}_h, \vec{w}_h \in \vec{V}_h$, on a :

$$|a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - \tilde{a}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h)| \leq C_6 \left(\sum_{I,J=1}^3 \sup_{\xi \in UT} |A_{IJ}(\xi) - A_{hIJ}(\xi)| \right) \|\vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} \|\vec{w}_h\|_{\vec{V}_h} \quad (4.1.12)$$

et, sous l'hypothèse où (4.1.11) est satisfait, qu'il existe une constante C_7 positive, indépendante de h , telle que (cf. CIARLET [10, théorème 8.2.1, (8.2.20)]) :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{I,J=1}^{12} \sup_{\xi \in T} |A_{IJ}(\xi) - A_{hIJ}(\xi)| &\leq C_7 \left(\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{\alpha=1}^2 \sup_{\xi \in UT} |\phi_{i,\alpha}(\xi) - \phi_{hi,\alpha}(\xi)| + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \sup_{\xi \in UT} |\phi_{i,\alpha\beta}(\xi) - \phi_{hi,\alpha\beta}(\xi)| + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^2 \sup_{\xi \in UT} |\phi_{i,\alpha\beta\gamma}(\xi) - \phi_{hi,\alpha\beta\gamma}(\xi)| \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.13)$$

on montre, avec (4.1.10), l'existence d'une constante positive C_8 , indépendante de h , telle que :

$$|a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - \tilde{a}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h)| \leq C_8 h^{m-2} \|\vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} \|\vec{w}_h\|_{\vec{V}_h}, \quad \forall \vec{v}_h, \vec{w}_h \in \vec{V}_h \quad (4.1.14)$$

De façon similaire avec (4.1.11), on obtient :

$$|f(\vec{w}_h) - \tilde{f}_h(\vec{w}_h)| \leq C_9 h^m \|\vec{p}\|_{0,\Omega} \|\vec{w}_h\|_{\vec{V}_h}, \quad \forall \vec{w}_h \in \vec{V}_h \quad (4.1.15)$$

*Etape 2 : \vec{V}_h -ellipticité uniforme de la forme $\tilde{a}_h(\dots)$;
existence et unicité de \vec{u}_h .*

De la \vec{V}_h -ellipticité uniforme de la forme $a_h(\dots)$ en (3.4.3), on déduit :

$$\alpha_0 \|\vec{v}_h\|_{\vec{V}_h}^2 \leq a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) - \tilde{a}_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) + [a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) - \tilde{a}_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h)], \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h$$

et, en vertu de (4.1.14) :

$$a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) \geq (\alpha_0 - C_8 h^{m-2}) \|\vec{v}_h\|_{\vec{V}_h}^2, \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h \quad (4.1.16)$$

Par conséquent, il existe deux constantes $\beta > 0$ et $h_2 > 0$, telles que pour tout $h \leq h_2$, la forme $a_h(\dots)$ soit uniformément \vec{V}_h -elliptique (par exemple on choisit dans (4.1.16), $h_1 = (\frac{\alpha_0}{2C_8})^{1/m-2}$ et $\beta = \frac{\alpha_0}{2}$), i.e.

$$\beta \|\vec{v}_h\|_{\vec{V}_h}^2 \leq \tilde{a}_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h, \quad (4.1.17)$$

(on prouverait la continuité de la forme $\tilde{a}_h(\dots)$ sur $(\vec{V}_h)^2$ de la même façon).

Le problème 4.1.1 admet donc une solution unique $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$ pour tout $h \leq h_2$ (c'est une conséquence du lemme de LAX-MILGRAM).

Etape 3 : Estimations d'erreurs ; convergence de \vec{u}_h vers \vec{u} .

En prenant le problème 1.1.1 pour référence, on établit une estimation abstraite de l'erreur $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{\vec{V}_h}$. En supposant (4.1.17) vérifiée, on a :

$$\beta \left\| \vec{u}_h - \vec{v}_h \right\|_{\vec{V}_h}^2 \leq \tilde{a}_h(\vec{u}_h - \vec{v}_h, \vec{u}_h - \vec{v}_h) + \left. \begin{aligned} &\leq a_h(\vec{u} - \vec{v}_h, \vec{u}_h - \vec{v}_h) + [a_h(\vec{v}_h, \vec{u}_h - \vec{v}_h) - \tilde{a}_h(\vec{v}_h, \vec{u}_h - \vec{v}_h)] + \\ &+ [\tilde{f}_h(\vec{u}_h - \vec{v}_h) - f(\vec{u}_h - \vec{v}_h)] + [f(\vec{u}_h - \vec{v}_h) - a_h(\vec{u}, \vec{u}_h - \vec{v}_h)], \end{aligned} \right\}$$

et, en vertu de la continuité de la forme bilinéaire $a_h(\dots)$ sur $(\vec{V} + \vec{V}_h)^2$ (établie en (3.4.3)), on obtient pour tout $\vec{v}_h \in \vec{V}_h$:

$$\left\| \vec{u}_h - \vec{v}_h \right\|_{\vec{V}_h} \leq C_{10} \left(\left\| \vec{u} - \vec{v}_h \right\|_{\vec{V}_h} + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - \tilde{a}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h)|}{\left\| \vec{w}_h \right\|_{\vec{V}_h}} + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|\tilde{f}_h(\vec{w}_h) - f(\vec{w}_h)|}{\left\| \vec{w}_h \right\|_{\vec{V}_h}} + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f(\vec{w}_h) - a_h(\vec{u}, \vec{w}_h)|}{\left\| \vec{w}_h \right\|_{\vec{V}_h}} \right) \quad (4.1.18)$$

Ainsi en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\left\| \vec{u} - \vec{u}_h \right\|_{\vec{V}_h} \leq \left\| \vec{u} - \vec{v}_h \right\|_{\vec{V}_h} + \left\| \vec{v}_h - \vec{u}_h \right\|_{\vec{V}_h}, \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h, \quad (4.1.19)$$

et en prenant le minimum par rapport à \vec{v}_h des seconds membres de (4.1.18) et (4.1.19), on trouve l'estimation abstraite :

$$\left\| \vec{u}_h - \vec{v}_h \right\|_{\vec{V}_h} \leq C_{11} \left(\inf_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} \left[\left\| \vec{u} - \vec{v}_h \right\|_{\vec{V}_h} + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - \tilde{a}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h)|}{\left\| \vec{w}_h \right\|_{\vec{V}_h}} \right] + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|\tilde{f}_h(\vec{w}_h) - f(\vec{w}_h)|}{\left\| \vec{w}_h \right\|_{\vec{V}_h}} + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f(\vec{w}_h) - a_h(\vec{u}, \vec{w}_h)|}{\left\| \vec{w}_h \right\|_{\vec{V}_h}} \right) \quad (4.1.20)$$

Dès lors, comme : $\left\| \pi_h \vec{u} \right\|_{\vec{V}_h} \leq C_{12} \left\| \vec{u} \right\|_{\vec{V}_h}$, en réunissant les résultats (3.2.1) (3.3.42) (4.1.14) (4.1.15), on montre qu'il existe deux constantes $h_0 > 0$, $h_0 = \min(h_1, h_2)$ et $C > 0$, indépendantes de h , telles que, pour tout $h \leq h_0$, on ait l'estimation (4.1.9). □

4.2 Approximation implicite de la géométrie

Nous reprenons les notations et définitions de BERNADOU [4], et nous ferons référence à certains de ses résultats concernant les effets de l'intégration numérique des formes (4.1.1) et (4.1.3). Le schéma d'intégration numérique est introduit sur le triangle de référence \hat{T} , auquel sont associés les triangles T de la triangulation (régulière) \mathcal{T}_h par l'application affine inversible F_T , définie en (3.3.21) —notamment cette application est déterminée par les équations :

$F_T(\hat{\Sigma}_i) = \Sigma_i$, $1 \leq i \leq 3$, où les points $\hat{\Sigma}_i$, Σ_i sont les sommets respectifs des triangles \hat{T} et T . Soit donc le schéma suivant sur le triangle \hat{T} :

$$\int_{\hat{T}} \hat{\phi}(\hat{x}) \, d\hat{x} \sim \sum_{\ell=1}^L \hat{\omega}_\ell \hat{\phi}(\hat{b}_\ell) \quad (4.2.1)$$

où $\hat{\omega}_\ell$, \hat{b}_ℓ désignent respectivement les poids et les noeuds du schéma de quadrature numérique. En supposant $\det B_T > 0$, on peut écrire :

$$\int_T \phi(x) \, dx = \det(B_T) \int_{\hat{T}} \hat{\phi}(\hat{x}) \, d\hat{x} \quad (4.2.2)$$

avec les correspondances usuelles, i.e. $x = F_T(\hat{x})$, $\phi(x) = \hat{\phi}(\hat{x})$; de sorte que l'on induit le schéma suivant sur le triangle T :

$$\int_T \phi(x) \, dx \sim \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,T} \phi(b_{\ell,T}) \quad (4.2.3)$$

avec

$$\omega_{\ell,T} = \det(B_T) \hat{\omega}_\ell \text{ et } b_{\ell,T} = F_T(\hat{b}_\ell), \quad 1 \leq \ell \leq L \quad (4.2.4)$$

On ne considérera ici que les schémas pour lesquels les poids sont positifs, et les noeuds \hat{b}_ℓ (resp. $b_{\ell,T}$) restent intérieurs à \hat{T} (resp. T). On définit alors les fonctionnelles d'erreurs :

$$\left. \begin{aligned} \hat{E}(\hat{\phi}) &= \int_{\hat{T}} \hat{\phi}(\hat{x}) \, d\hat{x} - \sum_{\ell=1}^L \hat{\omega}_\ell \hat{\phi}(\hat{b}_\ell) \\ E_T(\phi) &= \int_T \phi(x) \, dx - \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,T} \phi(b_{\ell,T}) \end{aligned} \right\} \quad (4.2.5)$$

liées par la relation :

$$E_T(\phi) = \det(B_T) \hat{E}(\hat{\phi}) \quad (4.2.6)$$

On définit alors un nouveau problème discret qui prend en compte l'intégration numérique des formes $a_h(\dots)$ et $f(\cdot)$, i.e.

Problème 4.2.1 : Trouver $\vec{u}_h^* \in \vec{V}_h$, tel que

$$b_h(\vec{u}_h^*, \vec{v}_h) = g_h(\vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h, \quad (4.2.7)$$

pour les définitions suivantes :

$$b_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,T} {}^t v_h(b_{\ell,T}) [A_{IJ}(b_{\ell,T})] w_h(b_{\ell,T}) \quad (4.2.8)$$

$$g_h(\vec{w}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,T} {}^t F(b_{\ell,T}) w_h(b_{\ell,T}) \quad (4.2.9)$$

Remarquons que les hypothèses (1.1.2) implique que $A_{IJ} \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ de sorte que $A_{IJ}(b_{\ell,T})$ et $\sqrt{a}(b_{\ell,T})$ ont un sens. Il en sera de même pour F, dès que :

$$p^i \in W^{1,q}(\Omega), \quad q > 2, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (4.2.10)$$

car l'injection continue $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ conduit à $p^i \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, $1 \leq i \leq 3$. Etant donné le couplage des composantes u_α et u_3 , il ne semble pas utile ici d'introduire des schémas d'intégrations numériques différents pour les parties de membrane et de flexion de l'énergie de déformation (4.2.8) de la coque.

De manière analogue à BERNADOU [4], on obtient pour les définitions (2.1.3) (2.1.4) :

Théorème 4.2.1 : Supposons que les schémas d'intégration numérique (4.2.1) sur le triangle \hat{T} satisfont les conditions :

- i) les noeuds d'intégration $\hat{b}_\ell \in \hat{T}$, $1 \leq \ell \leq L$;
 - ii) $\forall \hat{\phi} \in P_0(\hat{T})$, $\hat{E}(\hat{\phi}) = 0$;
- (4.2.11)

alors, sous les hypothèses du théorème 3.4.2 et pour des familles régulières de triangulation \mathcal{T}_h , il existe deux constantes $h_0 > 0$ et $C > 0$, indépendantes de h , telles que, pour tout $\vec{p} \in (W^{1,q}(\Omega))^3$, $q > 2$, et pour tout $h \leq h_0$, le problème 4.2.1 admet une solution unique $\vec{u}_h^* \in \vec{V}_h$, et on a :

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h^*\|_{\vec{V}_h} \leq Ch((\|u_1\|_{2,\Omega}^2 + \|u_2\|_{2,\Omega}^2 + \|u_3\|_{3,\Omega}^2)^{1/2} + [\sum_{i=1}^3 \|p_i\|_{1,q,\Omega}^q]^{1/q}) \quad (4.2.12)$$

Preuve (en deux étapes) :

Etape 1 : Estimations des erreurs $|a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - b_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h)|$,
 $|f(\vec{w}_h) - g_h(\vec{w}_h)|$; existence et unicité de \vec{u}_h^* .

Remarquons tout d'abord qu'un certain nombre de résultats sur des estimations locales de l'erreur (via le lemme de Bramble-Hilbert) donnés par BERNADOU [4, théorèmes 4.2-4.3-4.4, corollaire 4.1] s'appliquent dans le cas présent (avec notamment : $m=0$, $n_1=1$, $n_2=2$). En Particulier, on a pour tout $\vec{v}_h, \vec{w}_h \in \vec{V}_h$:

$$\begin{aligned}
 |a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - b_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h)| &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{I, J=1}^{12} |E_T(A_{IJ} v_{hI} w_{hJ})| \\
 &\leq C_1 h \left(\sum_{I, J=1}^{12} \|A_{IJ}\|_{1, \infty, T} \right) \|\vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} \|\vec{w}_h\|_{\vec{V}_h} \\
 |f(\vec{w}_h) - g_h(\vec{w}_h)| &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{I, J=1}^{12} |E_T(F_I w_{hJ})| \\
 &\leq C_2 h^{2-2/q} \left(\sum_{i=1}^3 \|P_i\|_{1, q, \Omega}^q \right)^{1/q} \|\vec{w}_h\|_{\vec{V}_h}
 \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

et l'on a même pour h suffisamment petit la propriété de \vec{V}_h -ellipticité uniforme de la forme bilinéaire $b_h(\dots)$, i.e. il existe une constante $\beta > 0$, indépendante de h , telle que l'on ait :

$$\beta \|\vec{v}_h\|_{\vec{V}_h}^2 \leq b_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h, \quad \forall h < h_0. \tag{4.2.14}$$

ceci permet de prouver l'existence et l'unicité de la solution $\vec{u}_h^* \in \vec{V}_h$ du problème 4.2.1.

Etape 2 : Estimation abstraite de l'erreur ; convergence de \vec{u}_h^ vers \vec{u} .*

On procède comme au théorème 4.1.1 (étape 3) : on a l'estimation abstraite de l'erreur, sous l'hypothèse où (4.2.14) est satisfaite,

$$\begin{aligned}
 \|\vec{u} - \vec{u}_h^*\|_{\vec{V}_h} &\leq C \left(\inf_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} \|\vec{u} - \vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - b_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_{\vec{V}_h}} \right) + \\
 &\quad + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|g_h(\vec{w}_h) - f(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_{\vec{V}_h}} + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f(\vec{w}_h) - a_h(\vec{u}, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_{\vec{V}_h}} \tag{4.1.15}
 \end{aligned}$$

de sorte qu'en combinant (3.2.1) (3.3.42) (4.2.13), on établit l'estimation (4.2.12) (cf. également BERNADOU [4, théorème 4.5, corollaire 4.2]). \square

Remarque 4.2.1 : Il est possible d'étendre ce résultat au cas d'une double approximation (explicite et implicite) de la carte sous les hypothèses (4.1.8) et (4.2.10). On définirait le nouveau problème discret comme suit :

Problème 4.2.2 : Trouver $\vec{u}_h^* \in \vec{V}_h$ tel que :

$$\bar{b}_h(\vec{u}_h^*, \vec{v}_h) = \tilde{g}_h(\vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h,$$

pour les définitions :

$$\begin{aligned}
 \bar{b}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell, T} {}^t v_h(b_{\ell, T}) [A_{hIJ}(b_{\ell, T})] w_h(b_{\ell, T}) \\
 \tilde{g}_h(\vec{w}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell, T} {}^t F_h(b_{\ell, T}) w_h(b_{\ell, T})
 \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

\square

5. UNE APPROXIMATION NONCONFORME DE LA GEOMETRIE

Dans ce paragraphe, on présente une approximation *nonconforme* (au sens de CIARLET [10]), de la carte $\vec{\phi}$ en considérant un *assemblage de facettes planes triangulaires*. Suivant KIKUCHI [16] et BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6], l'introduction de *conditions de compatibilité* qui doivent être satisfaites par les degrés de liberté en chaque noeud de la triangulation permet d'assurer la consistance entre les formes $a_h(\dots)$ et $\tilde{a}_h(\dots)$ d'une part, $f(\cdot)$ et $\tilde{f}_h(\cdot)$ d'autre part (pour des définitions analogues à (4.1.6) et (4.1.7)). Nous donnons les estimations d'erreurs pour les termes de membrane et de flexion, puis nous établissons un résultat de *convergence* pour des géométries générales de coques.

5.1 La surface approchée $\bar{\mathcal{I}}_h$; l'élément de DAWE

L'approximation de la carte $\vec{\phi} = \phi^i \vec{e}_i$ consiste à remplacer chaque composante ϕ^i , $i=1,2,3$, par son interpolée ϕ_h^i dans l'espace Φ_h d'élément fini défini par :

- i) sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$, les fonctions de Φ_h appartiennent à $P_1(T)$;
 - ii) sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$, les fonctions de Φ_h sont complètement déterminées par leurs valeurs aux sommets de T ;
 - iii) $\Phi_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$.
- (5.1.1)

On désignera par $\vec{\phi}_h \in (\Phi_h)^3$ l'interpolée de $\vec{\phi}$. Cette approximation revient à remplacer la surface moyenne continue $\bar{\mathcal{I}}$ par une *surface moyenne à facettes* $\bar{\mathcal{I}}_h$. Par construction, les images des sommets de la triangulation \mathcal{T}_h du domaine de référence Ω par l'application $\vec{\phi}_h$ appartiennent à la surface moyenne continue $\bar{\mathcal{I}}$ (cf. figure 5.1.1).

Ainsi, à tout triangle plat $t_h = \vec{\phi}_h(T)$, $T \in \mathcal{T}_h$, nous associons une base locale :

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}_{h\alpha} &= \vec{\phi}_{h,\alpha}, \quad \sqrt{a_h} = |\vec{a}_{h1} \times \vec{a}_{h2}|, \quad \vec{a}_{h3} = \frac{1}{\sqrt{a_h}} (\vec{a}_{h1} \times \vec{a}_{h2}) = \vec{a}_h^3, \\ a_{h\alpha\beta} &= \vec{a}_{h\alpha} \cdot \vec{a}_{h\beta}, \quad \vec{a}_h^\alpha = a_h^{\alpha\beta} \vec{a}_{h\beta}, \quad \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (5.1.2)$$

en particulier on pose : $b_{h\alpha\beta} = b_{h\alpha}^\beta = c_{h\alpha\beta} = 0$, $\Gamma_{h\alpha\beta}^\gamma = 0$, de sorte que l'on identifiera l'opérateur de dérivation covariant sur chaque facette T avec l'opérateur de dérivation usuelle. Soulignons que les termes (5.1.2) sont constants par triangle, mais peuvent présenter des discontinuités aux interfaces, dues aux discontinuités des dérivées premières de $\vec{\phi}_h$.

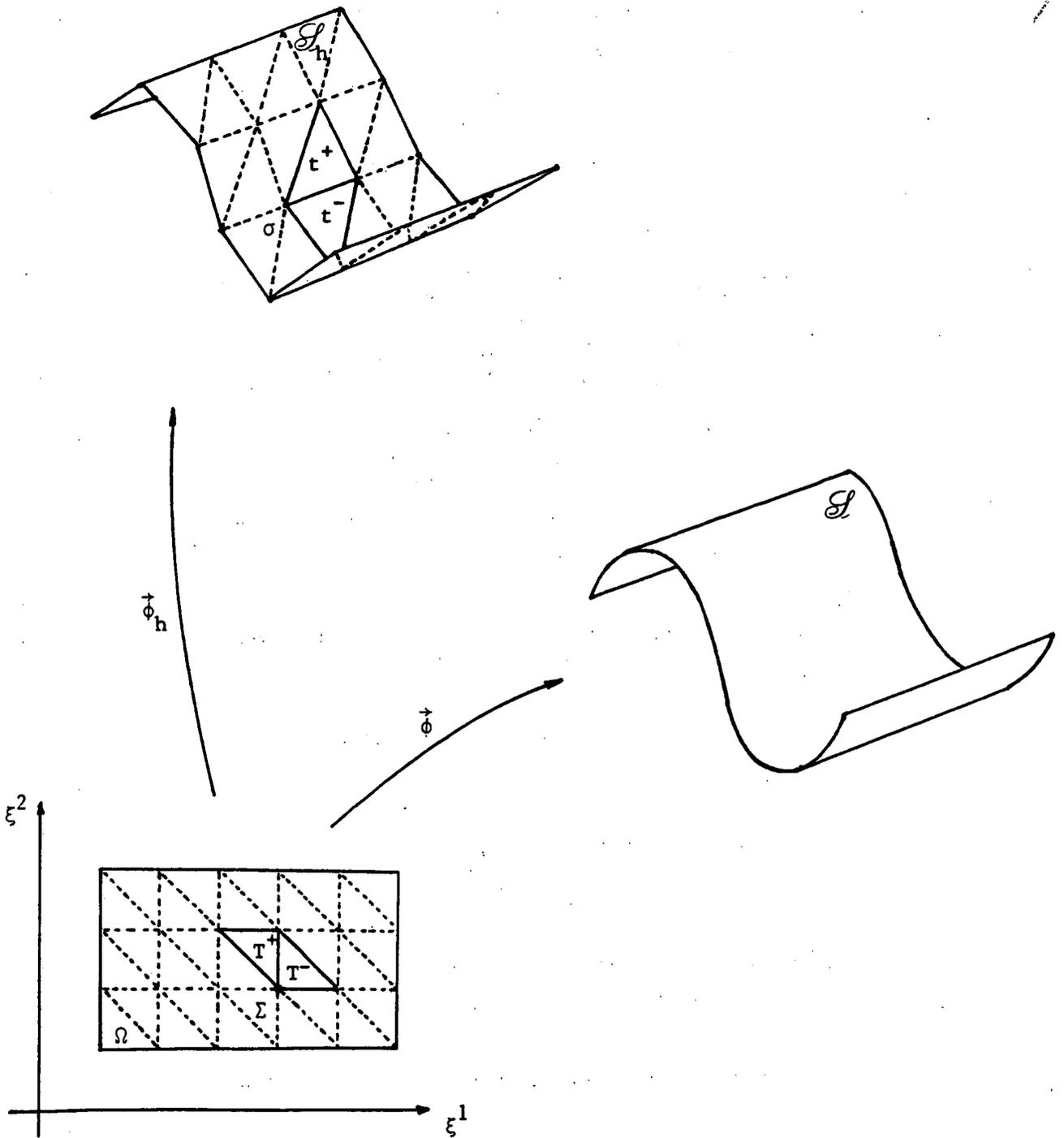


Figure 5.1.1: Les surfaces moyennes continue \mathcal{S} et approchée \mathcal{S}_h .

Les éléments à facettes planes de DAWE [12]

On introduit l'espace discret $\vec{X}_h = \vec{X}_{h1} \times \vec{X}_{h1} \times \vec{X}_{h2}$: les composantes $\vec{v}_{h\alpha}, \alpha=1,2$, et \vec{v}_{h3} (sur la base locale $\vec{a}_h^i, i=1,2,3$) du déplacement \vec{v}_h sont approchées triangle par triangle, respectivement dans les espaces \vec{X}_{h1} et \vec{X}_{h2} définis en (2.1.3) et (2.1.4). Au champ de déplacement \vec{v}_h , on associe alors le vecteur rotation $\vec{\omega}_h$, le tenseur de déformation $\vec{\gamma}_{h\alpha\beta}$ et le tenseur de changement de courbure $\vec{\rho}_{h\alpha\beta}$ dont les expressions sont obtenues triangle par triangle en utilisant l'application $\vec{\phi}_h$, soit en notant $\vec{v}_h^+ = \vec{v}_h|_{T^+}$:

$$\vec{\omega}_h^+(\vec{v}_h^+) = \vec{\omega}_h^i a_{hi}^{++}, \text{ où } \vec{\omega}_h^{\lambda+} = \frac{1}{\sqrt{a_h^+}} e^{\lambda\mu} \vec{v}_{h3,\mu}^+, \vec{\omega}_h^{3+} = \frac{1}{2\sqrt{a_h^+}} e^{\lambda\mu} \vec{v}_{h\mu,\lambda}^+ \quad (5.1.3)$$

$$\vec{\gamma}_{h\alpha\beta}^+(\vec{v}_h^+) = \frac{1}{2} (\vec{v}_{h\beta,\alpha}^+ + \vec{v}_{h\alpha,\beta}^+), \vec{\gamma}_{h\beta}^\alpha(\vec{v}_h^+) = a_h^{\alpha\lambda+} \vec{\gamma}_{h\lambda\beta}^+(\vec{v}_h^+) \quad (5.1.4)$$

$$\vec{\rho}_{h\alpha\beta}^+(\vec{v}_h^+) = \vec{v}_{h3,\alpha\beta}^+, \vec{\rho}_{h\beta}^\alpha(\vec{v}_h^+) = a_h^{\alpha\lambda+} \vec{\rho}_{h\lambda\beta}^+(\vec{v}_h^+) \quad (5.1.5)$$

Rappelons que dans ce cas deux types de discontinuités se présentent aux interfaces entre deux triangles T^+ et T^- de \mathcal{T}_h :

- la discontinuité sur les déplacements transverse \vec{v}_{h3} (dûe à la nonconformité introduite par l'élément fini de MORLEY) ;
- une discontinuité d'ordre géométrique (entre les bases locales \vec{a}_h^{i+} et \vec{a}_h^{i-}).

L'espace discret \vec{X}_h possède $12M_h$ degrés de liberté, où M_h est le nombre de triangles de \mathcal{T}_h . L'assemblage de la matrice de rigidité globale s'effectue au moyen de relations de compatibilité entre les degrés de liberté aux noeuds du maillage : on définit ainsi un et un seul ensemble de degrés de liberté globaux.

5.2 Les conditions de compatibilité et l'espace discret \vec{v}_h^+ :

Le choix de ces conditions de compatibilité est essentiel du point de vue de la consistance de l'approximation de l'énergie de la coque. En particulier, l'étude de la convergence de telles méthodes repose sur l'existence d'une bijection entre les espaces d'éléments finis associés à la surface approchée à facettes planes $\vec{\mathcal{T}}_h$ et l'espace d'éléments

finis nonconformes \vec{v}_h (introduit au paragraphe 2.1) associé à la surface continue \mathcal{I} . Afin de préserver le mouvement rigide - qui s'écrit sous la forme $\vec{r} = \vec{d} + \vec{\omega} \times \vec{\phi}$ pour la surface \mathcal{I} , (et $\vec{r} = \vec{d} + \vec{\omega} \times \vec{\phi}_h$ pour \mathcal{I}_h), où \vec{d} est un vecteur déplacement constant sur $\bar{\Omega}$, et $\vec{\omega}$ un vecteur rotation constant sur $\bar{\Omega}$ (cf BERNADOU-CIARLET [5, théorème 5.1.1]) - les relations de compatibilité expriment en général la continuité des vecteurs déplacements et rotations aux différents noeuds du maillage.

De façon analogue à BERNADOU-DUCATEL-TRUVE [6], un premier ensemble de relations de compatibilité consiste à écrire :

C1) la continuité du vecteur déplacement \vec{v} aux sommets σ de la surface \mathcal{I} , ou de façon équivalente, aux sommets Σ de la triangulation \mathcal{T}_h , i.e.

$$\vec{v}_h(\Sigma^+) = \vec{v}_h(\Sigma^-), \forall \Sigma^+ = \Sigma^- = \Sigma \text{ sommet de } \mathcal{T}_h \quad (5.2.1)$$

Notre deuxième ensemble de relations de compatibilité consiste à imposer :

C2) La continuité du vecteur rotation autour de l'arête commune aux deux triangles T^+ et T^- de \mathcal{T}_h , en son noeud milieu B, i.e.

$$\vec{\phi}_{ht}^+(B^+) = \vec{\phi}_{ht}^-(B^-), \forall B^+ = B^- = B \text{ noeud de mi-côté de } \mathcal{T}_h, \quad (5.2.2)$$

où l'on a noté (resp. pour $\vec{\phi}_{ht}^-$) :

$$\vec{\phi}_{ht}^+(B^+) = (\vec{\omega}_h^+ \cdot \vec{t}_h^+) \cdot \vec{t}_h^+ - \left[\frac{1}{\sqrt{a_h^+}} e^{\alpha\beta} \vec{t}_{h\alpha}^+ \vec{v}_{h3,\beta}(B^+) \right] \vec{t}_h^+ - \partial_{n^+} \vec{v}_{h3}(B^+) \vec{t}_h^+ \quad (5.2.3)$$

et où $\vec{t}_h^+ = \vec{t}_h^+ = \vec{t}_{h\alpha}^+ \vec{a}_h^+$ (resp. $\vec{t}_h^- = \vec{t}_h^-$) représente le vecteur unitaire tangent à l'arête commune aux triangles $\vec{t}_h^+ = \vec{\phi}_h^+(T^+)$ et $\vec{t}_h^- = \vec{\phi}_h^-(T^-)$. Ainsi, en raisonnant directement sur le domaine plan Ω , la condition C2) est équivalente à l'égalité du degré de liberté $\partial_{n^+} \vec{v}_{h3}(B)$ entre les deux triangles adjacents T^+ et T^- , i.e.

$$\partial_{n^+} \vec{v}_{h3}(B^+) + \partial_{n^-} \vec{v}_{h3}(B^-) = 0, \forall B^+ = B^- = B \text{ noeud de mi-côté de } \mathcal{T}_h \quad (5.2.4)$$

où \vec{n}^+ et \vec{n}^- désignent les normales extérieures respectivement associées aux triangles T^+ et T^- en B (i.e. $\vec{n}^+ = -\vec{n}^-$).

Remarque 5.2.1 : Les relations (5.2.4) sont exactement celles qui étaient introduites dans DAWE [12]. A l'aide de (3.3.29), ces relations nous conduisent à des relations du type (3.3.27), i.e.

$$\int_{\Sigma_i} \sum_j p(\partial_{n^+} \vec{v}_{h3}|_{T^+} - \partial_{n^-} \vec{v}_{h3}|_{T^-}) ds = 0, \forall p \in P_0(S), \forall S = (\Sigma_i, \Sigma_j) \in \mathcal{T}_h \quad \square$$

On définit alors l'espace discret $\vec{\tilde{Y}}_h$ comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\tilde{Y}}_h = (\vec{\tilde{v}}_h \in \vec{\tilde{X}}_h, \vec{\tilde{v}}_h \text{ satisfait les conditions} \\ \text{de compatibilité (5.2.1) (5.2.4)}) \end{aligned} \right\} \quad (5.2.5)$$

Il est clair qu'au moyen des conditions de compatibilité (5.2.1)(5.2.4), on peut associer à toute fonction $\vec{\tilde{v}}_h \in \vec{\tilde{Y}}_h$, un et un seul ensemble de valeurs : $\vec{\tilde{v}}_h(\Sigma)$ en chaque sommet Σ de \mathcal{C}_h , et $\partial_n \vec{\tilde{v}}_{h3}(B)$ en chaque noeud de mi-côté de \mathcal{C}_h ; on en déduit que : $\dim \vec{\tilde{Y}}_h = 3N_h + N'_h$, où N_h est le nombre de sommets Σ de \mathcal{C}_h , et N'_h le nombre de noeud de mi-côté B de \mathcal{C}_h . On munit l'espace $\vec{\tilde{Y}}_h$ de la norme usuelle :

$$\|\vec{\tilde{v}}_h\|_h = \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \|\tilde{v}_{h\alpha}\|_{1,T}^2 + \|\tilde{v}_{h3}\|_{2,T}^2 \right)^{1/2} \quad (5.2.6)$$

Ensuite, on définit l'espace discret $\vec{\tilde{V}}_h$ qui prend en compte les conditions aux limites à imposer au bord Γ_0 , i.e. :

$$\vec{\tilde{V}}_h = (\vec{\tilde{v}}_h \in \vec{\tilde{Y}}_h ; \vec{\tilde{v}}_h(\Sigma) = \vec{0}, \forall \Sigma \in \Gamma_0 ; \partial_n \vec{\tilde{v}}_{h3}(B) = 0, \forall B \in \Gamma_0) \quad (5.2.7)$$

Puis, on montre qu'il existe une bijection entre les espaces discrets $\vec{\tilde{V}}_h$ et $\vec{\tilde{v}}_h$:

Théorème 5.2.1 : Il existe une constante $h_0 > 0$, telle que pour tout h , $h < h_0$, les relations

$$\vec{\tilde{v}}_h(\Sigma) = \vec{v}_h(\Sigma), \quad \forall \Sigma \text{ sommet de } \mathcal{C}_h \quad (5.2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_n \vec{\tilde{v}}_{h3}(B) = \frac{e^{\lambda\mu}}{\sqrt{a(B)}} [v_{h3|\mu}(B) + b_\mu^\nu(B) v_{h\nu}(B)] (\vec{a}_\lambda(B) \cdot \vec{t}_h^+), \\ \forall B \text{ noeud de mi-côté de } \mathcal{C}_h, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.9)$$

définissent une bijection $\mathcal{I}_h : \vec{\tilde{V}}_h \rightarrow \vec{v}_h$.

Preuve : On utilise les notation suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega}_h(B) &= \vec{\phi}_{ht}(B) + \vec{\phi}_{hn}(B) + \Omega_h(B) \vec{a}_3(B), \\ \vec{\phi}_{ht}(B) &= \frac{e^{\lambda\mu}}{\sqrt{a(B)}} t_\lambda(B) [v_{h3|\mu}(B) + b_\mu^\nu(B) v_{h\nu}(B)] \vec{t}(B), \\ \vec{\phi}_{hn}(B) &= t^\mu(B) [v_{h3|\mu}(B) + b_\mu^\nu(B) v_{h\nu}(B)] (\vec{t}(B) \times \vec{a}_3(B)), \\ \Omega_h(B) &= \frac{e^{\lambda\mu}}{2\sqrt{a(B)}} v_{h\mu|\lambda}(B), \end{aligned} \right\}$$

où $\vec{t}(B)$ est le vecteur unitaire du plan tangent en B à la surface moyenne continue \mathcal{S} tel que $\vec{t}(B)$ est l'image par $\vec{\phi}$ du vecteur unitaire $\vec{r} = r_\lambda \vec{i}^\lambda = \frac{\sum_i \vec{\Sigma}_i}{\sum_i \Sigma_j}$ (lorsque $B = \Sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\Sigma_i + \Sigma_j)$) du plan \mathcal{E}^2 . De la même façon \vec{t}_h^+ est l'image par $\vec{\phi}_h$ du vecteur \vec{r} . On peut alors écrire :

$$\vec{\phi}_{ht}^+(B) = \sqrt{\frac{a_h^+ \tau_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}}{a_h}} e^{\lambda\mu} \tau_{\lambda} \tilde{v}_{h3,\mu}(B) \vec{t}_h^{++} - \partial_{n^+} \tilde{v}_{h3}(B) \vec{t}_h^{++} \quad (5.2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\phi}_{ht}(B) &= \sqrt{\frac{a_{\alpha\beta}(B) \tau_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}}{a(B)}} e^{\lambda\mu} \tau_{\lambda} [v_{h3|\mu}(B) + b_{\mu}^{\nu}(B) v_{h\nu}(B)] \vec{t}(B), \\ \vec{\phi}_{hn}(B) &= \sqrt{\frac{a^{\alpha\beta}(B) \tau_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}}{a}} \tau^{\mu} [v_{h3|\mu}(B) + b_{\mu}^{\nu}(B) v_{h\nu}(B)] (\vec{t}(B) \times \vec{a}_3(B)), \end{aligned} \right\} (5.2.11)$$

en particulier, nous noterons :

$$\partial_n v_{h3}(B) = e^{\lambda\mu} \tau_{\lambda} v_{h3|\mu}(B) \text{ et } \partial_t v_{h3}(B) = \tau^{\mu} v_{h3|\mu}(B), \quad (5.2.12)$$

pour établir ces expressions, on utilise les définitions :

$$\left. \begin{aligned} \vec{t}_h^{++} &= t_{h\lambda}^+ \frac{\rightarrow\lambda+}{a_h} = \frac{\tau_{\lambda}}{\sqrt{a_h \tau_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}}} \frac{\rightarrow\lambda+}{a_h} = \sqrt{\frac{+}{a_h \tau_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}}} \tau_{\lambda} \frac{\rightarrow\lambda+}{a_h}, \\ \vec{t}(B) &= t_{\lambda}(B) \frac{\rightarrow\lambda}{a(B)} = \frac{\tau_{\lambda}}{\sqrt{a^{\alpha\beta}(B) \tau_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}}} \frac{\rightarrow\lambda}{a(B)} = \sqrt{\frac{+}{a^{\alpha\beta}(B) \tau_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}}} \tau_{\lambda} \frac{\rightarrow\lambda}{a(B)} \end{aligned} \right\} (5.2.13)$$

Ainsi, la relation (5.2.9) peut se mettre sous la forme

$$\partial_{n^+} \tilde{v}_{h3}(B) = [\vec{\phi}_{ht}(B) + \vec{\phi}_{hn}(B)] \cdot \vec{t}_h^{++}, \quad \forall B \text{ noeud de mi-côté de } \mathcal{C}_h \quad (5.2.14)$$

Dans la suite, on choisit h_0 tel que pour tout $h < h_0$, on ait : $\vec{t}_h \cdot \vec{t}(B) \neq 0$, $\forall B \in \mathcal{C}_h$.

$$i) \quad \vec{v}_h \in \vec{Y}_h \rightarrow \vec{v}_h \in \vec{X}_h$$

Il suffit de montrer que les degrés de liberté de l'espace \vec{X}_h s'expriment de manière unique en fonction des degrés de liberté de l'espace \vec{Y}_h . Ceci s'effectue à l'aide des relations suivantes, déduites de (5.2.8) (5.2.11) (5.2.12) (5.2.14) :

$$v_{hi}(\Sigma) = \tilde{v}_{hj}(\Sigma) (\vec{a}_h^{j+} \cdot \vec{a}_i(\Sigma)), \quad 1 \leq i \leq 3, \quad \forall \Sigma \text{ sommet de } \mathcal{C}_h \quad (5.2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_n v_{h3}(B) &= \frac{1}{(\vec{t}(B) \cdot \vec{t}_h)} \sqrt{\frac{a(B)}{a_{\alpha\beta}(B) \tau_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}}} (\partial_{n^+} \tilde{v}_{h3}(B) - \vec{\phi}_{hn}(B)) \\ &\quad - e^{\lambda\mu} \tau_{\lambda} b_{\mu}^{\nu}(B) v_{h\nu}(B), \\ &\quad \forall B \text{ noeud de mi-côté de } \mathcal{C}_h \end{aligned} \right\} (5.2.16)$$

D'une part, on remarque que (lorsque $B = \Sigma_{ij}$) :

$$v_{h\nu}(B) = \frac{1}{2} [v_{h\nu}(\Sigma_i) + v_{h\nu}(\Sigma_j)] = \frac{1}{2} [\tilde{v}_{hk}(\Sigma_i) (\vec{a}_h^{k+} \cdot \vec{a}_{\nu}(\Sigma_i)) + \tilde{v}_{hk}(\Sigma_j) (\vec{a}_h^{k+} \cdot \vec{a}_{\nu}(\Sigma_j))],$$

d'autre part, à l'aide de (3.3.29), nous avons dans (5.2.11)₂ :

$$\left. \begin{aligned} \tau^{\mu} v_{h3|\mu}(B) &= \partial_{\vec{t}} v_{h3}(B) = \frac{1}{\Sigma_i \Sigma_j} \int_{\Sigma_i}^{\Sigma_j} \partial_{\vec{t}} v_{h3}(B) ds = \frac{1}{\Sigma_i \Sigma_j} (v_{h3}(\Sigma_j) - v_{h3}(\Sigma_i)) \\ &= \tilde{v}_{hk}(\Sigma_j) (\vec{a}_h^{k+} \cdot \vec{a}_3(\Sigma_j)) - \tilde{v}_{hk}(\Sigma_i) (\vec{a}_h^{k+} \cdot \vec{a}_3(\Sigma_i)) ; \end{aligned} \right\}$$

de sorte que le second membre de l'expression (5.2.16) est complètement déterminé par la donnée des degrés de liberté de l'espace \tilde{Y}_h . Les relations (5.2.15) (5.2.16) établissent donc l'existence d'une application \mathcal{F}_h de \tilde{Y}_h dans \tilde{X}_h ; on montre que \mathcal{F}_h est injective à l'aide d'un raisonnement par l'absurde (en notant que $\det[\vec{a}_h^{j+} \vec{a}_i(\Sigma)] \neq 0$).

$$\text{ii) } \vec{v}_h \in \tilde{X}_h \rightarrow \vec{v}_h \in \tilde{Y}_h$$

Réciproquement, les mêmes relations donnent (lorsque $B = \Sigma_{ij}$) :

$$\tilde{v}_{hi}(\Sigma) - v_{hj}(\Sigma) (\vec{a}^j(\Sigma) \vec{a}_{hi}^{++}), \quad 1 \leq i \leq 3, \quad \forall \Sigma \text{ sommet de } \mathcal{T}_h, \quad (5.2.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_{n^+} \tilde{v}_{h3}(B) &= \sqrt{\frac{a_{\alpha\beta}(B) \tau_{\alpha}^{\alpha} \tau_{\beta}^{\beta}}{a(B)}} [\partial_{n^+} v_{h3}(B) + \\ &+ \frac{1}{2} e^{\lambda\mu} \tau_{\lambda}^{\lambda} b_{\mu}^{\nu}(B) (v_{h\nu}(\Sigma_i) + v_{h\nu}(\Sigma_j))] (\vec{t}(B) \cdot \vec{t}_h^{++}) + \\ &+ \sqrt{\frac{a^{\alpha\beta}(B) \tau_{\alpha}^{\alpha} \tau_{\beta}^{\beta}}{\Sigma_i \Sigma_j}} \left[\frac{1}{\Sigma_i \Sigma_j} (v_{h3}(\Sigma_j) - v_{h3}(\Sigma_i)) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \tau^{\mu} b_{\mu}^{\nu}(B) (v_{h\nu}(\Sigma_i) + v_{h\nu}(\Sigma_j))] [(\vec{t}(B) \times \vec{a}_3(B)) \cdot \vec{t}_h^{++}] \end{aligned} \right\} \quad (5.2.18)$$

et on vérifie aisément que la fonction $\vec{v}_h \in \tilde{X}_h$ ainsi déterminée satisfait les conditions de compatibilité (5.2.1) et (5.2.2) (ou (5.2.4)). On en déduit donc que \mathcal{F}_h^{-1} est une bijection de \tilde{X}_h vers \tilde{Y}_h .

$$\text{iii) } \vec{v}_h \in \tilde{V}_h \iff \vec{v}_h \in \tilde{V}_h$$

A l'aide des relations (5.2.15) (5.2.16), on montre que :

$$\left. \begin{aligned} (\vec{v}_h(\Sigma) = 0, \quad \forall \Sigma \in \Gamma_0 ; \text{ et } \partial_{n^+} \tilde{v}_{h3}(B) = 0, \quad \forall B \in \Gamma_0) \\ \rightarrow (\vec{v}_h(\Sigma) = 0, \quad \forall \Sigma \in \Gamma_0 ; \text{ et } \partial_{n^+} v_{h3}(B) = 0, \quad \forall B \in \Gamma_0) ; \end{aligned} \right\}$$

réciproquement les relations (5.2.17) (5.2.18) donnent :

$$\left. \begin{aligned} (\vec{v}_h(\Sigma) = 0, \quad \forall \Sigma \in \Gamma_0 ; \text{ et } \partial_{n^+} v_{h3}(B) = 0, \quad \forall B \in \Gamma_0) \\ \rightarrow (\vec{v}_h(\Sigma) = 0, \quad \forall \Sigma \in \Gamma_0 ; \text{ et } \partial_{n^+} \tilde{v}_{h3}(B) = 0, \quad \forall B \in \Gamma_0). \end{aligned} \right\}$$

En définitive, les relations (5.2.8) et (5.2.9) associent à toute fonction $\vec{v}_h \in \tilde{V}_h$ une fonction unique $\vec{v}_h \in \tilde{V}_h$. □

Remarque 5.2.2 : De manière générale, il existe une infinité de bijection entre les espaces \vec{Y}_h et \vec{X}_h : c'est le choix des conditions aux limites dans la définition de l'espace discret \vec{V}_h qui détermine la bijection F_h existant entre \vec{V}_h et l'espace \vec{V}_h de référence. Plus précisément, il est loisible de modifier les relations (5.2.8) (5.2.9), et de définir ainsi une nouvelle bijection \mathcal{G}_h entre \vec{Y}_h et \vec{X}_h , par exemple en remplaçant (5.2.9) par :

$$\partial_{n^+} \vec{v}_{h3}(B) = \vec{\omega}_h(B) \cdot \vec{t}_{h^+} ; \quad (5.2.19)$$

à la suite de quoi, on définit l'espace discret \vec{V}_h tel que : $\vec{V}_h = \mathcal{G}_h^{-1}(\vec{V}_h)$. Dans ce cas — et de manière analogue à BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6] —, les conditions aux limites à imposer paraissent moins naturelles (et plus difficiles à implémenter), i.e.

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_h(\Sigma) = \vec{0}, \quad \forall \Sigma \in \Gamma_0, \\ \partial_{n^+} \vec{v}_{h3}(B) - \frac{\vec{a}_3(B) \cdot \vec{t}_{h^+}}{2\sqrt{a(B)}} e^{\lambda\mu} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \lambda_k}{\partial \xi^\lambda}(B) \vec{v}_{hj}(\Sigma_k) (\vec{a}_h^{j+} \cdot \vec{a}_\mu(\Sigma_k)) = 0, \quad \forall B \in \Gamma_0 \end{aligned} \right\} (5.2.20)$$

Tout au plus pouvons-nous remarquer que (5.2.20)₂ est une approximation de la condition : $\partial_{n^+} \vec{v}_{h3}(B) = 0, \quad \forall B \in \Gamma_0$, puisque : $\vec{a}_3(B) \cdot \vec{t}_{h^+} = 0(h)$. Nous préciserons, en remarque 5.4.1, l'influence d'un tel choix sur les estimations d'erreurs. □

5.3. Le problème discret associé à la surface à facettes

Il est possible de formuler directement un problème discret associé à \mathcal{I}_h à partir des expressions (5.1.4) et (5.1.5) : il s'agit alors de sommer les énergies de plaques évaluées sur chaque élément de \mathcal{T}_h , puis de minimiser l'énergie totale sur l'espace discret des déplacements admissibles \vec{V}_h . Cependant une telle formulation ne nous permet pas, en général, d'établir la convergence de la solution du problème discret vers la solution \vec{u} du problème continu 1.1.1 (cf. BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6], BERNADOU-TROUVE [7]). Il est alors nécessaire d'introduire un nouveau tenseur de changement de courbure $\vec{\rho}_{h\alpha\beta}^*(\vec{v}_h)$, soit :

$$\vec{\rho}_{h\alpha\beta}^*(\vec{v}_h) = \vec{v}_{h3, \alpha\beta} + \Delta_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h), \quad \vec{\rho}_{h\beta}^{*\alpha}(\vec{v}_h) = a_h^{\alpha\nu} \vec{\rho}_{h\nu\beta}^*(\vec{v}_h),$$

où $\Delta_{h\alpha\beta}(\cdot)$ désigne un terme correcteur — qui doit être implémentable sur chaque triangle de \mathcal{T}_h — déterminé de façon à obtenir une erreur de consistance (locale) du type : $|\vec{\rho}_{h\alpha\beta}^*(\vec{v}_h) - \vec{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v}_h)|_{0,T} = 0(h)$, où $\vec{v}_h = \mathcal{I}_h(\vec{v}_h)$. Nous évaluerons ce correcteur au paragraphe suivant. Nous formulons le nouveau problème discret comme suit.

Pour tout champ de déplacement $\vec{v}_h \in \vec{Y}_h$ de la surface à facettes \mathcal{S}_h , on définit, triangle par triangle, les composantes du tenseur des déformations $(\tilde{\gamma}_{h\alpha\beta})$ en (5.1.4) et les composantes du tenseur de changement de courbure corrigé $(\tilde{\rho}_{h\alpha\beta}^*)$. Dès lors, la forme bilinéaire approchée est donnée par la somme des énergies élémentaires :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \frac{Ee}{1-\nu^2} & \left((1-\nu) \tilde{\gamma}_{h\beta}^\alpha(\vec{u}_h) \tilde{\gamma}_{h\alpha}^\beta(\vec{v}_h) + \nu \tilde{\gamma}_{h\alpha}^\alpha(\vec{u}_h) \tilde{\gamma}_{h\beta}^\beta(\vec{v}_h) + \right. \\ & \left. + \frac{e^2}{12} [(1-\nu) \tilde{\rho}_{h\beta}^{*\alpha}(\vec{u}_h) \tilde{\rho}_{h\alpha}^{*\beta}(\vec{v}_h) + \nu \tilde{\rho}_{h\alpha}^{*\alpha}(\vec{u}_h) \tilde{\rho}_{h\beta}^{*\beta}(\vec{v}_h)] \right) \sqrt{a_h} d\xi^1 d\xi^2, \end{aligned} \right\} \quad (5.3.1)$$

$$\vec{u}_h, \vec{v}_h \in \vec{Y}_h.$$

De façon analogue, la forme linéaire approchée est donnée par :

$$\tilde{f}_h(\vec{v}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \vec{p} \cdot \vec{v}_h \sqrt{a_h} d\xi^1 d\xi^2, \quad \vec{v}_h \in \vec{Y}_h \quad (5.3.2)$$

Désormais, le problème discret utilisant les éléments à facettes planes de MORLEY-DAWE se formule comme suit :

Problème 5.3.1 : trouver $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$ tel que :

$$\tilde{a}_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = \tilde{f}_h(\vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h \quad (5.3.3)$$

Pour l'étude de la convergence d'une telle méthode, il est avantageux d'associer à ce problème, par l'intermédiaire de la bijection \mathcal{I}_h définie au théorème 5.2.1, un nouveau problème discret formulé sur la surface moyenne continue \mathcal{S} , i.e. :

Problème 5.3.2 : Trouver $\hat{u}_h \in \hat{V}_h$ tel que :

$$\hat{a}_h(\hat{u}_h, \vec{v}_h) = \hat{f}_h(\vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \hat{V}_h \quad (5.3.4)$$

où l'on a utilisé les correspondances suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) &= \tilde{a}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h), \quad \forall \vec{v}_h = \mathcal{I}_h(\vec{v}_h) \in \hat{V}_h, \forall \vec{w}_h = \mathcal{I}_h(\vec{w}_h) \in \hat{V}_h, \\ \hat{f}_h(\vec{v}_h) &= \tilde{f}_h(\vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h = \mathcal{I}_h(\vec{v}_h) \in \hat{V}_h. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.5)$$

Remarque 5.3.1 : De façon analogue à BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6], il serait possible de prendre en compte l'effet de l'intégration numérique. Nous nous contentons ici des résultats donnés au paragraphe 4.2.

□

5.4. Estimation du correcteur sur $\tilde{\rho}_{h\alpha\beta}^*$ et convergence

Dans ce paragraphe, nous donnons l'expression du tenseur de changement de courbure corrigé ($\tilde{\rho}_{h\alpha\beta}^*$), puis nous montrons que le problème 5.3.2 admet une solution unique $\hat{u}_h \in \vec{V}_h$, et que l'on a une estimation du type :

$$\| \vec{u} - \hat{u}_h \|_{\vec{V}_h} = O(h).$$

Pour cela, on introduit une estimation abstraite de l'erreur :

Lemme 5.4.1 : Soit une famille de problèmes discrets 5.3.2, pour laquelle les formes bilinéaires $\hat{a}_h(\dots)$ sont uniformément \vec{V}_h -elliptiques, i.e. il existe une constante $\beta > 0$, indépendante de h, telle que :

$$\beta \| \vec{v}_h \|_{\vec{V}_h}^2 \leq \hat{a}_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h \quad (5.4.1)$$

Alors, il existe une constante C, indépendante de h, telle que :

$$\| \vec{u} - \hat{u}_h \|_{\vec{V}_h} \leq C \left(\inf_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} \| \vec{u} - \vec{v}_h \|_{\vec{V}_h} + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{| a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - \hat{a}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) |}{\| \vec{w}_h \|_{\vec{V}_h}} + \right. \\ \left. + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{| \hat{f}_h(\vec{w}_h) - f(\vec{w}_h) |}{\| \vec{w}_h \|_{\vec{V}_h}} + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{| f(\vec{w}_h) - a_h(\vec{u}, \vec{w}_h) |}{\| \vec{w}_h \|_{\vec{V}_h}} \right) \quad (5.4.2)$$

où \vec{u} (resp. \hat{u}_h) représente la solution du problème continu 1.1.1 (resp. du problème discret 5.3.2).

Preuve : Rappelons que l'hypothèse de la \vec{V}_h -ellipticité implique l'existence et l'unicité de la solution $\hat{u}_h \in \vec{V}_h$ du problème discret 5.3.2. De plus, en utilisant (1.1.12) (2.2.3) (5.3.4) et (5.4.1), on obtient :

$$\beta \| \hat{u}_h - \vec{v}_h \|_{\vec{V}_h}^2 \leq \hat{a}_h(\hat{u}_h - \vec{v}_h, \hat{u}_h - \vec{v}_h) \\ - a_h(\vec{u} - \vec{v}_h, \hat{u}_h - \vec{v}_h) + [a_h(\vec{v}_h, \hat{u}_h - \vec{v}_h) - \hat{a}_h(\vec{v}_h, \hat{u}_h - \vec{v}_h)] + \\ + [\hat{f}_h(\hat{u}_h - \vec{v}_h) - f(\hat{u}_h - \vec{v}_h)] + [f(\hat{u}_h - \vec{v}_h) - a_h(\vec{u}, \hat{u}_h - \vec{v}_h)],$$

et en vertu de la continuité de la forme bilinéaire $a_h(\dots)$ sur $(\vec{V} + \vec{V}_h)^2$, on a :

$$\beta \| \hat{u}_h - \vec{v}_h \|_{\vec{V}_h} \leq M \| \vec{u} - \vec{v}_h \|_{\vec{V}_h} + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{| a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - \hat{a}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) |}{\| \vec{w}_h \|_{\vec{V}_h}} + \\ + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{| \hat{f}_h(\vec{w}_h) - f(\vec{w}_h) |}{\| \vec{w}_h \|_{\vec{V}_h}} + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{| f(\vec{w}_h) - a_h(\vec{u}, \vec{w}_h) |}{\| \vec{w}_h \|_{\vec{V}_h}}.$$

En combinant cette dernière inégalité avec l'inégalité triangulaire

$$\| \vec{u} - \hat{u}_h \|_{\vec{V}_h} \leq \| \vec{u} - \vec{v}_h \|_{\vec{V}_h} + \| \vec{v}_h - \hat{u}_h \|_{\vec{V}_h},$$

et en prenant le minimum par rapport à $\vec{v}_h \in \vec{V}_h$, on obtient l'inégalité (5.4.2). □

Remarquons que dans le second membre de (5.4.2) nous retrouvons les erreurs d'interpolation (3.2.1) et de consistance (3.3.42), et que nous avons deux termes additionnels de consistance entre les formes bilinéaires $a_h(\dots)$ et $\hat{a}_h(\dots)$, et entre les formes linéaires $f(\cdot)$ et $\hat{f}_h(\cdot)$.

De manière similaire à BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6, § 5.2], on montre que l'étude de l'erreur de consistance $| a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - \hat{a}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) |$ se réduit aux estimations : $| \gamma_\beta^\alpha(\vec{v}_h) - \tilde{\gamma}_{h\beta}^\alpha(\vec{v}_h) |_{0,T}$ et $| \bar{\rho}_\beta^\alpha(\vec{v}_h) - \tilde{\rho}_{h\beta}^{\alpha*}(\vec{v}_h) |_{0,T}$. En particulier, nous avons :

Proposition 5.4.1 : Il existe une constante C, indépendante de h, telle que pour tout $\vec{v}_h \in \vec{Y}_h$ et $\vec{v}_h \in \vec{X}_h$, en correspondance par la bijection \mathcal{I}_h définie au théorème 5.2.1, nous avons :

$$| \gamma_\beta^\alpha(\vec{v}_h) - \tilde{\gamma}_{h\beta}^\alpha(\vec{v}_h) |_{0,T} \leq C h_T (\| v_{h1} \|_{1,T}^2 + \| v_{h2} \|_{1,T}^2 + \| v_{h3} \|_{1,T}^2)^{1/2} \quad (5.4.3)$$

Preuve : celle-ci est en tout point identique à BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6, théorème 5.2.1]. □

Puis, nous obtenons l'estimation suivante pour les définitions (1.1.7) et (5.1.5) :

Proposition 5.4.2 : Il existe des constantes $c_{\alpha\beta}^k$, $c_{\alpha\beta}^{k\epsilon}$, $c_{\alpha\beta}^{3\epsilon\eta}$, indépendantes de h, telles que pour tout $\vec{v}_h \in \vec{Y}_h$ et $\vec{v}_h \in \vec{X}_h$ en correspondance par la bijection \mathcal{I}_h définie au théorème 5.2.1, nous avons :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\rho}_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h) &= \bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v}) + b_{\epsilon\eta} [a^{\lambda\mu} v_{h\mu} - b_{\nu}^{\lambda} v_{h3}] \times \\ &\times \sum_{i=1}^3 A_\lambda^{\epsilon\eta}(B_i) [\xi_i^\nu - \frac{1}{2}(1-\eta_i)\xi_{i+1}^\nu - \frac{1}{2}(1+\eta_i)\xi_{i-1}^\nu] (p_{1,i}^\perp(\lambda))_{,\alpha\beta} \\ &+ O(h_T) (c_{\alpha\beta}^k v_{hk}(\xi) + c_{\alpha\beta}^{k\epsilon} v_{hk,\epsilon}(\xi) + c_{\alpha\beta}^{3\epsilon\eta} v_{h3,\epsilon\eta}(\xi)), \xi \in T, \end{aligned} \right\} \quad (5.4.4)$$

où l'expression de $A_\lambda^{\epsilon\eta}(\cdot)$ est donnée par la formule :

$$A_\lambda^{\epsilon\eta}(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \lambda_k}{\partial \xi^\lambda} (\xi_k^\epsilon - \xi^\epsilon) (\xi_k^\eta - \xi^\eta), \xi \in T. \quad (5.4.5)$$

où η_i sont les paramètres d'excentricité du triangle, et où $p_{1,i}^\perp(\lambda)$ désigne un polynôme de base de l'élément de Morley.

Preuve (en quatre étapes) :

Etape 1 : Interpolation du déplacement transverse \tilde{v}_{h3} sur chaque triangle

Selon MORLEY [21], sur chaque triangle T de \mathcal{T}_h , la composante transverse \tilde{v}_{h3} du déplacement est donnée par :

$$\tilde{v}_{h3}(\xi) = \sum_{k=1}^3 p_k(\xi) \tilde{v}_{h3}(\Sigma_k) + \sum_{k=1}^3 q_k(\xi) \partial_{n_k} \tilde{v}_{h3}(B_k), \quad \xi \in T,$$

où $\tilde{v}_{h3}(\Sigma_k)$ et $\partial_{n_k} \tilde{v}_{h3}(B_k)$, $1 \leq k \leq 3$, désignent les degrés de liberté "globaux" de l'espace \tilde{X}_{h2} , et où p_k et q_k , $1 \leq k \leq 3$, sont les fonctions de bases qui leurs sont associées. Du point de vue de l'implémentation, il est avantageux d'exprimer l'interpolation de la composante normale du déplacement en fonction des degrés de liberté locaux, soit pour tout $\xi \in T$:

$$\tilde{v}_{h3}(\xi) = \sum_{i=1}^3 p_{0,i}(\lambda) \tilde{v}_{h3}(\Sigma_i) + \sum_{i=1}^3 p_{1,i}^\perp(\lambda) D\tilde{v}_{h3}(B_i)(\Sigma_i - C_i) \quad (5.4.6)$$

où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont les coordonnées barycentriques du point ξ , où $\overline{C_i \Sigma_i}$ désigne la hauteur du triangle T (perpendiculaire à $\overline{\Sigma_{i+1} \Sigma_{i+2}}$), et où les polynômes de base $p_{0,i}$ et $p_{1,i}^\perp$, $1 \leq i \leq 3$, sont données par :

$$\left. \begin{aligned} p_{0,i}(\lambda) &= \lambda_{i+2}^2 (1 + \eta_{i+1}) p_{1,i+1}^\perp(\lambda) + \frac{1}{2} (1 - \eta_{i+2}) p_{1,i+2}^\perp(\lambda), \quad 1 \leq i \leq 3, \\ p_{1,i}^\perp(\lambda) &= s_i \lambda_i (1 - \lambda_i), \quad 1 \leq i \leq 3, \end{aligned} \right\} \quad (5.4.7)$$

où η_i sont les paramètres d'excentricité du triangle T, i.e.

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= 2 \frac{\overline{C_i B_i}}{\overline{\Sigma_{i-1} \Sigma_{i+1}}} - \frac{(\ell_{i+2})^2 - (\ell_{i+1})^2}{(\ell_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq 3, \\ (\text{avec } \ell_i^2 &= (\xi_{i+1}^1 - \xi_{i-1}^1)^2 + (\xi_{i+1}^2 - \xi_{i-1}^2)^2) \end{aligned} \right\} \quad (5.4.8)$$

où s_i sont des paramètres permettant de normer et d'orienter les dérivées normales aux milieux des côtés, i.e.

$$s_i = \frac{-1}{|\Sigma_i - C_i|} \quad \text{et} \quad \Sigma_i - C_i = \overrightarrow{C_i \Sigma_i} = \begin{cases} \xi_i^1 - \frac{1}{2}(1 - \eta_i) \xi_{i+1}^1 - \frac{1}{2}(1 + \eta_i) \xi_{i-1}^1 \\ \xi_i^2 - \frac{1}{2}(1 - \eta_i) \xi_{i+1}^2 - \frac{1}{2}(1 + \eta_i) \xi_{i-1}^2 \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (5.4.9)$$

ainsi, nous avons (voir figure 5.4.1) :

$$\left. \begin{aligned} \partial_{n_k} \tilde{v}_{h3}(B_i) &= s_i D\tilde{v}_{h3}(B_i)(\Sigma_i - C_i) = e^{\lambda \mu} \tau_\lambda \tilde{v}_{h3,\mu}(B_i) \\ &= \sqrt{\frac{a_h^+}{a_{h\alpha\beta}^+ \tau_\alpha \tau_\beta}} \partial_{n^+} \tilde{v}_{h3}(B_i), \quad 1 \leq i \leq 3 \end{aligned} \right\} \quad (5.4.10)$$

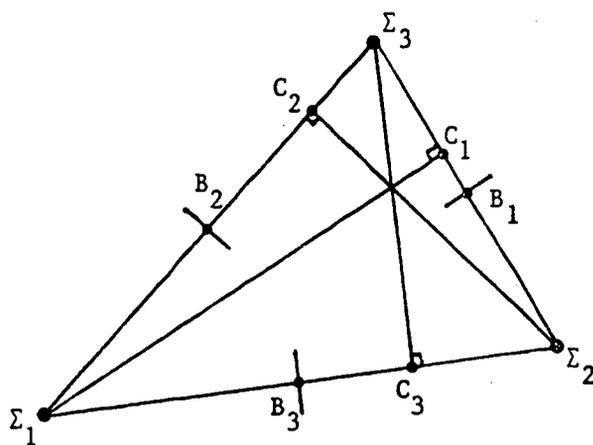


Figure 5.4.1 : Description d'un triangle de Morley

Par suite, on déduit de (5.4.6), pour tout $\xi \in T$:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_{h3, \alpha\beta}(\xi) = & \sum_{i=1}^3 (p_{o,i}(\lambda))_{,\alpha\beta} \tilde{v}_{h3}(\Sigma_i) + \\ & + \sum_{i=1}^3 [\xi_i^\nu - \frac{1}{2}(1-\eta_i)\xi_{i+1}^\nu - \frac{1}{2}(1+\eta_i)\xi_{i-1}^\nu] (p_{1,i}^\perp(\lambda))_{,\alpha\beta} \tilde{v}_{h3,\nu}(B_i) \end{aligned} \right\} (5.4.11)$$

Etape 2 : Expression de $\tilde{v}_{h3}(\Sigma_i)$ et de $\partial_n \tilde{v}_{h3}(B_i)$ en fonction des degrés de liberté de l'espace \vec{X}_h .

En vertu de la relation de compatibilité (5.2.8), et de (5.2.17) on a :

$$\tilde{v}_{h3}(\Sigma_i) = d_{h3}^j(\Sigma_i) v_{hj}(\Sigma_i), \quad (5.4.12)$$

où $d_{hk}^j(\xi) = \vec{a}^j(\xi) \vec{a}_{hk}$.

Dans la suite, nous utiliserons les définitions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \vec{t}(B_i) = t^\alpha(B_i) \vec{a}_\alpha(B_i) &= \frac{1}{\sqrt{a_{\epsilon\eta}(B_i) r_\epsilon r_\eta}} r^\alpha \vec{a}_\alpha(B_i) \\ \vec{a}_3(B_i) \times \vec{t}(B_i) &= \frac{1}{\sqrt{a_{\epsilon\eta}(B_i) r_\epsilon r_\eta}} \frac{\nu^\alpha}{\sqrt{a(B_i)}} \vec{a}_\alpha(B_i), \\ \vec{t}_h(B_i) = t_{h\beta} \vec{a}_h^\beta &= \sqrt{a_{h\epsilon\eta}(B_i) r_\epsilon r_\eta} r_\beta \vec{a}_h^\beta \end{aligned} \right\} (5.4.13)$$

où $\vec{r} = r_\lambda \vec{i}^\lambda = r_\lambda \vec{i}_\lambda$, $\vec{\nu} = \nu_\lambda \vec{i}^\lambda = \nu_\lambda \vec{i}_\lambda = \vec{i}_3 \times \vec{r}$ (en particulier, nous avons : $e^{\lambda\mu} r_\lambda r_\mu = 1$).

Ainsi, la deuxième relation de compatibilité (5.2.9), en utilisant (5.2.11) (5.2.12) (5.2.18) (5.4.9) (5.4.10), nous conduit à :

$$s_i \left[\xi_i^\nu - \frac{1}{2}(1-\eta_i)\xi_{i+1}^\nu - \frac{1}{2}(1+\eta_i)\xi_{i-1}^\nu \right] \tilde{v}_{h3,\nu}^{(B_i)} - \sqrt{\frac{a_h}{a(B_i)}} \left((\tau_{\nu\lambda}^\alpha - \nu \tau_{\lambda\nu}^\alpha) \tau_\beta \left(\vec{a}_\alpha(B_i) \cdot \vec{a}_h^\beta \right) [v_{h3,\lambda}^{(B_i)} + b_\lambda^\mu(B_i) v_{h\mu}^{(B_i)}] \right), \quad (5.4.14)$$

où nous avons identifié :

$$\nu^\lambda = s_i \left[\xi_i^\lambda - \frac{1}{2}(1-\eta_i)\xi_{i+1}^\lambda - \frac{1}{2}(1+\eta_i)\xi_{i-1}^\lambda \right] \quad (5.4.15)$$

Etape 3 : Développement limités pour les coefficients géométriques

Nous rappelons les développements limités obtenus par BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6, théorème 5.2.2] pour les coefficients géométriques apparaissant dans (5.4.12) et (5.4.14) ; en particulier :

$$d_{h3}^\nu(\Sigma_i) = [1 - A_\lambda^{\sigma\tau}(\xi) \Gamma_{\sigma\tau}^\lambda(\xi)] \times [(\xi_i^\epsilon - \xi^\epsilon) b_\epsilon^\nu(\xi) - A_\mu^{\epsilon\eta}(\xi) b_{\epsilon\eta}(\xi) a^{\mu\nu}(\xi)] + [e_{\alpha\beta} e^{\lambda\mu} A_\lambda^{\epsilon\eta}(\xi) \Gamma_{\epsilon\eta}^\beta(\xi) A_\mu^{\sigma\tau}(\xi) b_{\sigma\tau}(\xi) - B_\alpha^{\epsilon\eta\lambda}(\xi) (b_{\epsilon\eta,\lambda}(\xi) + \Gamma_{\epsilon\eta}^\mu(\xi) b_{\lambda\mu}(\xi))] a^{\alpha\nu}(\xi) + (\xi_i^\epsilon - \xi^\epsilon) [A_\alpha^{\sigma\tau}(\xi) b_{\sigma\tau}(\xi) \Gamma_{\epsilon\beta}^\nu(\xi) a^{\alpha\beta}(\xi) + A_\lambda^{\sigma\tau}(\xi) \Gamma_{\sigma\tau}^\lambda(\xi) b_\epsilon^\nu(\xi) + \frac{1}{2}(\xi_i^\eta - \xi^\eta) (b_{\epsilon,\eta}^\nu(\xi) - \Gamma_{\lambda\epsilon}^\nu(\xi) b_\eta^\lambda(\xi))] + 0(h_T^3) c_{3i}^\nu, \quad (5.4.16)$$

et :

$$d_{h3}^3(\Sigma_i) = 1 + B_\alpha^{\epsilon\eta\lambda}(\xi) (\Gamma_{\epsilon\eta,\lambda}^\alpha(\xi) + \Gamma_{\epsilon\eta}^\mu(\xi) \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(\xi)) + e_{\alpha\beta} A_1^{\epsilon\eta}(\xi) \Gamma_{\epsilon\eta}^\alpha(\xi) A_2^{\sigma\tau}(\xi) \Gamma_{\sigma\tau}^\beta(\xi) + (\xi_i^\epsilon - \xi^\epsilon) A_\alpha^{\sigma\tau}(\xi) b_{\sigma\tau}(\xi) b_\epsilon^\alpha(\xi) - \frac{1}{2}(\xi_i^\epsilon - \xi^\epsilon) (\xi_i^\eta - \xi^\eta) c_{\epsilon\eta}(\xi) + \frac{1}{2} [A_\lambda^{\epsilon\eta}(\xi) \Gamma_{\epsilon\eta}^\lambda(\xi)]^2 - \frac{1}{2} R(\xi) + 0(h_T^3) c_{3i}^3, \quad (5.4.17)$$

où l'on a posé :

$$A_\alpha^{\epsilon\eta}(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \lambda_k}{\partial \xi^\alpha} (\xi_k^\epsilon - \xi^\epsilon) (\xi_k^\eta - \xi^\eta),$$

$$B_\alpha^{\epsilon\eta\lambda}(\xi) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \lambda_k}{\partial \xi^\alpha} (\xi_k^\epsilon - \xi^\epsilon) (\xi_k^\eta - \xi^\eta) (\xi_k^\lambda - \xi^\lambda),$$

$$R(\xi) = 2B_\mu^{\epsilon\eta\lambda}(\xi) (\Gamma_{\epsilon\eta,\lambda}^\mu(\xi) + \Gamma_{\epsilon\eta}^\nu(\xi) \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(\xi)) + (A_1^{\epsilon\eta}(\xi) \Gamma_{\epsilon\eta}^1(\xi))^2 + (A_2^{\epsilon\eta}(\xi) \Gamma_{\epsilon\eta}^2(\xi))^2 + 4A_1^{\epsilon\eta}(\xi) A_2^{\sigma\tau}(\xi) \Gamma_{\epsilon\eta}^1(\xi) \Gamma_{\sigma\tau}^2(\xi) - 2A_1^{\epsilon\eta}(\xi) A_2^{\sigma\tau}(\xi) \Gamma_{\epsilon\eta}^2(\xi) \Gamma_{\sigma\tau}^1(\xi) + \frac{1}{a(\xi)} e^{\alpha\beta} e^{\lambda\mu} A_\alpha^{\epsilon\eta}(\xi) A_\lambda^{\sigma\tau}(\xi) b_{\epsilon\eta}(\xi) b_{\sigma\tau}(\xi) a_{\beta\mu}(\xi), \quad (5.4.18)$$

et où c_{3i}^k , $1 \leq k \leq 3$, sont des constantes indépendantes de h . Ainsi, nous retrouvons le même développement limité de $\tilde{v}_{h3}(\Sigma_i)$ que celui obtenu par BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6, théorème 5.2.2]. Nous avons également :

$$\sqrt{\frac{a_h}{a(\xi)}} = 1 + A_{\lambda}^{\epsilon\eta}(\xi) \Gamma_{\epsilon\eta}^{\lambda}(\xi) + O(h_T^2)c \quad (5.4.19)$$

où c est une constante indépendante de h ; et encore de manière similaire :

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}_{\alpha}(B_i) \cdot \vec{a}_h^{\beta} - \delta_{\alpha}^{\beta} - A_{\alpha}^{\epsilon\eta}(\xi) \Gamma_{\epsilon\eta}^{\beta}(\xi) + [\frac{1}{2}(\xi_{i-1}^{\epsilon} + \xi_{i+1}^{\epsilon}) - \xi^{\epsilon}] \Gamma_{\epsilon\alpha}^{\beta}(\xi) + O(h_T^2)c_{\alpha}^{\beta}, \\ \vec{a}_3(B_i) \cdot \vec{a}_h^{\beta} - A_{\lambda}^{\epsilon\eta}(\xi) b_{\epsilon\eta}(\xi) a^{\lambda\beta}(\xi) - [\frac{1}{2}(\xi_{i-1}^{\epsilon} + \xi_{i+1}^{\epsilon}) - \xi^{\epsilon}] b_{\epsilon}^{\beta}(\xi) + O(h_T^2)c_3^{\beta}, \end{aligned} \right\} (5.4.20)$$

où c_k^{β} sont des constantes indépendantes de h .

Etape 4 : Développement limite de $\tilde{\rho}_{h\alpha\beta}^{\rightarrow}(\tilde{v}_h)$

Pour analyser le développement limité de $\tilde{\rho}_{h\alpha\beta}^{\rightarrow}(\tilde{v}_h)$, il est utile d'introduire un certain nombre de relations qui utilisent le degré d'interpolation de la composante du déplacement \tilde{v}_{h3} . Ainsi, en exprimant successivement les fonction $1, \xi^{\epsilon}, \xi^{\epsilon}\xi^{\eta}$ sur la base $(p_{0,i}(\lambda), p_{1,i}^{\perp}(\lambda))$, puis en dérivant deux fois selon (5.4.11), nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^3 (p_{0,i}(\lambda))_{,\alpha\beta} = 0, \quad (5.4.21)$$

$$\sum_{i=1}^3 (p_{0,i}(\lambda))_{,\alpha\beta} \xi_i^{\epsilon} + \sum_{i=1}^3 [\xi_i^{\epsilon} - \frac{1}{2}(1-\eta_i)\xi_{i+1}^{\epsilon} - \frac{1}{2}(1+\eta_i)\xi_{i-1}^{\epsilon}] (p_{1,i}^{\perp}(\lambda))_{,\alpha\beta} = 0, \quad (5.4.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 (p_{0,i}(\lambda))_{,\alpha\beta} \xi_i^{\epsilon} \xi_i^{\eta} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 [\xi_i^{\sigma} - \frac{1}{2}(1-\eta_i)\xi_{i+1}^{\sigma} - \frac{1}{2}(1+\eta_i)\xi_{i-1}^{\sigma}] (p_{1,i}^{\perp}(\lambda))_{,\alpha\beta} (\xi_{i-1}^{\tau} + \xi_{i+1}^{\tau}) (\delta_{\sigma}^{\epsilon} \delta_{\tau}^{\eta} + \delta_{\tau}^{\epsilon} \delta_{\sigma}^{\eta}) \\ - (\delta_{\alpha}^{\epsilon} \delta_{\beta}^{\eta} + \delta_{\beta}^{\epsilon} \delta_{\alpha}^{\eta}), \end{aligned} \right\} (5.4.23)$$

notamment cette dernière relation peut être réécrite en utilisant les deux premières :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 (p_{0,i}(\lambda))_{,\alpha\beta} (\xi_i^{\epsilon} - \xi^{\epsilon}) (\xi_i^{\eta} - \xi^{\eta}) + \\ + \sum_{i=1}^3 [\xi_i^{\sigma} - \frac{1}{2}(1-\eta_i)\xi_{i+1}^{\sigma} - \frac{1}{2}(1+\eta_i)\xi_{i-1}^{\sigma}] (p_{1,i}^{\perp}(\lambda))_{,\alpha\beta} \times \\ \times (\frac{1}{2}(\xi_{i-1}^{\tau} + \xi_{i+1}^{\tau}) - \xi^{\tau}) (\delta_{\sigma}^{\epsilon} \delta_{\tau}^{\eta} + \delta_{\tau}^{\epsilon} \delta_{\sigma}^{\eta}) - (\delta_{\alpha}^{\epsilon} \delta_{\beta}^{\eta} + \delta_{\beta}^{\epsilon} \delta_{\alpha}^{\eta}). \end{aligned} \right\} (5.4.24)$$

Puis, de façon similaire à BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6], on remarque que le polynôme de degré 2 : $G^{\epsilon\eta}(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^\epsilon \xi^\eta - \sum_{k=1}^3 \lambda_k(\xi) \xi_k^\epsilon \xi_k^\eta)$, est invariant pour l'interpolation (5.4.6), de sorte que l'on trouve :

$$\sum_{i=1}^3 A_\lambda^{\epsilon\eta}(B_i) \left[\xi_i^\lambda - \frac{1}{2}(1-\eta_i) \xi_{i+1}^\lambda - \frac{1}{2}(1+\eta_i) \xi_{i-1}^\lambda \right] (P_{1,i}^\perp(\lambda))_{,\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\epsilon \delta_\beta^\eta + \delta_\beta^\epsilon \delta_\alpha^\eta), \quad (5.4.25)$$

(en effet : $G^{\epsilon\eta}(\Sigma_i) = 0$; $G^{\epsilon\eta}(\xi) = A_\lambda^{\epsilon\eta}(\xi)$; $G^{\epsilon\eta}_{,\alpha\beta}(\xi) = -\frac{1}{2}(\delta_\alpha^\epsilon \delta_\beta^\eta + \delta_\beta^\epsilon \delta_\alpha^\eta)$).

Par suite, en combinant (5.1.5) (5.4.11) (5.4.12) (5.4.14) à (5.4.21), avec les développements limités :

$$b_\nu^\mu(B_i) = b_\nu^\mu(\xi) + \left[\frac{1}{2}(\xi_{i-1}^\epsilon + \xi_{i+1}^\epsilon) - \xi^\epsilon \right] b_{\nu,\epsilon}^\mu(\xi) + O(h_T^2) c_\nu^\mu ;$$

$$v_{h\nu}(\Sigma_i) = v_{h\nu}(\xi) + (\xi_i^\epsilon - \xi^\epsilon) v_{h\nu,\epsilon} ; v_{h\mu}(B_i) = v_{h\mu}(\xi) + \left[\frac{1}{2}(\xi_{i-1}^\epsilon + \xi_{i+1}^\epsilon) - \xi^\epsilon \right] v_{h\mu,\epsilon} ;$$

$$v_{h3}(\Sigma_i) = v_{h3}(\xi) + (\xi_i^\epsilon - \xi^\epsilon) v_{h3,\epsilon}(\bar{\xi}_i) \text{ où } \bar{\xi}_i \in [\Sigma_i, \xi] ;$$

on obtient (en notant que : $\tau_\alpha \tau^\alpha = 1$, $\tau_\alpha \nu^\alpha = 0$)

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h) = & \sum_{i=1}^3 \left\{ (\xi_i^\epsilon - \xi^\epsilon) [b_\epsilon^\nu(\xi) + A_\lambda^{\sigma\tau}(\xi) b_{\sigma\tau}(\xi) \Gamma_{\epsilon\mu}^\nu(\xi) a^{\lambda\mu}(\xi) + \right. \\ & + \frac{1}{2} (\xi_i^\eta - \xi^\eta) (b_{\epsilon,\eta}^\nu(\xi) - \Gamma_{\lambda\epsilon}^\nu(\xi) b_\eta^\lambda(\xi))] v_{h\nu}(\xi) + \\ & + (\xi_i^\epsilon - \xi^\epsilon) [(\xi_i^\eta - \xi^\eta) b_\eta^\nu(\xi) - A_\mu^{\sigma\tau}(\xi) b_{\sigma\tau}(\xi) a^{\mu\nu}(\xi)] v_{h\nu,\epsilon}(\xi) + v_{h3}(\Sigma_i) + \\ & + (\xi_i^\epsilon - \xi^\epsilon) [A_\lambda^{\sigma\tau}(\xi) b_{\sigma\tau}(\xi) b_\epsilon^\lambda(\xi) - \frac{1}{2}(\xi_i^\eta - \xi^\eta) c_{\epsilon\eta}(\xi)] v_{h3}(\xi) \left. \right\} (P_{0,i}(\lambda))_{,\alpha\beta} + \\ & + \sum_{i=1}^3 (v_{h3,\nu}(B_i) + b_\nu^\mu(\xi) v_{h\mu}(\xi) + \\ & + \left[\frac{1}{2}(\xi_{i-1}^\epsilon + \xi_{i+1}^\epsilon) - \xi^\epsilon \right] [b_{\nu,\epsilon}^\mu(\xi) v_{h\mu}(\xi) + b_\nu^\mu(\xi) v_{h\mu,\epsilon}] + \\ & + \frac{1}{s_i} [-\tau_\beta (\tau_\nu^\alpha \nu^\lambda - \nu^\alpha \tau^\lambda) A_\alpha^{\epsilon\eta}(B_i) \Gamma_{\epsilon\eta}^\beta(\xi) + \nu^\lambda A_\kappa^{\epsilon\eta}(B_i) \Gamma_{\epsilon\eta}^\kappa(\xi)] \times \\ & \times [v_{h3,\lambda}(\xi) + b_\lambda^\mu(\xi) v_{h\mu}(\xi)] (P_{1,i}^\perp(\lambda))_{,\alpha\beta} + \\ & + O(h_T) (c_{\alpha\beta}^k v_{hk}(\bar{\xi}) + c_{\alpha\beta}^{k\epsilon} v_{hk,\epsilon}(\bar{\xi}) + c_{\alpha\beta}^{3\epsilon\eta} v_{h3,\epsilon\eta}(\bar{\xi})), \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

où les constantes $c_{\alpha\beta}^k$, $c_{\alpha\beta}^{k\epsilon}$, $c_{\alpha\beta}^{3\epsilon\eta}$ sont indépendantes de h ; où $\bar{\xi} \in T$; et où on a utilisé la relation :

$$A_{\lambda}^{\epsilon\eta}(\xi) = A_{\lambda}^{\epsilon\eta}(B_i) + \frac{1}{2}(\delta_{\lambda}^{\epsilon}\delta_{\mu}^{\eta} + \delta_{\mu}^{\epsilon}\delta_{\lambda}^{\eta}) \left[\frac{1}{2}((\xi_{i-1}^{\mu} - \xi_{i+1}^{\mu}) - \xi^{\mu}) \right] \quad (5.4.27)$$

On remarque alors que l'on a par (5.4.15) (5.4.22) et (5.4.24) :

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 (p_{0,i}(\lambda))_{,\alpha\beta} v_{h3}(\Sigma_i) + \\ & + \sum_{i=1}^3 \left[\xi_i^{\nu} - \frac{1}{2}(1-\eta_i) \xi_{i+1}^{\nu} - \frac{1}{2}(1+\eta_i) \xi_{i-1}^{\nu} \right] (p_{1,i}^{\perp}(\lambda))_{,\alpha\beta} v_{h3,\nu}(B_i) - v_{h3,\alpha\beta}(\xi); \\ & \left(\sum_{i=1}^3 (p_{0,i}(\lambda))_{,\alpha\beta} (\xi_i^{\epsilon} - \xi^{\epsilon}) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^3 \left[\xi_i^{\epsilon} - \frac{1}{2}(1-\eta_i) \xi_{i+1}^{\epsilon} - \frac{1}{2}(1+\eta_i) \xi_{i-1}^{\epsilon} \right] (p_{1,i}^{\perp}(\lambda))_{,\alpha\beta} b_{\epsilon}^{\nu}(\xi) v_{h\nu}(\xi) - 0 ; \right. \\ & \left. \left(\sum_{i=1}^3 (p_{0,i}(\lambda))_{,\alpha\beta} (\xi_i^{\epsilon} - \xi^{\epsilon}) (\xi_i^{\eta} - \xi^{\eta}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^3 \left[\xi_i^{\sigma} - \frac{1}{2}(1-\eta_i) \xi_{i+1}^{\sigma} - \frac{1}{2}(1+\eta_i) \xi_{i-1}^{\sigma} \right] (p_{1,i}^{\perp}(\lambda))_{,\alpha\beta} \left[\frac{1}{2}(\xi_{i-1}^{\tau} + \xi_{i+1}^{\tau}) - \xi^{\tau} \right] \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (\delta_{\sigma}^{\epsilon}\delta_{\tau}^{\eta} + \delta_{\tau}^{\epsilon}\delta_{\sigma}^{\eta}) \left(\frac{1}{2}[b_{\epsilon,\eta}^{\nu}(\xi) - \Gamma_{\lambda\epsilon}^{\nu}(\xi) b_{\eta}^{\lambda}(\xi)] v_{h\nu}(\xi) + b_{\eta}^{\nu}(\xi) v_{h\nu,\epsilon} - \frac{1}{2}c_{\epsilon\eta}(\xi) v_{h3}(\xi) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2}(b_{\alpha\beta}^{\nu}(\xi) + b_{\beta\alpha}^{\nu}(\xi) + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}(\xi) b_{\lambda}^{\nu}(\xi)) v_{h\nu}(\xi) + \right. \right. \\ & \left. \left. + b_{\alpha}^{\nu}(\xi) v_{h\nu|\beta}(\xi) + b_{\beta}^{\nu}(\xi) v_{h\nu|\alpha}(\xi) - c_{\alpha\beta}(\xi) v_{h3}(\xi) ; \right. \right. \end{aligned} \right\}$$

de sorte qu'avec (5.4.22) et d'après la relation de Mainardi-Codazzi ($b_{\nu|\epsilon}^{\mu} = b_{\epsilon|\nu}^{\mu}$) :

$$b_{\nu,\epsilon}^{\mu}(\xi) - b_{\epsilon,\nu}^{\mu}(\xi) = \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}(\xi) b_{\epsilon}^{\lambda}(\xi) - \Gamma_{\epsilon\lambda}^{\mu}(\xi) b_{\nu}^{\lambda}(\xi),$$

on peut réduire l'expression (5.4.26), i.e. :

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho}_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h) - v_{h3,\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}(\xi) v_{h3}(\xi) + b_{\alpha}^{\nu}(\xi) v_{h\nu|\beta}(\xi) + b_{\beta}^{\nu}(\xi) v_{h\nu|\alpha} + \\ & + b_{\alpha|\beta}^{\nu}(\xi) v_{h\nu}(\xi) + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}(\xi) b_{\lambda}^{\nu}(\xi) v_{h\nu}(\xi) + \\ & + \sum_{i=1}^3 \left[\xi_i^{\nu} - \frac{1}{2}(1-\eta_i) \xi_{i+1}^{\nu} - \frac{1}{2}(1+\eta_i) \xi_{i-1}^{\nu} \right] (p_{1,i}^{\perp}(\lambda))_{,\alpha\beta} \times \\ & \times \left(-[A_{\lambda}^{\epsilon\eta}(\xi) b_{\epsilon\eta}^{\kappa}(\xi) \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}(\xi) a^{\lambda\mu}(\xi) - \left(\frac{1}{2}(\xi_{i-1}^{\epsilon} + \xi_{i+1}^{\epsilon}) - \xi^{\epsilon} \right) \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}(\xi) b_{\epsilon}^{\mu}(\xi)] v_{h\kappa}(\xi) + \right. \\ & \left. + [A_{\lambda}^{\epsilon\eta}(\xi) b_{\epsilon\eta}^{\kappa}(\xi) a^{\lambda\mu}(\xi) - \left(\frac{1}{2}(\xi_{i+1}^{\epsilon} + \xi_{i+1}^{\epsilon}) - \xi^{\epsilon} \right) b_{\epsilon}^{\mu}(\xi)] v_{h\mu,\nu} - \right. \\ & \left. - [A_{\lambda}^{\epsilon\eta}(\xi) b_{\epsilon\eta}^{\kappa}(\xi) b_{\nu}^{\lambda}(\xi) - \left(\frac{1}{2}(\xi_{i+1}^{\epsilon} + \xi_{i+1}^{\epsilon}) - \xi^{\epsilon} \right) c_{\epsilon\nu}(\xi)] v_{h3}(\xi) \right) + \\ & + \sum_{i=1}^3 \left([\delta_{\beta}^{\alpha} \nu^{\lambda} - \tau_{\beta}^{\alpha} \nu^{\lambda} - \nu^{\alpha} \tau^{\lambda}] A_{\alpha}^{\epsilon\eta}(B_i) \Gamma_{\epsilon\eta}^{\beta}(\xi) [v_{h3,\lambda}(\xi) + b_{\lambda}^{\mu}(\xi) v_{h\mu}(\xi)] \right) \frac{1}{s_i} (p_{1,i}^{\perp}(\lambda))_{,\alpha\beta} \\ & + 0(h_T) \dots \end{aligned}$$

soit encore, en utilisant (5.4.27) et les relations (5.4.15) et :

$$\tau_{\beta}(\tau_{\nu}^{\alpha\lambda} - \nu^{\alpha} \tau^{\lambda}) = e^{\alpha\epsilon} e_{\beta\eta} \nu^{\nu} \eta^{\nu\lambda} - \nu^{\alpha} e_{\beta\eta} e^{\lambda\epsilon} \nu^{\eta} \nu^{\epsilon} - \delta_{\beta}^{\alpha\lambda} - \delta_{\beta}^{\lambda\nu} \alpha,$$

on trouve :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\rho}_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h) &= \bar{\rho}_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h) + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}(\xi) [v_{h3,\lambda}(\xi) + b_{\lambda}^{\nu}(\xi) v_{h\nu}(\xi)] + \\ &+ \sum_{i=1}^3 [\xi_i^{\nu} - \frac{1}{2}(1-\eta_i)\xi_{i+1}^{\nu} - \frac{1}{2}(1+\eta_i)\xi_{i-1}^{\nu}] (p_{1,i}^{\perp}(\lambda))_{,\alpha\beta} \times \\ &\times (A_{\lambda}^{\epsilon\eta}(B_i) b_{\epsilon\eta}(\xi) [a^{\lambda\mu}(\xi) v_{h\mu\nu}(\xi) - b_{\nu}^{\lambda}(\xi) v_{h3}(\xi)] + \\ &+ A_{\nu}^{\epsilon\eta}(B_i) \Gamma_{\epsilon\eta}^{\lambda}(\xi) [v_{h3,\lambda}(\xi) + b_{\lambda}^{\mu}(\xi) v_{h\mu}(\xi)] + 0(h_T) \dots \end{aligned} \right\}$$

En combinant (5.4.25) dans l'expression précédente, on établit l'estimation (5.4.4) (à comparer avec BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6, théorème 5.2.2] et BERNADOU-TROUVE [7]). \square

Par conséquent, les propositions 5.4.1 et 5.4.2 nous permettent d'explicitier le correcteur $\Delta_{h\alpha\beta}$ sur $\tilde{\rho}_{h\alpha\beta}$:

Proposition 5.4.3 : Posons pour tout \vec{v}_h de \vec{Y}_h :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{h\alpha\beta}^*(\vec{v}_h) &= \tilde{v}_{h3,\alpha\beta} - \\ &- \sum_{i=1}^3 A_{\lambda}^{\epsilon\eta}(B_i) [\xi_i^{\nu} - \frac{1}{2}(1-\eta_i)\xi_{i+1}^{\nu} - \frac{1}{2}(1+\eta_i)\xi_{i-1}^{\nu}] (p_{1,i}^{\perp}(\lambda))_{,\alpha\beta} b_{h\epsilon\eta} a_{h}^{\lambda\mu} \tilde{v}_{h\mu,\nu} \end{aligned} \quad (5.4.28)$$

où $b_{h\epsilon\eta}$ est une approximation de $b_{\epsilon\eta}$ satisfaisant à : $|b_{h\epsilon\eta} - b_{\epsilon\eta}|_{0,\infty,T} = O(h_T)$. Alors il existe une constante c , indépendante de h , telle que pour tout $\vec{v}_h \in \vec{Y}_h$ et $\vec{v}_h \in \vec{X}_h$, en correspondance par la bijection \mathcal{B}_h définie au théorème 5.2.1, nous avons :

$$|\tilde{\rho}_{\alpha}^{\beta}(\vec{v}_h) - \tilde{\rho}_{h\alpha}^{\beta}(\vec{v}_h)|_{0,T} \leq Ch_T (\|v_{h1}\|_{1,T}^2 + \|v_{h2}\|_{1,T}^2 + \|v_{h3}\|_{2,T}^2)^{1/2} \quad (5.4.29)$$

Preuve : D'une part, on montre de manière similaire à BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6, théorème 5.2.1] :

$$\tilde{v}_{h\mu,\nu} - v_{h\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(\xi) v_{h\lambda}(\xi) - b_{\mu\nu}(\xi) v_{h3}(\xi) + 0(h_T) \dots,$$

d'autre part, la proposition 5.4.2 conduit à :

$$\left. \begin{aligned} & \tilde{\rho}_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h) - b_{\epsilon\eta} [a^{\lambda\mu} v_{h\mu} b_{\nu}^{\lambda} v_{h3}] \times \\ & \times \sum_{i=1}^3 A_{\lambda}^{\epsilon\eta}(B_i) [\xi_i^{\nu} - \frac{1}{2}(1-\eta_i)\xi_{i+1}^{\nu} - \frac{1}{2}(1+\eta_i)\xi_{i-1}^{\nu}] (p_{1,i}^{\perp}(\lambda))_{,\alpha\beta} \\ & - \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v}_h) + 0(h_T) \dots ; \end{aligned} \right\}$$

on en déduit donc que : $\tilde{\rho}_{h\alpha\beta}^*(\vec{v}_h) - \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v}_h) + 0(h_T)$, où l'on a utilisé : $a_h^{\alpha\nu} = a^{\alpha\nu} + 0(h_T)$. En appliquant les résultats de la théorie de l'interpolation dans les espaces de Sobolev (cf. CIARLET [10, théorème 3.1.2]), on obtient l'estimation d'erreur (5.4.29). \square

Remarque 5.4.1 Une analyse similaire pour les relations (5.2.19) nous conduirait à une estimation différente du correcteur : pour tout $\vec{v}_h \in \vec{Y}_h$ et $\vec{v}_h \in \vec{X}_h$ en correspondance par la bijection \mathcal{G}_h définie en remarque 5.2.2, nous avons :

$$|\tilde{\rho}_{\alpha}^{\beta}(\vec{v}_h) - \tilde{\rho}_{h\alpha}^{**\beta}(\vec{v}_h)|_{0,T} \leq Ch_T (\|v_{h1}\|_{1,T}^2 + \|v_{h2}\|_{1,T}^2 + \|v_{h3}\|_{2,T}^2)^{1/2}$$

où nous aurions posé : $\tilde{\rho}_{h\alpha}^{**\beta}(\vec{v}_h) = a_h^{\beta\nu} \tilde{\rho}_{h\alpha\nu}^{**}(\vec{v}_h)$ avec :

$$\tilde{\rho}_{h\alpha\beta}^{**}(\vec{v}_h) = \tilde{v}_{h3,\alpha\beta} - \sum_{i=1}^3 A_{\lambda}^{\epsilon\eta}(B_i) [\xi_i^{\nu} - \frac{1}{2}(1-\eta_i)\xi_{i+1}^{\nu} - \frac{1}{2}(1+\eta_i)\xi_{i-1}^{\nu}] \times \left. \begin{aligned} & \times (p_{1,i}^{\perp}(\lambda))_{,\alpha\beta} [b_{h\epsilon\eta} a_h^{\lambda\mu} \tilde{\gamma}_{h\mu\nu}(\vec{v}_h)] \end{aligned} \right\}$$

(à comparer avec BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6]). Cette alternative ne nous dispense donc pas de la définition d'un correcteur pour établir la convergence de la méthode. \square

Les propositions 5.4.1 et 5.4.3 nous conduisent à une première estimation de l'erreur de consistance :

Proposition 5.4.4 : Il existe deux constantes $h_0 > 0$, et $C > 0$ indépendante de h , telles que pour tout $h < h_0$, et pour tout $\vec{v}_h \in \vec{Y}_h$ et $\vec{v}_h \in \vec{X}_h$ en correspondance par la bijection \mathcal{G}_h définie au théorème 5.2.1, nous avons :

$$|a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - \hat{a}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h)| \leq Ch \|\vec{v}_h\|_{\vec{V}_h} \|\vec{w}_h\|_{\vec{V}_h} \quad (5.4.30)$$

Preuve : celle-ci repose sur la décomposition :

$$|a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - \hat{a}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h)| = |a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - \tilde{a}_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h)| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^4 |ER_{Ti}(\vec{v}_h, \vec{w}_h)|,$$

avec :

$$\begin{aligned}
 ER_{T1}(\vec{v}_h, \vec{w}_h) &= \int_T \frac{Ee}{1+\nu} [\gamma_\beta^\alpha(\vec{v}_h) \gamma_\alpha^\beta(\vec{w}_h) / a - \tilde{\gamma}_{h\beta}^\alpha(\vec{v}_h) \tilde{\gamma}_{h\alpha}^\beta(\vec{w}_h) \sqrt{a_h}] d\xi^1 d\xi^2, \\
 ER_{T2}(\vec{v}_h, \vec{w}_h) &= \int_T \frac{Ee\nu}{1-\nu} [\gamma_\alpha^\alpha(\vec{v}_h) \gamma_\beta^\beta(\vec{w}_h) / a - \tilde{\gamma}_{h\alpha}^\alpha(\vec{v}_h) \tilde{\gamma}_{h\beta}^\beta(\vec{w}_h) \sqrt{a_h}] d\xi^1 d\xi^2, \\
 ER_{T3}(\vec{v}_h, \vec{w}_h) &= \int_T \frac{Ee^3}{12(1+\nu)} [\rho_\beta^\alpha(\vec{v}_h) \rho_\alpha^\beta(\vec{w}_h) / a - \tilde{\rho}_{h\alpha}^{*\beta}(\vec{v}_h) \tilde{\rho}_{h\beta}^{*\alpha}(\vec{w}_h) \sqrt{a_h}] d\xi^1 d\xi^2, \\
 ER_{T4}(\vec{v}_h, \vec{w}_h) &= \int_T \frac{Ee^3\nu}{12(1-\nu^2)} [\rho_\alpha^\alpha(\vec{v}_h) \rho_\beta^\beta(\vec{w}_h) / a - \tilde{\rho}_{h\alpha}^{*\alpha}(\vec{v}_h) \tilde{\rho}_{h\beta}^{*\beta}(\vec{w}_h) \sqrt{a_h}] d\xi^1 d\xi^2,
 \end{aligned}$$

et sur des inégalités du type suivant :

$$\begin{aligned}
 |ER_{T1}(\vec{v}_h, \vec{w}_h)| &\leq \\
 & \left\{ \frac{Ee}{1+\nu} |_{0,\infty,T} (|\sqrt{a} - \sqrt{a_h}|_{0,\infty,T} |\gamma_\beta^\alpha(\vec{v}_h)|_{0,T} |\gamma_\alpha^\beta(\vec{w}_h)|_{0,T} + |\sqrt{a}|_{0,\infty,T} + |\sqrt{a} - \sqrt{a_h}|_{0,\infty,T}) \times \right. \\
 & \times (|\gamma_\beta^\alpha(\vec{v}_h)|_{0,T} |\gamma_\alpha^\beta(\vec{w}_h) - \tilde{\gamma}_{h\alpha}^\beta(\vec{w}_h)|_{0,T} + |\gamma_\alpha^\beta(\vec{w}_h)|_{0,T} |\gamma_\beta^\alpha(\vec{v}_h) - \tilde{\gamma}_{h\beta}^\alpha(\vec{v}_h)|_{0,T} + \\
 & \left. + |\gamma_\beta^\alpha(\vec{v}_h) - \tilde{\gamma}_{h\beta}^\alpha(\vec{v}_h)|_{0,T} |\gamma_\alpha^\beta(\vec{w}_h) - \tilde{\gamma}_{h\alpha}^\beta(\vec{w}_h)|_{0,T} \right\}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, à l'aide des estimations (5.4.3) (5.4.29) et $|\sqrt{a} - \sqrt{a_h}|_{0,\infty,T} = O(h)$, nous obtenons (5.4.30). \square

Puis, en reprenant les arguments de BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6, théorème 5.3.1], on établit une deuxième estimation de l'erreur de consistance :

Proposition 5.4.5 : Il existe deux constantes $h_0 > 0$ et $C > 0$ indépendante de h , telles que pour tout $h < h_0$, et pour tout $\vec{w}_h \in \vec{Y}_h$ et $\vec{v}_h \in \vec{X}_h$ en correspondance par la bijection \mathcal{F}_h définie au théorème 5.2.1, nous avons pour tout $p^i \in L^2(\Omega)$, $1 \leq i \leq 3$:

$$|f(\vec{w}_h) - \hat{f}_h(\vec{w}_h)| \leq Ch \|\vec{p}\|_{0,\Omega} \|\vec{w}_h\|_{\vec{V}_h} \tag{5.4.31}$$

Preuve : On utilise la décomposition :

$$\left. \begin{aligned}
 |f(\vec{w}_h) - \hat{f}_h(\vec{w}_h)| &= |f(\vec{w}_h) - \tilde{f}_h(\vec{w}_h)| \leq \left| \int_\Omega \vec{p}(\vec{w}_h - \vec{w}_h) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \right| + \\
 & + \left| \int_\Omega \vec{p}(\vec{w}_h - \vec{w}_h) (\sqrt{a_h} - \sqrt{a}) d\xi^1 d\xi^2 \right| + \left| \int_\Omega \vec{p} \vec{w}_h (\sqrt{a} - \sqrt{a_h}) d\xi^1 d\xi^2 \right|,
 \end{aligned} \right\}$$

et l'estimation : $|\vec{w}_h - \vec{w}_h|_{0,T} \leq Ch_T (\|\vec{w}_h\|_{1,T}^2 + \|w_{h2}\|_{1,T}^2 + \|w_{h3}\|_{2,T}^2)^{1/2}$ \square

Enfin, à l'aide de l'estimation (5.4.30), nous prouvons la \vec{V}_h -ellipticité uniforme de la forme bilinéaire $\hat{a}_h(\dots)$:

Proposition 5.4.6 : Il existe deux constantes h_1 , $0 < h_1 \leq h_0$, et $\beta > 0$ indépendante de h , telles que pour tout $h < h_1$, nous avons :

$$\beta \|\vec{v}_h\|_{\vec{V}_h}^2 \leq \hat{a}_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h \quad (5.4.32)$$

Preuve : Elle repose sur la \vec{V}_h -ellipticité uniforme de la forme bilinéaire $a_h(\dots)$, établie au théorème 3.4.1, en remarquant que l'estimation (5.4.30) nous permet d'écrire :

$$\hat{a}_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) = a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) + [\hat{a}_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) - a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h)] \geq (\alpha - Ch) \|\vec{v}_h\|_{\vec{V}_h}^2,$$

d'où (5.4.31) pour h suffisamment petit (par exemple $h_1 = \min(h_0, \frac{\alpha}{2C})$, et $\beta = \alpha - Ch_1$). □

En définitive, on établit la convergence de la méthode à partir du lemme 5.4.1 et des propositions 5.4.4 à 5.4.6 :

Théorème 5.4.1 : Soit \mathcal{T}_h une famille régulière de triangulations du domaine Ω ; soient \vec{V}_h et \vec{V}_h les espaces d'éléments finis associés, définis respectivement en (5.2.19) et (5.2.20). Supposons que la solution \vec{u} du problème continu 1.1.1 appartienne à $(H^2(\Omega))^2 \times H^3(\Omega)$, et que les forces \vec{p} vérifient $\vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$.

Alors, il existe une constante $h_1 > 0$, telle que pour tout $h < h_1$, les problèmes discrets 5.3.1 et 5.3.2 admettent une solution unique, respectivement $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$ et $\hat{u}_h \in \vec{V}_h$, vérifiant $\hat{u}_h = \mathcal{I}_h(\vec{u}_h)$ (où \mathcal{I}_h est la bijection définie au théorème 5.2.1) ; et il existe une constante $C > 0$, indépendante de h , telle que :

$$\|\vec{u} - \hat{u}_h\|_{\vec{V}_h} < Ch (\|u_1\|_{2,\Omega}^2 + \|u_2\|_{2,\Omega}^2 + \|u_3\|_{3,\Omega}^2)^{1/2} + \|\vec{p}\|_{0,\Omega} \quad (5.4.33)$$

Preuve : L'existence et l'unicité de la solution \hat{u}_h du problème 5.3.2 se déduit de la proposition 5.4.6 qui établit que la forme $\hat{a}_h(\dots)$ est définie positive ; l'existence et l'unicité de la solution \vec{u}_h du problème 5.3.1 s'obtient en utilisant le théorème 5.2.1.

L'estimation d'erreur (5.4.33) est une conséquence du lemme 5.4.1, des théorèmes 3.2.1, 3.3.1, et des propositions 5.4.4, 5.4.5, 5.4.6. □

Remarque 5.4.2 : Ajoutons que le choix des relations (5.2.19) nous conduit à une estimation d'erreur semblable à (5.4.33) modulo les remarques 5.2.2 et 5.4.1. Dans ce sens, nous avons cherché à établir directement une estimation du type : $|\bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v}_h) - \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v}_h)|_{0, T^{-0}(h_T)}$, en modifiant la définition de la bijection existant entre les espaces discrets \vec{Y}_h et \vec{X}_h (sans tenir compte a priori des conditions aux limites) ; mais il ne semble pas qu'il existe une telle bijection nous dispensant de l'introduction d'un terme correcteur. Dès lors, soulignons à nouveau, que la définition des conditions aux limites pour le problème discret 5.3.1 est déterminant pour le choix du correcteur $\Delta_{\alpha\beta}(\vec{v}_h)$ à introduire dans l'expression du tenseur de changement de courbure, de façon à assurer la convergence pour des géométries générales de coques minces.

□

6. CONCLUSION

Pour une hypothèse *minimale* de régularité, i.e. $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2 \times H^3(\Omega)$, nous avons établi des résultats de *convergence* pour des méthodes nonconformes d'éléments finis associées aux triangles de type (1) et de MORLEY. Dans le cadre des problèmes de coques minces générales, notre étude s'appuie sur des estimations d'erreurs *locales* (voir notamment le lemme 3.3.2) : en particulier, on note que l'hypothèse de *compatibilité* (3.3.27) (proche de la condition de continuité "forte" de STUMMEL [28]) est essentielle pour la *consistance*. En effet, dans le cas où $l=0$, nous avons continuité au sens des valeurs moyennes ; lorsque l est le degré du polynôme d'interpolation, nous vérifions la continuité forte de v_h (car $\int_S (v_h|_{T1} - v_h|_{T2})^2 ds = 0$ implique $v_h|_{T1}(s) = v_h|_{T2}(s)$, $\forall s \in S$) ; entre ces deux cas, on peut considérer la condition (3.3.27) sous la forme d'une *continuité discrète*, i.e. continuité en un nombre fini de points de S (cet aspect sera développé dans un prochain travail). Signalons, dans ce sens, que l'élément de ZIENKIEWICZ [3] ne vérifie cette condition que pour certaines triangulations (cf. LASCAUX-LESAIN [18]).

Par ailleurs, on peut remarquer que la justification du fameux Patch Test, comme *condition nécessaire* ou *suffisante* de consistance, est illusoire dans le cadre des problèmes du quatrième ordre à coefficients variables. En l'occurrence, une approche utilisant le lemme bilinéaire de CIARLET [10, théorème 4.2.5] nous conduirait à introduire la condition

$$E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = 0, \quad \forall \vec{u} \in (\vec{v} \in (P_1(\Omega))^2 \times P_2(\Omega), \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{v}) \nu_\alpha \nu_\beta \in P_0(\Omega)), \quad \forall \vec{w}_h \in \vec{V}_h,$$

qui, d'un point de vue pratique, n'est pas réaliste.

Enfin, en ce qui concerne l'*approximation par éléments à facettes triangulaires planes*, nous retrouvons des résultats semblables à ceux obtenus par BERNADOU-DUCATEL-TROUVE [6] et BERNADOU-TROUVE [7] : pour des géométries et des sollicitations arbitraires, il semble nécessaire d'introduire un *correcteur* pour évaluer les composantes du tenseur de changement de courbure, afin d'assurer la convergence de la solution \hat{u}_h du problème discret vers la solution \vec{u} du problème continu. En particulier, nous avons montré quelle était l'influence des conditions aux limites sur l'expression de ce correcteur.

REFERENCES

- [1] ADINI A., CLOUGH B. : Analysis of plate bending by the finite element method, NSF Report G 7337, 1961.
- [2] BATHE K.J., HO L.W. : A simple and effective element for analysis of general shell structures, *Computer and Structures*, Vol.13, 1981, pp. 673-681.
- [3] BAZELEY G.P., CHEUNG Y.K., IRONS B.M., ZIENKIEWICZ O.C. : Triangular elements in bending - conforming and non conforming solutions, *Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright Patterson A.F.B, Ohio 1965.
- [4] BERNADOU M. : Convergence of conforming finite element methods for general shell problems, *Int. J. Engng. Sc.*, 18, 1980, pp. 249-276.
- [5] BERNADOU M., CIARLET P.G. : Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. KOITER, in *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems, Vol. 134, Springer-Verlag, 1976, pp. 89-136.
- [6] BERNADOU M., DUCATEL Y., TROUVE P. : Approximation of general shell problems by flat plate elements, Part. 1, (submitted to *Computational Mechanics*).
- [7] BERNADOU M., TROUVE P. : Pseudo-conforming finite element approximation of linear thin shell problems, to appear in *The Mathematics of Finite Elements and Applications VI*, J.R. Whiteman Ed., Academic Press, London, 1987.

- [8] CIARLET P.G. : Quelques méthodes d'éléments finis pour le problème d'une plaque encastrée, in *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, Part 1*, B. Glowinski and J.L. Lions Ed., pp. 156-176, Lecture Notes in Computer Sciences, Vol. 10, Springer-Verlag, 1974.

- [9] CIARLET P.G. : Conforming finite element method for the shell problems, in *The Mathematics of Finite Elements and Applications II*, pp. 105-123, J.R. Whiteman Ed. Academic Press, London, 1976.

- [10] CIARLET P.G. : *The Finite Element Method For Elliptic Problems*, North-Holland, 1978.

- [11] CROUZEIX M., RAVIART P.A. : Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I, R.A.I.R.O., Anal. Numér., R-3, 1973, pp. 33-76.

- [12] DAWE D.J. : Shell analysis using a simple facet element, *Journal of strain analysis*, 7, 1972, pp. 266-270.

- [13] FRAEIJIS DE VEUBEKE B. : Variational principles and the Patch Test, *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 8, 1974, pp. 783-801.

- [14] IRONS B.M., RAZZAQUE A. : Experience with the patch test for convergence of finite elements, in *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, A.K. Aziz Ed., pp. 557-587, Academic Press, 1972.

- [15] KIKUCHI F. : Convergence of the ACM finite element scheme for plate bending problems, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 11, 1975, pp. 247-265.

- [16] KIKUCHI F. : Error analysis of flat plate element approximation of circular cylindrical shells, *Theoretical and Applied Mechanics*, 32, 1984, pp. 469-484, University of Tokyo Press.

- [17] KOITER W.T. : On the foundations of the linear theory of thin elastic shells, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch, B73, 1970, pp. 169-195.
- [18] LASCAUX P., LESAIN P. : Some nonconforming finite elements for the plate bending problem, R.A.I.R.O., Anal. Num., R-1, 1975, pp. 9-53.
- [19] MEEK J.L., TAN H.S. : A faceted shell element with loof nodes, Int. Num. Meth. Engng., 23, 1986, pp. 49-67.
- [20] MELOSH R.J : A stiffness matix for the analysis of thin plates in bending, J. Aero. Space Sci., 28, 1961, pp. 34-42.
- [21] MORLEY L.S.D. : The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems, Aero. Quart., 19, 1968, pp. 149-169.
- [22] NITSCHKE J.A. : Convergence of nonconforming methods, in *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, C. de Boor Ed., pp. 15-53, Academic Press, 1974.
- [23] OLSON M.D., BEARDEN T.W. : A simple flat triangular shell element revisited, Int. J. Numer. Methods Engr., Vol. 14, 1979, pp. 51-68.
- [24] RANNACHER R. : On nonconforming and mixed finite element methods for plate bending problems. The linear case, RAIRO, Anal. Numer., Vol. 13, n° 4, 1979, pp. 369-387.
- [25] RANNACHER R. : Nonconforming finite element methods for eigenvalue problems in linear plate theory, Num. Math., 32, 1979, pp. 23-42.
- [26] STRANG G. : Variational crimes in the finite element method, in *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, A.K. Aziz Editor, pp. 689-710, Academic Press, 1972.

- [27] STUMMEL F. : The generalized patch test, SIAM, J. Num. Anal., Vol. 16, 1979, pp. 449-471.
- [28] STUMMEL F. : Basic compactness properties of nonconforming and hybrid finite element spaces, RAIRO, Anal. Numer., Vol. 4, n° 1, 1980, pp. 81-115.

