



**HAL**  
open science

**Sur la convergence des methodes d'elements finis  
nonconformes pour des problemes lineaires de coques  
minces**

P. Trouve

► **To cite this version:**

P. Trouve. Sur la convergence des methodes d'elements finis nonconformes pour des problemes lineaires de coques minces. RR-0796, INRIA. 1988. inria-00075755

**HAL Id: inria-00075755**

**<https://inria.hal.science/inria-00075755v1>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

UNITÉ DE RECHERCHE  
IRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P.105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tél.: (1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

N° 796

**SUR LA CONVERGENCE DES  
METHODES D'ELEMENTS FINIS  
NONCONFORMES POUR DES  
PROBLEMES LINEAIRES DE  
COQUES MINCES**

**P. TROUVE**

**FEVRIER 1988**

**SUR LA CONVERGENCE DES METHODES D'ELEMENTS FINIS NONCONFORMES  
POUR DES PROBLEMES LINEAIRES DE COQUES MINCES**

**P. TROUVÉ**

INRIA, Domaine de Voluceau, B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France

**Résumé :**

Dans ce rapport, nous étudions la convergence des méthodes d'éléments finis nonconformes pour l'approximation des problèmes de coques minces générales. Nous établissons des conditions suffisantes de convergence pour une large classe d'éléments finis, puis nous donnons des estimations de l'erreur sur les déplacements et les contraintes.

**ON THE CONVERGENCE OF NONCONFORMING FINITE ELEMENT METHOD  
FOR LINEAR THIN SHELL PROBLEMS**

**Abstract :**

In this report, we study the convergence of nonconforming finite element method for the approximation of general thin shell problems. We give sufficient conditions of convergence for a large class of finite elements, then we estimate the error on the displacements and on the stresses.

## SOMMAIRE

### 1 INTRODUCTION

1.1. Le problème continu et sa formulation variationnelle

### 2 METHODES D'ELEMENTS FINIS NONCONFORMES

2.1. Le problème discret

2.2. Conditions nécessaires et suffisantes de convergence

2.3. Décomposition de l'erreur de consistance

2.4. Estimations d'erreur aux interfaces

2.5. Contrôle de quadrature pour le schéma nodal

### 3 LES ELEMENTS SEMI-LOOF

3.1. Approximation par triangles de Morley

3.2. Approximation par triangles de Fraeijs de Veubeke

3.3. Approximation par triangles du type Irons

### 4 LES ELEMENTS $C^0(\bar{\Omega})$

4.1. Approximation par triangles de Zienkiewicz

4.2. Approximation par triangles de Ganev

### 5 QUELQUES ELEMENTS QUADRANGULAIRES

5.1. Approximation par rectangles de Kikuchi

5.2. Approximation par rectangles ACM

5.3. Approximation par rectangles du type Irons

### 6 ESTIMATIONS D'ERREURS

6.1. Estimations de l'erreur de discrétisation

6.2. Estimations- $L^2$  pour les déplacements

### CONCLUSION

## INTRODUCTION

L'intérêt, que suscite l'analyse des problèmes de coques, pour les méthodes d'éléments finis *nonconformes* tient en deux points :

- leur grande simplicité de mise en oeuvre (est-il nécessaire de rappeler que la continuité  $C^1(\bar{\Omega})$  n'est réalisée que pour des polynômes de degré cinq au moins, sans quoi il faut utiliser des éléments composites) ;

- leur bonne précision, même dans le cas de maillages grossiers (alors que les éléments finis conformes présentent souvent un excès de rigidité).

Toutefois, cet engouement est limité parce qu'il est difficile de prédire leur *convergence*. A cet effet, le fameux *Patch Test* d'IRONS (cf. [19], [20], STRANG-FIX [41]) semblait pouvoir donner des indications sur le comportement numérique de tels éléments pour le problème d'une plaque en flexion ; mais, dans le cas présent (celui d'un problème du quatrième ordre à *coefficients variables*), il est douteux que l'on dispose là d'une condition *nécessaire et suffisante* de convergence (cf. STRANG [40]). Enfin, relevons les critiques formulées sur la nécessité d'un tel critère (cf. ARANTES E OLIVEIRA [2], SANDER-BECKER [34] qui exhibent un élément "convergent" mais ne passant pas le Patch Test, SHI [36][37] qui donne des exemples d'éléments ne satisfaisant pas le Patch Test, mais qui convergent pour certaines triangulations), et sur sa suffisance (cf. STUMMEL [43], SHI [35]). Des éléments de réponse, plus convaincants, à la question de la convergence de ces méthodes sont donnés par NITSCHKE [31], STUMMEL [42], mais restent difficiles à appliquer. Dans cette optique, nous proposons un critère pratique, le *contrôle de quadrature sur le schéma nodal*, qui explicite des conditions suffisantes de convergence pour une large classe d'éléments finis nonconformes.

L'étude mathématique de ces méthodes peut être menée : soit en particulierisant l'élément (cf. [11], [21], [22], [24], [25], [26], [30], [32], [36], [37], [38], [39], [47]), le plus souvent dans le cadre des problèmes de plaques, soit en tentant de mettre sur pied une approche systématique (cf. BERNADOU [7], CIARLET [10], GROUZEIX-RAVIART [12], STUMMEL [42][43]) ; c'est cette seconde voie qui est retenue ici. Ajoutons qu'il est possible de considérer les méthodes d'éléments finis nonconformes par le biais des méthodes de pénalisation (cf. BABUSKA-ZLAMAL [4], BAKER [5]), ou encore comme une variante des méthodes hybrides primales (cf. THOMAS [46]), soit encore comme modes "duaux" de certaines méthodes mixtes (cf. ARNOLD-BREZZI [3]). Dans cette étude, nous donnons des estimations d'erreurs pour les problèmes linéaires de coques minces générales que nous illustrons à l'aide de nombreux exemples.

1.1. Le problème continu et sa formulation variationnelle

Nous reprenons dans ce paragraphe une brève description du modèle linéaire de coques minces de W.T. KOITER [23]. Soit  $\Omega$  un ouvert borné du plan  $\mathbb{E}^2$  de frontière lipschitzienne  $\Gamma$ . La surface moyenne  $\mathcal{I}$  de la coque peut être définie comme l'image de  $\bar{\Omega}$  par une application  $\vec{\phi} : \bar{\Omega} \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$  - l'espace Euclidien usuel dont  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sera un système orthogonal de référence -, i.e.

$$\bar{\mathcal{I}} = \{ \vec{\phi}(\xi) , \xi = (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega} \} .$$

Nous supposons que l'application  $\vec{\phi}$  vérifie les hypothèses suivantes :

$$(i) \quad \vec{\phi} \in (\mathbb{C}^3(\bar{\Omega}))^3 ; \tag{1.1.1}$$

$$(ii) \quad \text{tout les points de la surface } \bar{\mathcal{I}} \text{ sont réguliers, i.e. les} \tag{1.1.2}$$

$$\text{deux vecteurs } \vec{a}_\alpha = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \xi^\alpha} = \vec{\phi}_{,\alpha} \text{ sont linéairement indépendants.}$$

La première forme fondamentale  $(a_{\alpha\beta})$  de la surface  $\bar{\mathcal{I}}$  est donnée par  $a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta$  et on note :  $\det(a_{\alpha\beta}) = a$ . En tout point  $\xi \in \bar{\Omega}$ , on associe à la base covariante  $(\vec{a}_\alpha(\xi))$  du plan tangent à  $\bar{\mathcal{I}}$  au point  $\vec{\phi}(\xi)$  la base contravariante  $(\vec{a}^\alpha(\xi))$ , à l'aide des relations  $\vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}_\beta = \delta^\alpha_\beta$  (symbole de Kronecker). Enfin, on introduit le vecteur unitaire  $\vec{a}_3 = \vec{a}^3$ , normal à la surface moyenne, orienté de telle façon que la trièdre  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$  soit direct. La deuxième forme fondamentale  $(b_{\alpha\beta})$  de la surface est donnée par :  $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_{3,\beta} = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta}$ ; on déduit la troisième forme fondamentale  $(c_{\alpha\beta})$  :  $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha} = b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}$ , où  $b_\alpha^\lambda = a^{\lambda\mu} b_{\alpha\mu}$ .

Pour clarifier l'étude, nous considérons le problème aux limites décrivant l'équilibre de la coque  $\mathcal{C} = \{ M \in \mathbb{E}^3 , \vec{OM} = \vec{\phi}(\xi) + \xi^3 \vec{a}_3(\xi) , \xi \in \bar{\Omega} , 0 < \xi^3 \leq \xi^3 \leq \xi^3 \}$ , soumise à l'action de forces surfaciques  $\vec{p}$ , encastree sur le bord  $\partial \mathcal{I}_0 = \vec{\phi}(\Gamma_0)$ , où  $\Gamma_0$  est une partie mesurable de  $\Gamma$  telle que  $\text{mes } \Gamma_0 > 0$ , et chargée sur  $\partial \mathcal{I}_1 = \vec{\phi}(\Gamma_1)$ , où  $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$ . En utilisant la carte  $\vec{\phi}$ , on exprime ce problème directement sur le domaine  $\bar{\Omega}$  : les inconnues sont alors les composantes covariantes du déplacement  $\vec{u}$  de la surface moyenne  $\bar{\mathcal{I}}$ , i.e. les trois fonctions  $u_i : \xi \in \bar{\Omega} \rightarrow u_i(\xi) \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Sous leur forme locale, les équations d'équilibre sont (cf. KOITER [23, p. 175]) :

$$\left. \begin{aligned} & (\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + b_\lambda^{\alpha\beta} \bar{m}^{\lambda\beta}(\vec{u})) |_\beta + b_\lambda^{\alpha\beta} \bar{m}^{\lambda\beta}(\vec{u}) |_\beta + p^\alpha = 0 , \quad \alpha = 1, 2 \\ & - \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) |_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + p^3 = 0 , \end{aligned} \right\} \text{ dans } \Omega , \tag{1.1.3}$$

où  $\vec{n}^{\alpha\beta}(\vec{u})$  et  $\vec{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})$  représentent respectivement les tenseurs symétriques des résultantes tangentielles de contraintes et des moments tangentiels ; et où la notation  $\cdot|_{\alpha}$  désigne l'opérateur de dérivation covariante (par rapport à la surface  $\mathcal{I}$ ) selon  $\xi^{\alpha}$ . Les conditions aux limites sont données par :

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ et } \partial_{\nu} u_3 = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{I}_0, \quad (1.1.4)$$

où  $\partial_{\nu}$  représente l'opérateur de dérivation selon la normale  $\vec{\nu} = \nu_{\lambda} \vec{a}^{\lambda}$  à  $\partial\mathcal{I}_0$  située dans le plan tangent à  $\mathcal{I}$  ; et par :

$$\left. \begin{aligned} (\vec{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + 2b_{\lambda}^{\alpha} \vec{m}^{\lambda\beta}(\vec{u})) \nu_{\beta} &= N^{\alpha} + b_{\lambda}^{\alpha} M^{\lambda} , \\ - \vec{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\alpha} \nu_{\beta} - \partial_{\tau} (\vec{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) \nu_{\alpha} \tau_{\beta}) &= N^3 - \partial_{\tau} M_{\nu} , \\ \vec{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) \nu_{\alpha} \nu_{\beta} &= - M_{\tau} , \end{aligned} \right\} \text{ sur } \partial\mathcal{I}_1, \quad (1.1.5)$$

où  $\partial_{\tau}$  représente l'opérateur de dérivation selon la tangente  $\vec{\tau} = \tau_{\lambda} \vec{a}^{\lambda} = \vec{a}_3 \times \vec{\nu}$  à  $\partial\mathcal{I}_1$  , et où  $\vec{N} = N^i \vec{a}_i$  désigne l'effort linéique, et  $\vec{M} = M_{\tau} \vec{\tau} + M_{\nu} \vec{\nu} = \epsilon_{\alpha\beta} M^{\beta} \vec{a}^{\alpha}$  le moment linéique, appliqué à  $\partial\mathcal{I}_1$  ( $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$  ,  $\epsilon_{12} = \sqrt{a}$  ,  $\epsilon_{21} = -\sqrt{a}$ ). Enfin, les lois de comportement pour un matériau élastique :  $\vec{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) = e E^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\vec{u})$  et  $\vec{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) = \frac{e}{12} E^{\alpha\beta\lambda\mu} \bar{\rho}_{\lambda\mu}(\vec{u})$  , où  $e$  est l'épaisseur de la coque et  $E^{\alpha\beta\lambda\mu}$  le tenseur des modules élastiques, permettent de relier les tenseurs de contraintes ( $\vec{n}^{\alpha\beta}$ ) et ( $\vec{m}^{\alpha\beta}$ ) au tenseur de déformation ( $\gamma_{\alpha\beta}$ ) et au tenseur de changement de courbure ( $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ ) de la surface moyenne, dont les composantes covariantes sont :

$$\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} u_3, \quad (1.1.6)$$

$$\bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{u}) = u_3|_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} u_3 + b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda|\beta} + b_{\beta}^{\lambda} u_{\lambda|\alpha} + b_{\alpha|\beta}^{\lambda} u_{\lambda}. \quad (1.1.7)$$

Dans la suite, nous supposerons le matériau homogène et isotrope de sorte que l'hypothèse des contraintes planes conduit à l'expression :

$$E^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} [a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu}] ,$$

où  $E$ ,  $\nu$  désignent respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.

La formulation variationnelle du problème aux limites (1.1.3) (1.1.4) (1.1.5) exprime le fait que la solution  $\vec{u}$  rend minimale, sur l'espace des déplacements admissibles  $\vec{V}$  , l'énergie de la coque,  $J : \vec{v} \in \vec{V} \rightarrow J(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) - f(\vec{v})$  , soit :

Problème 1.1.1 : pour  $\vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$ ,  $\vec{N} \in (L^2(\Gamma_1))^3$ ,  $\vec{M} \in (L^2(\Gamma_1))^2$ , trouver  $\vec{u} \in \vec{V}$ , tel que

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \vec{V},$$

où

$$\vec{V} = (\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega); \vec{v}|_{\Gamma_0} = \vec{0}, \partial_n v_3|_{\Gamma_0} = 0), \quad (1.1.8)$$

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \frac{Ee}{1-\nu^2} \left\{ (1-\nu)\gamma_{\beta}^{\alpha}(\vec{u})\gamma_{\alpha}^{\beta}(\vec{v}) + \nu\gamma_{\alpha}^{\alpha}(\vec{u})\gamma_{\beta}^{\beta}(\vec{v}) + \right. \\ \left. + \frac{e^2}{12} [(1-\nu)\bar{\rho}_{\beta}^{\alpha}(\vec{u})\bar{\rho}_{\alpha}^{\beta}(\vec{v}) + \nu\bar{\rho}_{\alpha}^{\alpha}(\vec{u})\bar{\rho}_{\beta}^{\beta}(\vec{v})] \right\} \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2, \quad (1.1.9)$$

$$F(\vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{p} \cdot \vec{v} \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 + \int_{\Gamma_1} [\vec{N}\vec{v} + \vec{M}\omega(\vec{v})] d\gamma, \quad (1.1.10)$$

avec les notations :  $\gamma_{\beta}^{\alpha}(\vec{v}) = a^{\alpha\nu}\gamma_{\nu\beta}(\vec{v})$ ,  $\bar{\rho}_{\beta}^{\alpha}(\vec{v}) = a^{\alpha\nu}\bar{\rho}_{\nu\beta}(\vec{v})$ , et où  $\vec{\omega}(\vec{v})$  désigne le vecteur rotation associé au déplacement  $\vec{v}$ , i.e.

$$\vec{\omega}(\vec{v}) = \omega^1(\vec{v})\vec{a}_1, \quad \omega^{\lambda}(\vec{v}) = \epsilon^{\lambda\mu} [v_3|_{\mu} + b_{\mu\nu}^{\nu}], \quad \omega^3(\vec{v}) = \frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu} v_{\mu|\lambda}. \quad (1.1.11)$$

où  $\epsilon^{\lambda\mu} = \epsilon_{\alpha\beta} a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} = \epsilon_{\lambda\mu}/a$ .

On a alors le résultat suivant :

**Théorème 1.1.1 :** (BERNADOU-CIARLET [8], Théorème 6.4.1)

Le problème 1.1.1 admet une solution unique.

□

La preuve de ce théorème repose sur la  $\vec{V}$ -ellipticité uniforme de la forme bilinéaire  $a(\dots)$ , i.e., il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que :

$$\alpha \|\vec{v}\|_{\vec{V}}^2 \leq a(\vec{v}, \vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \vec{V}, \quad (1.1.12)$$

où  $\|\cdot\|_{\vec{V}}$  désigne la norme induite par le produit scalaire  $(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{\alpha=1}^2 (u_{\alpha}, v_{\alpha})_{1,\Omega} + (u_3, v_3)_{2,\Omega}$  dont on a muni l'espace  $\vec{V}$ .

### Elements de géométrie différentielle

Le transport des équations d'équilibres définies sur  $\mathcal{S}$  à  $\Omega$  s'effectue à l'aide d'un simple changement de variables connaissant  $\vec{\phi}$ ; il en va de même pour l'expression de l'énergie de déformation :  $\frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v})$ . Par contre, le transport des conditions aux limites (1.1.4) et (1.1.5), respectivement définies sur  $\partial\mathcal{S}_0$  et  $\partial\mathcal{S}_1$ , à  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  nécessite quelques développements.



Soit maintenant  $\mathcal{C}$  une courbe tracée sur la surface  $\overline{\mathcal{I}}$ , et définie par les équations paramétriques :  $\xi^\alpha = f^\alpha(s)$ ,  $\alpha = 1, 2$ , où le paramètre  $s$  est pris dans un ouvert de  $\mathbb{R}$ , i.e. la courbe  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{E}^3$  est l'image par  $\vec{\phi}$  d'une courbe  $\Gamma$  du plan  $\mathcal{E}^2$  ( $s$  est l'abscisse curviligne de  $\Gamma$ ). Alors l'élément linéaire  $d\gamma$  de la courbe  $\mathcal{C}$  est donné par :

$$d\gamma = \sqrt{a_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta} ds ,$$

où l'on a posé :  $t^\alpha = \frac{df^\alpha}{ds}$ ,  $\alpha = 1, 2$  (et où  $ds$  est l'élément linéaire de  $\Gamma$ ). Lorsque  $\mathcal{I}$  est un intégrande défini sur  $\mathcal{C}$ , on peut donc écrire :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathcal{I} d\gamma = \int_{\Gamma} \mathcal{I}(s) \sqrt{a_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta} ds . \quad (1.1.13)$$

De même si l'on désigne par  $\vec{r}(\xi)$  le vecteur unitaire tangent à  $\mathcal{C}$  en  $\vec{\phi}(\xi)$ , où  $\xi$  est le point de  $\Gamma$  d'abscisse curviligne  $s$ , et par  $\vec{t}(s)$  le vecteur unitaire tangent à  $\Gamma$  à la même abscisse  $s$  (lorsque  $\Gamma$  est suffisamment régulière), nous aurons :

$$\vec{r}(\xi) = r^\lambda(\xi) \vec{a}_\lambda(\xi) = \frac{t^\lambda}{\sqrt{a_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta}} \vec{a}_\lambda(\xi) , \quad (1.1.14)$$

où nous avons posé :  $\vec{t}(s) = t^\lambda(s) \vec{i}_\lambda$ , avec  $(\vec{i}_1, \vec{i}_2)$  une base orthonormée de  $\mathcal{E}^2$ . On peut alors définir un vecteur unitaire normal à  $\mathcal{C}$  en  $\vec{\phi}(\xi)$  par  $\vec{\nu}(\xi) = \vec{r}(\xi) \times \vec{a}_3(\xi)$ , et également le vecteur unitaire normal  $\vec{n}$  à  $\Gamma$  en  $s$  par :  $\vec{n}(s) \cdot \vec{t}(s) = 0$ ,  $\vec{n}(s) \times \vec{t}(s) = \vec{i}^3$ ; on obtient alors :  $\vec{\nu} = \nu^{\lambda\mu} \vec{a}_\lambda = \epsilon^{\lambda\mu} r_\mu \vec{a}_\lambda$  et  $\vec{n} = n^{\lambda\mu} \vec{i}_\lambda = \epsilon^{\lambda\mu} t_\mu \vec{i}_\lambda$ .

Dès lors, on vérifie que les conditions (1.1.4) sont bien équivalentes à :

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \partial_n u_3 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 ,$$

où  $\partial_n$  désigne l'opérateur de dérivation selon la normale  $\vec{n}$  à  $\Gamma_0$ ; en effet, nous avons :

$$\partial_\nu u_3 = \overrightarrow{Du}_3 \cdot (\nu^{\lambda\mu} \vec{a}_\lambda) = \epsilon^{\lambda\mu} r_\mu \nu_{3,\lambda} = \frac{\epsilon^{\lambda\mu} t_\mu}{\sqrt{a_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta}} u_{3,\lambda} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta}} \partial_n u_3 ,$$

soit encore, en remarquant que  $1/\sqrt{a_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta} = \sqrt{a_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta}$  (pour cela il suffit d'écrire que :  $(r^\lambda \vec{a}_\lambda) \cdot (r_\mu \vec{a}^\mu) = 1$ )

$$\partial_\nu u_3 = \sqrt{\frac{a_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta}{a}} \partial_n u_3 . \quad (1.1.15)$$

De façon similaire, nous transformons les expressions (1.1.5) pour obtenir les conditions aux limites sur  $\Gamma_1$  ; en particulier, on a :

$$\left. \begin{aligned} \nu_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta} r^\beta = \sqrt{\frac{a}{a_{\lambda\mu} t^\lambda t^\mu}} \quad n_\alpha = \sqrt{a} \sqrt{a^{\alpha\mu} t_\lambda t_\mu} n_\alpha, \\ r_\alpha &= \frac{t_\alpha}{\sqrt{a_{\lambda\mu} t^\lambda t^\mu}} = \sqrt{a_{\lambda\mu} t^\lambda t^\mu} t_\alpha, \\ \partial_r M &= \vec{DM} \cdot (r^{\alpha\rightarrow} a_\alpha) = \frac{t_\alpha}{\sqrt{a_{\lambda\mu} t^\lambda t^\mu}} \quad M_{,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a_{\lambda\mu} t^\lambda t^\mu}} \quad \partial_t M = \sqrt{a^{\lambda\mu} t_\lambda t_\mu} \partial_t M, \end{aligned} \right\} (1.1.16)$$

(et nous modifions en conséquence les seconds membres).

## 2 METHODES D'ELEMENTS FINIS NONCONFORMES

Nous considérons ici les approximations du problème 1.1.1 associées à des espaces d'éléments finis  $\vec{X}_h$  nonconformes au sens où  $\vec{X}_h$  est un sous-espace (de dimension finie) de  $(L^2(\Omega))^3$  mais n'est pas en général un sous-espace de  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$  - toutefois, il est loisible de considérer les méthodes conformes (voir BERNADOU [7], CIARLET [10]) comme étant une variante de ces méthodes. De manière plus générale les méthodes nonconformes d'éléments finis sont caractérisées par  $\vec{V}_h \not\subset \vec{V}$  (voir NITSCHKE [31], STRANG [40]) ; ce n'est donc qu'à un aspect de la nonconformité que nous nous intéressons ici.

### 2.1. Le problème discret

Désormais, le domaine  $\Omega$  est supposé *polygonal* afin de pouvoir le recouvrir exactement à l'aide de triangulations - composées de triangles  $T$  pour lesquels le diamètre du cercle circonscrit est inférieur ou égal à  $h_T$ . De plus, nous considérons une famille *uniformément régulière* de triangulation  $\mathcal{T}_h$ , i.e.

(i) il existe une constante  $\sigma > 0$  telle que :  $\forall h, \forall T \in \mathcal{T}_h, h_T / \rho_T \leq \sigma$ , où  $\rho_T$  est le diamètre du cercle inscrit dans le triangle  $T$  ;

(ii) la quantité  $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h}$  approche zéro, et il existe une constante  $\tau > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que :  $\forall h, \forall T \in \mathcal{T}_h, h_T / h \leq \tau$ .

Il est alors possible d'associer tout triangle  $T \in \mathcal{T}_h$  à un *triangle de référence*  $\hat{T}$  à l'aide d'une application affine inversible  $F_T$  définie par :

$$F_T : \hat{x} \in \hat{T} \rightarrow F_T(\hat{x}) = B_T \hat{x} + b_T = x \in T ;$$

où  $B_T$  est une matrice inversible et  $b_T$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ , et telle que :

$$F_T(\hat{a}_i) = a_i, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

les points  $\hat{a}_i$ ,  $a_i$  étant les sommets respectifs des triangles  $\hat{T}$  et  $T$ .

Pratiquement, on utilise les coordonnées barycentriques  $\lambda = (\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3=1-\lambda_1-\lambda_2)$  pour  $\hat{x}$ , et les coordonnées curvilignes  $\xi = (\xi^1, \xi^2)$  pour  $x$ . Par la suite il sera commode d'utiliser la restriction  $F_S$  de  $F_T$  à l'un des côtés  $S$  du triangle  $T$ , i.e.

$$F_S : \hat{y} \in \hat{S} \rightarrow F_S(\hat{y}) = B_S \hat{y} + b_T = y \in S$$

où  $B_S$  est une matrice inversible telle que :  $B_S B_T^{-1} = \text{Id}_S$ . En particulier, l'étude de l'erreur fera intervenir les estimations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \|B_T\| &= O(h_T) \quad , \quad |\det(B_T)| = 2\text{mes}(T) = O(h_T^2) \quad , \quad \|B_T^{-1}\| = O(h_T^{-1}) \\ |\det(B_S)| &= O(h_T) \quad . \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

A chaque triangulation  $\mathcal{T}_h$  on associe un produit d'espaces d'éléments finis  $\vec{X}_h = X_{h1} \times X_{h1} \times X_{h2}$ , sous-espace de dimension finie de  $(L^2(\Omega))^3$ , puis on définit le sous-espace  $\vec{V}_h = V_{h1} \times V_{h1} \times V_{h2}$  de  $\vec{X}_h$  qui prend en compte une approximation des conditions aux limites (1.1.4) - par exemple en imposant que les degrés de liberté faisant intervenir directement les composantes du déplacement et la dérivée première selon la normale de la composante transverse sont nuls en tout noeud de  $\Gamma_0$ . Les fonctions de  $\vec{X}_h$  sont définies à l'aide de familles *presque-affines* d'éléments finis  $(T, P_T, \Sigma_T)$  (voir CIARLET [11, p. 335-336]) au sens où : pour tous les entiers  $k, m \geq 0$  et tous les nombres  $p, q \in [1, \infty]$  compatibles avec les inclusions :

$$\begin{aligned} W^{k+1, p}(T) &\hookrightarrow \mathcal{C}^s(T) \quad , \\ W^{k+1, p}(T) &\hookrightarrow W^{m, q}(T) \quad , \\ P_k(T) &\subset P_T \subset W^{m, q}(T) \quad , \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

(où  $s$  désigne l'ordre maximum de dérivation partielle intervenant dans la définition de l'ensemble  $\Sigma_T$  des degrés de liberté, et où  $P_k(T)$  désigne l'espace des polynômes, de deux variables, défini sur le triangle  $T$ , de degré inférieur ou égal à  $k$ ), il existe une constante  $C$ , indépendante de  $T$ , telle que :

$$\|v - \Pi_T v\|_{m,q,T} \leq C(\text{mes}(T))^{1/q-1/p} h_T^{k+1-m} |v|_{k+1,p,T}, \quad \forall v \in W^{k+1,p}(T), \quad (2.1.3)$$

où  $\Pi_T$  désigne l'opérateur d'interpolation associé à l'élément fini  $(T, P_T, \Sigma_T)$ . Dans la suite, nous prendrons  $p=q=2$ .

*Remarque 2.1.1* : La notion de famille presque affine d'éléments finis est introduite pour tenir compte du fait qu'un élément  $(T, P_T, \Sigma_T)$  qui possède, parmi ses degrés de libertés, une dérivée première selon la normale n'a pas d'élément affine-équivalent (voir CIARLET [11, p. 83-85]), même s'il présente des propriétés d'interpolation semblables à celles des familles affines.

□

Le problème discret, associé à l'espace de dimension finie  $\vec{V}_h$ , s'énonce

*Problème 2.1.1* : trouver  $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$ , tel que

$$a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = f(\vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h,$$

où la forme bilinéaire approchée  $a_h(\dots)$  est donnée par :

$$a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = \left. \begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \frac{Ee}{1-\nu} \left[ (1-\nu) \gamma_\beta^\alpha(\vec{u}_h) \gamma_\alpha^\beta(\vec{v}_h) + \nu \gamma_\alpha^\alpha(\vec{u}_h) \gamma_\beta^\beta(\vec{v}_h) + \right. \\ & \left. + \frac{e}{12} \left[ (1-\nu) \bar{\rho}_\beta^\alpha(\vec{u}_h) \bar{\rho}_\alpha^\beta(\vec{v}_h) + \nu \bar{\rho}_\alpha^\alpha(\vec{u}_h) \bar{\rho}_\beta^\beta(\vec{v}_h) \right] \right] \sqrt{a} \, d\xi^1 d\xi^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4)$$

et où :  $\vec{V}_h \subset (L^2(\Omega))^3 \cap \prod_{T \in \mathcal{T}_h} [(H^1(T))^2 \times H^2(T)]$ . On va caractériser l'espace discret  $\vec{V}_h$  afin que le problème 2.1.1 soit bien posé.

Dans la pratique, il est avantageux de considérer des approximations conformes des composantes tangentielles du déplacement ; aussi la définition de l'espace  $X_{h1}$  est associée à des éléments finis du type Lagrange ou Hermite, qui satisfont :

*Espace  $X_{h1}$*  : les fonctions  $v_h$  de l'espace  $X_{h1}$  sont telles que :

- (i) sur chaque triangle  $T \in \mathcal{T}_h$ , leur restriction  $v_h|_T$  appartient à  $P_{T_1} \subset H^1(T)$ , où :  $P_{m_1}(T) \subset P_{T_1} \subset P_{n_1}(T)$ , avec :  $m_1, n_1 \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq m_1 \leq n_1$  ;
- (ii) sur chaque triangle  $T \in \mathcal{T}_h$ , leur restriction  $v_h|_T$  est complètement déterminée par leurs valeurs, notamment aux sommets du triangle  $T$ , et les valeurs de leurs dérivées sur  $\Sigma_{T1}$  ;
- (iii) l'inclusion suivante est satisfaite :  $X_{h1} \subset C^0(\bar{\Omega})$  ;

(2.1.5)

et la définition naturelle pour l'espace  $V_{h1}$  est alors :

$$V_{h1} = \{v_h \in X_{h1}, v_h|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

La nonconformité de l'espace  $\vec{V}_h$ , prise en compte dans cette étude, se réduit donc à celle de l'espace  $X_{h2}$  - en particulier, nous aurons a priori  $X_{h2} \not\subset \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ . La définition de l'espace  $X_{h2}$  est associée à des familles d'éléments finis presque-affines :

Espace  $X_{h2}$  : les fonctions  $v_h$  de l'espace  $X_{h2}$  sont telles que :

(i) sur chaque triangle  $T \in \mathcal{T}_h$ , leur restriction  $v_h|_T$  appartient à  $P_{T2} \subset H^2(T)$ , où :  $P_{m_2}(T) \subset P_{T2} \subset P_{n_2}(T)$ , avec :  $m_2, n_2 \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq m_2 \leq n_2$  ;

(ii) sur chaque triangle  $T \in \mathcal{T}_h$ , leur restriction  $v_h|_T$  est complètement déterminée par leurs valeurs et les valeurs de leurs dérivées sur  $\Sigma_{T2}$  ;

(iii) pour chaque triangle  $T \in \mathcal{T}_h$ , l'ensemble des degrés de liberté  $\Sigma_{T2}$  contient les formes linéaires :  $v_h|_T \rightarrow v_h|_T(a_i)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , où les  $a_i$  désignent les trois sommets du triangle  $T$  ; et  $v_h|_T \rightarrow \partial_n v_h(b_{ij})$  ou  $\frac{1}{\text{mes}(S_i)} \int_{S_i} \partial_n v_h|_T ds$ , où  $\partial_n$  désigne l'opérateur de dérivation selon la normale extérieure au côté  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , du triangle  $T$ , et où  $b_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq n_2 - 1$ , désignent des points de  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$  ;

(2.1.6)

la définition de l'espace  $V_{h2}$  s'obtient en considérant le sous-espace des fonctions  $v_h$  de  $X_{h2}$  pour lesquelles les degrés de libertés sur  $\Gamma_0$  sont nuls, par exemple :

$$V_{h2} = \{v_h \in X_{h2} ; v_h(a) = 0, \forall a \text{ noeud de } \mathcal{T}_h \text{ et } a \in \Gamma_0 ;$$

$$\partial_n v_h(b) = 0, \forall b \text{ noeud de } \mathcal{T}_h \text{ et } b \in \Gamma_0,$$

$$\text{ou } \frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S \partial_n v_h ds = 0, \forall S \subset \Gamma_0 \}.$$

Nous donnons aux paragraphes 3 et 4 des exemples d'éléments finis satisfaisant à la définition (2.1.6). On établit le résultat suivant :

**Théorème 2.1.1** : Soit l'espace discret  $\vec{V}_h = V_{h1} \times V_{h1} \times V_{h2}$ , où les espaces  $V_{h1}$  et  $V_{h2}$  sont respectivement définis par (2.1.5) et (2.1.6). Alors le problème discret 2.1.1 admet une solution unique  $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$ .

*Preuve* : L'espace  $\vec{V}_h$  étant de dimension finie, il faut et il suffit que la forme bilinéaire  $a_h(\dots)$  donnée par (2.1.4) soit définie positive (selon BERNADOU-CIARLET [8, théorème 6.1.2], on montre que c'est une forme positive). Ainsi l'assertion (sur  $\vec{V}_h$ ) :  $a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) = 0$ , implique que, pour tout triangle  $T$  de  $\mathcal{T}_h$ , on a

$$\int_T \frac{Ee}{1-\nu^2} \{ (1-\nu)\gamma_\beta^\alpha(\vec{v}_h)\gamma_\alpha^\beta(\vec{v}_h) + \nu\gamma_\alpha^\alpha(\vec{v}_h)\gamma_\beta^\beta(\vec{v}_h) + \\ + \frac{e^2}{12} [ (1-\nu)\bar{\rho}_\beta^\alpha(\vec{v}_h)\bar{\rho}_\alpha^\beta(\vec{v}_h) + \nu\bar{\rho}_\alpha^\alpha(\vec{v}_h)\bar{\rho}_\beta^\beta(\vec{v}_h) ] \} \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 = 0 ,$$

et, en vertu du théorème du mouvement rigide appliqué sur chacun des triangles T (voir BERNADOU-CIARLET [8, théorème 5.1.1]), ceci est équivalent à :  $\vec{v}_{h|T} = \vec{A}_T + \vec{B}_T \times \vec{\phi}$ , sur chaque triangle  $T \in \mathcal{T}_h$ , où  $\vec{A}_T$  et  $\vec{B}_T$  sont deux vecteurs constants sur T. En particulier le vecteur  $\vec{A}_T$  représente la translation sans déformation du triangle T, et  $\vec{B}_T$  correspond à la rotation sans déformation de ce triangle ; on a :  $\vec{B}_T = B_T^k \vec{a}_k$ , avec

$$B_T^\lambda = \epsilon^{\lambda\beta} (v_{h3, \beta} + b_\beta^\nu v_{h\nu})|_T, \quad B_T^3 = \frac{1}{2} \epsilon^{\nu\beta} (v_{h\beta, \nu})|_T .$$

Pour que la forme positive  $a_h(\dots)$  soit également définie, il faut et il suffit que  $a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) = 0 \Rightarrow \vec{v}_h \equiv \vec{0}$  sur  $\bar{\Omega}$  ; on procède alors selon deux étapes :

(i) les constructions (2.1.5) (2.1.6) préservent le mouvement rigide d'un triangle à l'autre.

Considérons deux triangles adjacents  $T_1$  et  $T_2$  de  $\mathcal{T}_h$ , de côté commun  $S = (a_1, a_2)$  ; nous avons donc :  $\vec{v}_{h|T_i} = \vec{A}_{T_i} + \vec{B}_{T_i} \times \vec{\phi}$ ,  $i = 1, 2$ . En exprimant la continuité du vecteur  $\vec{v}_{h|T_i}$  aux sommets  $a_1$  et  $a_2$  - conséquence des définitions (2.1.5) (ii) et (2.1.6) (iii) - nous obtenons :

$$\vec{\Delta A}_S + \vec{\Delta B}_S \times \vec{\phi}(a_i) = \vec{0}, \quad i = 1, 2, \quad (2.1.7)$$

où l'on a posé  $\vec{\Delta A}_S = \vec{A}_{T_1} - \vec{A}_{T_2}$ ,  $\vec{\Delta B}_S = \vec{B}_{T_1} - \vec{B}_{T_2}$ , et par différence :

$$\vec{\Delta B}_S \times [\vec{\phi}(a_2) - \vec{\phi}(a_1)] = \vec{0} .$$

Si  $\vec{\Delta B}_S \neq \vec{0}$ , cette relation exprime que  $\vec{\Delta B}_S$  est colinéaire au vecteur  $\vec{\phi}(a_2) - \vec{\phi}(a_1)$ . Dans la mesure où l'arc  $\vec{\phi}(S)$  et la droite  $(\vec{\phi}(a_1), \vec{\phi}(a_2))$  appartiennent à un même plan  $\mathcal{P}_S$ , on notera que (pour h suffisamment petit) les produits scalaires  $(\vec{\Delta B}_S, \vec{\tau})$  et  $(\vec{\Delta B}_S, \vec{\nu})$  ont un signe constant sur S.

En utilisant les relations (en utilisant (1.1.13) et (1.1.14)) :

$$\vec{\phi}(a_2) - \vec{\phi}(a_1) = \\ = \int_{a_1}^{a_2} d\vec{\phi} = \int_S \vec{\phi}_{, \alpha} \frac{d\xi^\alpha}{ds} ds = \int_S t^{\alpha\vec{a}} \vec{a}_\alpha ds = \int_S \vec{\tau} \sqrt{a_{\alpha\beta}} t^\alpha t^\beta ds = \int_{\vec{\phi}(S)} \vec{\tau} d\gamma$$

où  $\vec{\tau}$  est le vecteur tangent à  $\vec{\phi}(S)$  et  $\vec{t} = t^\lambda \vec{i}_\lambda = \overrightarrow{a_1 a_2} / a_1 a_2$ , on obtient donc :

$$\int_{\vec{\phi}(S)} (\vec{\Delta B}_S \times \vec{\tau}) d\gamma = \vec{0} . \quad (2.1.8)$$

Par ailleurs, la caractérisation du mouvement rigide nous conduit à l'expression

$$\vec{\Delta B}_S = \epsilon^{\lambda\beta} [(v_{h3,\beta}|_{T_1} - v_{h3,\beta}|_{T_2}) + b_\beta^\nu (v_{h\nu}|_{T_1} - v_{h\nu}|_{T_2})] \vec{a}_\lambda + \Delta B_S^3 \vec{a}_3 ,$$

avec  $\Delta B_S^3 = B_{T_1}^3 - B_{T_2}^3$ . En notant que, d'après (2.1.5) (iii) :  $v_{h\nu}|_{T_1} - v_{h\nu}|_{T_2} \equiv 0$ , et que :  $v_{h3,\beta} = t_\beta \partial_t v_{h3} + n_\beta \partial_n v_{h3}$  (où  $\partial_t$  et  $\partial_n$  sont respectivement les opérateurs de dérivation selon S et selon la normale à S, extérieure au triangle considéré), nous pouvons écrire :

$$\vec{\Delta B}_S = \epsilon^{\lambda\beta} t_\beta (\partial_t v_{h3}|_{T_1} - \partial_t v_{h3}|_{T_2}) \vec{a}_\lambda + \epsilon^{\mu\beta} n_\beta (\partial_n v_{h3}|_{T_1} - \partial_n v_{h3}|_{T_2}) \vec{a}_\mu + \Delta B_S^3 \vec{a}_3 ,$$

soit encore en utilisant les relations :  $\tau^\mu = \frac{t^\mu}{\sqrt{a_{\epsilon\eta} t^\epsilon t^\eta}}$  et  $\tau_\beta = \sqrt{a_{\epsilon\eta} t^\epsilon t^\eta} t_\beta$ ,

$$\vec{\Delta B}_S = \frac{1}{\sqrt{a_{\epsilon\eta} t^\epsilon t^\eta}} (\partial_t v_{h3}|_{T_1} - \partial_t v_{h3}|_{T_2}) \vec{\nu} - \sqrt{\frac{a_{\epsilon\eta} t^\epsilon t^\eta}{a}} (\partial_n v_{h3}|_{T_1} - \partial_n v_{h3}|_{T_2}) \vec{\tau} + \Delta B_S^3 \vec{a}_3 .$$

Nous en déduisons dans (2.1.8) :

$$\int_S [(\partial_t v_{h3}|_{T_1} - \partial_t v_{h3}|_{T_2}) \vec{a}_3 - \sqrt{a_{\epsilon\eta} t^\epsilon t^\eta} \Delta B_S^3 \vec{\nu}] ds = \vec{0} .$$

En projetant cette relation sur une base orthonormale fixe de  $\mathcal{E}^3$ , puis en utilisant la relation :  $\int_S (\partial_t v_{h3}|_{T_1} - \partial_t v_{h3}|_{T_2}) ds = v_{h3}(a_2) - v_{h3}(a_1) = 0$ , on montre (sachant que  $(\vec{\Delta B}_S \cdot \vec{\nu})$  garde un signe constant sur S de façon à pouvoir appliquer la deuxième formule de la moyenne) :

$$\int_{\vec{\phi}(S)} \Delta B_S^3 \vec{\nu} d\gamma = \vec{0} ,$$

(remarquons que le même argument nous conduit à :  $\int_{\vec{\phi}(S)} (\vec{\Delta B}_S \cdot \vec{\nu}) d\gamma = 0$ ). Par projection, on obtient :

$$\int_{\vec{\phi}(S)} \Delta B_S^3 h d\gamma = 0 , \quad \forall h \in \mathcal{C}^0(S) ,$$

d'où :  $\Delta B_S^3 \equiv 0$  sur S. De même, comme  $(\vec{\Delta B}_S \cdot \vec{\nu})$  a un signe constant sur S et comme  $\int_{\vec{\phi}(S)} (\vec{\Delta B}_S \cdot \vec{\nu}) d\gamma = 0$ , on a :  $\vec{\Delta B}_S \cdot \vec{\nu} \equiv 0$  sur S.

Ainsi, nous trouvons

$$\vec{\Delta B}_S = - \left[ \sqrt{\frac{a_{\epsilon\eta} t^\epsilon t^\eta}{a}} (\partial_n v_{h3}|_{T_1} - \partial_n v_{h3}|_{T_2}) \right] \vec{\tau} .$$

Or la deuxième hypothèse (2.1.6) (iii) - soit directement en remarquant que  $\overrightarrow{\Delta B}_S(b_{ij}) = \vec{0}$  (et  $\overrightarrow{\Delta B}_S$  constant sur S), soit en posant :

$$|\overrightarrow{\Delta B}_S| = \frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S |\overrightarrow{\Delta B}_S \cdot \vec{\tau}| \, ds \leq \frac{c}{\text{mes}(S)} \left| \int_S (\partial_n v_{h3}|_{T_1} - \partial_n v_{h3}|_{T_2}) \, ds \right| = 0 ,$$

puisque  $(\overrightarrow{\Delta B}_S \cdot \vec{\tau})$  garde un signe constant sur S - nous conduit à  $\overrightarrow{\Delta B}_S = \vec{0}$  sur S ; par suite, on a dans (2.1.7) :  $\overrightarrow{\Delta A}_S = \vec{0}$  sur S.

En définitive, l'assertion  $a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) = 0$ ,  $\vec{v}_h \in \vec{V}_h$ , implique  $\vec{v}_h = \vec{A} + \vec{B} \times \vec{\phi}$ , où  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont maintenant des vecteurs constants sur  $\bar{\Omega}$ .

(ii) les conditions aux limites discrètes rendent nul le mouvement rigide.

Nous nous situons désormais sur S, inclus dans  $\Gamma_o$ . Un raisonnement analogue au précédent - notamment dans (2.1.7), on remplace  $\overrightarrow{\Delta A}_S$  et  $\overrightarrow{\Delta B}_S$  par  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  - nous conduit à  $\vec{A} = \vec{0}$  et  $\vec{B} = \vec{0}$  en utilisant les définitions des conditions aux limites dans  $V_{h1}$  et  $V_{h2}$ .

En conséquence la forme bilinéaire  $a_h(\dots)$  définit une norme sur l'espace de dimension finie  $\vec{V}_h$  et le problème discret 2.1.1 admet donc une solution unique  $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$ .

□

En munissant l'espace discret  $\vec{V}_h$  de la norme

$$\|\vec{v}_h\|_h = (\|v_{h1}\|_{1,\Omega}^2 + \|v_{h2}\|_{1,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v_{h3}\|_{2,T}^2)^{1/2} , \quad (2.1.9)$$

il s'agit maintenant d'estimer l'erreur  $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h$ , ou au moins de prouver la h-convergence de l'approximation, i.e.  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h = 0$ .

## 2.2. Conditions nécessaires et suffisantes de convergence

On commence par introduire les conditions abstraites de convergence :

**Théorème 2.2.1** : Supposons que les normes  $[a_h(\dots)]^{1/2}$  et  $\|\cdot\|_h$ , définies sur  $\vec{V}_h$ , soient uniformément équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ , indépendantes de h, telles que l'on ait :

$$\alpha_0 \|\vec{v}_h\|_h^2 \leq a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) \leq \alpha_1 \|\vec{v}_h\|_h^2, \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h . \quad (2.2.1)$$

Alors, la solution  $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$  du problème discret 2.1.1 converge vers la solution  $\vec{u} \in \vec{V}$  du problème continu 1.1.1, lorsque h tend vers 0, si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\vec{u} - P_h \vec{u}\|_h = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|a_h(\vec{u}, \vec{w}_h) - f(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_h} = 0 , \quad (2.2.2)$$

où  $P_h$  désigne l'opérateur de projection orthogonale de  $(H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$  sur  $\vec{V}_h$ .



Preuve : Remarquons tout d'abord qu'il est loisible d'étendre les définitions (2.1.4) et (2.1.9) à l'espace  $\vec{V} + \vec{V}_h$ . De plus, de la continuité de la forme bilinéaire  $a(\dots)$  sur l'espace  $(H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ , on déduit - par sommation sur les triangle T de  $\mathcal{T}_h$  - l'existence d'une constante positive  $\alpha_1$ , indépendante de h, telle que :

$$a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) \leq \alpha_1 \|\vec{v}_h\|_h \|\vec{w}_h\|_h, \quad \forall \vec{v}_h, \vec{w}_h \in \vec{V} + \vec{V}_h. \quad (2.2.3)$$

Cette propriété suffit à établir la seconde inégalité dans (2.2.1).

Comme l'opérateur  $P_h$  est l'opérateur de projection orthogonale (de  $\vec{V} + \vec{V}_h$ ) sur  $\vec{V}_h$  pour la norme (2.1.9), on peut écrire

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h^2 = \|\vec{u} - P_h \vec{u}\|_h^2 + \|\vec{u}_h - P_h \vec{u}\|_h^2. \quad (2.2.4)$$

D'une part, en utilisant la décomposition :

$$a_h(\vec{u}_h - P_h \vec{u}, \vec{u}_h - P_h \vec{u}) = a_h(\vec{u} - P_h \vec{u}, \vec{u}_h - P_h \vec{u}) + [f(\vec{u}_h - P_h \vec{u}) - a_h(\vec{u}, \vec{u}_h - P_h \vec{u})],$$

avec les inégalités (2.2.1) et (2.2.3), et le théorème de Pythagore (2.2.4), on obtient une majoration de l'erreur de discrétisation :

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h \leq [1 + 2(\frac{\alpha_1}{\alpha_0})^2]^{1/2} \|\vec{u} - P_h \vec{u}\|_h + \frac{\sqrt{2}}{\alpha_0} \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f(\vec{w}_h) - a_h(\vec{u}, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_h}, \quad (2.2.5)$$

qui établit le caractère suffisant des conditions (2.2.2) de convergence.

D'autre part, de la relation (2.2.3) on déduit :

$$a_h(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{w}_h) = a_h(\vec{u}, \vec{w}_h) - f(\vec{w}_h) \leq \alpha_1 \|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h \|\vec{w}_h\|_h, \quad \forall \vec{w}_h \in \vec{V}_h,$$

soit encore :

$$\sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f(\vec{w}_h) - a_h(\vec{u}, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_h} \leq \alpha_1 \|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h;$$

et d'après (2.2.4), on a directement :

$$\|\vec{u} - P_h \vec{u}\|_h \leq \|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h.$$

Les deux dernières inégalités prouvent le caractère nécessaire des conditions (2.2.2) de convergence.

□

Puis, on considère le cas particulier où les espaces discrets  $V_{h1}$  et  $V_{h2}$  sont donnés par (2.1.5) et (2.1.6) : on a alors l'estimation de l'erreur d'interpolation suivante.

*Lemme 2.2.1 : Supposons que la solution  $\vec{u}$  du problème continu 1.1.1 appartient à l'espace  $(H^{m+1}(\Omega))^2 \times H^{m+2}(\Omega)$ , où :  $m = \min(m_1, m_2 - 1)$ . Alors, il existe une constante  $C$ , indépendante de  $h$ , telle que*

$$\|\vec{u} - P_h \vec{u}\|_h \leq Ch^m (|u_1|_{m+1, \Omega}^2 + |u_2|_{m+1, \Omega}^2 + |u_3|_{m+2, \Omega}^2)^{1/2}. \quad (2.2.6)$$

*Preuve :* On utilise les propriétés (2.1.2) et (2.1.3) (se reporter à CIARLET [11]), et on remarque que l'on a :

$$\|\vec{u} - P_h \vec{u}\|_h = \inf_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} \|\vec{u} - \vec{v}_h\|_h \leq \left[ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\|u_1 - \Pi_{T1} u_1\|_{1,T}^2 + \|u_2 - \Pi_{T1} u_2\|_{1,T}^2 + \|u_3 - \Pi_{T2} u_3\|_{2,T}^2) \right]^{1/2}. \quad \square$$

Enfin, la définition (2.1.6) de l'espace  $V_{h2}$  nous permet d'établir la condition (2.1.1).

*Lemme 2.2.2 : Soit  $\vec{V}_h = V_{h1} \times V_{h1} \times V_{h2}$  l'espace discret défini par (2.1.5) et (2.1.6). Alors, pour toute famille de triangulations uniformément régulières  $\mathcal{T}_h$ , il existe une constante positive  $\alpha_0$ , indépendante de  $h$ , telle que l'on ait :*

$$\alpha_0 \|\vec{v}_h\|_h^2 \leq a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h. \quad (2.2.7)$$

*Preuve :* Cette preuve repose sur les propriétés de *compacité faible discrète* des injections des espaces d'approximations nonconformes  $V_{h2}$  dans  $\Pi_{T \in \mathcal{T}_h} H^1(T)$  (cf. STUMMEL [44]).

En effet, d'une part, on a l'inclusion  $V_{h2} \subset \Pi_{T \in \mathcal{T}_h} [P_2(T) \cap H^2(T)]$  ; d'autre part, la définition (2.1.6) permet de vérifier les "conditions de continuité fortes" (au sens de STUMMEL [44, 1.3.(4)]), i.e. pour chaque bord  $S = (a_1, a_2)$  commun à deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  de  $\mathcal{T}_h$ , on a pour tout  $v_h \in V_{h2}$  :

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{i) } v_{h|T_1}(a_i) = v_{h|T_2}(a_i) \quad , \quad i = 1, 2, \\
 & \text{ii) } \frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S \partial_t v_{h|T_1} \, ds = \frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S \partial_t v_{h|T_2} \, ds \quad , \\
 & \text{(il suffit notamment de remarquer que : } \int_{a_1}^{a_2} \partial_t v_h \, ds = v_h(a_2) - v_h(a_1) \text{)} \quad , \quad (2.2.8) \\
 & \text{iii) soit il existe } b \in S \text{ tel que : } \partial_n v_{h|T_1}(b) = \partial_n v_{h|T_2}(b) \quad , \\
 & \text{soit : } \frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S \partial_n v_{h|T_1} \, ds = \frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S \partial_n v_{h|T_2} \, ds \quad .
 \end{aligned} \right\}$$

Alors, selon STUMMEL [44, théorème 2.2.(3)], pour toute suite de fonctions  $v_{h_k} \in V_{h_k}^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} h_k = 0$ , faiblement convergente vers 0 (lorsque  $k \rightarrow +\infty$ ),

il existe une sous-suite  $(v_{h_{k'}})$  extraite de  $(v_{h_k})$ ,  $k' \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{k' \rightarrow +\infty} h_{k'} = 0$ , fortement convergente dans  $\Pi_{T \in \mathcal{T}_{h_{k'}}} H^1(T)$ , et l'on a :

$$\lim_{k' \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_{k'}}} \|v_{h_{k'}}\|_{1,T}^2 \right]^{1/2} = 0 \quad . \quad (2.2.9)$$

Ainsi, nous montrons que toute suite  $(\vec{v}_{h_k})$  d'éléments de  $\vec{V}_{h_k}$  vérifiant pour tout  $K \in \mathbb{N}$  :  $\|\vec{v}_{h_k}\|_{h_k} = 1$  et  $[a_{h_k}(\vec{v}_{h_k}, \vec{v}_{h_k})]^{1/2} < \frac{1}{k}$ , converge vers  $\vec{0}$ , faiblement dans  $\vec{V}_{h_k}$ , et fortement dans  $(L^2(\Omega))^2 \times \Pi_{T \in \mathcal{T}_{h_k}} H^1(T)$  (avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} h_k = 0$ ).

Suivant BERNADOU-CIARLET [8, théorème 6.1.1 étape 2, et théorème 6.1.2], il existe deux constantes  $L > 0$  et  $M \geq 0$ , indépendantes de  $h$ , telles que pour tout triangle  $T$  de  $\mathcal{T}_h$  on ait :

$$\begin{aligned}
 a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h)|_T & \geq \frac{1}{L} (\|v_{h1}\|_{1,T}^2 + \|v_{h2}\|_{1,T}^2 + \|v_{h3}\|_{2,T}^2) - \\
 & - \frac{M}{L} (\|v_{h1}\|_{0,T}^2 + \|v_{h2}\|_{0,T}^2 + \|v_{h3}\|_{1,T}^2) \quad , \quad \forall \vec{v}_h \in (H^1(T))^2 \times H^2(T) \quad ;
 \end{aligned}$$

par sommation sur les triangles  $T$  de  $\mathcal{T}_h$ , on en déduit l'existence de constantes  $C_0 > 0$  et  $C_1 \geq 0$ , indépendantes de  $h$ , telles que :

$$a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) \geq C_0 \|\vec{v}_h\|_h^2 - C_1 (\|v_{h1}\|_{0,\Omega}^2 + \|v_{h2}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v_{h3}\|_{1,T}^2) \quad , \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h \quad . \quad (2.2.10)$$

Maintenant, supposons que l'inégalité (2.2.7) n'est pas vérifiée pour tout  $\vec{v}_h \in \vec{V}_h$  : il existe une suite  $(v_{h_k})$  d'éléments de  $\vec{V}_{h_k}$  telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  ( $\lim_{k \rightarrow +\infty} h_k = 0$ ),

$$\|\vec{v}_{h_k}\|_{h_k} = 1$$

$$[a_{h_k}(\vec{v}_{h_k}, \vec{v}_{h_k})]^{1/2} < \frac{1}{k} .$$

L'inégalité de coercivité (2.2.10) nous conduit alors à une contradiction, i.e.

$$0 < C_0 = C_0 \|\vec{v}_{h_k}\|_{h_k}^2 \leq a_h(\vec{v}_{h_k}, \vec{v}_{h_k}) + C_1 (\|v_{h_k 1}\|_{0,\Omega}^2 + \|v_{h_k 2}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_k}} \|v_{h_k 3}\|_{1,T}^2) ,$$

et d'après la propriété de compacité précédente :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_h(\vec{v}_{h_k}, \vec{v}_{h_k}) + C_1 (\|v_{h_k 1}\|_{0,\Omega}^2 + \|v_{h_k 2}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_k}} \|v_{h_k 3}\|_{1,T}^2)) = 0 .$$

Donc, l'inégalité (2.2.7) est vérifiée (et peut être étendue à l'espace  $\vec{V} + \vec{V}_h$ ) ; et la constante  $\alpha_0$  est bien indépendante de  $h$  .

□

*Remarque 2.2.1* : Soulignons la différence essentielle entre la propriété de compacité faible discrète, pour laquelle nous considérons des suites de triangulations  $\mathcal{T}_h$ , et la propriété de compacité de l'injection de  $V_{h2}$  dans  $\Pi H^1(T)$ , pour laquelle les suites de fonctions seraient construites pour  $h \in \mathcal{T}_h$  fixé. Cette dernière propriété est insuffisante à prouver que  $\alpha_0$  ne dépend pas de  $h$ . En prenant pour  $k$  le nombre de triangles de  $\mathcal{T}_h$  (on vérifie que l'on a :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} h(k) = 0$ ), la propriété (2.2.9) équivaut à :

$$\lim_{h \rightarrow 0} [ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v_h\|_{1,T}^2 ]^{1/2} = 0 .$$

□

Des lemmes 2.2.1 et 2.2.2 et du théorème 2.2.1, on déduit le résultat suivant :

*Corollaire 2.2.1* : Supposons que la solution  $\vec{u}$  du problème continu 1.1.1 appartient à l'espace  $(H^{m+1}(\Omega))^2 \times H^{m+2}(\Omega)$ , où :  $m = \min(m_1, m_2 - 1)$  ; et supposons que l'espace discret  $\vec{V}_h = V_{h1} \times V_{h1} \times V_{h2}$  vérifie les définitions (2.1.5) et (2.1.6). Alors, on a  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h = 0$ , où  $\vec{u}_h$  est la solution unique du problème discret 2.1.1, si et seulement si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|a_h(\vec{u}, \vec{w}_h) - f(\vec{w})|}{\|\vec{w}_h\|_h} = 0 . \tag{2.2.11}$$

□

Remarque 2.2.2 : Selon STUMMEL [42], la condition (2.2.11) est équivalente à la "fermeture faible de la suite des espaces d'approximations  $(\vec{V}_h)_{h \rightarrow 0}$ , i.e. la limite de toute suite de fonctions  $\vec{v}_h \in \vec{V}_h$ , faiblement convergente lorsque  $h$  tend vers 0, appartient à l'espace  $\vec{V}$ . Cette propriété est satisfaite si et seulement si l'élément fini, associé à la définition de  $\vec{V}_h$ , passe le *Patch test généralisé*, c'est-à-dire ici :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \phi \cdot D^\mu v_{h3}|_T \cdot \vec{n} \, ds = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\bar{\Omega}), \quad |\mu| \leq 1.$$

Dans notre cas, il s'agit de spécifier la définition de l'espace  $X_{h2}$  de façon à réaliser :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \phi (v_{h3}|_{T_1} - v_{h3}|_{T_2}) \, ds &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \phi (\partial_t v_{h3}|_{T_1} - \partial_t v_{h3}|_{T_2}) \, ds &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \phi (\partial_n v_{h3}|_{T_1} - \partial_n v_{h3}|_{T_2}) \, ds &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty(S), \quad \forall S = \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \in \mathcal{T}_h.$$

Par exemple, les deux premières conditions s'obtiennent lorsque  $X_{h2} \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ ; la troisième lorsque, dans la définition (2.1.6) (iii), les noeuds  $b_{ij}$  correspondent aux  $(m_2-1)$  points de Gauss-Legendre de tout côté  $S_i$  de  $T$ ,  $\forall T \in \mathcal{T}_h$ . Dans la pratique, on se contente de vérifier une condition de compatibilité du type :

$$\int_S (D\vec{v}_{h3}|_{T_1} - D\vec{v}_{h3}|_{T_2}) \, ds = \vec{0}, \quad \forall S = \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \in \mathcal{T}_h,$$

(dans ce sens voir LASCAUX-LESAINT [24], et TROUVÉ [47]) ; s'il satisfait à cette condition, l'élément passe le *patch test* d'Irons (cf. [20], STRANG [40], STRANG-FIX [41]).

□

### 2.3. Décomposition de l'erreur de consistance

Afin d'établir la condition de convergence (2.2.11), on cherche une estimation asymptotique de l'erreur de consistance  $\sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} |E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| / \|\vec{w}_h\|_h$ , où l'on a posé :

$$E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = a_h(\vec{u}, \vec{w}_h) - f(\vec{w}_h), \quad \forall \vec{w}_h \in \vec{V}_h.$$

A cette fin, nous introduisons les décompositions suivantes :

**Théorème 2.3.1 :** Supposons que les coefficients géométriques :  $a_{\alpha\beta}$  ;  $a^{\alpha\beta}$  ;  $a$  ;  $b_{\alpha\beta}$  ;  $b_{\alpha}^{\beta}$  ;  $b_{\beta,\gamma}^{\alpha}$  ;  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  ;  $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$  ; et  $E, \nu, e$ , appartiennent à  $W^{1,\infty}(\Omega)$  et soient bornés sur  $\Gamma$ . Supposons que la solution  $\vec{u}$  du problème continu 1.1.1 appartienne à l'espace  $\vec{V} \cap \vec{H}$ , où  $\vec{H} = (H^{m+1}(\Omega))^2 \times H^{m+2}(\Omega)$  avec  $m = \min(m_1, m_2 - 1)$  entier  $\geq 1$ . Alors, pour tout  $\vec{w}_h \in \vec{V}_h$ , nous obtenons :

(i) lorsque  $m=1$  :  $E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = E_{h1}(\vec{u}, \vec{w}_h) + E_{h2}(\vec{u}, \vec{w}_h)$ , où

$$E_{h1}(\vec{u}, \vec{w}_h) = \left. \begin{aligned} & - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T ([b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + p^3] w_{h3} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{|\alpha} w_{h3, \beta}) \sqrt{a} \, d\xi^1 d\xi^2 + \\ & + \sum_{S \in \Gamma_1} \int_S ([-N^3] w_{h3} \sqrt{a_{\alpha\beta} t^{\alpha} t^{\beta}} + \\ & + ([\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} t_{\beta} - M_n] \partial_t w_{h3} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} n_{\beta} + M_t] \partial_n w_{h3}) \sqrt{a}) \, ds, \end{aligned} \right\} (2.3.1)$$

$$E_{h2}(\vec{u}, \vec{w}_h) = \left. \begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} ([\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} t_{\beta}] \partial_t w_{h3} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} n_{\beta}] \partial_n w_{h3}) \sqrt{a} \, ds - \\ & - \sum_{S \in \Gamma_1} \int_S ([\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} t_{\beta}] \partial_t w_{h3} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} n_{\beta}] \partial_n w_{h3}) \sqrt{a} \, ds ; \end{aligned} \right\} (2.3.2)$$

(ii) lorsque  $m \geq 2$  :

$$E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\substack{i=1 \\ S_i \notin \Gamma_1}}^3 \int_{S_i} ([-\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{|\alpha} n_{\beta} - \partial_t (\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} t_{\beta})) w_{h3} + \left. \begin{aligned} & + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} n_{\beta}] \partial_n w_{h3} \sqrt{a} \, ds ; \end{aligned} \right\} (2.3.3)$$

(iii) lorsque  $m \geq 1$  et si l'inclusion  $X_{h2} \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  est satisfaite :

$$E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\substack{i=1 \\ S_i \notin \Gamma_1}}^3 \int_{S_i} ([\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_{\alpha} n_{\beta}] \partial_n w_{h3}) \sqrt{a} \, ds ; \quad (2.3.4)$$

(iv) lorsque  $m \geq 1$  et si l'inclusion  $X_{h2} \subset \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  est satisfaite :

$$E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = 0 ; \quad (2.3.5)$$

où nous avons désigné par  $\vec{t} = t_{\alpha} \vec{i}^{\alpha}$  (resp.  $\vec{n} = n_{\alpha} \vec{i}^{\alpha}$ ) le vecteur unitaire tangent à  $S$  (resp. le vecteur unitaire normal à  $S$ , extérieur à  $\partial T$  ou  $\Gamma_1$ ) du plan  $\mathcal{E}^2$  ; par  $\partial_t$  (resp.  $\partial_n$ ) l'opérateur de dérivation selon la direction  $\vec{t}$  (resp.  $\vec{n}$ ).

Preuve : On commence par donner l'expression de la formule de Green en coordonnées curvilignes.

La formule de Green en coordonnées curvilignes s'énonce comme suit (cf. WEMPNER [48])

$$\int_{\mathcal{S}} A^{\alpha B}{}_{,\alpha} dS = - \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} A^{\alpha})_{,\alpha} B dS + \int_{\partial\mathcal{S}} A^{\alpha B} \nu_{\alpha} d\gamma ,$$

où les composantes  $A^{\alpha}, B$  sont définies, avec une régularité suffisante, sur la surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{E}^3$ , et où  $\vec{\nu}$  désigne la normale de  $\partial\mathcal{S}$ ; l'élément d'aire est donné par  $dS = \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2$ , et l'élément linéaire par  $d\gamma = \sqrt{a_{\alpha\beta} t^{\alpha} t^{\beta}} ds$ . Nous allons exprimer cette formule en considérant les dérivées covariantes d'un tenseur de surface, i.e. pour un tenseur d'ordre 1 :

$$\nu_{\alpha|\beta} = \nu_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \nu_{\lambda} ,$$

et pour un tenseur d'ordre 2 :

$$T^{\alpha\beta}{}_{|\gamma} = T^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} + \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} T^{\lambda\beta} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\beta} T^{\alpha\lambda} .$$

Ainsi, nous avons par la formule de Green :

$$\int_{\mathcal{S}} T^{\alpha\beta} \nu_{\alpha|\beta} dS = - \int_{\mathcal{S}} \left[ \frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} T^{\alpha\beta})_{,\beta} \nu_{\alpha} + T^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \nu_{\lambda} \right] dS + \int_{\partial\mathcal{S}} T^{\alpha\beta} \nu_{\alpha} \nu_{\beta} d\gamma .$$

Par ailleurs, on montre que :  $(\sqrt{a})_{,\beta} = \sqrt{a} \Gamma_{\beta\lambda}^{\lambda}$  (par exemple à partir de  $\epsilon_{\alpha\beta|\gamma} = 0$ ), de sorte que l'on obtient :

$$\int_{\mathcal{S}} T^{\alpha\beta} \nu_{\alpha|\beta} dS = - \int_{\mathcal{S}} [T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\lambda} T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} T^{\lambda\beta}] \nu_{\alpha} dS + \int_{\partial\mathcal{S}} T^{\alpha\beta} \nu_{\alpha} \nu_{\beta} d\gamma ,$$

soit encore :

$$\int_{\mathcal{S}} T^{\alpha\beta} \nu_{\alpha|\beta} dS = - \int_{\mathcal{S}} T^{\alpha\beta}{}_{|\beta} \nu_{\alpha} dS + \int_{\partial\mathcal{S}} T^{\alpha\beta} \nu_{\alpha} \nu_{\beta} d\gamma .$$

On montrerait de la même façon :

$$\int_{\mathcal{S}} T^{\alpha}{}_{\nu}{}_{,\alpha} dS = - \int_{\mathcal{S}} T^{\alpha}{}_{|\alpha}{}_{\nu} dS + \int_{\partial\mathcal{S}} (T^{\alpha}{}_{\nu})_{\alpha} d\gamma .$$

Enfin, à l'aide des définitions précédentes, on remarquera que l'on a :

$$\nu_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta} \tau^{\beta} = \sqrt{a} e_{\alpha\beta} \frac{t^{\beta}}{\sqrt{a_{\lambda\mu} t^{\lambda} t^{\mu}}} = \sqrt{\frac{a}{a_{\lambda\mu} t^{\lambda} t^{\mu}}} n_{\alpha} ,$$

et par conséquent :  $\nu_\alpha d\gamma = \sqrt{a} n_\alpha dS$  , soit :

$$\int_{\partial\mathcal{G}} (T^\alpha \nu_\alpha) \nu d\gamma = \int_{\partial\mathcal{G}} (\mathcal{C}^\alpha n_\alpha) \nu ds , \text{ et : } \int_{\partial\mathcal{G}} T^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta d\gamma = \int_{\partial\Omega} \mathcal{C}^{\alpha\beta} \nu_\alpha n_\beta ds ,$$

où  $\mathcal{C}^\alpha$  (resp.  $\mathcal{C}^{\alpha\beta}$ ) désigne la *composante physique* du tenseur  $T^\alpha$  (resp.  $T^{\alpha\beta}$ ) , i.e.

$$T^\alpha = \frac{\mathcal{C}^\alpha}{\sqrt{a}} \text{ (resp. } T^{\alpha\beta} = \frac{\mathcal{C}^{\alpha\beta}}{\sqrt{a}} \text{ ) .}$$

Puis on applique la formule de Green pour chaque triangle  $T$  de  $\mathcal{T}_h$  - lesquels sont des domaines de  $\mathbb{R}^2$  à frontière Lipchitz-continue -, puis on obtient par sommation sur les triangles, pour tout  $\vec{w}_h \in \vec{V}_h$  :

$$\begin{aligned} E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) \gamma_{\alpha\beta}(\vec{w}_h) + \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) \bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{w}_h) - p^i w_{hi}) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \\ &\quad - \sum_{SC\Gamma_1} \int_S (N^i w_{hi} + \epsilon_{\lambda\beta} \epsilon^{\lambda\mu} M^\beta [w_{h3,\mu} + b_\mu^\nu w_{h\nu}]) d\gamma \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left( \frac{1}{2} [\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{|\beta} w_{h\alpha} + \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) |_\alpha w_{h\beta} \right) + b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) w_{h3} + \\ &\quad + \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) |_\alpha w_{h3,\beta} + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) w_{h3} + \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) |_\alpha b_\beta^\lambda w_{h\lambda} + (b_\alpha^{\lambda\bar{m}^{\alpha\beta}}(\vec{u})) |_\beta w_{h\lambda} + \\ &\quad + p^i w_{hi}) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 + \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \left( \frac{1}{2} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) [w_{h\alpha} \nu_\beta + w_{h\beta} \nu_\alpha] + \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) w_{h3,\beta} \nu_\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) b_\beta^\lambda w_{h\lambda} \nu_\alpha + b_\alpha^{\lambda\bar{m}^{\alpha\beta}}(\vec{u}) w_{h\lambda} \nu_\beta \right) d\gamma - \\ &\quad - \sum_{SC\Gamma_1} \int_S (N^i w_{hi} + M^\beta [w_{h3,\beta} + b_\beta^\nu w_{h\nu}]) d\gamma \end{aligned}$$

soit encore, en utilisant la symétrie des tenseurs  $\bar{n}^{\alpha\beta}$  et  $\bar{m}^{\alpha\beta}$  :

$$\begin{aligned} E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left( [(\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + b_\lambda^\alpha \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})) |_\beta + b_\lambda^{\alpha\bar{m}^{\lambda\beta}}(\vec{u}) |_\beta + p^\alpha] w_{h\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + [b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + p^3] w_{h3} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) |_\alpha] w_{h3,\beta} \right) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \left( [(\bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + 2b_\lambda^\alpha \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})) \nu_\beta] w_{h\alpha} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) \nu_\alpha] w_{h3,\beta} \right) d\gamma \\ &\quad - \sum_{SC\Gamma_1} \int_S \left( [N^\alpha + b_\lambda^\alpha M^\lambda] w_{h\alpha} + [N^3] w_{h3} + [M^\beta] w_{h3,\beta} \right) d\gamma . \end{aligned}$$



Puis, en reportant les équations d'équilibres (1.1.3)<sub>1</sub> et les conditions aux limites (1.1.4)<sub>1</sub> (1.1.5)<sub>1</sub>, on a :

$$E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = \left. \begin{aligned} & - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T ([b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + p^3]_{w_{h3}} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha} w_{h3,\beta}) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \\ & + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} ([\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha} \nu_{\alpha}) w_{h3,\beta} d\gamma - \sum_{S \in \mathcal{S}\Gamma_1} \int_S ([N^3]_{w_{h3}} + [M^{\beta}]_{w_{h3,\beta}}) d\gamma \end{aligned} \right\}$$

Enfin, en posant :

$$w_{h3,\beta} = t_{\beta}^{\partial} t_{h3}^w + n_{\beta}^{\partial} n_{h3}^w ,$$

on obtient la décomposition (i) de l'énoncé, où l'on a noté :

$$M_n = \sqrt{\frac{a_{\alpha\beta} t^{\alpha} t^{\beta}}{a}} M^{\lambda} t_{\lambda} = \frac{M_{\nu}}{\sqrt{a}} \quad \text{et} \quad M_t = -\sqrt{\frac{a_{\alpha\beta} t^{\alpha} t^{\beta}}{a}} M^{\lambda} n_{\lambda} = \left(\frac{a_{\alpha\beta} t^{\alpha} t^{\beta}}{a}\right) M_{\tau} .$$

Lorsque  $m \geq 2$ , i.e.  $\vec{u} \in (H^3(\Omega))^2 \times H^4(\Omega)$ , on peut appliquer une seconde fois la formule de Green à l'expression précédente de  $E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)$ , soit :

$$E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = \left. \begin{aligned} & - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T ([-\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + p^3]_{w_{h3}}) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 + \\ & + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} ([-\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha} \nu_{\beta}) w_{h3} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha} \nu_{\alpha} w_{h3,\beta} d\gamma - \\ & - \sum_{S \in \mathcal{S}\Gamma_1} \int_S ([N^3]_{w_{h3}} + [M^{\beta}]_{w_{h3,\beta}}) d\gamma ; \end{aligned} \right\}$$

puis, en reportant l'équation (1.1.3)<sub>2</sub> et les conditions (1.1.5) (notamment on utilise la relation :

$$\left. \begin{aligned} & \int_S [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha} \nu_{\alpha} - M^{\beta} w_{h3,\beta} d\gamma = \\ & = \int_S ([\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha} \nu_{\alpha} \tau_{\beta} - M_{\nu}]_{\partial_{\tau}} w_{h3} + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha} \nu_{\alpha} \nu_{\beta} + M_{\tau}]_{\partial_{\nu}} w_{h3} d\gamma \end{aligned} \right\}$$

et, en intégrant par parties sur  $S$ , par continuité aux sommets de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ , on a :

$$\sum_{S \in \mathcal{T}_h} \int_S [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha} \nu_{\alpha} \tau_{\beta} - M_{\nu}]_{\partial_{\tau}} w_{h3} d\gamma = - \sum_{S \in \mathcal{T}_h} \int_S [\partial_{\tau} (\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha} \tau_{\beta} - M_{\nu})]_{w_{h3}} d\gamma ,$$

on obtient (2.3.3) ; si de plus  $X_{h3} \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ ,  $E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)$  se réduit à l'expression (2.3.4).

Si  $X_{h2} \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  (et  $m=1$  seulement), alors  $X_{h2} \subset H^1(\Omega)$  (cf. CIARLET [11, théorème 2.1.1]), et il existe une suite de fonctions  $(\vec{w}_h^k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^3$ , qui converge fortement vers  $\vec{w}_h$  dans  $(H^1(\Omega))^3$ , i.e.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\|w_{h1}^k - w_{h1}\|_{1,\Omega}^2 + \|w_{h2}^k - w_{h2}\|_{1,\Omega}^2 + \|w_{h3}^k - w_{h3}\|_{1,\Omega}^2)^{1/2} = 0,$$

et vérifiant les conditions  $\vec{w}_h^k|_{\Gamma_0} = \vec{0}$ ,  $\partial_\nu w_{h3}^k|_{\Gamma_0} = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Dès lors, on a :

$$\begin{aligned} E_{h1}(\vec{u}, \vec{w}_h) &= \lim_{k \rightarrow \infty} E_{h1}(\vec{u}, \vec{w}_h^k) \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} ([b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + c_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) + p^3] \cdot w_{h3}^k + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{|\alpha} w_{h3,\beta}^k) \sqrt{a} \, d\xi^1 d\xi^2 \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} ([-N^3] w_{h3}^k + [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\nu_\alpha} + M^\beta) w_{h3,\beta}^k \, d\gamma \end{aligned}$$

et, par la formule de Green, on trouve :

$$E_{h1}(\vec{u}, \vec{w}_h) = \lim_{k \rightarrow \infty} (a(\vec{u}, \vec{w}_h^k) - f(\vec{w}_h^k) - \int_{\Gamma_0} [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\nu_\alpha} w_{h3,\beta}^k \, d\gamma) = 0.$$

Par ailleurs, l'inclusion  $X_{h2} \subset H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ , nous conduit à :

$$E_{h2}(\vec{u}, \vec{w}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\substack{i=1 \\ S_i \notin \Gamma_1}}^3 \int_{S_i} ([\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{n_\alpha} n_\beta) \partial_n w_{h3} \sqrt{a} \, ds;$$

on en déduit donc la décomposition (2.3.4).

Enfin, comme conséquence directe du résultat précédent lorsque, de plus,  $X_{h2} \subset \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ , on obtient le cas des méthodes conformes d'éléments finis (voir (2.3.5)).

□

Dans le cas (i) du théorème 2.3.1, on montre (cf. TROUVÉ [47, proposition 3.3.2]) :

*Lemme 2.2.1 : Sous les hypothèses du théorème 2.3.1, il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que, pour tout  $\vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$ , on a :*

$$|E_{h1}(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch (\|\vec{u}\|_{\vec{H}} + h \|p_3\|_{0,\Omega}) \|\vec{w}_h\|_h, \quad \forall \vec{w}_h \in \vec{V}_h. \quad (2.3.6)$$

*Principe de la démonstration :* L'existence des formes linéaires :  $w_{h3} \rightarrow w_{h3}|_{T(a_i)}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , (où  $a_i$  sont les sommets du triangle  $T$ ) dans la définition (2.1.6) de  $\Sigma_{T2}$  permet de construire la  $X_{h1}$ -interpolée  $\vec{w}_{h3}$  de toute

fonction  $w_{h3}$  de  $X_{h2}$ . En reprenant les arguments de la preuve du théorème 2.3.1 dans le cas (iii) (comme  $\tilde{w}_{h3} \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ ) on montre que l'on a  $E_{h1}(\vec{u}, \vec{w}_h) = 0$ , pour tout :  $\vec{w}_h = w_{h\alpha} \vec{a}^\alpha + \tilde{w}_{h3} \vec{a}^3$ ,  $w_{h\alpha} \in V_{h1}$ . L'application du lemme de Bramble-Hilbert nous conduit à des estimations asymptotiques en  $h$  de l'erreur  $E_{h1}(\vec{u}, \vec{w}_h)|_T$  sur chaque triangle  $T$  de  $\mathcal{T}_h$ ; par sommation sur tous les triangles, on en déduit (2.3.6).

□

Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'aux estimations concernant les fonctionnelles d'erreurs (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4). On note, avec intérêt, que l'on se ramène ainsi à l'évaluation d'intégrales sur les segments  $S$  de  $\mathcal{T}_h$ .

#### 2.4. Estimations d'erreur aux interfaces

Nous nous plaçons provisoirement dans un cadre abstrait. Soit  $W_h$  un espace de fonctions polynomiales par morceaux, associé aux triangles  $(T, P_T, \Sigma_T)$ , et vérifiant :

- (i) la restriction  $v_h|_T$  de toute fonction  $v_h \in W_h$  appartient à  $P_T \subset H^k(T) \cap \mathcal{C}^0(T)$ , où  $P_k(T) \subset P_T \subset P_n(T)$ , avec  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq n$ ;
- (ii) la restriction  $v_h|_S$  de toute fonction  $v_h \in W_h$  à l'un quelconque des bords  $S \subset \partial T$  de  $T$  appartient à  $P_S = P_\kappa(S)$ ,  $K \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \kappa \leq n$ , (où  $P_\kappa(S)$  désigne l'espace des polynômes à une variable, défini sur le segment  $S$ , de degré  $\kappa$ );
- (iii) l'ensemble  $\Sigma_T$  contient les connecteurs (i.e. formes linéaires) suivants :  $\frac{1}{\text{mes}(S_i)} \int_{S_i} v_h ds$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , ou (exclusif)  $v_h(b_{ij})$ ,  $b_{ij} \in S_i$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , lesquels sont supposés prendre la valeur nulle sur  $\Gamma_0$ .

(2.4.1)

Nous cherchons à estimer la fonctionnelle d'erreur :

$$I_h(M, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\substack{S \subset \partial T \\ S \notin \Gamma_1}} \int_S (Mv_h)|_T ds = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\substack{S \subset \partial T \\ S \notin \Gamma_1}} I_S(M, v_h|_T), \quad \forall v_h \in W_h, \quad (2.4.2)$$

pour  $M \in H^{\mu+1}(\Omega)$ ,  $\mu \in \mathbb{N}$ , en utilisant la décomposition :

$$I_S(M, v_h|_T) = \int_S Mv_h|_T ds = \int_S (M - \Pi_S^\lambda M)v_h|_T ds + \int_S (\Pi_S^\lambda M)v_h|_T ds, \quad (2.4.3)$$

où  $\Pi_S^\lambda$  désigne l'opérateur de projection de  $L^2(S)$  sur  $P_\lambda(S)$ ,  $\lambda \in \mathbb{N}$ , défini par la relation :

$$\int_S p \Pi_S^\lambda \phi \, ds = \int_S p \phi \, ds, \quad \forall p \in P_\lambda(S), \quad \forall \phi \in L^2(S). \quad (2.4.4)$$

Nous établissons alors une première estimation pour  $\lambda \leq \min(\kappa, k-1)$  :

*Lemme 2.4.1 : Pour tout entier  $\mu$ ,  $0 \leq \mu \leq \lambda \leq \min(\kappa, k-1)$ , il existe une constante  $c > 0$ , indépendante de  $h_T$ , telle que :*

$$\left| \int_S (M - \Pi_S^\lambda M) v_{h|T} \, ds \right| \leq Ch_T^{\lambda+\mu+1} |M|_{\mu+1, T} |v_h|_{\lambda+1, T}, \quad \forall M \in H^{\mu+1}(T), \quad \forall v_h \in W_h. \quad (2.4.5)$$

*Preuve :* On commence par établir des estimations sur le triangle de référence  $\hat{T}$  à l'aide de l'application affine inversible  $F_T$  (ou de sa restriction  $F_S$  à  $\hat{S}$ ). A toute fonction  $f$  définie sur  $T$  (ou sur  $S$ ), on associe  $\hat{f} = f \circ F_T$  (respectivement  $\hat{f}|_{\hat{S}} = f \circ F_S$ ) ; en particulier, on note :  $\Pi_S^\lambda M = \widehat{\Pi_{\hat{S}}^\lambda \hat{M}}$ . Nous considérons alors la forme bilinéaire continue sur  $H^{\mu+1}(\hat{T}) \times W_h$  :

$$(\hat{M}, \hat{v}_{h|\hat{T}}) \rightarrow \int_{\hat{S}} (\hat{M} - \Pi_{\hat{S}}^\lambda \hat{M}) \hat{v}_{h|\hat{T}} \, d\hat{s}.$$

Puis, on remarque que l'on a une propriété d'invariance polynômiale :

$$\int_{\hat{S}} (\hat{M} - \Pi_{\hat{S}}^\lambda \hat{M}) \hat{v}_{h|\hat{T}} \, d\hat{s} = 0, \quad \forall \hat{M} \in P_\mu(\hat{T}), \quad 0 \leq \mu \leq \lambda, \quad \forall \hat{v}_h \in W_h,$$

et d'après la définition (2.4.4) :

$$\int_{\hat{S}} (\hat{M} - \Pi_{\hat{S}}^\lambda \hat{M}) \hat{v}_{h|\hat{T}} \, d\hat{s} = 0, \quad \forall \hat{M} \in H^{\mu+1}(\hat{T}), \quad \forall \hat{v}_h \in P_\lambda(\hat{T}).$$

Par application du lemme bilinéaire (cf. CIARLET [11, théorème 4.2.5]), on en déduit l'existence d'une constante  $c_1$  (indépendante de  $h_T$ ) telle que :

$$\left| \int_{\hat{S}} (\hat{M} - \Pi_{\hat{S}}^\lambda \hat{M}) \hat{v}_{h|\hat{T}} \, d\hat{s} \right| \leq c_1 |\hat{M} - \Pi_{\hat{S}}^\lambda \hat{M}|_{\mu+1, \hat{S}} |\hat{v}_h|_{\lambda+1, \hat{T}}, \quad \forall \hat{M} \in H^{\mu+1}(\hat{T}), \quad \forall \hat{v}_h \in W_h.$$

Puis, on obtient pour le lemme de Bramble-Hilbert :

$$\left| \int_{\hat{S}} (\hat{M} - \Pi_{\hat{S}}^\lambda \hat{M}) \hat{v}_{h|\hat{T}} \, d\hat{s} \right| \leq c_2 |\hat{M}|_{\mu+1, \hat{T}} |\hat{v}_h|_{\lambda+1, \hat{T}}, \quad \forall \hat{M} \in H^{\mu+1}(\hat{T}), \quad \forall \hat{v}_h \in W_h. \quad (2.4.6)$$

où  $c_2$  est une constante positive (indépendante de  $h_T$ ).

Enfin, en utilisant la formule de changement de variables :

$$\left| \int_S (\Pi_S^\lambda M) v_h|_T ds \right| = |\det(B_S)| \cdot \left| \int_{\hat{S}} (\hat{M} - \Pi_{\hat{S}}^\lambda \hat{M}) \hat{v}_h|_{\hat{T}} d\hat{s} \right| ,$$

les estimations (2.1.1), et les résultats de la théorie de l'interpolation dans les espaces de Sobolev (cf. CIARLET [11, théorème 3.1.2]) - notamment :

$|\hat{M}|_{\mu+1, \hat{T}} \leq c_3 h^\mu |M|_{\mu+1, T}$  ,  $\forall M \in H^{\mu+1}(T)$  ; et  $|\hat{v}_h|_{\lambda+1, \hat{T}} \leq c_4 h^\lambda |v_h|_{\lambda+1, T}$  ,  $\forall v_h \in W_h^-$  , on établit l'inégalité (2.4.5) à l'aide de l'estimation (2.4.6).

□

Dans le cas où l'ensemble  $\Sigma_T$  est défini à l'aide des connecteurs (forts)  $v_h(b_j)$  ,  $b_j \in S$  ,  $1 \leq j \leq J$  , on a le résultat suivant pour la définition (2.4.1) :

Lemme 2.4.2 : Etant donné l'union  $\bigcup_{j=1}^J (\hat{b}_j)$  , il existe un entier  $\ell$  et un schéma de quadrature  $\{(\hat{b}_j, \hat{\omega}_j), j=1, \dots, J\}$  (où les  $\hat{b}_j$  sont les noeuds du schéma, affectés des poids respectifs  $\hat{\omega}_j$ ) qui vérifie :

$$\hat{E}_{\hat{S}}(\hat{\phi}) = \int_{\hat{S}} \hat{\phi} d\hat{s} - \sum_{j=1}^J \hat{\omega}_j \hat{\phi}(\hat{b}_j) = 0 , \quad \forall \hat{\phi} \in P_\ell(\hat{S}) . \quad (2.4.7)$$

Alors, pour tout  $v_h \in W_h$  et pour tout  $M \in H^1(T)$  , on obtient :

(i) lorsque  $\ell \geq \lambda + \kappa$  ,

$$E_S((\Pi_S^\lambda M) v_h|_T) = \int_S (\Pi_S^\lambda M) v_h|_T ds - \sum_{j=1}^J \omega_{j,S} (\Pi_S^\lambda M)(b_j) v_h|_T(b_j) = 0 , \quad (2.4.8)$$

(ii) lorsque  $\lambda < \ell \leq \lambda + \kappa - 1$  ,

$$|E_S((\Pi_S^\lambda M) v_h|_T)| \leq C h_T^{\ell-\lambda} (|M|_{0,T} + h |M|_{1,T}) |v_h|_{\ell-\lambda+1, T} , \quad (2.4.9)$$

(où C est une constante positive indépendante de  $h_T$ ) .

Preuve : L'égalité (2.4.8) est une conséquence immédiate de la propriété (2.4.7).

On détermine le schéma d'intégration numérique  $\int_{\hat{S}} \hat{\phi} d\hat{s} \sim \sum_{j=1}^J \hat{\omega}_j \hat{\phi}(\hat{b}_j)$  sur le triangle de référence  $\hat{T}$  (ou encore sur un bord de référence  $\hat{S}$ ) . Par l'application affine inversible  $F_S$  , il est alors possible de définir un schéma d'intégration numérique sur S , i.e.

$$\int_S \phi ds \sim \sum_{j=1}^J \omega_{j,S} \phi(b_{j,S}) ,$$

avec :

$$\omega_{j,S}(\phi) = \det(B_S) \hat{\omega}_j \text{ et } b_{j,S} = F_S(\hat{b}_j) , \quad 1 \leq j \leq J ;$$

De même, les fonctionnelles d'erreurs satisfont la relation :

$$E_S(\phi) = \det(B_S) E_{\hat{S}}(\hat{\phi}) . \quad (2.4.10)$$

On considère alors la forme linéaire continue (lorsque  $\lambda \leq \ell \leq \lambda + \kappa - 1$ )

$$\hat{v}_h|_{\hat{T}} \in H^k(\hat{T}) \subset H^{\ell-\lambda+1}(\hat{T}) \rightarrow \hat{E}_S((\Pi_S^{\lambda \hat{M}}) \hat{v}_h|_{\hat{T}}) ,$$

(de norme  $\leq \hat{c} |\Pi_S^{\lambda \hat{M}}|_{0, \hat{S}}$ ), et l'on remarque que la condition (2.4.7) se traduit par :

$$\hat{E}_S((\Pi_S^{\lambda \hat{M}}) \hat{p}) = 0 , \quad \forall \hat{p} \in P_{\ell-\lambda}(\hat{S}) .$$

Dès lors, le lemme de Bramble-Hilbert nous conduit à l'estimation suivante :

$$|\hat{E}_S((\Pi_S^{\lambda \hat{M}}) \hat{v}_h|_{\hat{T}})| \leq c_1 |(\Pi_S^{\lambda \hat{M}})|_{0, \hat{S}} |\hat{v}_h|_{\ell-\lambda+1, \hat{T}} , \quad \forall \hat{v}_h \in W_h . \quad (2.4.11)$$

Par ailleurs, d'après (2.4.4), nous avons :

$$|(\Pi_S^{\lambda \hat{M}})|_{0, \hat{S}}^2 = \left| \int_{\hat{S}} (\Pi_S^{\lambda \hat{M}}) \hat{M} \, d\hat{s} \right| ,$$

et, pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous en déduisons :

$$|(\Pi_S^{\lambda \hat{M}})|_{0, \hat{S}} \leq |\hat{M}|_{0, \hat{S}} .$$

L'hypothèse  $\hat{M} \in H^1(\hat{T})$  nous permet alors d'appliquer le théorème de trace de sorte qu'il existe une constante positive  $c_2$  (indépendante de  $h_T$ ) telle que :

$$|\hat{M}|_{0, \hat{S}} \leq c_2 \|\hat{M}\|_{1, \hat{T}} .$$

Ainsi, nous obtenons dans (2.4.11) :

$$|\hat{E}_S((\Pi_S^{\lambda \hat{M}}) \hat{v}_h|_{\hat{T}})| \leq c_3 \|\hat{M}\|_{1, \hat{T}} |\hat{v}_h|_{\ell-\lambda+1, \hat{T}} , \quad \forall \hat{v}_h \in W_h , \quad (2.4.12)$$

où  $c_3$  est une constante positive, indépendante de  $h_T$  .

Puis, en utilisant les transformations usuelles (cf. CIARLET [11, théorème 3.1.2]), i.e.

$$\|\hat{M}\|_{1, \hat{T}} \leq c_4 (h_T^{-1} |M|_{0, T} + |M|_{1, T}) ,$$

$$|\hat{v}_h|_{\ell-\lambda+1, \hat{T}} \leq c_5 h^{\ell-\lambda} |v_h|_{\ell-\lambda+1, T} ,$$

et les relations (2.1.1) et (2.4.10), on établit l'inégalité (2.4.9) à partir de l'estimation (2.4.12).

*Remarque 2.4.1* : Indiquons qu'une application directe du lemme de Bramble-Hilbert ne nous permet pas d'obtenir l'estimation (2.4.9). De même, l'utilisation de l'opérateur de projection de  $H^\mu(S)$  sur  $P_\rho(S)$  (au lieu de l'opérateur  $\Pi_S^\lambda$  défini par (2.4.4)) n'améliore pas cette estimation ; celle-ci nous apparaît donc comme "optimale", dans la mesure où le second membre de l'inégalité (2.4.9) ne fait intervenir que des semi-normes portant sur le triangle T (et non sur le bord S seulement). Par la suite, nous nous limiterons aux cas où  $(\ell - \lambda + 1) = 1$  ou 2 de façon à retrouver  $\|\cdot\|_h$ .

□

Comme conséquences des lemmes 2.4.1 et 2.4.2, nous avons donc :

*Lemme 2.4.3* : Supposons que :

(α) à tout bord S de  $\mathcal{T}_h$ , on peut associer un unique ensemble de points  $b_j$  de S,  $1 \leq j \leq J$ , tel que  $\Sigma_T$  contient les formes linéaires  $v_{h|T}(b_j)$ ,  $\forall T$  de bord S dans  $\mathcal{T}_h$  ;

(β) il existe un entier  $\ell$  et un schéma de quadrature  $(\hat{b}_j, \hat{\omega}_j)_{j=1, \dots, J}$  (où  $b_j = F_S(\hat{b}_j)$ ) vérifiant :  $\hat{E}_S(\hat{\phi}) = 0$ ,  $\forall \hat{\phi} \in P_\ell(\hat{S})$ .

Alors, pour tout couple d'entier  $(\lambda, \mu)$ ,  $0 \leq \mu \leq \lambda \leq \min(\kappa, k-1)$ , pour tout  $M \in H^{\mu+1}(\Omega)$  et pour tout  $v_h \in W_h$  (défini en (2.4.1)), il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de h, telle que :

(i) si  $\lambda + \kappa \leq \ell$ , on a :

$$|I_h(M, v_h)| \leq Ch^{\lambda+\mu+1} |M|_{\mu+1, \Omega} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{\lambda+1, T}^2 \right)^{1/2}, \quad (2.4.13)$$

(ii) si  $\lambda < \ell \leq \lambda + \kappa - 1$ , on a :

$$|I_h(M, v_h)| \leq C(h^{\lambda+\mu+1} |M|_{\mu+1, \Omega} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{\lambda+1, T}^2 \right)^{1/2} + h^{\ell-\lambda} \|M\|_{1, \Omega} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{\ell-\lambda+1, T}^2 \right)^{1/2}) \quad (2.4.14)$$

*Preuve* : On utilise les décompositions (2.4.2) et (2.4.3), i.e.

$$I_h(M, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\substack{S \subset \partial T \\ S \not\subset \Gamma_1}} [\int_S (M - \Pi_S^\lambda M) v_{h|T} ds + \int_S (\Pi_S^\lambda M) v_{h|T} ds]$$

soit encore en prenant en compte le schéma de quadrature décrit en (β) :

$$I_h(M, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\substack{S \subset \partial T \\ S \not\subset \Gamma_1}} \left[ \int_S (M - \Pi_S^\lambda M) v_{h|T} ds + E_S((\Pi_S^\lambda M) v_{h|T}) + \sum_{j=1}^J \omega_{j, S} (\Pi_S^\lambda M)(b_j) v_{h|T}(b_j) \right]$$

Puis, on applique les lemmes (2.4.2) et (2.4.3) de sorte que l'on obtient par sommation sur les triangles T de  $\mathcal{T}_h$  et sur chacun de leur bord S :

$$\left. \begin{aligned} \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\substack{S \subset \partial T \\ S \in \Gamma_1}} \int_S (\Pi_S^\lambda M) v_h|_T ds \right| &\leq c_1 h^{\lambda+\mu+1} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|M\|_{\mu+1, T} |v_h|_{\lambda+1, T} \right) \leq \\ &\leq c_2 h^{\lambda+\mu+1} \|M\|_{\mu+1, \Omega} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{\lambda+1, T}^2 \right)^{1/2} . \end{aligned} \right\}$$

et lorsque  $\lambda \leq \ell \leq \lambda + \kappa - 1$  :

$$\left. \begin{aligned} \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\substack{S \subset \partial T \\ S \in \Gamma_1}} E_S((\Pi_S^\lambda M) v_h|_T) \right| &\leq c_3 h^{\ell-\lambda} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|M\|_{1, T} |v_h|_{\ell-\lambda+1, T} \right) \leq \\ &\leq c_4 h^{\ell-\lambda} \|M\|_{1, \Omega} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{\ell-\lambda+1, T}^2 \right)^{1/2} . \end{aligned} \right\}$$

où  $c_1$  et  $c_4$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . Enfin, sachant que, d'une part, pour tout bord  $S \subset \Gamma_0$ , on a posé :  $v_h|_T(b_j) = 0$ ,  $1 \leq j \leq J$ , et d'autre part, pour tout bord  $S = T_1 \cap T_2$  (où  $T_1$  et  $T_2$  sont deux triangles adjacents de  $\mathcal{T}_h$ ), on écrit :  $(Mv_h)|_{T_1} + (Mv_h)|_{T_2} = M(v_h|_{T_1} - v_h|_{T_2})$ , on a :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\substack{S \subset \partial T \\ S \in \Gamma_1}} \left[ \sum_{j=1}^J \omega_{j, S} (\Pi_S^\lambda M)(b_j) v_h|_T(b_j) \right] &= \\ &= \sum_{\substack{S=T_1 \cap T_2 \\ T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h}} \sum_{j=1}^J \omega_{j, S} (\Pi_S^\lambda M)(b_j) [v_h|_{T_1}(b_j) - v_h|_{T_2}(b_j)] . \end{aligned} \right\}$$

et par continuité des formes linéaires  $v_h(b_j)$ , on obtient :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\substack{S \subset \partial T \\ S \in \Gamma_1}} \left[ \sum_{j=1}^J \omega_{j, S} (\Pi_S^\lambda M)(b_j) v_h|_T(b_j) \right] = 0 .$$

On a donc établi les inégalités (2.4.13) (2.4.14).

□

*Remarque 2.4.2* : Pour appliquer le lemme précédent, on commence par déterminer  $\kappa, k, \min(\kappa, k-1)$  et la valeur maximum  $L$  de  $\ell$  (selon  $(\beta)$ ), puis on compare  $L$  à  $\kappa$ . Si  $L - \kappa \geq 0$ , alors l'inégalité (2.4.13) nous donnera une estimation en  $O(h^{2(L-\kappa)+1})$  pour  $\mu = \lambda = L - \kappa$ ; si  $L - \kappa < 0$ , alors la meilleure estimation sera obtenue en prenant  $\mu = \lambda = \max_{q \in \mathbb{N}, 3q+1 \leq 1} q$  dans (2.4.14), soit  $O(h^\sigma)$  où  $\sigma = \min(2\lambda+1, L-\lambda)$ . Cependant, dans le cas d'un problème d'ordre 4 les valeurs de  $\lambda$  et de  $\ell$  seront conditionnées par la nécessité de satisfaire à :  $\lambda+1 \leq 2$  et  $\ell-\lambda+1 \leq 2$  lorsque  $v_h \equiv w_{h3}$ , ou encore  $\lambda+1 \leq 1$  et  $\ell-\lambda+1 \leq 1$  lorsque  $v_h \equiv \partial_t w_{h3}$  ou  $\partial_n w_{h3}$ ,



de façon à faire apparaître la norme  $\|\cdot\|_h$  de l'espace  $\vec{V}_h$  dans la majoration de l'erreur  $E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)$  ; rappelons que c'est pour cette norme seulement qu'ont été établies les inégalités (2.2.1) et l'estimation abstraite (2.2.5) de l'erreur de discrétisation  $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h$ .

□

Considérons maintenant le cas où le connecteur (faible)  $\frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S v_h|_T ds$  appartient à  $\Sigma_T$  (ce connecteur est toujours défini au point  $b_o = 1/2(a_1+a_2)$  milieu de S). Dans ce cas on a ( $\lambda=0$ ) :

$$\int_S (\Pi_S^0 M) v_h|_T ds = \text{mes}(S) (\Pi_S^0 M) \left( \frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S v_h|_T ds \right),$$

et la continuité de la forme linéaire  $\left( \frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S v_h|_T ds \right)$ , d'un triangle à l'autre, nous permet d'établir directement le résultat suivant :

*Lemme 2.4.4* : Supposons que  $\Sigma_T$  contient la forme linéaire  $\frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S v_h|_T ds$ ,  $\forall T$  de bord S dans  $\mathcal{T}_h$ . Alors, pour tout  $M \in H^1(\Omega)$  et pour tout  $v_h \in W_h$  (défini en (2.4.1)), il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de h, telle que :

$$|I_h(M, v_h)| \leq Ch |M|_{1,\Omega} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{1,T}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.4.15)$$

Preuve : On a la décomposition :

$$I_h(M, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\substack{S \subset \partial T \\ S \notin \Gamma_1}} \left[ \int_S (M - \Pi_S^0 M) v_h|_T ds - (\Pi_S^0 M) \int_S v_h|_T ds \right],$$

et en reprenant des arguments analogues à ceux utilisés dans la démonstration du lemme (2.4.3), on prouve l'inégalité (2.4.15) ( $\mu=\lambda=0$ ).

□

Dans la suite, nous appliquons ces estimations abstraites de l'erreur aux fonctionnelles (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4). L'étude de la convergence des méthodes d'éléments finis décrites en section 2.1. est donc ramenée (à l'aide du corollaire 2.2.1 et du théorème 2.3.1) à la détermination du triplet  $(l, \lambda, \mu)$  associé au schéma nodal  $\Sigma_{T_2}$  (successivement pour  $v_h = w_{h3}$ ,  $\partial_t w_{h3}$  ou  $\partial_n w_{h3}$ ) ; c'est ce que nous appellerons le *contrôle de quadrature* pour le schéma nodal.

## 2.5. Contrôle de quadrature pour le schéma nodal

Dans cette section, nous ne nous intéressons qu'aux conditions *minimales* de convergence - les estimations d'erreurs seront établies sur des applications,

aux paragraphes 3, 4 et 5. En particulier, nous cherchons à expliciter les conditions portant sur le schéma nodal  $\Sigma_{T_2}$  (et sur  $P_{T_2}$ ), suffisantes pour obtenir une majoration du type :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch \|\vec{u}\|_{\vec{H}} \|\vec{w}_h\|_h, \quad (2.5.1)$$

où  $\|\cdot\|_{\vec{H}}$  désigne la norme de l'espace  $\vec{H} = (H^{m+1}(\Omega))^2 \times H^{m+2}(\Omega)$ ,  $m = \min(m_1, m_2 - 1)$ , et où  $E_h(\dots)$  est la fonctionnelle définie par (2.3.3), (2.3.4) ou (2.3.5).

**Théorème 2.5.1 :** *Sous les hypothèses du théorème 2.3.1, soit  $\vec{V}_h = V_{h1} \times V_{h1} \times V_{h2}$  l'espace discret défini à l'aide de (2.1.5) et (2.1.6). Alors, la solution  $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$  du problème discret 2.1.1 converge vers la solution  $\vec{u} \in \vec{V} \cap \vec{H}$  du problème continu 1.1.1, au sens suivant :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h = 0, \quad (2.5.2)$$

dès que l'une (au moins) des conditions suivantes est satisfaite, pour tout  $\vec{w}_h \in \vec{V}_h$  :

(i)  $X_{h2} \subset \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  ;

(ii) pour tout triangle  $T$  de  $\mathcal{T}_h$  (de bord  $\partial T = \bigcup_{i=1}^3 S_i$ ), l'ensemble  $\Sigma_{T_2}$  contient les formes linéaires  $\frac{1}{\text{mes}(S_i)} \int_{S_i} \partial_n w_{h3} \, ds$ ,  $1 \leq i \leq 3$  ;

(iii) pour tout triangle  $T$  de  $\mathcal{T}_h$  (de bord  $\partial T = \bigcup_{i=1}^3 S_i$ ), l'ensemble  $\Sigma_{T_2}$  contient les formes linéaires  $\partial_n w_{h3}(b_{ij})$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $1 \leq j \leq J$  ( $J \leq n_2 - 1$ ) où les points  $b_{ij} \in S_i$  sont : soit les points de Gauss-Legendre avec  $2J - 1 \geq r$ , soit les points de Gauss-Lobatto avec  $2J - 3 \geq r$ , où  $r$  désigne le degré du polynôme  $\partial_n w_{h3}(S)|_{S_i}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , ( $r$  vérifie  $1 \leq r \leq n_2 - 1$ ).

*Preuve :* (en cinq étapes) :

1ère étape : le cas des méthodes d'éléments finis conformes.

Lorsque  $X_{h2} \subset \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ , nous avons directement  $E_h(\vec{u}, \vec{w}_h) = 0$ ,  $\forall \vec{w}_h \in \vec{V}_h$ , (voir théorème 2.3.1 (iv)). Dans ce cas, l'étude de la convergence se réduit à l'étude de l'erreur d'interpolation, soit à montrer que :  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\vec{u} - \Pi_h \vec{u}\|_h = 0$

- notons que l'inégalité (2.2.7) est une conséquence de la propriété (1.1.12) puisque  $\vec{V}_h \subset \vec{V}$ . Pour des familles presque affine d'éléments finis, le lemme 2.2.1 nous permet de conclure.

2ème étape : étude des fonctionnelles d'erreur du type  $I_h(M, w_{h3})$ .

D'après la définition (2.1.6), l'ensemble  $\Sigma_{T_2}$  contient les formes linéaires  $w_{h3}(a_i)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , où les  $a_i$  sont les sommets du triangle T. On applique alors le lemme 2.4.3 pour les valeurs  $\ell=1$ ,  $\lambda=0$ ,  $\mu=0$ ,  $\kappa=m_2$  : si  $\kappa \leq 1$ , l'estimation (2.4.13) conduit à une inégalité du type (2.5.1) ; si  $\kappa \geq 2$ , on a bien  $\lambda < \ell \leq \lambda + \kappa - 1$ , et l'estimation (2.4.14) mène également à une inégalité du type (2.5.1) ( $\kappa$  désignant le degré du polynôme  $w_{h3}|_S$ ,  $0 \leq \kappa \leq m_2$ ). En particulier, sous les hypothèses du théorème 2.3.1, nous obtenons  $m \geq 2$  :

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} [-\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha\beta} n_\beta - \partial_t(\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_\alpha t_\beta) w_{h3} \sqrt{a} \, ds \right| \leq C_1 h \|\vec{u}\|_{\vec{H}} \|\vec{w}_h\|_h, \quad (2.5.3)$$

où  $C_1$  est une constante indépendante de h.

3ème étape : étude des fonctionnelles d'erreur du type  $I_h(M, \partial_t w_{h3})$ .

Remarquons en premier lieu que pour tout bord  $S = (a_1, a_2)$  de  $\mathcal{T}_h$ , on a

$$\int_{a_1}^{a_2} \partial_t w_{h3} \, ds = w_{h3}(a_2) - w_{h3}(a_1).$$

En second lieu, comme l'ensemble  $\Sigma_{T_2}$  contient les formes linéaires  $w_{h3}(a_1)$  et  $w_{h3}(a_2)$ , la continuité de celles-ci d'une triangle à l'autre équivaut à la continuité de la forme linéaire  $\frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S \partial_t w_{h3} \, ds$  entre deux triangles adjacents (de bord commun S). Un raisonnement analogue à celui du lemme 2.4.4 permet d'établir une inégalité du type (2.5.1) ; en l'occurrence, sous les hypothèses du théorème 2.3.1, nous obtenons ( $C_2$  constante indépendante de h) :

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta \partial_t w_{h3} \sqrt{a} \, ds - \sum_{S \in \mathcal{S}\Gamma_1} \int_S [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta \partial_t w_{h3} \sqrt{a} \, ds \right| \leq C_2 h \|\vec{u}\|_{\vec{H}} \|\vec{w}_h\|_h. \quad (2.5.4)$$

4ème étape : cas des méthodes à connecteur faible en  $\partial_n w_{h3}$ .

Lorsque l'ensemble  $\Sigma_{T_2}$  contient les formes linéaires  $\frac{1}{\text{mes}(S_i)} \int_{S_i} \partial_n w_{h3} \, ds$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , on applique le lemme 2.4.4 pour estimer les fonctionnelles  $I_h(M, \partial_n w_{h3})$ , et l'on montre ainsi que, sous les hypothèses du théorème 2.3.1, on a :

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} [\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})]_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta w_{h3} \sqrt{a} \, ds \right| \leq C_3 h \|\vec{u}\|_{\vec{H}} \|\vec{w}_h\|_h \quad (2.5.5)$$

où  $C_3$  est une constant indépendante de h. Dès lors la combinaison du

corollaire 2.2.1, du théorème 2.3.1, et des estimations (2.5.3) à (2.5.5), permet d'établir la condition de convergence (2.5.2).

5ème étape : cas des méthodes à connecteur fort en  $\partial_n w_h^3$ .

Supposons que l'ensemble  $\Sigma_{T_2}$  contient les formes linéaires  $\partial_n w_h^3(b_{ij})$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $1 \leq j \leq J$ , et que les points  $b_{ij}$  de  $S_i$  soient les points de Gauss-Legendre avec  $2J-1 \geq r$ , où  $r$  désigne le degré du polynôme  $\partial_n w_h^3|_{S_i}$  ( $1 \leq r \leq m_2-1$ ). Alors, il est possible d'appliquer le lemme 2.4.3 pour les valeurs  $\ell=2J-1$ ,  $\lambda=0$ ,  $\mu=0$ ,  $\kappa=r$ ,  $k=m_2-1$ , et l'estimation (2.4.13) - puisque  $\ell=2J-1 \geq \lambda+\kappa=r$  - nous conduit à l'inégalité (2.5.5). On conclut alors comme à l'étape précédente. Si les points  $b_{ij}$  sont les points de Gauss-Lobatto avec  $2J-3 \geq r$ , on applique le lemme 2.4.3 en posant  $\ell=2J-3$ ,  $\lambda=0$ ,  $\mu=0$ ,  $\kappa=r$ ,  $k=m_2-1$ .

□

Remarque 2.5.1 : Ce résultat appelle quelques commentaires.

(i) Les conditions suffisantes de convergence du théorème 2.5.1 ne sont pas nécessaires. En effet, l'approximation par des triangles de ZIENKIEWICZ ne satisfait à aucune de ces trois conditions ; or LASCAUX et LESAIN [24] ont prouvé la convergence de cette méthode pour le problème de la flexion des plaques lorsque la triangulation  $\mathcal{T}_h$  vérifiait : tous les triangles ont leurs bords parallèles à trois directions données.

(ii) En ce qui concerne l'application du lemme 2.4.3 lorsque  $v_h = \partial_n w_h^3$ , il faut remarquer que l'estimation (2.4.14) ne peut être utilisée. En effet, pour retrouver la norme  $\|\cdot\|_h$  dans le second membre de l'inégalité (2.5.1), les conditions  $\lambda+1 \leq \ell$  et  $\ell-\lambda+1 \leq \ell$  (soit  $\lambda=0$  et  $\ell=0$ ) sont en contradiction avec  $\lambda < \ell \leq \lambda+\kappa-1$ , de sorte qu'il n'existe pas d'entier  $\ell$ ,  $\ell \leq r-1$ , tel que :  $|I_h(M, \partial_n w_h^3)| \leq Ch \|\vec{u}\|_{\vec{H}} \|\vec{w}_h\|_h$ .

(iii) Enfin, suivant STUMMEL [42], on montre sans difficulté que toute approximation satisfaisant aux définitions (2.1.5) - (2.1.6), et au contrôle de quadrature (iii) du théorème 2.5.1 passe le patch test généralisé ; selon la remarque (ii), il est possible de montrer que de tels éléments passent également le Patch Test d'Irons.

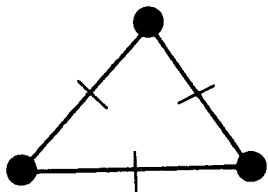
□

### 3 LES ELEMENTS SEMI-LOOF

Dans ce paragraphe, nous donnons des estimations asymptotiques de l'erreur de consistance pour une classe d'éléments finis tels que  $X_{h2} \notin C^0(\bar{\Omega})$  - nous utiliserons donc les décompositions (i) et (ii) du théorème 2.3.1 et le lemme 2.3.1 -, et qui satisfont aux conditions (ii) ou (iii) du théorème 2.5.1. En particulier, ces éléments ont pour degré de liberté :  $\frac{1}{\text{mes}(S_i)} \int_{S_i} \partial_n w_{h3} ds$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , ou bien  $\partial_n w_{h3}(b_{ij})$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $1 \leq j \leq J$ , où les points  $b_{ij}$  sont les points de Gauss-Legendre de  $S_i$ , avec  $2J-1 \geq r = m_2 - 1$ .

#### 3.1. Approximation par triangles de MORLEY

L'élément de MORLEY [29] satisfait la définition (2.1.6) pour  $m_2 = n_2 = 2$ , avec :



$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{T_2} = & \{ v_h(a_i), 1 \leq i \leq 3 ; \partial_n v_h(a_{ij}), \\ & a_{ij} = \frac{1}{2} (a_i + a_j), 1 \leq i < j \leq 3 \} . \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

Suivant LASCAUX-LES SAINT [24], on montre que l'on a :

$$\|v - \Pi_{T_2} v\|_{2,T} \leq Ch_T |v|_{3,T}, \quad \forall v \in H^3(T). \quad (3.1.2)$$

L'application du théorème 2.5.1 (et du lemme 2.3.1) nous donne :

*Proposition 3.1.1* : Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 avec  $m=1$ , nous avons :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch(\|\vec{u}\|_{H^{1+h}} \|\vec{p}\|_{0,\Omega}) \|\vec{w}_h\|_h \quad (3.1.3)$$

*Preuve* : Il suffit de voir que :  $J = n_2 - 1$ , et  $2J - 1 = r = 1$ .

□

*Remarque 3.1.1* : Le résultat (3.1.2) est optimal (car  $\mu \leq \lambda \leq m_2 - 2 = 0$ , cf. lemme 2.4.1).

□

#### 3.2. Approximations par triangles de FRAEIJIS DE VEUBEKE

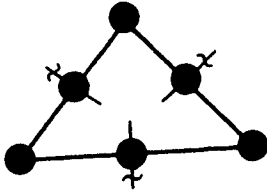
Le premier élément de FRAEIJIS DE VEUBEKE [14] [15] satisfait la définition (2.1.6) pour  $m_2 = 2$ ,  $n_2 = 3$ , avec :

$$P_{T_2} = \{p \in P_3(T) ; \phi(p) = 0\} \tag{3.2.1}$$

où :

$$\phi(p) = 27p(a_0) - \sum_{i=1}^3 p(a_i) - 8 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} p(a_{ij}) + 2 \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\text{mes}(S_i)} \int_{S_i} \vec{DP} \cdot \overrightarrow{a_{i-1} a_{i+1}} ds ,$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2} (a_i + a_j) , S_i = (a_{i-1}, a_{i+1}) ; \text{ et avec :}$$



$$\Sigma_{T_2} = \left. \begin{aligned} & (v_h(a_i) , 1 \leq i \leq 3 , v_h(a_{ij}) , a_{ij} = \frac{1}{2} (a_i + a_j) , \\ & 1 \leq i < j \leq 3 ; \frac{1}{\text{mes}(S_i)} \int_{S_i} \partial_n v_h ds , 1 \leq i \leq 3) . \end{aligned} \right\} \tag{3.2.2}$$

Suivant LASCAUX-LESAIN [24], on montre que :

$$\|v - \Pi_{T_2} v\|_{2,T} \leq Ch_T |v|_{3,T} , \forall v \in H^3(T) . \tag{3.2.3}$$

L'application du théorème 2.5.1 (et du lemme 2.3.1) nous donne :

*Proposition 3.2.1 : Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 avec  $m=1$  , nous avons :*

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch(\|\vec{u}\|_{H^{1+h}} \|\vec{p}\|_{0,\Omega}) \|\vec{w}_h\|_h . \tag{3.2.4}$$

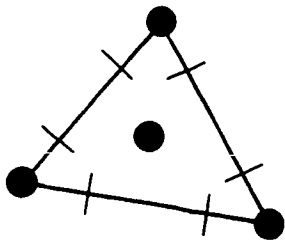
*Preuve :* Cas (ii) du théorème 2.5.1.

□

*Remarque 3.2.1 :* Le résultat (3.2.4) est optimal au sens où le lemme 2.4.1 ne s'applique pour  $\partial_n w_{h3}$  qu'avec les valeurs  $\lambda = \mu = 0$  (car  $\mu \leq l \leq m_2 - 2 = 0$ ).

□

Le deuxième élément de FRAEIJIS DE VEUBEKE satisfait à (2.1.6) pour  $m_2 = n_2 = 3$  , avec :



$$\Sigma_{T_2} = \left. \begin{aligned} & (v_h(a_0) , a_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 a_i ; v_h(a_i) , 1 \leq i \leq 3 ; \\ & \partial_n v_h(b_{ij}) , b_{ij} = \frac{-(1)^j}{2} (1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) (a_{i+1} - a_{i+2}) + a_{i+j} , \\ & j = 1, 2 , 1 \leq i \leq 3) . \end{aligned} \right\} \tag{3.2.5}$$

Suivant LASCAUX-LESAIN [24], on montre que :

$$\|v - \Pi_{T_2} v\|_{2,T} \leq Ch_T^k |v|_{k+2,T} , \forall v \in H^{k+2}(T) , k=1 \text{ ou } 2 . \tag{3.2.6}$$

Les estimations d'erreurs de la section 2.4 nous conduisent à :

*Proposition 3.2.2* : Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 avec  $m=1$  (ou  $m=2$ ) , nous avons :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch(\|\vec{u}\|_{\vec{H}^1+h} \|\vec{p}\|_{0,\Omega}) \|\vec{w}_h\|_h . \quad (3.2.7)$$

*Preuve* : L'application du théorème 2.5.1 (et du lemme 2.3.1) nous donne directement (3.2.7) (en effet  $J=n_2-1=2$  et  $2J-1=3 \geq r=2$ ). Lorsque  $m=2$ , nous utilisons la décomposition (2.3.3) du théorème 2.3.1. D'une part, on applique le lemme 2.4.3 avec  $\mu=0$  ,  $\lambda \leq 2$  ,  $\ell=1$  ,  $\kappa=3$  , et l'on trouve à l'aide de l'estimation (2.4.14) (pour  $\lambda=0 < \ell=1 \leq \kappa-1=2$ ) et  $M = -\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\alpha} n_{\beta} - \partial_t(\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})n_{\alpha} t_{\beta})$  :

$$|I_h(M, w_{h3})| \leq Ch(|M|_{1,\Omega} (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{1,T}^2)^{1/2} + \|M\|_{1,\Omega} (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{2,T}^2)^{1/2}) ; \quad (3.2.8)$$

d'autre part, ce même lemme avec  $\mu \leq 1$  ,  $\lambda \leq 1$  , (et  $\mu \leq \lambda$ ) ,  $\ell \leq 3$  ,  $\kappa=2$  , nous permet d'obtenir deux estimations, i.e. soit pour  $\lambda=\mu=0$  ,  $\ell=3$  ( $\lambda+\kappa \leq \ell$ ) et  $M = \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})n_{\alpha} n_{\beta}$  :

$$|I_h(M, \partial_n w_{h3})| \leq Ch|M|_{1,\Omega} (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{2,T}^2)^{1/2} , \quad (3.2.9)$$

soit pour  $\lambda=\mu=1$  ,  $\ell=3$  ( $\lambda+\kappa=\ell$ ) :

$$|I_h(M, \partial_n w_{h3})| \leq Ch^3|M|_{2,\Omega} (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{3,T}^2)^{1/2} . \quad (3.2.10)$$

Ainsi, la combinaison des estimations (3.2.8) et (3.2.9) nous conduit à une inégalité du type (3.2.7), plus précisément avec  $m=2$  :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch\|\vec{u}\|_{\vec{H}^1} \|\vec{w}_h\|_h , \quad (3.2.11)$$

l'utilisation de (3.2.10) ne nous permettant pas d'améliorer l'ordre de l'erreur de consistance.

□

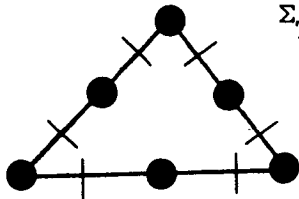
*Remarque 3.2.2* : Il serait possible de construire un troisième élément en condensant le degré de liberté  $v_h(a_o)$  de (3.2.5) ; dans ce cas ( $m_2=2$ ,  $n_2=3$ ), l'estimation de l'erreur reste du type (3.2.7).

□

### 3.3. Approximation par triangles du type IRONS

Nous présentons ici une version "équivalente" de l'élément de IRONS [18] en posant dans (2.1.6)  $m_2=3$  ,  $n_2=4$  ,

$$P_{T2} = \{ p \in P_4(T) , \partial_n p|_{S_i} \in P_2(S) , 1 \leq i \leq 3 \} , \quad (3.3.1)$$



$$\Sigma_{T2} = \left( \begin{array}{l} v_h(a_i) , 1 \leq i \leq 3 , v_h(a_{ij}) , a_{ij} = \frac{1}{2} (a_i + a_j) , 1 \leq i < j \leq 3 ; \\ \partial_n v_h(b_{ij}) , b_{ij} = \frac{(-1)^j}{2} (1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) (a_{i+1} - a_{i+2}) + a_{i+j} , \\ j = 1, 2 , 1 \leq i \leq 3 \end{array} \right) \quad (3.3.)$$

(On note que l'équivalence concerne l'ensemble des degrés de liberté  $\Sigma_{T2}$ ).

Admettons que l'ensemble  $\Sigma_{T2}$  est  $P_{T2}$ -unisolvent , alors on montre de manière similaire à LASCAUX-LESAINTE [24, lemme 3.4] que l'on a :

$$\|v - \Pi_{T2} v\|_{2,T} \leq Ch_T^k \|v\|_{k+2,T} , \quad \forall v \in H^{k+2}(T) , k = 1 \text{ ou } 2 . \quad (3.3.3)$$

Nous obtenons alors :

*Proposition 3.3.1* : Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 avec  $m=2$  , nous avons :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch \|\vec{u}\|_{\vec{H}} \|\vec{w}_h\|_h , \quad (3.3.4)$$

et de plus :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch^2 \|\vec{u}\|_{\vec{H}} \left[ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (|w_{h3}|_{2,T}^2 + |w_{h3}|_{3,T}^2) \right]^{1/2} . \quad (3.3.5)$$

*Preuve* : L'application du théorème 2.5.1 (avec  $J=2 \leq n_2-1=3$  et  $2J-1=3 \geq r=2$ ) nous mène directement au résultat (3.3.4). Par ailleurs, le lemme 2.4.4 nous conduit, d'une part, pour  $l=3$  ,  $\lambda=1$  ,  $\mu=0$  ,  $\kappa=4$  , et selon (2.4.14) à une estimation du type  $(M = \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\alpha} n_{\beta} - \partial_{\tau}(\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})n_{\alpha} t_{\beta}))$  :

$$|I_h(M, w_{h3})| \leq Ch^2 [ \|M\|_{1,\Omega} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{2,T}^2 \right)^{1/2} + \|M\|_{1,\Omega} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{3,T}^2 \right)^{1/2} ; \quad (3.3.6)$$

d'autre part, pour  $l=3$  ,  $\lambda=\mu=1$  ,  $\kappa=2$  , selon (2.4.13) , à une estimation du type  $(M = \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})n_{\alpha} n_{\beta})$



$$|I_h(M, \partial_n w_{h3})| \leq Ch^3 |M|_{2, \Omega} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{3, T}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.3.7)$$

ou encore (lorsque  $\mu=0$ ) :

$$|I_h(M, \partial_n w_{h3})| \leq Ch^2 |M|_{1, \Omega} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{3, T}^2 \right)^{1/2}.$$

Nous déduisons l'estimation (3.3.5) des inégalités (3.3.6) et (3.3.7).

□

#### 4 LES ELEMENTS $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$

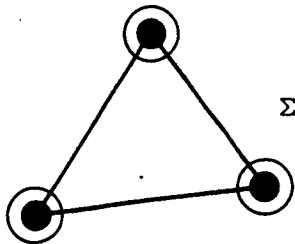
Nous considérons maintenant une classe d'éléments vérifiant  $X_{h2} \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  (et  $X_{h2} \not\subset \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ ) tels que les degrés de liberté  $\partial_n w_{h3}(b_{ij})$  sont associés aux points de Gauss-Lobatto de  $S_i$ .

##### 4.1. Approximation par triangles de ZIENKIEWICZ

L'élément de ZIENKIEWICZ [6] satisfait la définition (2.1.6) pour  $m_2=2$ ,  $n_2=3$

$$P_{T2} = \{p \in P_3(T), \psi(p) = 0\} \quad (4.1.1)$$

où  $\psi(p) = p(a_0) - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 p(a_i) - \frac{1}{18} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq 3 \\ i \neq j}} \vec{D}p(a_i) \cdot \overrightarrow{a_i a_j}$ , et où  $a_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 a_i$ , et avec



$$\Sigma_{T2} = \{v_h(a_i); \vec{D}v_h(a_i) \cdot \overrightarrow{a_i a_j}, 1 \leq j \leq 3, j \neq i, 1 \leq i \leq 3\}. \quad (4.1.2)$$

Suivant LASCAUX-LESAIN [24], on montre que

$$\|v - \Pi_{T2} v\|_{2, T} \leq Ch_T |v|_{3, T}, \quad \forall v \in H^3(T). \quad (4.1.3)$$

Selon le théorème 2.3.1, la fonctionnelle d'erreur à estimer se réduit à l'expression (2.3.4). Cependant, il n'est pas possible d'appliquer le théorème 2.5.1 : en effet,  $J=n_2-1=2$  et  $2J-3=1 < r=2$ . On peut donc s'attendre à des problèmes de convergence dans le cas général : dans ce sens SHI [38] a montré que, pour certaines triangulations, cet élément ne passe pas le patch test généralisé - il n'y a donc pas convergence vers  $\vec{u}$ , ni le Patch Test d'Irons.

Nous obtenons :

*Proposition 4.1.1* : Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 avec  $m=1$  , nous avons :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch \|\vec{u}\|_{\vec{H}} [\|\vec{w}_h\|_h + (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{3,T}^2)^{1/2}] . \quad (4.1.4)$$

Si, de plus, les bords de tous les triangles  $T \in \mathcal{T}_h$  sont parallèles à trois directions données, alors on a :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch \|\vec{u}\|_{\vec{H}} \|\vec{w}_h\|_h . \quad (4.1.5)$$

*Preuve* : Pour  $M = \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_\alpha n_\beta$  et  $v_h = \partial_n w_{h3}$  , on applique le lemme 2.4.3 avec  $\mu=0$  ,  $\lambda \leq 1$  ,  $\ell \leq 1$  ,  $\kappa=2$  , d'où :  $\lambda=0$  ,  $\ell=1$  et  $\lambda < \ell \leq \kappa-1=1$  ; et l'on obtient par l'estimation (2.4.14) :

$$|I_h(M, \partial_n w_{h3})| \leq Ch [\|M\|_{1,\Omega} (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{2,T}^2)^{1/2} + \|M\|_{1,\Omega} (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{3,T}^2)^{1/2}] ,$$

où  $M = \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u}) n_\alpha n_\beta$  , ce qui prouve (4.1.4) .

A priori, nous avons seulement par le lemme 2.4.3 :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq (C_1 h + C_2) \|\vec{u}\|_{\vec{H}} \|\vec{w}_h\|_h ,$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes positives indépendantes de  $h$  . Lorsque les bords de tous les triangles  $T \in \mathcal{T}_h$  sont parallèles à trois directions données, l'élément passe le Patch Test d'Irons, et le patch test généralisé (cf. SHI [38]). Suivant LASCAUX-LESAIN [24], on prouve (4.1.5) dans ce cas.

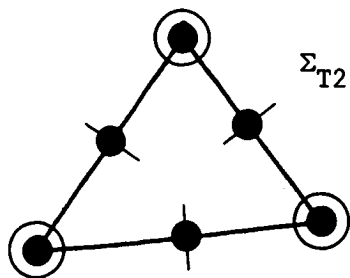
□

*Remarque 4.1.1* : Une version voisine de cet élément (pour laquelle  $P_{T2} = P_3(T)$ ) a été étudiée par BABUSKA-ZLAMAL [4] ; les problèmes de convergence sont similaires. Enfin, mentionnons la variante étudiée par SHI [39] qui converge, indépendamment de la triangulation.

□

#### 4.2. Approximation par triangles de GANEV

L'élément de GANEV [16] satisfait la définition (2.1.6) pour  $m_2=n_2=4$  , avec :



$$\Sigma_{T_2} = (v_h(a_i), 1 \leq i \leq 3; v_h(a_{ij}), a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j), 1 \leq i < j \leq 3, \\ \vec{D}v_h(a_i) \cdot \vec{a}_i \vec{a}_j, 1 \leq j \leq 3, j \neq i, 1 \leq i \leq 3; \\ \partial_n v_h(a_{ij}), a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j), 1 \leq i < j \leq 3).$$
(4.2.1)

Suivant BERNADOU-HASSIM [9], on montre que :

$$\|v - \Pi_{T_2} v\|_{2,T} \leq Ch_T^k |v|_{k+2,T}, \quad \forall v \in H^{k+2}(T), \quad k = 1, 2, 3.$$
(4.2.2)

L'application du théorème 2.5.1 nous donne :

*Proposition 4.2.1 :* Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 avec  $m=1$ , nous avons :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch \|\vec{u}\|_H \|\vec{w}_h\|_h.$$
(4.2.3)

*Preuve :* Il suffit de vérifier que :  $J = n_2 - 1 = 3$  et  $2J - 3 = 3 \geq r = 3$ .

□

*Remarque 4.2.1 :* On voit sans difficulté que ce résultat est optimal (en effet, si  $m=3$ , l'application du lemme 2.4.3 nous conduit soit à :  $\ell=3$ ,  $\lambda=\mu=0$ ,  $\kappa=3$  et une estimation en  $O(h)$  par (2.4.13), soit à :  $\ell=2$ ,  $\lambda=\mu=1$  et une estimation en  $O(h)$  dans (2.4.14)).

□

## 5 QUELQUES ELEMENTS QUADRANGULAIRES

Il s'agit ici d'étendre les techniques développées aux sections 2.4 et 2.5 au cas d'éléments rectangulaires - de façon à ne considérer que des familles presque-affines d'éléments finis (voir section 2.1). Tout d'abord, notons qu'il n'y a aucune difficulté à reprendre les décompositions de l'erreur de consistance établies au théorème 2.3.1, simplement en faisant varier  $i$  de 1 à 4.

Tous les résultats des sections 2.1 et 2.2 peuvent être obtenus dans le cas où l'on remplace les triangles  $T$  par des rectangles  $R$  (à bords parallèles aux axes de coordonnées dans  $\mathcal{E}^2$ ), et lorsque l'on modifie les définitions (2.1.5) et (2.1.6) de façon à prendre en compte la nouvelle géométrie des éléments (notamment en posant  $1 \leq i \leq 4$ ). En particulier, on désigne par  $Q_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) l'espace des polynômes de degré  $\leq k$  par rapport à chacune des variables  $x_1, x_2$  (éventuellement  $x_1 = \xi^1$  et  $x_2 = \xi^2$ ) ;  $\dim Q_k = (k+1)^2$  (cf. CIARLET [11] pour

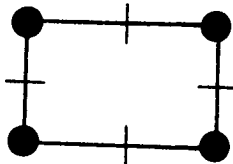
les propriétés d'interpolation). La même démonstration, en remplaçant la  $P_1$ -interpolée de  $w_{h3}$  par sa  $Q_1$ -interpolée, justifie l'estimation du lemme 2.3.1.

Enfin, les estimations d'erreur aux interfaces (données aux lemmes 2.4.1 à 2.4.4) se valident dans le cas des rectangles avec les mêmes arguments. Remarquons que ces résultats demeurent inchangés si l'on remplace dans (2.4.1) les inclusions :  $P_k(R) \subset P_R \subset P_n(R)$ , par :  $Q_k(R) \subset P_R \subset P_n(R)$ . Tout naturellement, nous étendons le théorème 2.5.1 au cas des éléments rectangulaires en prenant  $i$  variant de 1 à 4 (et non plus  $1 \leq i \leq 3$ ).

Nous en tenant à cette brève description, nous l'illustrons sur les exemples suivants : tout d'abord en considérant un rectangle *semi-loof*, puis un rectangle  $C^0(\bar{\Omega})$  ; nous abordons également le cas d'un rectangle *semi-loof* du type IRONS.

### 5.1. Approximation par rectangles de KIKUCHI

L'élément de KIKUCHI-ANDO (cf. [22]) satisfait la définition (2.1.6) pour  $m_2=2$ ,  $n_2=3$ , avec :  $P_{R2} = \{p \in P_2 \oplus [x_1^3, x_2^3], 1 \leq i \leq 4\} \subset Q_2(R)$ , et :



$$\Sigma_{R2} = \left( v_h(a_i), 1 \leq i \leq 3 ; \partial_n v_h(a_{ij}), a_{ij} = \frac{1}{2} (a_i + a_j), \right. \\ \left. 1 \leq i < j \leq 4, j-i \neq 2 \right) . \quad (5.1.1)$$

De la même manière que pour le triangle de MORLEY (cf. LASCAUX-LESAIN [24]), on a :

$$\|v - \Pi_{T_2} v\|_{2,R} \leq Ch_R |v|_{3,R}, \quad \forall v \in H^3(R). \quad (5.1.2)$$

L'application du théorème 2.5.1 (et du lemme 2.3.1) nous donne :

*Proposition 5.1.1* : Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 avec  $m=1$ , nous avons :

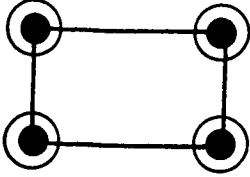
$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch(\|\vec{u}\|_{\vec{H}+h} \|\vec{P}\|_{0,\Omega}) \|\vec{w}_h\|_h.$$

*Preuve* : Il suffit de vérifier que  $J=1 \leq n_2-1=2$ , et  $2J-1=r=1$ .

□

5.2. Approximation par rectangles ACM

Le rectangle d'Adini ou ACM (cf. ADINI-CLOUGH [1], MELOSH [27] [28]) satisfait la définition (2.1.6) pour  $m_2=3$ ,  $n_2=4$ , avec  $P_{R2} = \{p \in P_3 \oplus [x_1^3 x_2, x_1 x_2^3], 1 \leq i \leq 4\} \subset Q_3(\mathbb{R})$ ,  $X_{h2} \subset C^0(\bar{\Omega})$ , et :



$$\Sigma_{R2} = \{v_h(a_i), \partial_1 v_h(a_i), \partial_2 v_h(a_i), 1 \leq i \leq 4\}. \quad (5.2.1)$$

On a également (cf. CIARLET [11, (6.2.17)], LASCAUX-LESAINTE [24, lemme 4.1], voir aussi KIKUCHI [21], MIYOSHI [30]) :

$$\|v - \Pi_{T_2} v\|_{2,R} \leq Ch_R^k |v|_{k+2,R}, \quad \forall v \in H^{k+2}(\mathbb{R}^2), \quad k = 1 \text{ ou } 2. \quad (5.2.2)$$

Dans ce cas, le théorème 2.5.1 est inefficace (car  $J=2 \leq n_2-1=3$  et  $2J-3=1 < r=3$ ) ; toutefois on a :

*Proposition 5.2.1 : Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 avec  $m=1$ , nous avons :*

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch \|\vec{u}\|_{\vec{H}} \|\vec{w}_h\|_h, \quad (5.2.3)$$

et de plus, lorsque  $m=2$  :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch^2 \|\vec{u}\|_{\vec{H}} \left( \sum_{R \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{3,R}^2 \right)^{1/2}. \quad (5.2.4)$$

*Preuve :* Celle-ci est analogue à celle de la proposition 4.1.1. En effet, en appliquant le lemme 2.4.3 avec  $\lambda=\mu=0$ ,  $\ell=1$ ,  $\kappa=3$  (de sorte que  $\lambda < \ell \leq \lambda + \kappa - 1$ ), on obtient :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch \|\vec{u}\|_{\vec{H}} \left[ \|\vec{w}_h\|_h + \left( \sum_{R \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{3,R}^2 \right)^{1/2} \right], \quad (5.2.5)$$

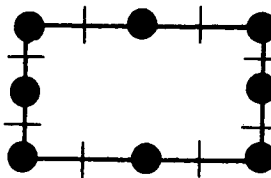
ce qui est insuffisant pour prouver la convergence.

Pour établir (5.2.3) et (5.2.4), nous renvoyons aux techniques développées par CIARLET [11, théorème 6.2.3] et LASCAUX-LESAINTE [24, §4].

□

5.3. Approximations par rectangles du type IRONS

De la même façon qu'en section 3.3, nous abordons le cas d'un élément, rectangulaire cette fois, semi-loof pour lequel l'ensemble  $\Sigma_{R2}$  équivaut à celui de l'élément d'IRONS [18]. Cet élément satisfait la définition (2.1.6) pour  $m_2=4$ ,  $n_2=5$ , soit directement  $P_{R2} = Q_3(R)$ , avec :



$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{R2} = \{ & v_h(a_i), 1 \leq i \leq 4; v_h(a_{ij}), a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j), \\ & 1 \leq i < j \leq 4, j-i \neq 2; \\ & \partial_n v_h(b_{ij}), b_{ij} = \frac{(-1)^j}{2} (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})(a_{i+1} - a_{i+2}) + a_{i+j}, \\ & j = 1, 2, 1 \leq i \leq 4) \} \end{aligned} \right\} (5.3.1)$$

Admettons que cet ensemble soit  $P_{R2}$ -unisolvant, et que l'on obtient de manière similaire à LASCAUX-LESAIN [24] :

$$\|v - \Pi_{T_2} v\|_{2,R} \leq Ch_R^k |v|_{k+2,R}, \quad \forall v \in H^{k+2}(R), \quad k = 1, 2 \text{ ou } 3. \quad (5.3.2)$$

Dans ce cas, on trouve :

*Proposition 5.3.1* : Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 avec  $m=2$ , nous avons :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch \|\vec{u}\|_{\vec{H}} \|\vec{w}_h\|_h, \quad (5.3.3)$$

et de plus :

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch^2 \|\vec{u}\|_{\vec{H}} \left[ \sum_{R \in \mathcal{T}_h} (|w_{h3}|_{2,R}^2 + |w_{h3}|_{3,R}^2 + |w_{h3}|_{4,R}^2) \right]^{1/2}. \quad (5.3.4)$$

*Preuve* : Pour obtenir (5.3.3), il suffit d'appliquer le théorème 2.5.1 pour  $J=2 \leq n_2-1=4$ , et  $2J-1=3=r$ . Par ailleurs, le lemme 2.4.4 nous permet d'établir les deux estimations suivantes : d'une part, pour  $\ell=3$ ,  $\mu \leq \lambda=1$ ,  $\kappa=3$  (selon (2.4.14) avec  $M = \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})|_{\alpha n_\beta} - \partial_\tau(\bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})n_\alpha t_\beta)$ )

$$|I_h(M, w_{h3})| \leq Ch^2 [h^\mu |M|_{\mu+1, \Omega} \left( \sum_{R \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{2,R}^2 \right)^{1/2} + \|M\|_{1, \Omega} \left( \sum_{R \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{3,R}^2 \right)^{1/2}] \quad (5.3.5)$$

d'autre part, pour  $\ell=3$ ,  $\lambda=\mu=1$ ,  $\kappa=3$  (selon (2.4.14) avec  $M = \bar{m}^{\alpha\beta}(\vec{u})n_\alpha n_\beta$ )

$$|I_h(M, \partial_n w_{h3})| \leq Ch^2 [h |M|_{2, \Omega} \left( \sum_{R \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{3,R}^2 \right)^{1/2} + \|M\|_{1, \Omega} \left( \sum_{R \in \mathcal{T}_h} |w_{h3}|_{4,R}^2 \right)^{1/2}] \quad (5.3.6)$$

Nous en déduisons l'inégalité (5.3.4) pour  $m=2$  ( $\mu=0$ ).

□

## 6 ESTIMATIONS D'ERREURS

Aux paragraphes 3,4 et 5, nous avons évalué l'erreur de consistance, i.e.  $\sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} |E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| / \|\vec{w}_h\|_h$ , pour différents éléments, afin notamment d'illustrer la convergence de telles méthodes. Dans ce paragraphe, nous établissons des estimations d'erreurs sur les contraintes (soit  $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h$ ,  $\|\cdot\|_h$  norme de  $\vec{V}_h$ ), puis sur les déplacements (soit  $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{L^2(\Omega)}$ ).

### 6.1. Estimation de l'erreur de discrétisation

Pour toute combinaison d'un élément satisfaisant à la définition (2.1.5) et de l'un des éléments étudiés précédemment, on montre que l'erreur de discrétisation  $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h$  est (asymptotiquement) du même ordre :

*Théorème 6.1.1* : Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 et des propositions 3.1.1 à 5.3.1, il existe une constante C, indépendante de h, telle que :

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h \leq Ch \|\vec{u}\|_{\vec{H}}. \quad (6.1.1)$$

*Preuve* : Il suffit de combiner les résultats des paragraphes 3, 4 et 5 à l'estimation (2.2.6) dans l'inégalité (2.2.5).

□

*Remarque 6.1.1* : Dans cette étude, nous ne prenons pas en compte l'effet de l'intégration numérique : nous supposons une intégration exacte des formes  $a_h(\dots)$ , définie en (2.1.4), et  $f(\cdot)$ , définie en (1.1.11). Cependant, il n'y aurait aucune difficulté à étendre certains résultats obtenus par BERNADOU [7] dans le cas des méthodes conformes au cas présent (cf. TROUVÉ [47]).

□

### 6.2. Estimations- $L^2$ pour les déplacements

Afin de pouvoir comparer les éléments, il est intéressant d'établir des estimations du type  $(\sum_{i=1}^3 \|u_i - u_{hi}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}$  (car  $\vec{V}_h \subset (L^2(\Omega))^3$ ). Ces estimations s'obtiennent à partir d'arguments de dualité du type Aubin-Nitsche (cf. LASCAUX-LESAIN [24], LESAIN [25], BANNACHER [32]) ; de ce fait, nous sommes amenés à poser les hypothèses suivantes :

*Hypothèse 6.2.1* : L'opérateur linéaire de coques minces de W.T. Koiter défini par (1.1.3) (1.1.4) (1.1.5) , pour  $\vec{N}=\vec{M}=\vec{O}$  sur  $\Gamma_1$  , est un homéomorphisme de  $\vec{V} \cdot \vec{G}$  , où  $\vec{G} = (H^{r_1}(\Omega))^2 \times H^{r_2}(\Omega)$  ,  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$  ,  $r_1 \geq 2$  ,  $r_2 \geq 3$  , dans  $\vec{L}=(H^{s_1}(\Omega))^2 \times H^{s_2}(\Omega)$  ,  $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$  ,  $s_1 \geq 0$  ,  $s_2 \geq -1$  , où les exposants  $r_1, r_2, s_1, s_2$  satisfont les relations :

$$s_1 = \min(r_1-2, r_2-3) \text{ et } s_2 = \min(r_1-3, r_2-4) , \quad (6.2.1)$$

ou encore :

$$r_1 = \max(s_1+2, s_2+3) \text{ et } r_2 = \max(s_1+3, s_2+4) ; \quad (6.2.2)$$

et il existe une estimation a priori du type :

$$\|\vec{u}\|_{\vec{G}} \leq \|\vec{p}\|_{\vec{L}} . \quad (6.2.3)$$

où  $\|\cdot\|_{\vec{G}}$  et  $\|\cdot\|_{\vec{L}}$  désignent les normes usuelles des espaces  $\vec{G}$  et  $\vec{L}$  .

□

*Remarque 6.2.1* : Cette hypothèse amène plusieurs commentaires.

(i) En ce qui concerne les hypothèses de régularité à effectuer pour les modèles complets (c'est-à-dire sans restriction sur la géométrie ou sur les sollicitations) de coques minces, il convient de remarquer la particularité (en comparaison des modèles de plaques ou de coques peu profondes) introduite par le couplage entre les effets de membrane et les effets de flexion, et traduite ici par les relations (6.2.1) et (6.2.2). Ainsi, si l'on suppose seulement  $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2 \times H^4(\Omega)$  , nous devons considérer que l'on a  $\vec{p} \in (L^2(\Omega))^2 \times H^{-1}(\Omega)$ . Réciproquement, si l'on choisit  $\vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$  , alors l'inégalité (6.2.3) ne sera vérifiée que si  $\vec{u} \in (H^3(\Omega))^2 \times H^4(\Omega)$  (rappelons qu'un modèle de plaque nous conduit à  $\vec{p} \in (L^2(\Omega))^3 \longleftrightarrow \vec{u} \in (H^2(\Omega))^2 \times H^4(\Omega)$  ). Enfin, soulignons que les estimations du type (6.2.3) nécessite une justification.

(ii) Nous attirons l'attention du lecteur sur la souplesse d'utilisation que procure la formulation de l'hypothèse 6.2.1. En effet, si nous nous étions contenté de la propriété d'homéomorphisme entre les espaces  $\vec{H} = (H^{m+1}(\Omega))^2 \times H^{m+2}(\Omega)$  (avec  $m \geq 1$ ) et  $(H^{m-1}(\Omega))^2 \times H^{m-2}(\Omega)$  , nous n'aurions pu obtenir, par des arguments de dualité (cf. NITSCHKE [31]), que des estimations sous la forme  $[\sum_{\alpha=1}^2 \|u_\alpha - u_{h\alpha}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u_3 - u_{h3}\|_{1,T}^2]^{1/2}$  (cf. RANNACHER [32]), donc

uniquement pour  $m=1$  . Or, dans le cas général, il faut pouvoir estimer  $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{0,\Omega}$  (lorsque  $m \geq 2$ ) pour  $\vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$  .



(iii) Lorsque le domaine  $\Omega$  est seulement polygonal convexe (et  $\text{mes}(\Gamma_1)=0$ ) on ne peut s'attendre à disposer d'une régularité plus forte que  $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2 \times H^3(\Omega)$ . Suivant RANNACHER [32], il est néanmoins possible d'obtenir des estimations d'erreurs en posant  $\vec{p} \in (L^2(\Omega))^2 \times H^{-1}(\Omega)$ ; c'est ce qui motive la valeur  $s_2=-1$  dans l'énoncé de l'hypothèse 6.2.1.

□

Nous commençons par donner une estimation abstraite des erreurs  $\|\vec{u}-\vec{u}_h\|_{0,\Omega}$  ou  $[\sum_{\alpha=1}^2 \|u_\alpha - u_{h\alpha}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u_3 - u_{h3}\|_{1,T}^2]^{1/2}$  :

**Lemme 6.2.1 :** *Sous l'hypothèse 6.2.1, il existe deux constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$ , indépendantes de  $h$ , telle que :*

(i) pour  $s_1=s_2=0$ , on a :

$$\|\vec{u}-\vec{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_1 \sup_{\vec{\phi} \in \vec{G}} \frac{|E_h(\vec{u}, \vec{\phi} - \Pi_h \vec{\phi})|}{\|\vec{\phi}\|_{\vec{G}}} \quad (6.2.4)$$

(ii) pour  $s_1=0, s_2=1$ , et en supposant  $\text{mes}(\Gamma_1)=0$ , on a :

$$\left. \begin{aligned} & [\sum_{\alpha=1}^2 \|u_\alpha - u_{h\alpha}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u_3 - u_{h3}\|_{1,T}^2]^{1/2} \leq \\ & \leq C_2 \sup_{\vec{\phi} \in \vec{G}} \frac{1}{\|\vec{\phi}\|_{\vec{G}}} (\|\vec{u}-\vec{u}_h\|_h \|\vec{\phi} - \Pi_h \vec{\phi}\|_h + |E_h(\vec{\phi}, \vec{u}-\vec{u}_h)| + |E_h(\vec{u}, \vec{\phi} - \Pi_h \vec{\phi})|) \end{aligned} \right\} \quad (6.2.5)$$

où  $\Pi_h$  désigne l'opérateur d'interpolation associé à la définition de l'espace discret  $\vec{V}_h$ .

*Preuve :*

(i) cas où  $s_1=s_2=0$  :

Remarquons tout d'abord que, du fait de la symétrie des formes bilinéaires  $a(\dots)$  et  $a_h(\dots)$  définies en (1.1.9) et (2.1.4), les problèmes 1.1.1, 2.1.1, coïncident avec les problèmes variationnels adjoints respectifs, soit :

$$a(\vec{v}, \vec{\phi}) = g(\vec{v}) \quad , \quad \forall \vec{v} \in \vec{V} \quad , \quad (6.2.6)$$

$$a_h(\vec{v}_h, \vec{\phi}_h) = g(\vec{v}_h) \quad , \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h \quad , \quad (6.2.7)$$

où l'on a identifié  $g(\vec{w}) = (\vec{w}, \vec{g})$ ,  $\forall \vec{w} \in (\vec{V} + \vec{V}_h)$ ,  $\forall \vec{g} \in \vec{L} = (L^2(\Omega))^3$ . Pour tout  $\vec{g} \in \vec{L}$ , le problème (6.2.6) admet une solution unique, notée  $\vec{\phi}$ , dans  $\vec{V} \cap \vec{G}$ , et l'on a une estimation du type :  $\|\vec{\phi}\|_{\vec{G}} \leq C \|\vec{g}\|_{\vec{L}}$ . De même, comme

conséquence du théorème 2.1.1, et la forme linéaire  $g(\cdot)$  étant continue et bornée sur  $\vec{V}_h$ , le problème (6.2.7) admet une solution unique  $\vec{\phi}_h \in \vec{V}_h$ .

De façon similaire au lemme d'Aubin-Nitsche (cf. CIARLET [11, théorème 3.2.4]), on utilise la caractérisation suivante :

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{0,\Omega} = \sup_{\vec{g} \in \vec{L}} \frac{|g(\vec{u} - \vec{u}_h)|}{\|\vec{g}\|_{0,\Omega}}$$

soit en utilisant une inégalité du type (6.2.3), et l'équation (6.2.7) :

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C \sup_{\vec{\phi} \in \vec{G}} \frac{|a_h(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{\phi}_h)|}{\|\vec{\phi}\|_{\vec{G}}} \quad (6.2.8)$$

Par ailleurs, on remarque que l'on a :

$$a_h(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{\phi}_h) = a_h(\vec{u}, \vec{\phi}_h) - f(\vec{\phi}_h) - E_h(\vec{u}, \vec{\phi}_h),$$

soit encore comme :  $E_h(\vec{u}, \vec{\phi}) = 0$ ,

$$a_h(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{\phi}_h) = - E_h(\vec{u}, \vec{\phi} - \vec{\phi}_h).$$

Par suite, en prenant le minimum par rapport à  $\vec{\phi}_h \in \vec{V}_h$ , nous obtenons dans (6.2.8) :

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C \sup_{\vec{\phi} \in \vec{G}} \left( \inf_{\vec{\phi}_h \in \vec{V}_h} \frac{|E_h(\vec{u}, \vec{\phi} - \vec{\phi}_h)|}{\|\vec{\phi}\|_{\vec{G}}} \right), \quad (6.2.9)$$

d'où (6.2.4).

(ii) cas où  $s_1=0$ ,  $s_2=-1$ , et  $\text{mes}(\Gamma_1)=0$

Dans le cas où  $X_{h2} \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ , la même démonstration nous mène directement au résultat (6.2.5) (on pose  $\text{mes}(\Gamma_1)=0$  afin de pouvoir utiliser la dualité entre les espaces  $H_0^1(\Omega)$  et  $H^{-1}(\Omega)$  et une estimation du type (6.2.3)).

Dans le cas où  $X_{h2} \not\subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ , on pose dans (6.2.6) et (6.2.7)

$$g(\vec{w}) = (w_1, \mathcal{E}_1) + (w_2, \mathcal{E}_2) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle w_3, \mathcal{E}_3 \rangle_T$$

pour tout  $\vec{w} \in (\vec{V} + \vec{V}_h)$  et pour tout  $\vec{g} \in (L^2(\Omega))^2 \times H^{-1}(\Omega)$ , où  $(\dots)$  désigne le produit de  $L^2(\Omega)$ , et où  $\langle \dots \rangle$  désigne le produit de dualité entre l'espace :

$$(w \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} H^1(T), w|_{\Gamma} = 0 \text{ où } \Gamma = \partial\Omega \text{ et } \Omega = \cup_h T)$$

et un sous-espace de  $H^{-1}(\Omega)$ . L'argument de dualité (cf. NITSCHKE [31]) permet d'écrire (sous l'hypothèse 6.2.1) :

$$\left[ \sum_{\alpha=1}^2 \|u_{\alpha} - u_{h\alpha}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u_3 - u_{h3}\|_{1,T}^2 \right]^{1/2} \leq C \sup_{\vec{\phi} \in \vec{G}} \frac{|a_h(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{\phi}) - E_h(\vec{\phi}, \vec{u} - \vec{u}_h)|}{\|\vec{\phi}\|_{\vec{G}}}$$

soit encore :

$$\left. \begin{aligned} & \left[ \sum_{\alpha=1}^2 \|u_{\alpha} - u_{h\alpha}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u_3 - u_{h3}\|_{1,T}^2 \right]^{1/2} \leq \\ & \leq C \sup_{\vec{\phi} \in \vec{G}} \left( \inf_{\vec{\phi}_h \in \vec{V}_h} \frac{|a_h(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{\phi} - \vec{\phi}_h) - E_h(\vec{\phi}, \vec{u} - \vec{u}_h) + E_h(\vec{u}, \vec{\phi}_h)|}{\|\vec{\phi}\|_{\vec{G}}} \right) \end{aligned} \right\}$$

En utilisant la continuité de la forme bilinéaire  $a_h(\dots)$  sur  $(\vec{V} + \vec{V}_h)$ , ainsi que celle de la fonctionnelle  $E_h$ , on trouve (6.2.5) ou encore :

$$\left. \begin{aligned} & \left[ \sum_{\alpha=1}^2 \|u_{\alpha} - u_{h\alpha}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u_3 - u_{h3}\|_{1,T}^2 \right]^{1/2} \leq \\ & \leq C_2 (\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h \sup_{\vec{\phi} \in \vec{G}} \left( \frac{\|\vec{\phi} - \Pi_h \vec{\phi}\|_h}{\|\vec{\phi}\|_{\vec{G}}} \right) + \sup_{\vec{\phi} \in \vec{G}} \frac{|E_h(\vec{\phi}, \vec{u} - \vec{u}_h)|}{\|\vec{\phi}\|_{\vec{G}}} + \sup_{\vec{\phi} \in \vec{G}} \frac{|E_h(\vec{u}, \vec{\phi} - \Pi_h \vec{\phi})|}{\|\vec{\phi}\|_{\vec{G}}} ) \end{aligned} \right\} \quad \square$$

*Remarque 6.2.2* : L'estimation (6.2.4) équivaut à celle obtenue par LASCAUX-LESAINT [24] et LESAIN [25] à l'aide de la formule de Green, soit :

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C \sup_{\vec{\phi} \in \vec{G}} \left( \inf_{\vec{\phi}_h \in \vec{V}_h} \frac{|E(\vec{u}, \vec{u}_h, \vec{\phi}, \vec{\phi}_h)|}{\|\vec{\phi}\|_{\vec{G}}} \right)$$

où :  $E(\vec{u}, \vec{u}_h, \vec{\phi}, \vec{\phi}_h) = a_h(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{\phi} - \vec{\phi}_h) - E_h(\vec{\phi}, \vec{u} - \vec{u}_h) - E_h(\vec{u}, \vec{\phi} - \vec{\phi}_h)$  ; il suffit de remarquer que l'on a (par symétrie de la forme bilinéaire  $a_h(\dots)$ ) :

$$a_h(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{\phi} - \vec{\phi}_h) - E_h(\vec{\phi}, \vec{u} - \vec{u}_h) = a_h(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{\phi} - \vec{\phi}_h) - a_h(\vec{\phi} - \vec{\phi}_h, \vec{u} - \vec{u}_h) = 0.$$

La remarque s'appliquerait également à la formule (6.2.5). □

Dans la suite, nous nous contenterons d'appliquer l'estimation (6.2.4), ce qui suppose que l'on ait au moins  $\vec{u} \in (H^3(\Omega))^2 \times H^4(\Omega)$ . Cependant, lorsque  $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2 \times H^3(\Omega)$  seulement, nous n'aurions aucune difficulté à utiliser (6.2.5) - estimation qui serait du même ordre de grandeur que la précédente.

Nous donnons une estimation- $L^2$  de l'erreur pour les définitions des paragraphes 3, 4, 5 de l'espace  $V_{h2}$ .

**Théorème 6.2.1 :** *Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 et sous l'hypothèse 6.2.1 avec  $s_1=s_2=0$  ; admettons l'existence d'une estimation de la forme :*

$$|E_h(\vec{u}, \vec{w}_h)| \leq Ch(\|u_1\|_{3,\Omega}^2 + \|u_2\|_{3,\Omega}^2 + \|u_3\|_{4,\Omega}^2)^{1/2} \|\vec{w}_h\|_h, \quad (6.2.10)$$

alors il existe une constante  $C_0$ , indépendante de  $h$ , telle que (pour  $m \leq 2$ ) :

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_0 h^{m+1} (\|u_1\|_{3,\Omega}^2 + \|u_2\|_{3,\Omega}^2 + \|u_3\|_{4,\Omega}^2)^{1/2}. \quad (6.2.11)$$

*Preuve :* On introduit (6.2.10) dans (6.2.4), soit :

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch(\|u_1\|_{3,\Omega}^2 + \|u_2\|_{3,\Omega}^2 + \|u_3\|_{4,\Omega}^2)^{1/2} \sup_{\vec{\phi} \in \vec{G}} \frac{\|\vec{\phi} - \Pi_h \vec{\phi}\|_h}{\|\vec{\phi}\|_{\vec{G}}}$$

où l'on a posé  $\vec{G} = (H^3(\Omega))^2 \times H^4(\Omega)$ . Puis, on applique le lemme 2.2.1, ce qui nous conduit directement à (6.2.4). □

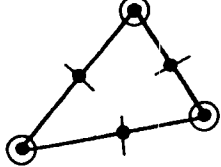
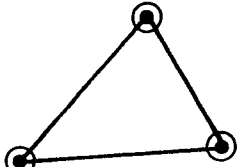
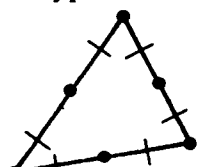
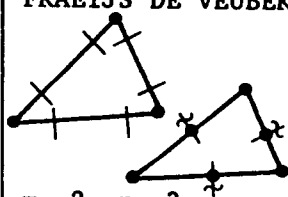
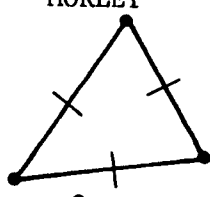
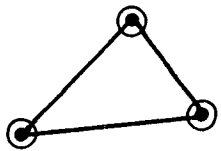
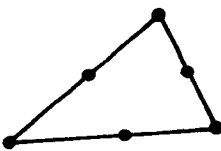
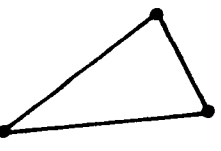
Ainsi, nous retrouvons les estimations établies dans le cas des problèmes de plaques par LASCAUX-LESAIN [24] pour les éléments de MORLEY, de FRAEIJIS DE VEUBEKE, de ZIENKIEWICZ lorsque la triangulation s'appuie sur trois directions données, et pour le rectangle de ADINI. Nous étendons ce type de résultat aux triangles de GANEV et aux rectangles de KIKUCHI. Dans le cas du triangle ou du rectangle du type IRONS (cf. sections 3.3. et 5.3), on montre facilement que ce résultat est même optimal (i.e. les estimations (3.3.5) et (5.3.4) ne permettent pas d'améliorer (6.2.11) lorsque  $m=2$ ).

**Remarque 6.2.3 :** En ce qui concerne l'élément de ZIENKIEWICZ, l'estimation (4.1.4) nous conduit à (en utilisant (4.1.3))

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch(\|u_1\|_{3,\Omega}^2 + \|u_2\|_{3,\Omega}^2 + \|u_3\|_{4,\Omega}^2) [h + (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} c_T^2)^{1/2}],$$

où  $c_T$  est une constante indépendante de  $h$  ; de sorte que, comme  $\text{card } \mathcal{T}_h = O(h^{-2})$ , on ne peut prouver a priori que  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{0,\Omega} = 0$ . □

Dans le tableau qui suit, nous donnons des exemples pratiques de combinaison  $X_{h1} - X_{h2}$  en indiquant : la valeur de  $m = \min(m_1, m_2 - 1)$  ; l'ordre de l'erreur  $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{0,\Omega}$  ; le  $\text{card } \Sigma_T$  où  $\Sigma_T = \Sigma_{T_1} \cup \Sigma_{T_1} \cup \Sigma_{T_2}$  ; et, entre parenthèses, le nombre minimum de points d'intégration numérique par triangles (cf. BERNADOU [7]).

$\vec{v}_h = v_{h1} \times v_{h1} \times v_{h2}$	Eléments triangulaires $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$		Eléments triangulaires semi-loof ( $X_{h2} \notin \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ )		
$v_{h2}$ $v_{h1}$	GANEV  $m_2 = n_2 = 4$	ZIENKIEWICZ  $m_2 = 2 \quad n_2 = 3$	type IRONS  $m_2 = 3 \quad n_2 = 4$	FRAEIJIS DE VEUBEKE  $m_2 = 2 \quad n_2 = 3$	MORLEY  $m_2 = n_2 = 2$
Hermite réduit type (3')  $m_1 = 2, \quad n_1 = 3$	$m = 2$ $O(h^3)$ $\text{card}\Sigma_T = 33$ (6 points)	$m = 1$ $O(h^2)$ $\text{card}\Sigma_T = 27$ (3 points)			
Lagrange de type (2)  $m_1 = n_1 = 2$	$m = 2$ $O(h^3)$ $\text{card}\Sigma_T = 27$ (6 points)		$m = 2$ $O(h^3)$ $\text{card}\Sigma_T = 24$ (6 points)	$m = 1$ $O(h^2)$ $\text{card}\Sigma_T = 21$ (3 points)	$m = 1$ $O(h^2)$ $\text{card}\Sigma_T = 18$ (3 points)
Lagrange de type (1)  $m_1 = n_1 = 1$	$m = 1$ $O(h^2)$ $\text{card}\Sigma_T = 21$ (6 points)	$m = 1$ $O(h^2)$ $\text{card}\Sigma_T = 15$ (3 points)	$m = 1$ $O(h^2)$ $\text{card}\Sigma_T = 18$ (6 points)	$m = 1$ $O(h^2)$ $\text{card}\Sigma_T = 15$ (3 points)	$m = 1$ $O(h^2)$ $\text{card}\Sigma_T = 12$ (1 point)

## CONCLUSION

Le résultat majeur de cette étude reste l'établissement d'un critère pratique de convergence, i.e. le contrôle de quadrature pour le schéma nodal (voir théorème 2.5.1). S'il s'agit là de conditions suffisantes, mais non nécessaires de convergence, on pourra remarquer que les éléments qui ne satisfont pas à ce critère présente une convergence qui dépend de la forme de la triangulation. Il semble qu'un tel critère puisse être généralisé à d'autres problèmes elliptiques.

□

## REFERENCES

- [1] ADINI, A. ; CLOUGH, R.W. : Analysis of plate bending by the finite element method, NSF Report G7337,1961.
- [2] ARANTES E OLIVEIRA, E.R. DE : The patch test and the general convergence criteria of the finite element method, Int. J. Solids Structures, 13, 1977, 159-178.
- [3] ARNOLD, D.N. ; BREZZI, F. : Mised and nonconforming finite element methods : implementation, postprocessing and error estimates, M<sup>2</sup>A.N, 19, 1985, 7-32.
- [4] BABUSKA, I. ; ZLAMAL, M. : Nonconforming elements in the finite element method with penalty, SIAM J. Numer. Anal., 10, 1973, 863-875.
- [5] BAKER, G.A. : Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements, Math. Comput., 31, 1977, 45-49.
- [6] BAZELEY, G.P. ; CHEUNG, Y.K. ; IRONS, B.M. ; ZIENKIEWICZ, Q.C. : Triangular element in bending - conforming and nonconforming solutions, in *Proceeding of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, 547-576, Wright Patterson A.F.B., Ohio, 1965.
- [7] BERNADOU, M : Convergence of conforming finite element methods for general shell problems, Int. J. Engng. Sc., 18, 1980, 249-276.
- [8] BERNADOU, M. ; CIARLET, P.G. : Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. KOITER, in *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems, Vol.134, Springer-Verlag, 1976, 89-136.

- [9] BERNADOU, M. ; HASSIM, A. : Approximation de problèmes généraux de coques dans un espace d'éléments finis d'Argyris-Ganev, Rapport de Recherche INRIA (à paraître).
- [10] CIARLET, P.G. : Conforming finite element method for the shell problems, in *The Mathematics of Finite Elements and Applications II*, 105-123, J.R. Whiteman Ed., Academic Press, London, 1976.
- [11] CIARLET, P.G. : *The Finite Element method for Elliptic Problems*, North-Holland, 1978.
- [12] CROUZEIX, M. ; RAVIART, P.A. : Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations, *RAIRO, Anal. Numer.* R-3, 1973, 33-76.
- [13] FORTIN, M. : A three-dimensional quadratic non-conforming element, *Numer. Math*, 46, 1985, 269-279.
- [14] FRAEIJIS DE VEUBEKE, B. : Displacement and equilibrium models in the finite element method, *Stress Analysis*, 145-197, O.C. Zienkiewicz and G.S. Holister Eds., Wiley, New-York, 1965.
- [15] FRAEIJIS DE VEUBEKE, B. : Variational principles and the Patch test, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 8, 1974, 783-801.
- [16] GANEV, M.G. ; DIMITROV, T.T. : Calculation of arch dam as a shell using IBM-370 computer and curved finite elements, in *Theory of shells*, 691-696, W.T. Koiter and G.K. Mikhailov Eds., North-Holland, 1980.
- [17] GRIFFITHS, D.F. ; MITCHELL, A.R. : Nonconforming elements, in *The Mathematical Basis of Finite Element Methods with Applications to Partial Differential Equations*, 41-69, D.F. Griffiths Ed., Clarendon Press, Oxford, 1984.
- [18] IRONS, B.M. : The semiloof shell element, in *Finite Element for Thin Shells and Curved Members*, 197-222, D.G. Ashwell and R.H. Gallagher Eds., Wiley, London, 1976.
- [19] IRONS, B.M. ; LOIKKANEN, M. : An engineers' defense of the patch test, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 19, 1983, 1391-1401.
- [20] IRONS, B.M. ; RAZZAQUE, A. : Experience with the patch test for convergence of Finite elements, in *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, 557-587, A.K. Aziz Ed., Academic Press, 1972.
- [21] KIKUCHI, F. : Convergence of the ACM finite element scheme for plate bending problems, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 11, 1975, 247-265.

- [22] KIKUCHI, F. : Error analysis of flat plate element approximation of circular cylindrical shells, *Theoretical and Applied Mechanics*, 32, 1984, 469-484.
- [23] KOITER, W.T. : On the foundations of the linear theory of thin elastic shells, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch.*, B73, 1970, 169-195.
- [24] LASCAUX, P. ; LESAINT, P. : Some nonconforming finite elements for the plate bending problems, *RAIRO, Anal. Numer. R-I*, 1975, 9-53.
- [25] LESAINT, P. : On the convergence of Wilson's nonconforming element for solving the elastic problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 7, 1976, 1-16.
- [26] LESAINT, P. ; ZLAMAL, M. : Convergence of the nonconforming Wilson element for arbitrary quadrilateral meshes, *Numer. Math.*, 36, 1980, 33-52.
- [27] MELOSH, R.J. : A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending, *J. Aero. Space Sci.*, 28, 1961, 34-42.
- [28] MELOSH, R.J. : Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method, *AIAA J.*, 1, 1963, 1631-1637.
- [29] MORLEY, L.S.D. : The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems, *Aero. Quart.*, 19, 1968, 149-169.
- [30] MIYOSHI, T. : Convergence of finite element solutions represented by a nonconforming basis, *Kumamoto J. Sci. (Math)*, 9, 1972, 11-20.
- [31] NITSCHKE, J.A. : Convergence of nonconforming methods, in *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, 15-53, C. de Boor Ed., Academic Press, 1974.
- [32] RANNACHER, R. : On nonconforming and mixed finite element methods for plate bending problems. The linear case, *RAIRO, Anal. Numer.*, 13, 1979, 369-387.
- [33] RANNACHER, R. : Nonconforming finite element for eigenvalue problems in linear plate theory, *Numer. Math.*, 32, 1979, 23-42.
- [34] SANDER, G. ; BECKERS, P. : The influence of the choice of connectors in the finite element method, in *Proc. Conf. Mathematical Aspects of the Finite Element Methods*, Rome 1975, I. Galligani and E. Magenes Ed., Lecture Notes in Mathematics, 606, 316-340, Springer, 1977.
- [35] SHI, Z.C. : An explicit analysis of Stummel's patch test examples, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 20, 1984, 1233-1246.



- [36] SHI, Z.C. : On the convergence properties of the quadrilateral elements of Sander and Beckers, *Math. Comput.*, 42, 1984, 493-504.
- [37] SHI, Z.C. : A convergence condition for the quadrilateral Wilson element, *Numer. Math.*, 44, 1984, 349-361.
- [38] SHI, Z.C. : The generalized patch test for Zienkiewicz's triangles, *J. Comput. Math.*, 2, 1984, 179-286.
- [39] SHI, Z.C. : Convergence of the TRUNC plate element, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* ; 62, 1987, 71-88.
- [40] STRANG, G. : Variational crimes in the finite element method, in *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, 689-710, A.K. Aziz Ed., Academic Press 1972.
- [41] STRANG, G. ; FIX, G.J. : *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1973.
- [42] STUMMEL, F. : The generalized patch test, *SIAM J. Num. Anal.*, 16, 1979, 449-471.
- [43] STUMMEL, F. : The limitations of the patch test, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 15, 1980, 177-188.
- [44] STUMMEL, F. : Basic compactness properties of nonconforming and hybrid finite element spaces, *RAIRO, Anal. Num*, 4, 1980, 81-115.
- [45] TAYLOR, R.L ; BERESFORD, P.J. ; WILSON, E.L. : A nonconforming element for stress analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 10, 1976, 1211-1219.
- [46] THOMAS, J.M. : *Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixtes*, Thèse, Université P. et M. Curie, Paris, 1977.
- [47] TROUVÉ, P. : Approximations nonconformes de problèmes généraux de coques minces par éléments finis du type "Morley", Rapport de Recherche INRIA (à paraître).
- [48] WEMPNER, E. : *Mechanics of Solids with Applications to thin Bodies*, Sigthoof & Woordhoff, 1981.
- [49] WILSON, E.L. ; TAYLOR, R.L. ; DOHERTY, W.P. ; GHABOUSSI, J. : Incompatible displacement models, in *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, 43-57, S. J. Fenves Ed., Academic Press, New-York, 1973.

