HAL
open science

Décomposition de flux de Van Leer en éléments finis

Loula Fatima Fezoui, Hervé Steve

To cite this version:

Loula Fatima Fezoui, Hervé Steve. Décomposition de flux de Van Leer en éléments finis. [Rapport de recherche] RR-0830, INRIA. 1988. inria-00075721

HAL Id: inria-00075721

https://inria.hal.science/inria-00075721v1

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 830

DECOMPOSITION DE FLUX DE VAN LEER EN ELEMENTS FINIS

Loula FEZOUI
Hervé STEVE

AVRIL 1988

RR 830

DECOMPOSITION DE FLUX

DE VAN LEER

EN ELEMENTS FINIS

A FINITE ELEMENT METHOD

RELYING ON VAN LEER FLUX SPLITTING

Loula FEZOUI - Hervé STEVE

INRIA Sophia-Antipolis
2004, Route des Lucioles
Parc de Sophia-Antipolis 1 et 2
06560 VALBONNE

PAPIER RECUPERÉ ET RECYCLÉ

DECOMPOSITION DE FLUX DE VAN LEER EN ELEMENTS FINIS

Résumé :

Nous présentons dans ce rapport une méthode de résolution numérique d'écoulements compressibles régis par les équations d'Euler bidimensionnelles. Le schéma repose une formulation mixte Eléments Finis (triangles) / Volumes Finis. Différentes approches de type M.U.S.C.L. sont utilisées pour calculer des solutions stationnaires avec une bonne précision à l'aide d'un schéma implicite linéarisé robuste et efficace. L'originalité de ce travail est l'utilisation du flux de van Leer et de son Jacobien dans le schéma implicite, ce qui permet d'obtenir une méthode de Newton pour de grands pas de temps. Des comparaisons numériques avec un autre schéma sur un calcul d'écoulement à grand nombre de Mach y sont présentées.

A FINITE ELEMENT METHOD RELYING ON VAN LEER FLUX SPLITTING

Abstract :

This paper deals with numerical simulations of 2-D Euler compressible flows. M.U.S.C.L. Finite Volume approach with a Finite Element triangulation is used to solve steady accurate solutions with a robust and efficient implicit linearized scheme. We choose the van Leer flux-vector splitting and its jacobian in order to get the Newton method when large time steps are used. Comparisons are made with an other scheme: Osher's flux for explicit step and Steger-Warming's flux for implicit step; we present calculations with the two methods for a complex flow with high Mach numbers.

Table des Matières

1. Introduction 1
2. Décomposition de flux 3
   2.1. Equations d'Euler 1-D. 3
   2.2. Décomposition du Jacobien de flux 3
   2.3. Décomposition du flux de van Leer 4
3. Schéma Explicite 6
4. Schéma implicite 9
   4.1. Description du schéma 1-D 9
   4.2. Stabilité linéaire 11
   4.3. Précision 11
5. Extension aux éléments finis 2-D 13
   5.1. Equations 13
   5.2. Invariance par rotation locale 13
   5.3. Décomposition de flux 15
   5.4. Discrétisation spatiale 15
   5.5. Description du schéma implicite 2-D 19
6. Experiences numériques 21
   6.1. Problème du tube a choc 21
   6.2. Ecoulement transsonique autour d'un profil 21
   6.3. Ecoulement interne dans un canal avec obstacle circulaire 23
   6.4. Ecoulement supersonique Mach autour d'un corps émoussé 24
7. Cohclusion 27

1. Introduction

Nous présentons dans ce rapport un schéma décentré pour la résolution approchée des équations d'Euler à deux dimensions d'espace. Le schéma repose sur la décomposition de flux introduite par B. van Leer dans [21]. Cette décomposition a été étendue au cas bidimensionnel en coordonnées généralisées dans [1]. Cependant cette généralisation est associée dans les applications à une discrétisation du plan à l'aide de quadrilatères en particulier des rectangles.

Nous voulons montrer qu'on peut aboutir à une écriture simple des flux décentrés, sans utiliser les cartes locales dans un cadre plus général, en considérant des maillages triangulaires de type Eléments Finis par exemple. Nous retrouvons la formulation de type Volumes Finis en intégrant les équations à résoudre sur des polygones construits autour de chaque nœud en joignant les milieux des côtés et les centres de gravité de tous les triangles dont le nœud est sommet. Nous appelons ces domaines associés à chaque sommet de la triangulation *Volumes de Contrôle ou cellules.*

L'utilisation de la formule de Green sur les équations généralisées (formulation faible) nous amène à calculer des intégrales sur le bord des polygones. Le calcul des flux qui s'échangent entre deux cellules adjacentes se réduit alors à une intégrale sur *un bi-segment.* Nous utilisons la propriété d'invariance des équations d'Euler stationnaires pour toute rotation du vecteur vitesse; ceci aboutit à une écriture monodimensionnelle de la décomposition où une seule composante du vecteur flux est utilisée quelque soit la dimension de l'espace considéré (2 ou 3).

Dans la première partie de ce rapport, nous donnons la description du schéma explicite d'ordre un en espace. L'extension à l'ordre deux se fera par la méthode dite M.U.S.C.L. (cf van Leer [20]), dont le principe est d'augmenter le degré d'interpolation des solutions sans changer la formulation du flux numérique.

La décomposition utilisée ici étant différentiable nous construisons une version implicite linéarisée du schéma dont le préconditionneur est construit à partir du jacobien exact du flux numérique. Quand le pas de temps tend vers l'infini, le schéma d'ordre un se ramène à une méthode de Newton pour le calcul des solutions stationnaires des équations d'Euler. On trouvera des travaux où la décomposition de flux de van Leer est utilisée dans (cf van Leer [21] , Mulder [22] ...), nous citons le cas où ce schéma a été récemment utilisé pour des écoulements complexes (Euler + termes réactifs) dans un contexte Volumes Finis [3] ,[10].

Les expériences numériques présentées ici mettrons en évidence la robustesse de ce schéma capable de capturer des chocs forts (écoulement à grand nombre de Mach autour d'un corps émoussé par exemple). Nous montrerons des résultats

comparant la version implicite avec un schéma dont le préconditionneur n'est pas le jacobien exact du flux numérique intervenant dans la phase dite explicite.

2. Décomposition de flux

2.1. *Equations d'Euler 1-D.*

Soient $W = W(x,t)$ un vecteur de $I\!R^3$ défini sur $\Omega \times [0, +\infty[$ avec $\Omega \subset I\!R$ et F une fonction de $I\!R^3$ dans $I\!R^3$ homogène de degré un .

On considère le système de lois de conservation non linéaires à une dimension d'espace :

$$W_t + F(W)_x = 0$$
$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} \quad ; \quad F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{pmatrix} \tag{1}$$

ρ est la masse volumique, u la vitesse p la pression et E l'énergie totale par unité de volume.

La pression vérifie l'équation d'état :

$$p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2) \quad \gamma = 1,4 \tag{2}$$

On note A le Jacobien de F : $A(w) = F'(w)$. On rappelle que le système (1) est hyperbolique. Les valeurs propres de A notées λ_k $k = 1,..3$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \lambda_1 = u - c \\ \lambda_2 = u \\ \lambda_3 = u + c \end{cases}$$

où c est la vitesse locale du son donnée par : $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$.

2.2. *Décomposition du Jacobien de flux*

Beaucoup de schémas décentrés [11],[13],[19], $\cdots$. sont construits à partir d'un flux numérique issu d'une décomposition du Jacobien A du flux continu F.

Plus précisément on sépare les parties positives et négatives des valeurs propres de A, et comme celle-ci est diagonalisable, on peut écrire :

$$A^{\pm} = T\Lambda^{\pm}T^{-1}$$

$$\begin{cases} \Lambda^{\pm} = \ diag\ (\lambda^{\pm})_{k=1,3} \\ \lambda_k^{+} = \ Max\ (\lambda_k, 0) \\ \lambda_k^{-} = \ \lambda_k - \lambda_k^{+} \end{cases} \tag{3}$$

d'où : $A = A^{+} + A^{-}$

En utilisant la propriété d'homogénéité de F (i.e. $F(w) = A(w)w$), Steger et Warming ont proposé la décomposition suivante du vecteur de flux F :

$$F = f^{+} + f^{-}$$
$$\text{avec} \quad f^{\pm}(w) = A^{\pm}(w)w$$

Remarque : Les flux décrits $f^{\pm}$ ci-dessus conservent la propriété d'homogénéité du flux continu mais les jacobiens $\frac{\partial}{\partial w} f^{\pm}$ sont distincts de $A^{\pm}$ (cf. Lerat [9]).

2.3. *Décomposition du flux de van Leer*

Van Leer [21] a proposé une décomposition directe du flux , sans utiliser explicitement le Jacobien A ni la propriété d'homogénéité. Le flux est décomposé en deux vecteurs f^{+} et f^{-} tels que :

a) $F = f^{+} + f^{-}$.

b) les valeurs propres de f^{+} sont positives, celles de f^{-} négatives.

c) f^{+} et f^{-} sont tous deux continûment différentiables. Voir [21] pour une description plus détaillée.

Le flux f^{+} est donné par :

$$f^{+} = \begin{cases} F & si\ u \geq c \\ \begin{pmatrix} +\frac{\rho c}{4}(\frac{u}{c}+1)^2 = f_1^{+} \\ \frac{f_1^{+}}{\gamma}((\gamma-1)u+2c) \\ \frac{f_1^{+}}{2(\gamma^2-1)}((\gamma-1)u+2c)^2 \end{pmatrix} & si\ -c < u < c \\ 0 & si\ u \leq -c \end{cases} \tag{4}$$

$$f^{-} = F - f^{+}$$

Homogénéité :

On vérifie aisément que $f^{\pm}(w)$ sont homogènes de degré un. On a donc :

$$f^{\pm}(w) = \tilde{A}^{\pm}(w)w$$

avec :

$$\tilde{A}^{\pm}(w) = \frac{\partial}{\partial w} f^{\pm}(w)$$

Pour $|u| > c$, les décompositions de flux de van Leer et de Steger- Warming [13] sont alors identiques :

$$\tilde{A}^{\pm} = A^{\pm}$$

Remarques : Si l'on compare la décomposition de flux donné par (4) et toutes celles qui utilisent la diagonalisation on peut remarquer que:

1) Les flux numériques construits à partir d'une décomposition du Jacobien (4) sont non différentiables.

2) L'évaluation de A^+ et A^- nécessite le calcul effectif des transformations de passage T et T^{-1} en chaque point cf. (3).

3. Schéma Explicite

Notations :

$$\begin{cases} x_i = i\Delta x \quad \text{pour} \quad i = 0,..,I \\ t^n = n\Delta t \quad \text{pour} \quad n = 0,..,N \\ W_i^n = w(x = x_i, t = t^n) \\ \sigma = \dfrac{\Delta t}{\Delta x} \end{cases}$$

Δx est le pas en espace, et $\Delta t =$ pas en temps.

Le schéma explicite conservatif à trois points en espace et à un pas en temps pour les équations (1) s'écrit :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= W_i^n - \sigma(\Phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \Phi_{i-\frac{1}{2}}^n) \\ \Phi_{i+\frac{1}{2}}^n &= \Phi(W_i^n, W_{i+1}^n) \end{aligned} \tag{5}$$

où la fonction de flux numérique Φ est donnée par :

$$\Phi(U,V) = f^+(U) + f^-(V)$$

$f^\pm$ est la décomposition de flux de van Leer décrite en (4).

Propriétés :

1) Le schéma (5) est consistant : $\Phi(U,U) = f^+(U) + f^-(U) = F(U)$.

2) Quand toutes les valeurs propres du jacobien du flux van Leer sont positives on a : $\Phi(U,V) = F(U)$ et quand toutes les valeurs propres sont négatives on a $\Phi(U,V) = F(V)$. Le schéma (5) est donc dans ce cas totalement décentré.

Schéma d'ordre deux :

Le schéma décrit en (5) est précis à l'ordre un en espace et en temps. On peut cependant augmenter la précision spatiale au moyen d'une interpolation linéaire sur chaque intervalle $]x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}]$ suivant le principe de la méthode dite MUSCL [20].

Il en résulte un schéma d'ordre deux en espace et non monotone en général. Le défaut de monotonie pouvant être atténué par l'utilisation d'un procédé de limitation des pentes introduit par ce même auteur et que nous utiliserons ici.

On notera par la suite $\tilde{W} = {}^t(\rho, u, p)$ les variables dites primitives et on désignera par S le passage aux variables conservatives :

$$W = {}^t(\rho, \rho u, E) = S(\tilde{W})$$

L'algorithme du schéma explicite d'ordre deux avec limiteurs s'écrit :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= W_i^n - \sigma(\Phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \Phi_{i-\frac{1}{2}}^n) \\ \Phi_{i+\frac{1}{2}}^n &= \Phi(W_{i+\frac{1}{2}^-}^n, W_{i+\frac{1}{2}^+}^n) \\ \text{où } W_{i+\frac{1}{2}^\pm} &= S(\tilde{W}_{i+\frac{1}{2}^\pm}) \\ \tilde{W}_{i+\frac{1}{2}^+}^n &= \tilde{W}_{i+1}^n - \frac{1}{2}P_{i+1}^{lim} \\ \tilde{W}_{i+\frac{1}{2}^-}^n &= \tilde{W}_i^n + \frac{1}{2}P_i^{lim} \end{aligned} \tag{6}$$

On note par P_i^{lim} les *pentes* limitées et par P_i^n les pentes centrées :

$$P_i^n = \frac{\tilde{W}_{i+1}^n - \tilde{W}_{i-1}^n}{2}$$

Les procédés pour obtenir des pentes *limitées* ne sont certes pas uniques, et il n'en existe probablement pas qui soit optimal dans tous les cas. Nous utilisons ici la moyenne proposée par van Leer [20] qui a en outre l'avantage d'être une fonction régulière. Cette régularité a pour avantage de ne pas pertuber la convergence dans le cas stationnaire, ce qui peut être le cas pour des limiteurs de type *Minmod* ou *Superbee* (cf. [18]).

$$P_i^{lim} = \text{Lim}^{vl}\,(\tilde{W}_{i+1}^n - \tilde{W}_i^n,\ \tilde{W}_i^n - \tilde{W}_{i-1}^n)$$

où $\text{Lim}^{vl}(a,b) = \dfrac{(a+b)(ab+|ab|+\varepsilon)}{a^2+b^2+2\varepsilon}$ avec ε nombre réel petit.

Le schéma explicite d'ordre un en temps et d'ordre deux en espace n'est pas diffusif et donc instable. En effet, le schéma équivalent à l'ordre deux de ce schéma s'écrit pour tout flux précis à l'ordre deux :

$$W_t + F(W)_x = -(A^2(W)W_x)_x \leq 0$$

avec $A(W)$ matrice jacobienne de $F(W)$.

Il faut alors choisir une autre approximation de la dérivée en temps pour garantir la stabilité avec des pas de temps équivalents à ceux du schéma d'ordre un : en explicite, l'ordre deux en temps est obtenu à l'aide d'un schéma à deux pas de type prédicteur-correcteur introduit par Hancock pour le Q-schéma [20] :

<u>Prédiction</u>:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_i^{n+\frac{1}{2}} &= \tilde{W}_i^n + \frac{\Delta t}{2}(\tilde{W}_t)_i^n \\ &= \tilde{W}_i^n - \frac{\Delta t}{2}[F'(\tilde{W})\tilde{W}_x + G'(\tilde{W})\tilde{W}_y]_i^n\end{aligned}$$

<u>Correction</u>:

$$\begin{aligned}W_i^{n+1} &= W_i^n - \sigma(\Phi_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \Phi_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \Phi(W_{i+\frac{1}{2}-}^{n+\frac{1}{2}}, W_{i+\frac{1}{2}+}^{n+\frac{1}{2}}) \\ W_{i+\frac{1}{2}\pm} &= S(\tilde{W}_{i+\frac{1}{2}\pm})\end{aligned}$$

<u>Remarque</u>

Dans la phase correction, on calcule les états $W_{i+\frac{1}{2}\pm}^{n+\frac{1}{2}}$ avec des pentes évalués au niveau n pour des raisons de stabilité (voir [24]).

4. Schéma implicite

4.1. *Description du schéma 1-D*

La construction d'un schéma implicite linéarisé à partir d'un flux numérique décentré dans le cas des éléments finis a été décrite et utilisée dans [6], [14], [15], [16], [23] $\cdots$. Nous utilisons ici le même principe que nous appliquons à la décomposition de flux de van Leer. Notons que l'approche est similaire à celle utilisée dans les travaux de [22].

Linéarisation du flux van Leer : En suivant le procédé détaillé dans [16] nous construisons une version implicite du schéma (5) par linéarisation du flux explicite.

On considère le schéma totalement implicite à l'ordre un:

$$\begin{cases} W_i^{n+1} = W_i^n - \sigma(\Phi_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \Phi_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) \\ \Phi_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \hat{\Phi}(W_i^n, W_{i+1}^n, W_i^{n+1}, W_{i+1}^{n+1}) \\ \hat{\Phi}(U,V,W,Z) = \Phi(U,V) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial U}(W-U) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial V}(Z-V) \end{cases}$$

Le flux de van Leer étant différentiable les termes de dérivation qui apparaissent dans (6) sont calculés exactement.

Nous prenons $\Phi(U,V) = f^+(U) + f^-(V)$ défini par (4). En utilisant la propriété d'homogénéité des fonctions $F^{\pm}$ on obtient:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(U,V,W,Z) &= \Phi(U,V) + \hat{A}^+(U)(W-U) + \hat{A}^-(V)(Z-V) \\ &= \hat{A}^+(U)U + \hat{A}^-(V)V + \hat{A}^+(U)(W-U) + \hat{A}^-(V)(Z-V) \\ &= \hat{A}^+(U)W + \hat{A}^-(V)Z \end{aligned}$$

avec

$$\hat{A}^{\pm}(w) = \frac{\partial}{\partial w} f^{\pm}(w)$$

Formulation H_1, H_2 :

Dans [16] on utilise une formulation H_1, H_2 (lorsqu'elle existe) du flux explicite et on pose :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U} = H_1(U,V) \ ; \ \frac{\partial \Phi}{\partial V} = H_2(U,V)$$

Ce procédé permet d'obtenir une version implicite linéarisée simplifiée (des termes de dérivation sont négligés) pour tout flux numérique qui s'écrit sous la forme H_1, H_2 même s'il n'est pas différentiable. C'est le cas par exemple des flux de Vijayasundaram [23], de Steger-Warming [13], et de Roe [19].

Le flux numérique de van Leer s'écrit en formulation H_1, H_2 avec:

$$H_1(U,V) = \hat{A}^+(U) \ ; \ H_2(U,V) = \hat{A}^-(V)$$

Les termes de dérivation qui sont négligés dans la version simplifiée sont nuls ici par homogénéité et le schéma implicite que l'on construit ainsi coïncide avec le développement à l'ordre deux du schéma totalement implicite.

<u>description de l'algorithme</u>

Avec les notations introduites précédemment le système implicite à résoudre s'écrit :

$$-\sigma \hat{A}^+(W_{i-1}^n)W_{i-1}^{n+1} + (I\!I + \sigma|\hat{A}(W_i^n)|)W_i^{n+1} + \sigma \hat{A}^-(W_{i+1}^n)W_{i+1}^{n+1} = W_i^n$$

$I\!I$ est la matrice identité 3×3. Introduisons la matrice M^n, matrice tridiagonale par blocs 3×3, définie par :

$$M^n = Tridiag.(L^n,\ D^n,\ U^n)$$

avec :

$$\begin{cases} L^n = -\sigma \hat{A}^+(W_{i-1}^n) \\ D^n = I\!I + \sigma(\hat{A}^+(W_i^n) - \hat{A}^-(W_i^n)) \\ U^n = +\sigma \hat{A}^-(W_{i+1}^n) \end{cases}$$

L'algorithme global peut s'écrire sous la forme d'un δ-schéma résolu en deux étapes :

<u>Phase explicite / physique</u> :

$$\begin{cases} \delta W_i^e = -\sigma(\Phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \Phi_{i-\frac{1}{2}}^n) \\ \Phi_{i+\frac{1}{2}}^n = \Phi(W_i^n,\ W_{i+1}^n) \\ \Phi_{i-\frac{1}{2}}^n = \Phi(W_{i-1}^n,\ W_i^n) \\ \Phi(U,V) = f^+(U) + f^-(V), \end{cases} \tag{7}$$

f^+ et f^- définis par (4) .

Phase implicite / mathématique :

A chaque pas de temps on résout un système linéaire de la forme :

$$\begin{cases} M^n \delta W^{n+1} = \delta W^e \\ W^{n+1} = W^n + \delta W^{n+1} \end{cases} \tag{8}$$

Propriétés du système linéaire :

Le système linéaire (8) possède une matrice à diagonale dominante par blocs dans le cas linéaire à coefficients constants quelque soit le schéma décentré utilisé (ils sont tous identiques dans ce cas) (voir [9] et [16] pour les énoncés et démonstrations de ces résultats). Dans le cas non linéaire (les équations d'Euler par exemple), la résolution linéaire est effectuée par des méthodes de relaxation (Jacobi et Gauss-Seidel).

4.2. *Stabilité linéaire*

Nous avons remarqué que le flux de van Leer coïncide avec la décomposition de Steger-Warming dans le cas supersonique. On peut donc considérer que dans le cas linéaire scalaire, le flux de van Leer conduit au schéma décentré qui est stable avec une condition sur le nombre de CFL qui doit être inférieur à un si le schéma est explicite. Le schéma implicite n'a pas, en théorie, de limite de stabilité ([15], [16]).

4.3. *Précision*

La précision des solutions stationnaires des équations (1) obtenues avec le schéma (7)-(8) sera déterminée par celle de la phase dite physique. Tel que nous l'avons écrit, le schéma est précis à l'ordre un en espace [8], [15], [16]. Pour obtenir des solutions stationnaires précises à l'ordre deux par exemple il suffit d'utiliser dans

la phase explicite le flux décrit par (6). Notons cependant que l'usage des limiteurs peut altérer la précision globale du schéma.

Le flux de van Leer étant différentiable , le schéma implicite d'ordre un est une méthode de Newton pour le calcul des solutions stationnaires quand $\Delta t \rightarrow \infty$, la convergence est théoriquement quadratique. Quand les flux des phases physique et mathématique sont différents le schéma est alors une méthode de Newton modifiée où la matrice du sytème linéaire joue le rôle de préconditionneur, la convergence est seulement linéaire.

5. Extension aux éléments finis 2-D

5.1. *Equations*

$W = W(x, y, t)$ est un vecteur de $I\!R^4$ défini sur $\Omega \times [0, +\infty[$ avec $\Omega \subset I\!R^2$; le système (1) s'écrit :

$$W_t + F(W)_x + G(W)_y = 0 \tag{9}$$

avec

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho\vec{V} \\ E \end{pmatrix} \; ; \; F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E+p) \end{pmatrix} \; ; \; G(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E+p) \end{pmatrix}$$

où $\vec{V}$ est le vecteur vitesse de composantes u, v et p vérifie la loi d'état des gaz parfaits:

$$p = (\gamma - 1)\left(E - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)\right)$$

<u>Conditions aux limites :</u>

Les calculs présentés ici font intervenir deux types de conditions aux bords :

- la condition de glissement qui exprime que le flux ne traverse pas la paroi ,elle s'écrit: $\vec{V} \cdot \vec{\nu} = 0$ où $\vec{\nu}$ normale extérieure au domaine.

- les conditions *à l'infini* qui rendent compte que le domaine de calcul est borné. Nous faisons l'hypothèse d'un écoulement uniforme à l'infini :

$$W = W_\infty = \begin{pmatrix} \rho_\infty \\ \vec{V}_\infty \\ p_\infty \end{pmatrix}$$

avec

$\rho_\infty = 1$; $\vec{V}_\infty = (\cos\alpha \; , \; \sin\alpha)$; $p_\infty = \dfrac{\rho_\infty}{\gamma M_\infty^2}$. Où α est l'angle d'incidence et M_∞ est le nombre de Mach à l'infini.

Nous prendrons comme condition initiale $W(x,y,0) = W_\infty$ (soit l'extension des conditions à l'infini à tout le domaine de calcul)

5.2. *Invariance par rotation locale*

Considérons une combinaison linéaire de vecteurs de flux :

$$\mathcal{F}(W) = \eta_1 F(W) + \eta_2 G(W)$$

avec η_1 et η_2 deux réels non tous deux nuls.

On définit une rotation locale sur le vecteur $\vec{V}$ de la façon suivante :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \vec{V}_n = \begin{pmatrix} u_n & = & +u\cos\theta & + & v\sin\theta \\ v_n & = & -u\sin\theta & + & v\cos\theta \end{pmatrix}$$

où $\cos\theta = \dfrac{\eta_1}{\|\vec{\eta}\|}$; $\sin\theta = \dfrac{\eta_2}{\|\vec{\eta}\|}$; $\|\vec{\eta}\| = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_1^2}$

On pourra alors définir une transformation inversible R dans $I\!R^4$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W \rightarrow R(W) = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho\vec{V}_n \\ e \end{pmatrix} = \widehat{W}$$

On a la relation aisément vérifiée :

$$\mathcal{F}(W) = \|\vec{\eta}\|(R^{-1} \circ F)(\widehat{W}) \tag{10}$$

Cette relation nous permet d'utiliser une seule composante de flux $\mathcal{F}$ (F par exemple), pour définir la décomposition de flux en plusieurs dimensions. Un gain en temps de calcul est alors obtenu car l'évaluation des matrices R et R^{-1} et d'un seul flux F est moins onéreux que le calcul direct du flux $\mathcal{F}$.

5.3. *Décomposition de flux*

On applique la décomposition décrite en (4) à la première composante du flux $F(\widehat{W})$. On obtient :

$$f^+(\widehat{W}) = \begin{cases} F & si\ M_n \geq 1 \\ \begin{pmatrix} +\frac{\rho c}{4}(\frac{u_n}{c}+1)^2 = f_1^+ \\ \frac{f_1^+}{\gamma}((\gamma-1)u_n + 2c) \\ f_1^+ v_n \\ f_1^+\left[\frac{((\gamma-1)u_n+2c)^2}{2(\gamma^2-1)} + \frac{v_n^2}{2}\right] \end{pmatrix} & si\ |M_n| < 1 \\ 0 & si\ M_n \leq 0 \end{cases} \tag{11}$$

Où $M_n = \dfrac{u_n}{c}$, et $f^- = F - f^+$.

5.4. *Discrétisation spatiale*

Les maillages utilisés sont de type éléments finis triangulaires, cependant la formulation variationnelle est celle des Volume-finis : les degrés de liberté sont les valeurs des inconnues aux sommets des triangles et les équations (9) sont intégrées sur des cellules qui constituent une autre partition de l'ouvert Ω.

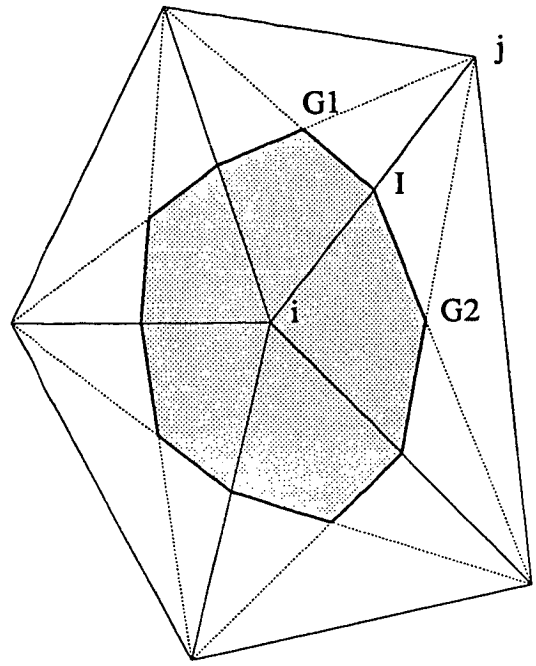


Figure 1. Cellule de contrôle C_i

Une intégration par parties des équations (9) aboutit au système :

$$aire(C_i)(W_t)_i = -\int_{\partial C_i} (F(W)\nu_x + G(W)\nu_y)\, d\sigma = -\sum_{j=1}^{Ni} \Phi_{ij} \tag{12}$$

où N_i est le nombre de sommets voisins du nœud (i) et $\overrightarrow{\nu} = (\nu_x, \nu_y)$ est la normale unitaire extérieure à la frontière de la cellule.

On note : $\overrightarrow{\eta_{ij}} = \displaystyle\int_{\partial C_i \cap \partial C_j} \overrightarrow{\nu}\, d\sigma$

Φ_{ij} est le flux échangé entre les deux cellules C_i et C_j.

Le schéma explicite à un pas (12) s'écrit alors :

$$aire(C_i)\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t^n} = -\sum_{j=1}^{N_i} \Phi_{ij}^n$$

Avec $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ pas de temps variable, fonction du CFL (nombre de Courant-Friedrichs-Lewy).

$$\begin{cases} \Phi_{ij}^n = \Phi(W_{ij}^n, W_{ji}^n, \vec{\eta}_{ij}) \\ W_{ij}^n = W^n \mid_{C_i} (I_{ij}) \\ W_{ji}^n = W^n \mid_{C_j} (I_{ij}) \\ \Phi(U, V, \vec{\eta}) = \|\vec{\eta}\| R^{-1}(f^+(\widehat{U}) + f^-(\widehat{V})) \end{cases}$$

La précision du schéma est liée ici (méthode M.U.S.C.L.) au degré d'interpolation de l'inconnue W dans les cellules. L'ordre un en espace est obtenu en prenant :

$$W_{ij}^n = W_i \ ; \ W_{ji}^n = W_j$$

Remarque :

Les conditions aux bords sont traitées de la même façon que dans [7], à cette différence qu'ici on utilise le décentrage de type van Leer à l'infini au lieu de celui de Steger-Warming qui est décrit dans [13].

Ordre deux :

Les états W_{ij}^n sont calculés à l'aide d'une interpolation de type P_1-Galerkin :

$$\begin{cases} W_{ij} = W_i + \frac{1}{2}\overrightarrow{\nabla W_i} \cdot \overrightarrow{ij} \\ W_{ji} = W_j - \frac{1}{2}\overrightarrow{\nabla W_j} \cdot \overrightarrow{ij} \end{cases} \tag{13}$$

avec pour les gradients en i une formulation *centrée* :

$$\overrightarrow{\nabla W_i} = \frac{1}{mes(C_i)} \iint_{C_i} \overrightarrow{\nabla W} dxdy$$

Le procédé de limitation décrit au paragraphe précédent dans le cas monodimensionnel peut s'appliquer ici après projection des gradients sur le segment $\vec{ij}$. On peut de même utiliser le schéma prédicteur-correcteur qui s'étend sans difficulté au cas bidimensionnel. Le schéma résultant s'avère plus stable, précis et robuste pour un certain nombre d'applications (écoulements subsoniques et transsoniques sur des géométries peu complexes).

Cependant pour d'autres écoulements (à grand nombre de Mach et / ou à forte incidence avec des géométries complexes ...), le schéma décrit ci-dessus peut

se révéler fortement instable (instabilité non linéaire). Une manière d'obtenir un schéma plus robuste a été décrite et utilisée pour le flux d'Osher dans [17] : les gradients de W aux nœuds sont calculés de la façon suivante :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla W_i} = \overrightarrow{\nabla W}(T_{ij}) \\ \overrightarrow{\nabla W_j} = \overrightarrow{\nabla W}(T_{ji}) \end{cases}$$

avec T_{ij} et T_{ji} les triangles amont et aval à chaque arête $[i,j]$. Ils sont construits en prenant les deux triangles contenus dans la prolongation de l'arête : voir la figure.

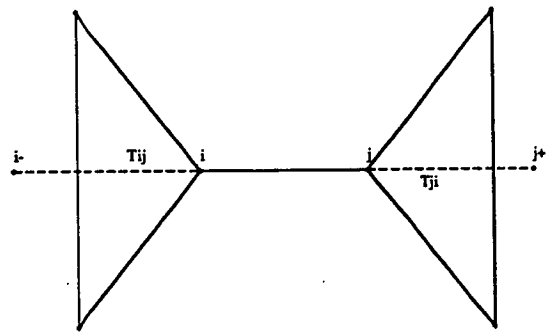


Figure 2. Triangles amont et aval au segment $[i,j]$

On obtient un schéma *demi-totalement décentré* en remplaçant dans (13) les gradients par ceux définis ci-dessus et en ajoutant des termes centrés $W_j - W_i$. Il vient :

$$\begin{cases} W_{ij} = W_i + \frac{1}{4}\left((W_j - W_i) + \overrightarrow{\nabla W}(T_{ij}).\overrightarrow{ij}\right) \\ W_{ji} = W_j - \frac{1}{4}\left((W_j - W_i) + \overrightarrow{\nabla W}(T_{ji}).\overrightarrow{ij}\right) \end{cases} \tag{14}$$

On peut considérer que le schéma (14) correspond à l'extension au cas bidimensionnel non structuré du schéma de Fromm (cas particulier des β-schémas avec $\beta = \frac{1}{2}$).

On peut de nouveau appliquer le limiteur monodimensionnel décrit dans [20] sur les segments $[i,j]$. Dans les calculs précédents, les limiteurs étaient appliqués aux variables primitives. On remarque que la précision est moins altérée par la

limitation si celle ci est appliquée aux variables caractéristiques. Ces variables sont approchées en évaluant la matrice de vecteurs propres en $(W_i + W_j)/2$ par exemple.

5.5. *Description du schéma implicite 2-D*

Le schéma a été décrit au paragraphe 4. Nous donnons ici son écriture dans le cas bidimensionnel.

Phase explicite / physique

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta W_i^e = -\dfrac{\Delta t^n}{aire(C_i)} \left\{ \displaystyle\sum_{j=1}^{N_i} \Phi_{ij}^n \; + \text{ termes de bord} \right\} \\ \Phi_{ij}^n = \Phi(W_{ij}^n, W_{ji}^n, \vec{\eta}_{ij}) \end{array} \right. \tag{15}$$

Phase implicite / mathématique

$$\left\{ \begin{array}{l} M^n \delta W^{n+1} = \delta W^e \\ W^{n+1} = W^n + \delta W^{n+1} \end{array} \right. \tag{16}$$

On écrit $M^n = D^n + E^n$ où D^n est une matrice diagonale par bloc. Pour toute cellule C_i, nous avons stocké les termes diagonaux comme suit :

$$D_i^n = I\!I + \frac{\Delta t^n}{aire(C_i)} \left\{ \sum_{j \in K(i)} \hat{A}^+(W_i^n, \vec{\eta}_{ij}) + \text{termes de bord} \right\}$$

Avec $\hat{A}^{\pm}(U, \vec{\eta}) = \|\vec{\eta}\|(R^{-1} \circ \hat{A}^{\pm})(\widehat{U})$ où $\hat{A}^{\pm}$ sont les matrices jacobiennes des flux de van Leer, et $I\!I$ représente la matrice identité dans $I\!R^4 \times I\!R^4$.

Les termes des blocs extradiagonaux sont stockés pour chaque arête $[i, j]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{ij}^n = -\dfrac{\Delta t^n}{aire(C_i)} \hat{A}^+(W_j^n, \vec{\eta}_{ij}) \\ E_{ji}^n = +\dfrac{\Delta t^n}{aire(C_i)} \hat{A}^-(W_j^n, \vec{\eta}_{ij}) \end{array} \right.$$

Remarque :

La phase dite physique peut-être calculée avec un flux d'ordre un ou deux, la phase mathématique utilise un préconditionneur calculé avec des flux d'ordre un. Dans le cas stationnaire, la précision de la solution dépend uniquement de la précision du calcul du flux lors de la phase physique. L'utilisation du préconditionneur permet d'accélérer la convergence en prenant des pas de temps plus grands (stabilité inconditionnelle).

Résolution des systèmes linéaires

Les systèmes linéaires obtenus à chaque pas de temps à partir de (15)-(16) sont résolus par la méthode itérative de Gauss-Seidel ou de Jacobi par blocs 4×4. En effet, ces méthodes sont convergentes dans le cas scalaire linéaire grace aux propriétés de diagonale dominante par blocs de la matrice M^n (cf [9], [16] pour l'énoncé et la démonstration des propriétés).

On trouvera tous les détails concernant le choix du pas de temps ainsi que des résultats de stabilité linéaire dans [2], [14] et [16].

6. Experiences numériques

6.1. *Problème du tube a choc*

On reprend ici l'expérience devenue classique du tube à choc de Sod [12]; on trouvera la description détaillée du problème dans [15], [16], entre autres. On rappelle qu'on cherche la solution à $t = .16$ avec comme conditions initiales :

$$\vec{V} = 0 \ , \ \rho = 1.0 \ , \ p = 1.0 \quad 0 \leq x < 0.5$$

$$\vec{V} = 0 \ , \ \rho = .125 \ , \ p = .1 \quad 0.5 \leq x < 1.$$

On présente sur les figures 1.1 et 1.2 la solution obtenue avec le schéma implicite d'ordre un avec des pas de temps différents. La figure 1.1 représente la solution obtenue en une itération en temps et la figure 1.2 en 8 itérations correspondant à des nombres de courant (CFL) de 53 et 5 respectivement. Dans les deux cas la solution approchée est comparée avec la solution exacte calculée en résolvant sans approximation le problème de Riemann. L'obtention de la solution en une seule itération est assez remarquable car des tests effectués dans [4] avec diverses décompositions de flux (Q-schéma, Roe, Vijaya, Osher...) ont montré que seul le schéma de Roe avec la correction proposée par Harten permet d'obtenir un résultat semblable à la différence que la solution calculée avec le schéma de Roe est sensiblement moins détériorée que celle présentée ici. L'intérêt de cette expérience est de mettre en évidence la robustesse du schéma présenté dû principalement à la combinaison de la diffusion numérique interne au flux explicite avec celle introduite par le procédé de linéarisation. On peut toutefois constater que l'utilisation de ce schéma avec de grands pas de temps semble impropre au calcul de solutions instationnaires. On pourra se référer à [4] et à [7] pour une comparaison avec d'autres schémas.

6.2. *Ecoulement transsonique autour d'un profil*

Géométrie et problème

Nous présentons maintenant des calculs d'écoulements stationnaires. On considère tout d'abord l'écoulement externe autour d'un profil d'aile d'avion de type NACA0012. Le maillage est discrétisé en éléments finis triangulaires contenant 1514 éléments et 800 sommets (voir la figure 2.1). On considère un écoulement transsonique (le nombre de Mach à l'infini est de 0.85) et sans incidence.

Méthode de calcul

Nous calculons les solutions stationnaires de ce problème à l'aide du solveur

implicite d'ordre un en espace pour le préconditionneur et d'ordre un ou deux pour la calcul du flux lors de la phase physique. On précise que le calcul à l'ordre deux utilise les pentes *centrées* définies en (13) sans qu'il soit nécessaire d'adjoindre un limiteur. On montre que le schéma est linéairement inconditionnellement stable (voir [2],[14],[16] par exemple) et qu'il permet, lorsque le CFL est infini, d'obtenir des convergences de type Newton (en ordre un lorsque le préconditionneur est calculé à l'aide du jacobien exact du flux) et des convergences de type Newton modifié dans les autres cas : (ordre deux par exemple). On note RES_n le résidu du processus itératif non linéaire:

$$RES_n = \frac{\delta W^e(t = t^n)}{\delta W^e(t = t^0)}$$

Choix des paramètres de calcul

Nous proposons de rechercher la solution stationnaire en se rapprochant le plus possible d'une méthode de Newton. Le problème comportant quelques difficultés par la présence d'un point d'arrêt, il n'est pas possible de prendre de trop grands pas de temps pendant les premières itérations avec un écoulement uniforme comme donnée initiale. Cependant, on peut atteindre de grand pas de temps avec des lois de CFL faisant intervenir le résidu à chaque itération ; en s'inspirant de [22] on prendra par exemple:

$$CFL_n = \max(a\, n^b, \frac{c}{RES_n})$$

où a, b, c sont des constantes réelles à ajuster en fonction du type de l'écoulement, n étant toujours le numéro de l'itération en temps. Pour ce problème, on obtient des courbes de convergence optimale avec $a = 10$, $b = 3$, $c = 10$.

Lorsque de grands pas de temps sont utilisés il devient nécessaire de pousser la résolution du système linéaire pour converger rapidement vers la solution stationnaire du problème non linéaire (cf. [14]). Pour ce problème, non estimons à 50 le nombre optimal de balayages de la méthode de Gauss-Seidel pour obtenir une solution partiellement convergée du sytème linéaire.

Courbes de convergence

Nous avons comparé l'évolution de la convergence du schéma implicite linéarisé en fonction de l'utilisation de deux types de combinaison de flux. Un premier cas où le préconditionneur et le second membre sont calculés avec le même flux numérique: celui de van Leer et on notera $VL - VL$ ce schéma; un second cas où le préconditionneur et le second membre sont construits avec des flux différents : le flux de Steger-Warming pour la phase mathématique et le flux de Osher pour la

phase physique (voir [17], [14] pour la description détaillé de ces flux), on désignera par $SW - OSH$ ce second schéma.

La figure 2.2 représente la convergence vers la solution stationnaire d'ordre un (i.e. la phase physique et mathématique sont d'ordre un). On observe une convergence quasi-quadratique pour les deux schémas : pour diviser le résidu par 10^4 il faut 12 itérations avec le schéma $VL - VL$ et 13 pour le schéma $SW - OSH$. Le nombre de CFL atteint est voisin de 10^5, mais on peut pousser la convergence vers le zéro machine avec des CFL voisins de 10^{17} par exemple (voir [14]).

La figure 2.3 représente la convergence vers la solution stationnaire d'ordre deux (i.e. la phase physique est d'ordre deux et la phase mathématique est d'ordre un). Par rapport au cas précédent, la convergence est sérieusement ralentie : 30 à 50 itérations sont nécessaires pour diviser le résidu par 10^4. Avec la loi de CFL donnée plus haut, on constate que le schéma $VL - VL$ converge (la convergence est de type linéaire après 25 itérations : méthode de Newton modifiée) alors que $SW - OSH$ diverge à partir de la trentième itération. On remarque cependant que ce dernier converge avec un CFL plus petit [14]. Ceci montre que le schéma de van Leer est certainement plus robuste (ou encore stable pour de très grands pas de temps) mais nous ne pouvons affirmer que cela est dû à l'utilisation du vrai jacobien dans le schéma $VL - VL$, puisque dans les deux cas la matrice ne contient que des termes de premier ordre.

Solutions stationnaires

On compare les solutions obtenues avec le schéma de van Leer et le schéma d'Osher en ordre deux. La figure 2.4 représentent les lignes isomach, les lignes isoentropie et le nombre de Mach sur le corps pour le schéma de van Leer. De même, la figure 2.5 représentent les solutions obtenues avec le schéma d'Osher. On contate qu'on obtient des résultats quasi-identiques sur les figures représentant le nombre de Mach par exemple mais on observe une plus grande dissipation numérique avec le schéma de van Leer, ainsi le niveau maximum d'entropie est de 0.038 alors qu'il est de 0.032 avec le flux d'Osher.

6.3. *Ecoulement interne dans un canal avec obstacle circulaire*

Géométrie et problème

Nous étudions le problème classique de l'écoulement interne à l'intérieur d'un canal en forme d'arc de cercle (la longueur est de 5 et la hauteur de 2.073, la hauteur de l'obstacle est de $4,2\%$). Le maillage en éléments finis (figure 3.1) contient 1512 sommets et 2840 triangles.

On cherche la solution stationnaire de ce problème pour différents régimes à l'infini : un cas transsonique avec $M_\infty = 0.85$ et un cas supersonique avec $M_\infty = 1.50$. Des solutions ont déjà été présentées dans [16],[23], ...

Résolution numérique

Comme précédemment pour le profil de l'aile, on compare l'évolution de la convergence des deux schémas $VL - VL$ et $SW - OSH$ en ordre un. On a fixé à 50 le nombre d'itérations nécessaire pour résoudre le système linéaire. De grands pas de temps peuvent être utilisés dès les premières itérations (voir [16]) : on prend donc une loi de CFL de la forme:

$$CFL_n = \max(1000, \frac{1}{RES_n})$$

La figure 3.2 présente la courbe de convergence du problème dans le cas transsonique, la figure 3.3 dans le cas supersonique. On constate une meilleure convergence dans le second cas où elle est de type quadratique pour les deux schémas considérés : le résidu est divisé par 10^4 en 8 itérations. Dans le cas transsonique, le résidu est aussi divisé par 10^4 en 8 itérations mais on observe une convergence en trois phases : une phase *convective* (non convergente) sur quelques itérations (4 ici) avec la création de la poche supersonique au niveau de l'obstacle, puis une phase de convergence quadratique pendant 6 à 8 itérations (méthode de Newton) et enfin une phase de convergence à décroissance linéaire (Newton modifiée). Il serait intéressant de donner une explication satisfaisante à ce passage d'une convergence quadratique en phase de recherche à une convergence linéaire dans la phase attractive vers la solution stationnaire. On pourrait invoquer une résolution insuffisante du système linéaire à chaque itération mais des tests effectués avec le même problème sur un maillage grossier ont montré qu'en résolvant au zéro machine les systèmes linéaires on pouvait faire reculer le niveau du décrochage (le passage à la convergence linéaire) jusqu'à un certain point (résidu de l'ordre de 10^{-6} pour ce problème), mais la convergence du schéma implicite n'est jamais complètement quadratique. L'utilisation d'un jacobien exact ou approché dans la phase implicite du schéma ne semble pas être la véritable explication; les deux schémas que nous comparons ici appartiennent à chacun des deux cas (vrai jacobien pour $VL - VL$ et faux pour $SW - OSH$) et nous observons globalement le même comportement. Il reste enfin le traitement des conditions aux bords (en particulier sur le corps) dont nous n'avons pas mesuré les effets sur les propriétés du système linéaire.

6.4. *Ecoulement supersonique Mach autour d'un corps émoussé*

Géométrie et problème

Nous présentons enfin un calcul d'écoulement plus complexe : c'est un écoulement externe supersonique à $M_\infty = 8$ sans incidence autour d'un corps émoussé à l'avant de forme circulaire se prolongeant vers l'arrière par deux droites parallèles. Ce problème est un problème très simplifié pour la simulation de la réentrée d'un engin spatial dans l'atmosphère (navette spatiale). On ne considère pas ici les phénomènes visqueux ni les phénomènes de réactions chimiques.

Le maillage (figure 4.1) contient 3640 triangles et 1908 sommets répartis assez régulièrement autour du corps.

Choix des paramètres pour la résolution

On cherche la solution stationnaire à l'aide des solveurs implicites cités précédemment. Pour le calcul à l'ordre deux, nous utilisons la procédure de calcul des gradients décentrés à l'aide du schéma *demi-totalement décentré* (14) avec des limiteurs monodimensionnel de type van Leer calculés en variables caractéristiques approchées (paragraphe 5.5).

La loi de CFL utilisée est plus contraignante pour ce problème car l'écoulement uniforme utilisé en initialisation est très éloigné de la solution finale stationnaire. On a choisi la progression suivante :

$$CFL_n = \min(\frac{n}{2}, CFLMAX)$$

En ordre un, on prend $CFLMAX = 100$ et en ordre deux $CFLMAX = 50$. Pour de tels pas de temps, 10 balayages de Gauss-Seidel suffisent à assurer une convergence partielle du système linéaire.

Courbes de convergences

Sur la figure 4.2, on présente les courbes de convergence du schéma de van Leer en ordre un et en ordre deux. La figure 4.3 permet de comparer les deux schémas $VL - VL$ et $SW - OSH$ en ordre deux. Pour diviser le résidu par 10^4, il faut 100 itérations avec $VL - VL$ ordre un, 150 itérations avec $VL - VL$ ordre deux et 140 itérations avec $SW - OSH$ ordre deux. On présente dans le tableau ci-dessus les performances et les coûts de calcul obtenus sur CONVEX-C1P-X avec un code non vectorisé.

Tableau 1 : Méthodes implicites sur CONVEX-C1-XP

Schémas	Précision spatiale	CPU en min.	Itérations
$VL - VL$	$\mathcal{O}(\Delta x)$	27	102
$VL - VL$	$\mathcal{O}(\Delta x^2)$	39	150
$SW - OSH$	$\mathcal{O}(\Delta x^2)$	45	140

On remarque que le schéma $VL - VL$ a un coût légèrement inférieur à celui de $SW - OSH$. Ce coût ne rend pas compte du rapport plus sensible qui existe entre ces deux flux dans un schéma explicite. En effet pour le schéma implicite, le coût du calcul des flux restant fixe, le coût global de la solution devient une fonction croissante du nombre d'itérations utilisées pour résoudre les systèmes linéaires. On constate dans ce cas de calcul que pour le même nombre de relaxations (10 ici) la méthode de Gauss-Seidel converge plus lentement avec le schéma $VL - VL$.

Solutions

On compare à nouveau les trois schémas étudiés ci-dessus. La figure 4.4 représente les lignes isomach, les lignes isoentropie et la valeur de l'entropie sur le corps , dans le cas du schéma $VL - VL$ ordre un. De même sur la figure 4.5 on trouve les solutions obtenues avec le schéma $VL - VL$ à l'ordre deux et la figure 4.6 avec le schéma $SW - OSH$ avec le même ordre de précision que le précedent.

On constate évidemment que la solution d'ordre un, bien que monotone, est très visqueuse. Par contre les solutions d'ordre deux sont plus précises mais présentent de légères oscillations derrière le choc et sur le corps, en particulier pour le schéma de $SW - OSH$. Le niveau d'entropie sur le corps a une valeur théorique de 5.6, cette valeur est observée assez précisement au point d'arrêt avec les différents schémas. Mais les valeurs obtenues plus loin sur la paroi présentent un niveau maximal de 6.20 pour $VL - VL$, soit légèrement plus important que celui de $SW - OSH$: 6.05.

7. Conclusion

La décomposition de flux de van Leer est particulièrement adaptée pour la résolution des équations d'Euler et permet d'obtenir un schéma robuste, facilement programmable et peu coûteux. La version implicite construite à partir du jacobien exact de cette décomposition aboutit à un solveur très efficace permettant dans de nombreux cas l'utilisation de très grands pas de temps.

Les expériences numériques présentées ici montrent que la décomposition de flux de van Leer permet d'obtenir des solutions de problèmes difficiles, ces solutions étant très proches de celles calculées avec le flux d'Osher. La comparaison révèle cependant une viscosité numérique un peu plus importante pour le flux de van Leer ce qui a pour effet de diminuer legèrement la précision et d'obtenir ainsi des solutions avec moins d'oscillations numériques.

Notons enfin que ce schéma s'étend sans difficulté au cas tridimensionnel [7] et au calcul d'écoulements réactifs [3], [10].

Références

[1] ANDERSON W.K.- THOMAS J.L. - VAN LEER B.,
A comparison of Finite Volume Flux-Vector Splittings for the Euler Equations
AIAA paper 85-0122 (1985).

[2] DESIDERI J.A.,
Preliminary results on results on iterative convergence of a class of implicit schemes
Rapport de recherche N^o490, INRIA Rocquencourt (1986)

[3] DESIDERI J.A. - HETTENA E.,
Numerical simulation of hypersonic equilibrium-air reactive flow
Rapport de recherche INRIA Sophia Antipolis No 716 (1987)

[4] FERNANDEZ G. ,
Implicit schemes applied to shock tube problems
Rapport de recherche INRIA. A paraître.

[5] FEZOUI F. ,
Résolution des équations d'Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis
Rapport de recherche N^o358 INRIA Rocquencourt (1985)

[6] FEZOUI L. - STOUFFLET B.,
A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes
Rapport de Recherche INRIA No 517, Avril (1986).

[7] FEZOUI L. - STEVE H. - SELMIN V. ,
Simulation numérique d'écoulements tridimensionnels par un schéma décentré en maillage non structuré
Rapport de recherche INRIA. A paraître.

[8] JESPERSEN C.D. - PULLIAM T.H.,
Flux vector splitting and approximate Newton methods
Computational Fluid Dynamics Conference AIAA. papier $n^0$1899 page 535 (1983).

[9] LERAT A.,
Sur le calcul des solutions faibles des systèmes hyperboliques des lois de conservation à l'aide de schémas aux différences
Thèse , Paris VI (1981)

[10] MONTAGNE J.L. ,
A Second Order Accurate Flux Splitting Scheme in Two-Dimensional Gas Dynamics
IC 9 NMFD C.E.N. Saclay, T.P. ONERA No 1984-50 , (1984)

[11] OSHER S. - SOLOMON F. ,
Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws
Journal Math. Computation , (1982)

[12] SOD G. A. ,
A Survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws
J. Comp. Phys. No 27 pp 1-31 , (1978)

[13] STEGER J. - WARMING R.F.,
Flux vector splitting for the inviscid gas dynamic with applications to finite difference methods
Journal Comp. Physics, Vol. 40 $N°2$, pp 263-293 (1981)

[14] STEVE H. ,
Efficient implicit solvers for the resolution of Euler equation in finite element method
Rapport de recherche $N°779$, INRIA Sophia-Antipolis (1987)

[15] STEVE H. ,
Thèse en préparation (1988).

[16] STOUFFLET B. ,
Résolution numérique des équations d'Euler des fluides parfaits compressibles par des schémas implicites en éléments finis
Thèse troisième cycle, Paris 6 (1984)

[17] STOUFFLET B. - PERIAUX J. - FEZOUI F. - DERVIEUX A.,
Numerical simulation of 3-D hypersonic Euler flows around spaces vehicules
AIAA paper 87-0560 Reno, Nevada (1987)

[18] SWEBY P.K. ,
High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws
SIAM, J. Num. Anal. No 21 pp 995-1011 , (1984)

[19] ROE P.L. ,
Approximate Riemann Solvers, paremeter vectors, and difference schemes
Journal of Comp. Physics, No 43, pp 357-371, (1981)

[20] VAN LEER B. ,
Towards the ultimate conservative difference scheme I. The quest of monotonicity
Lecture notes in Physics, Vol 18 page 163 (1972)

[21] VAN LEER B.,
Flux Vector Splitting for the Euler equations
Lecture Notes in Physics, vol. 170. page 405-512 (1982)

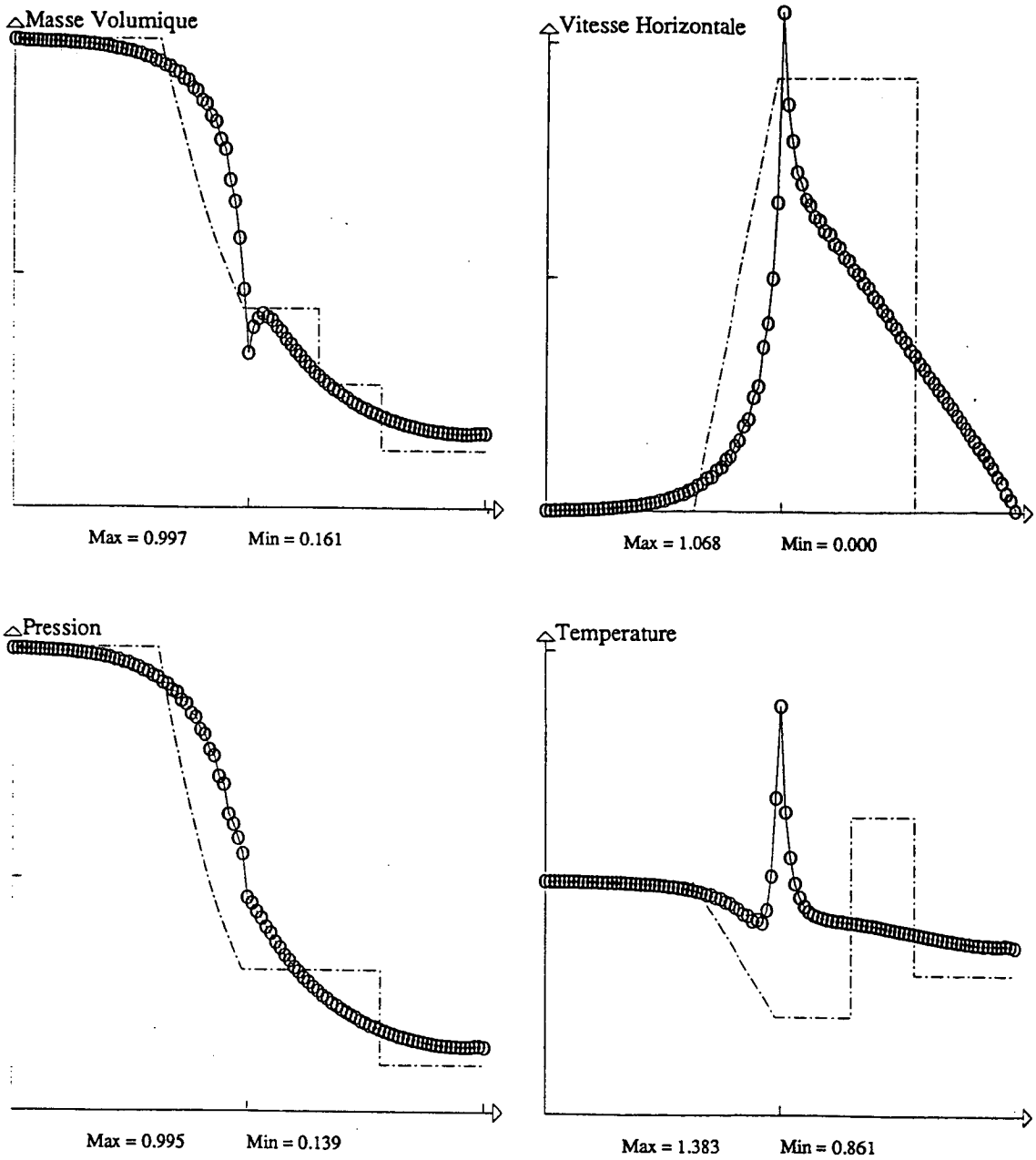
[22] B. VAN LEER - W. A. MULDER ,
Relaxation methods for hyperbolic conservation laws
Numerical Methods for the Euler Equation of Fluid Dynamics SIAM.
Edité par INRIA pp. 312-333 (1985) Philadelphia.

[23] VIJAYASUNDARAM G. ,
Résolution numérique des équations d'Euler pour des écoulements transsoniques avec un schéma de Godunov en éléments finis
Thèse troisième cycle, Paris 6 (1982)

[23] R.F. WARMING - R.M. BEAM,
Implicit numerical methods for compressible Navier-Stockes and Euler equations
V.K.I., Lecture Series 1982-04, (1982)

[24] DESIDERI J.-A. - GOUDJO A. - SELMIN V. ,
Third-order numerical schemes for hyperbolic problems
Rapport de recherche $N°607$, INRIA Sophia-Antipolis (1987)

Tube a Choc 2-D



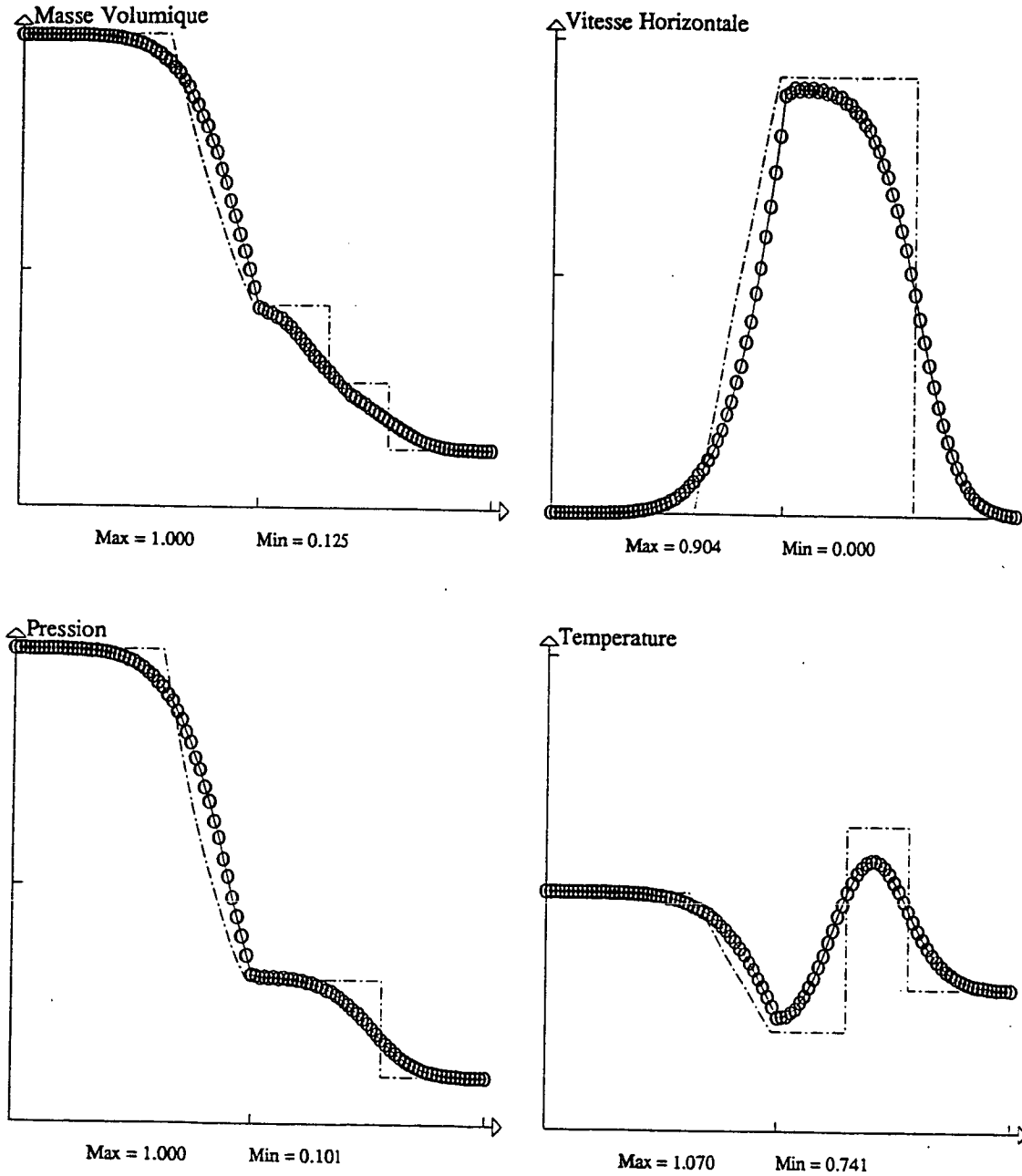
Temps = 0.1600 sec
CFL =53.000
(1 iterations)
Grille de 101 x 3 points

Ordre de precision en temps : 1

Phase explicite de Van Leer	Ordre 1
Phase implicite de Van Leer	Ordre 1

FIGURE 1.1

Tube a Choc 2-D



Temps = 0.1600 sec
CFL = 5.000
(8 iterations)
Grille de 101 x 3 points

Ordre de precision en temps : 1

Phase explicite de Van Leer	Ordre 1
Phase implicite de Van Leer	Ordre 1

FIGURE 1.2

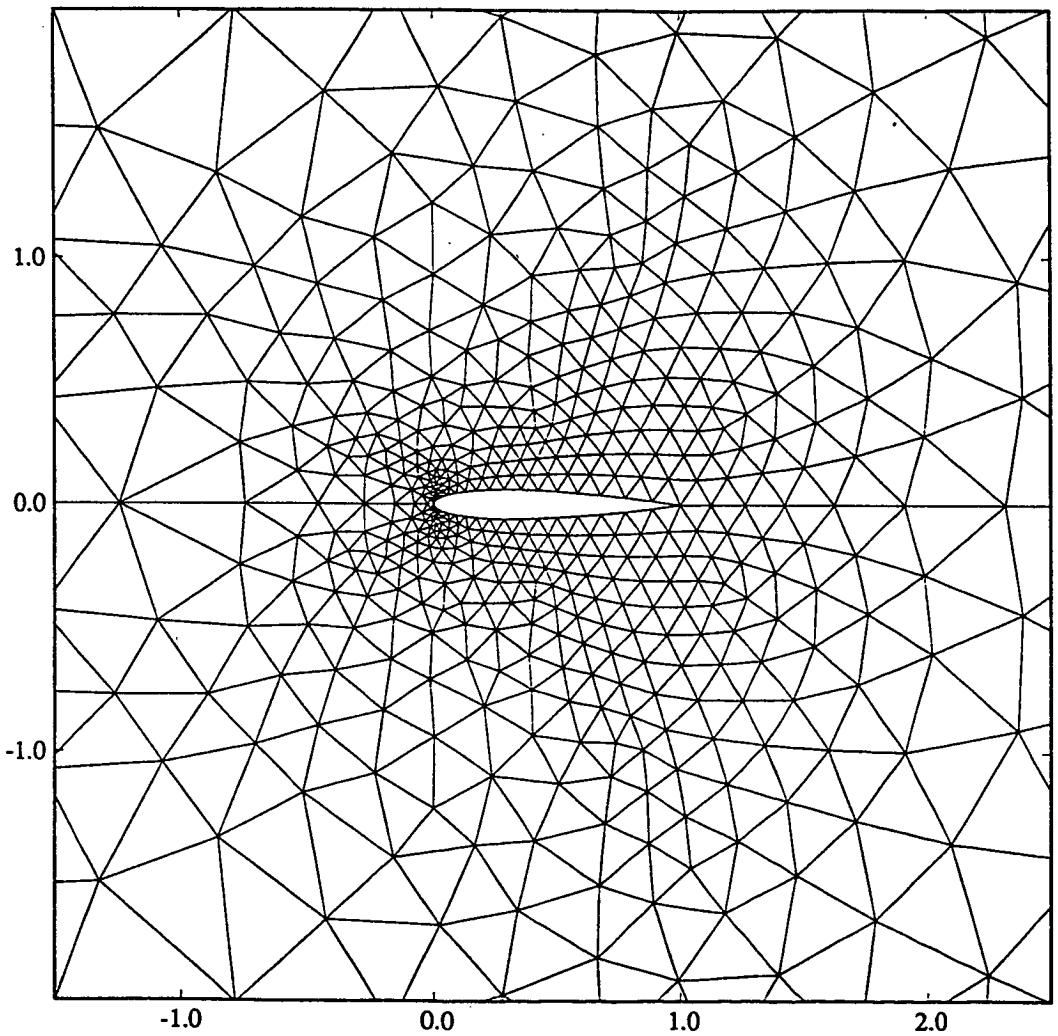


FIGURE 2.1 Maillage près du profil NACA0012 : 800 sommets

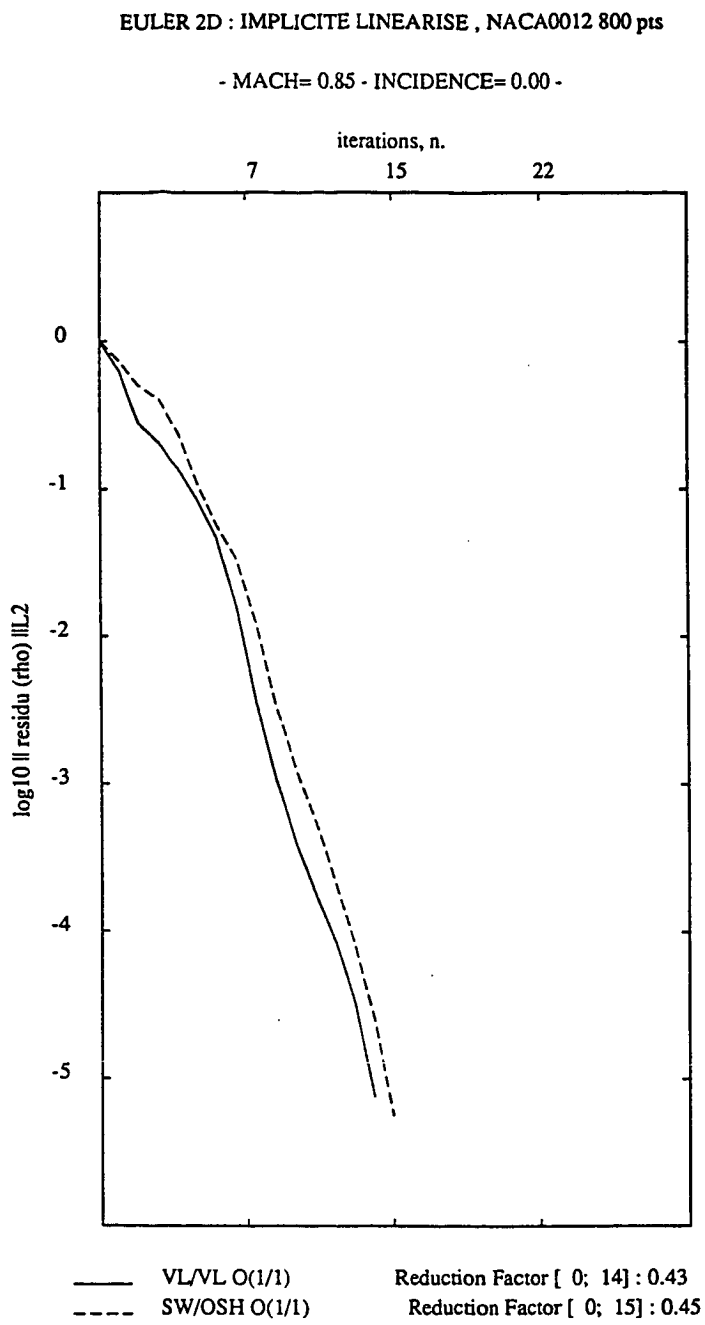


FIGURE 2.3 Courbe de convergence

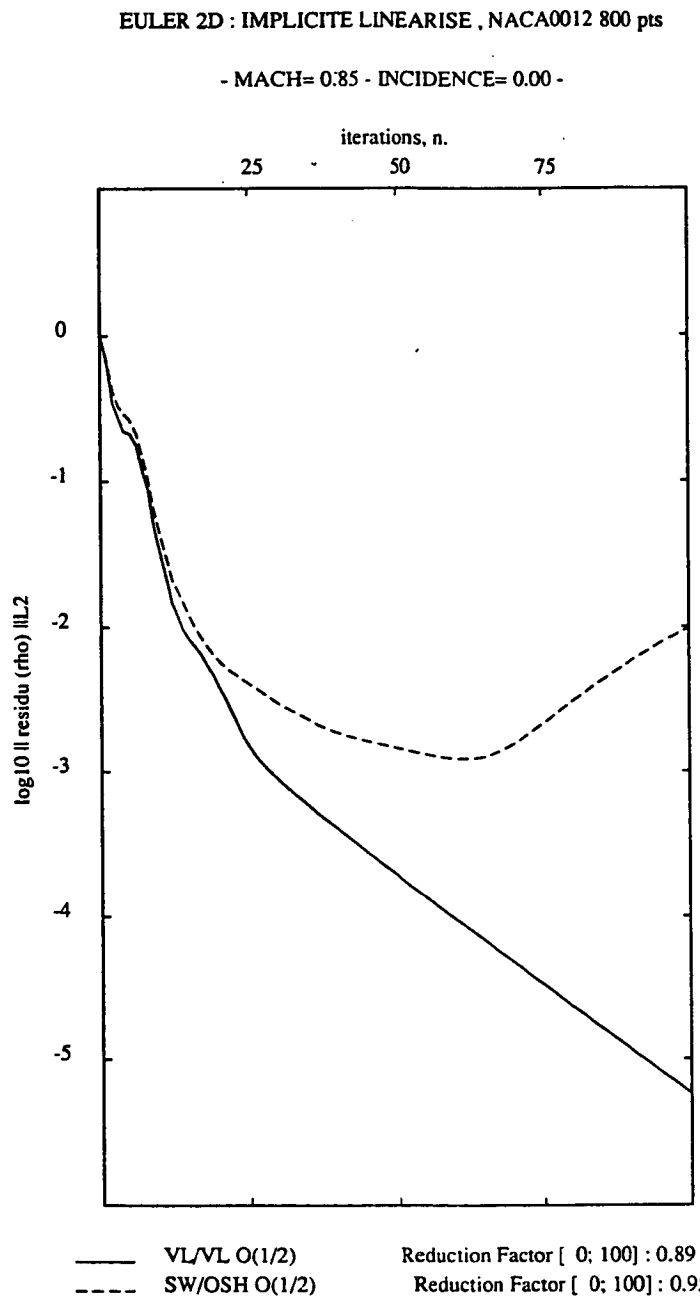
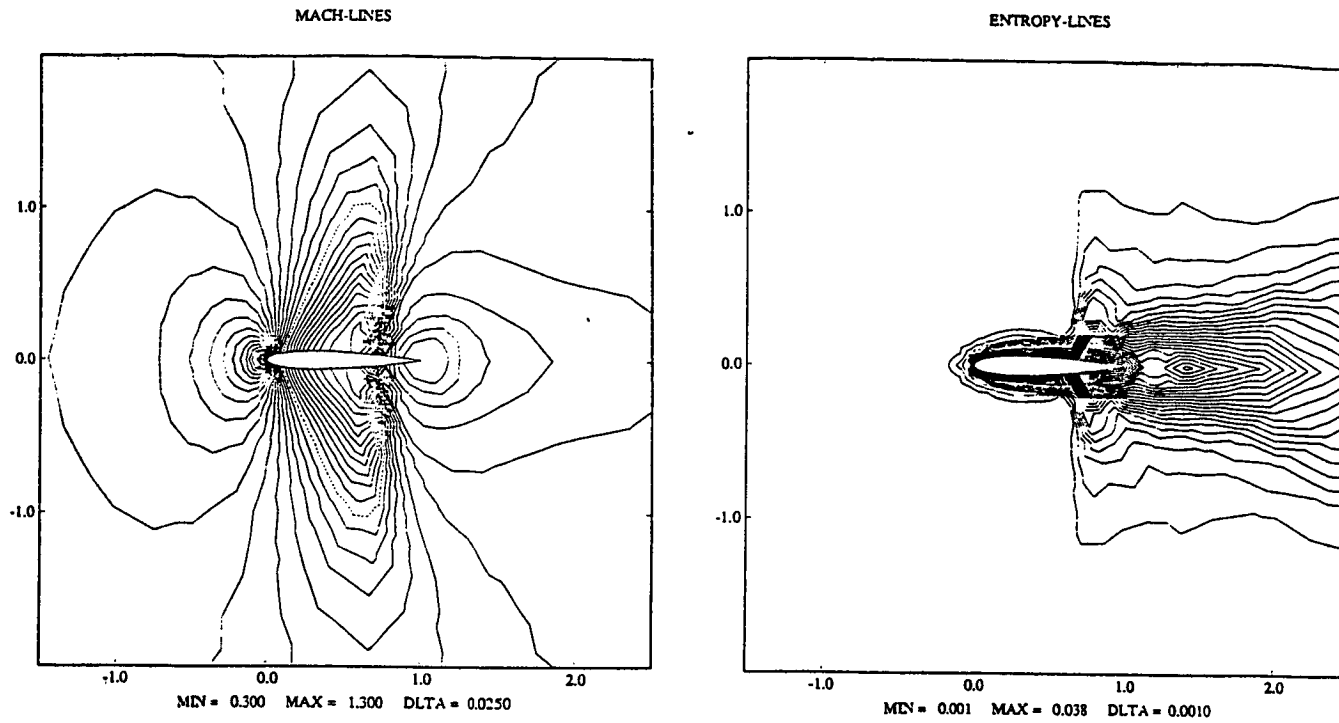


FIGURE 2.2 Courbe de convergence



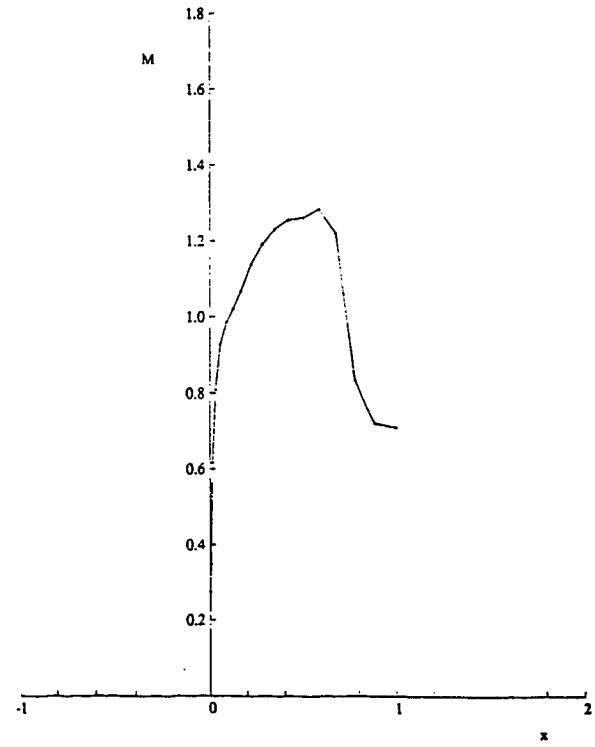
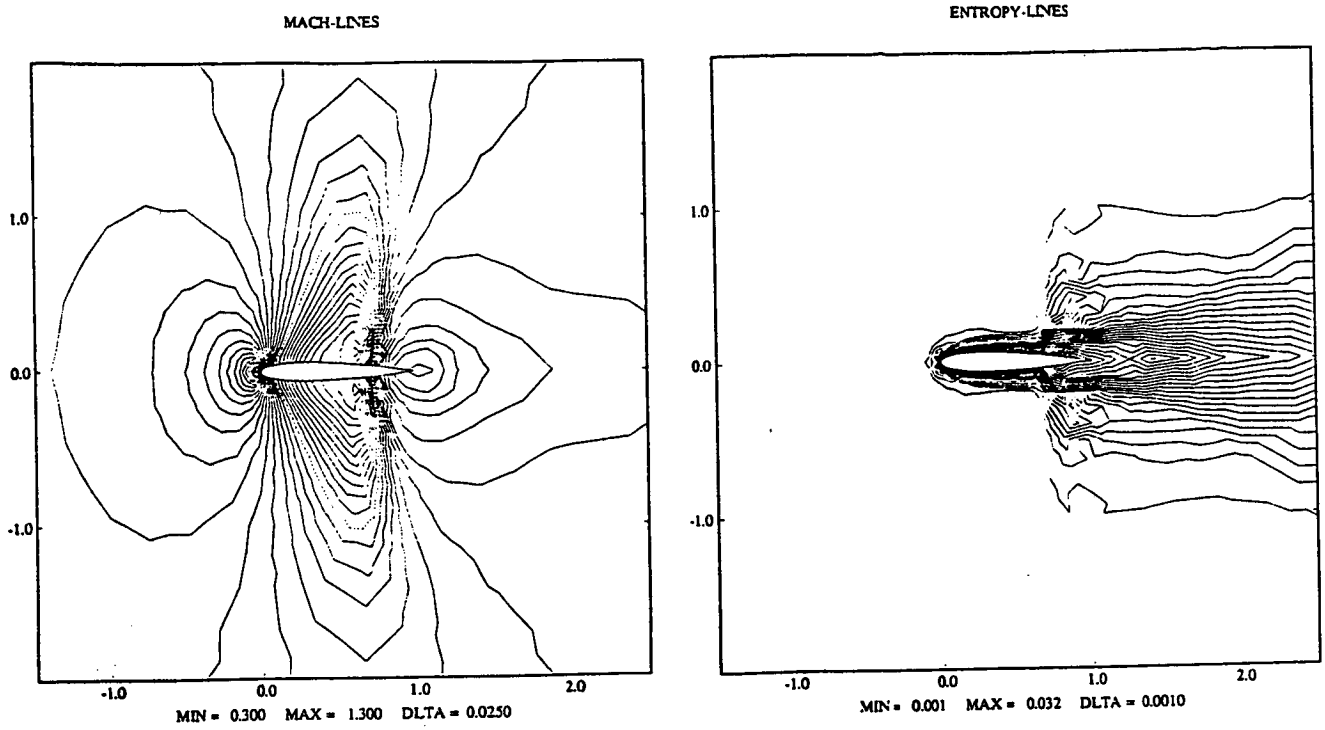


FIGURE 2.4 Solution NACA0012 : schéma implicite van Leer ordre un / van Leer ordre deux



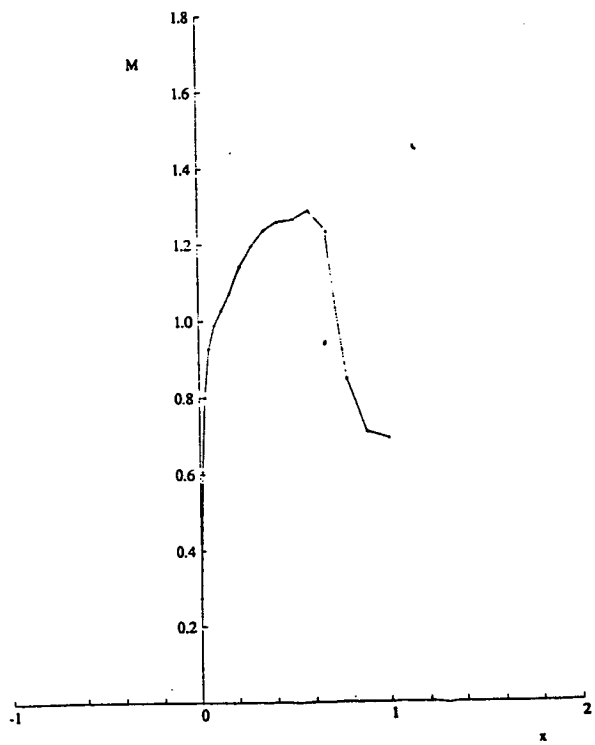


FIGURE 2.5 Solution NACA0012 : schéma implicite Steger-Warming ordre un / Osher ordre deux

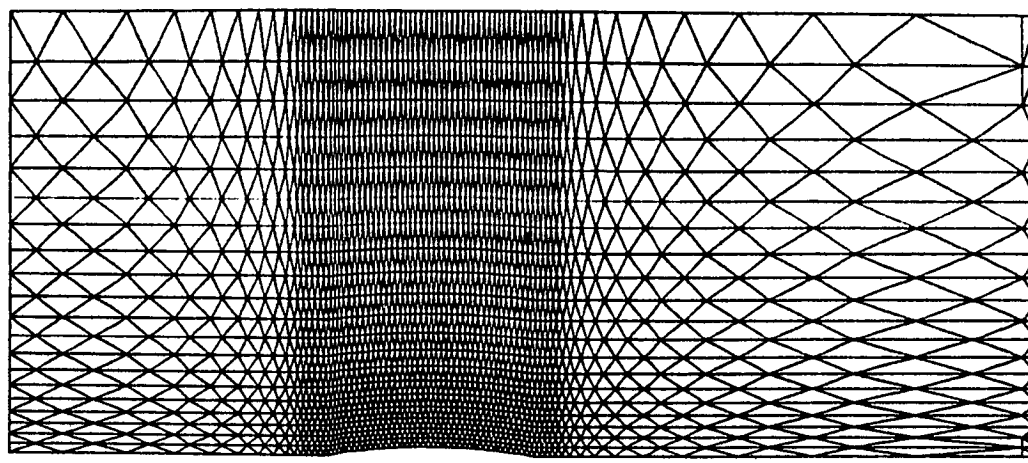


FIGURE 3.1 Maillage du canal avec dos d'âne : 1512 sommets

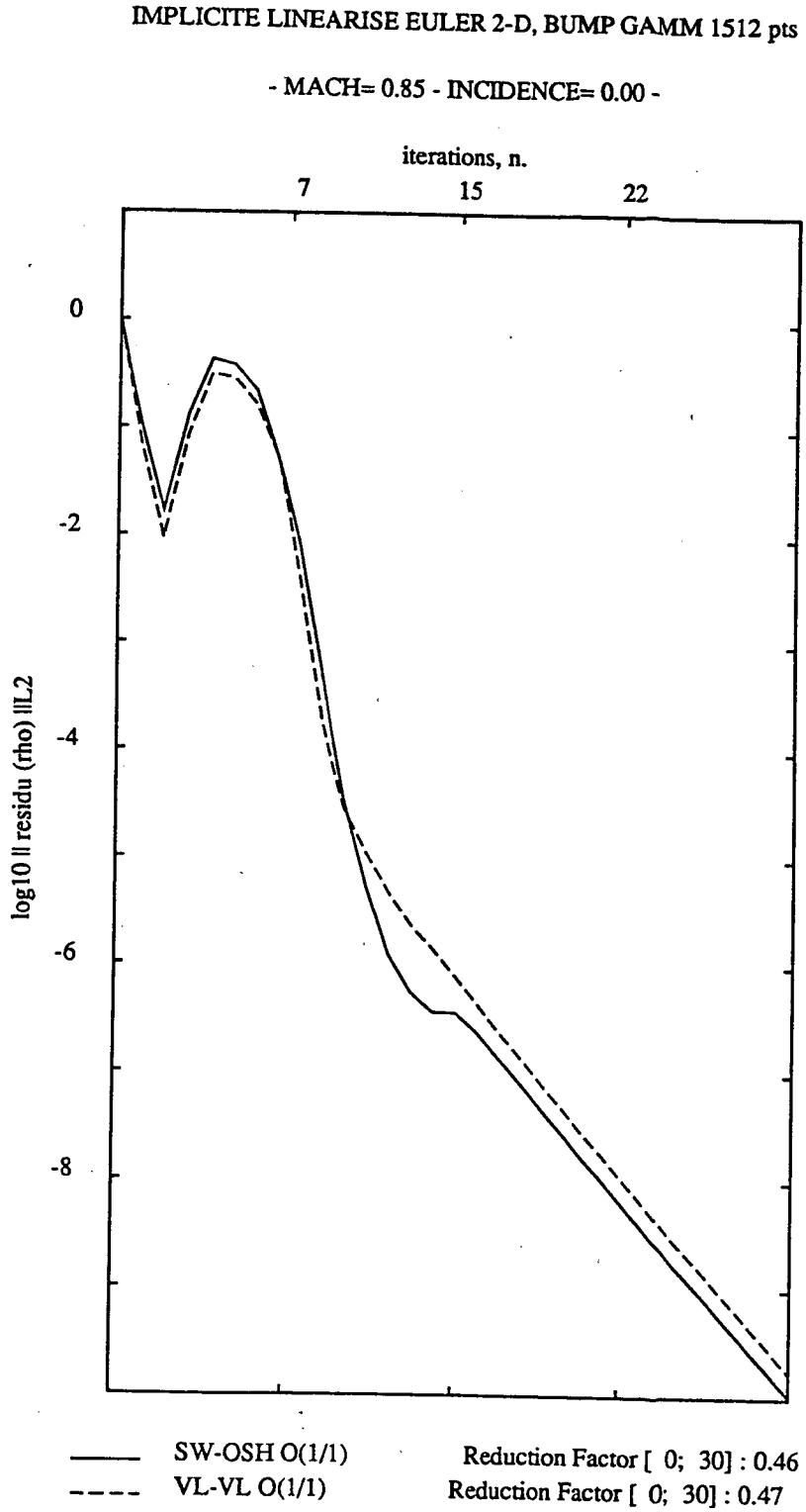


FIGURE 3.2 Courbe de convergence

IMPLICITE LINEARISE EULER 2-D, BUMP GAMM 1512 pts

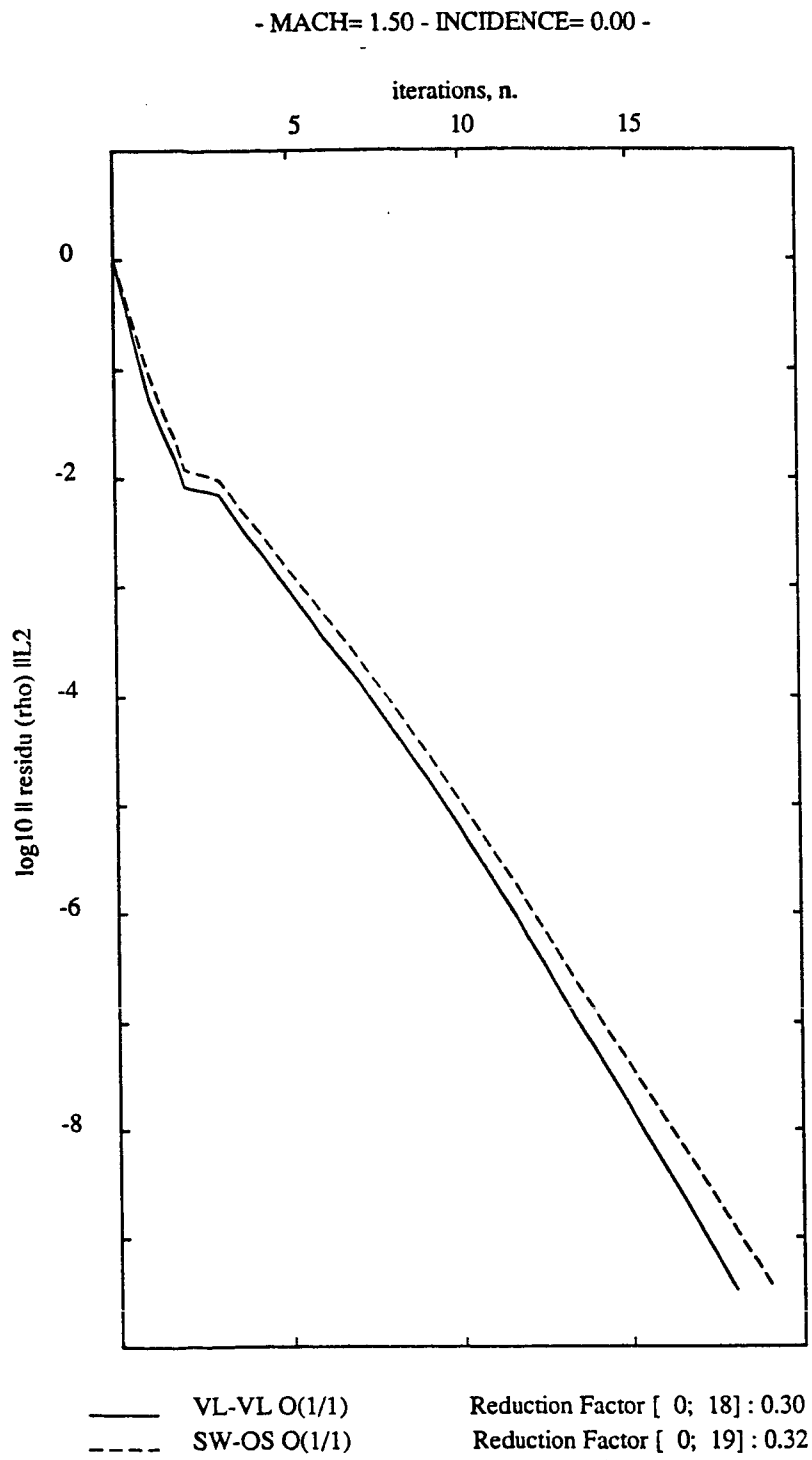


FIGURE 3.3 Courbe de convergence

AGRANDISSEMENT DU MAILLAGE PRES DU CORPS ARRONDI

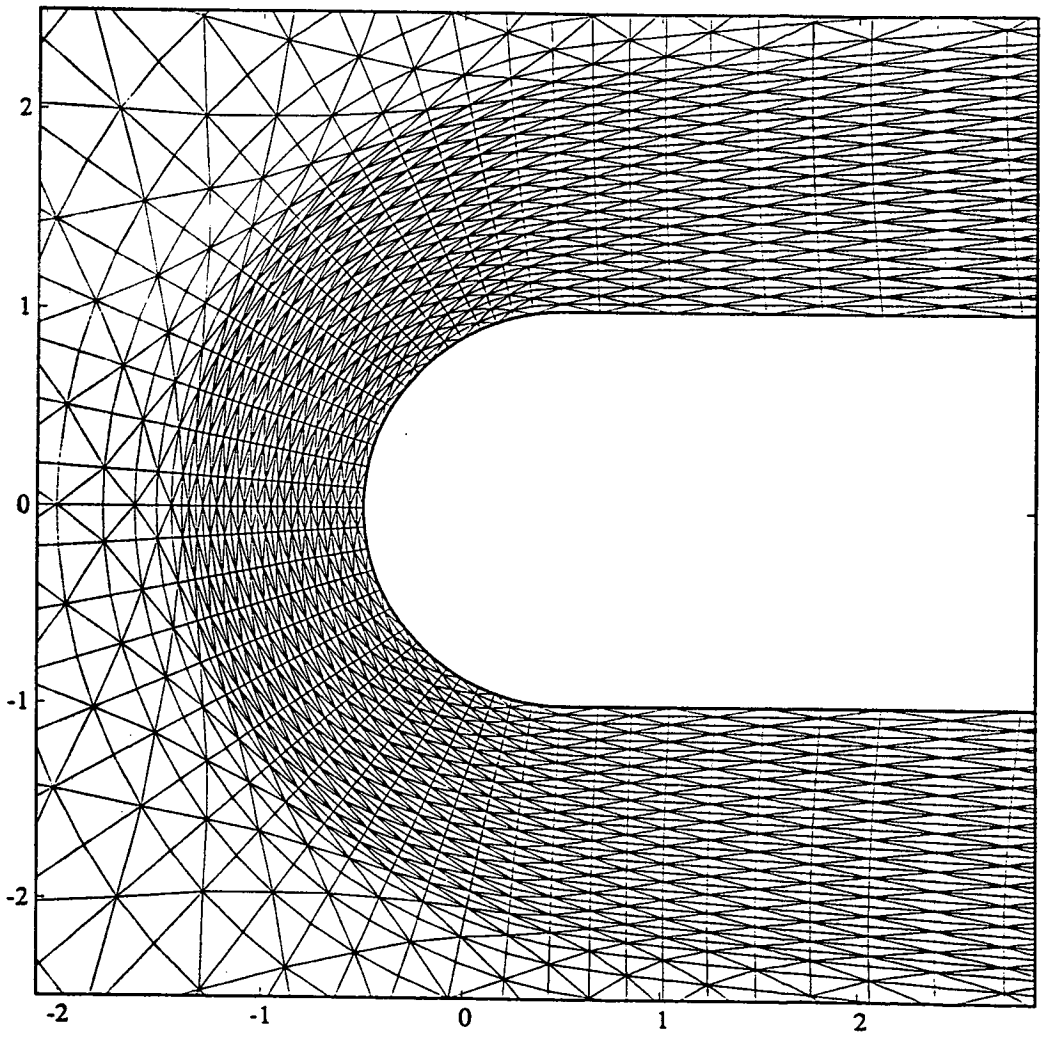
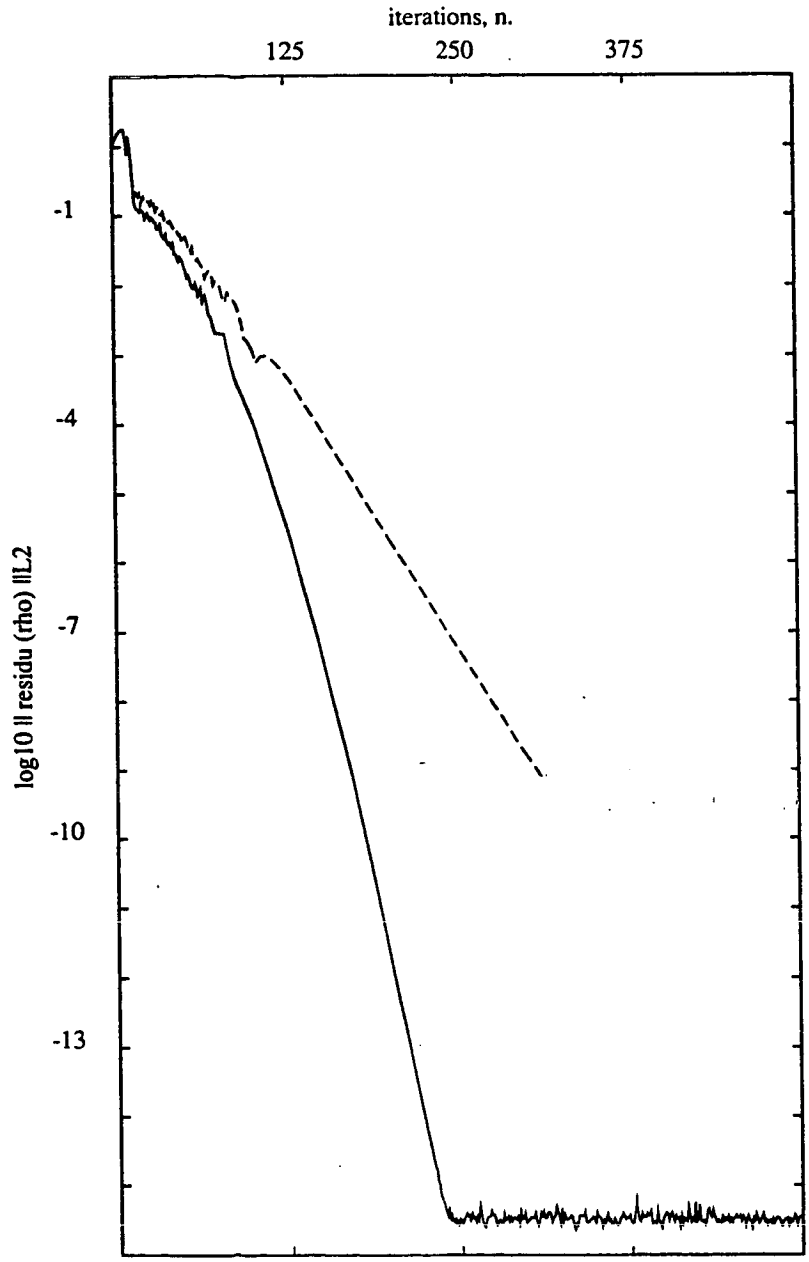


FIGURE 4.1 Maillage du corps arrondis : 1908 sommets

EULER 2D, IMPLICITE LINEARISE, BLUNT BODY 1908 pts

- MACH= 8.00 - INCIDENCE= 0.00 -



——— VL/VL O(1/1) CFL=MIN(n/2,100) Reduction Factor [0; 200] : 0.84

- - - - VL/VL O(1/2TD) CFL=MIN(n/2,30) Reduction Factor [0; 300] : 0.93

FIGURE 4.2 Courbe de convergence

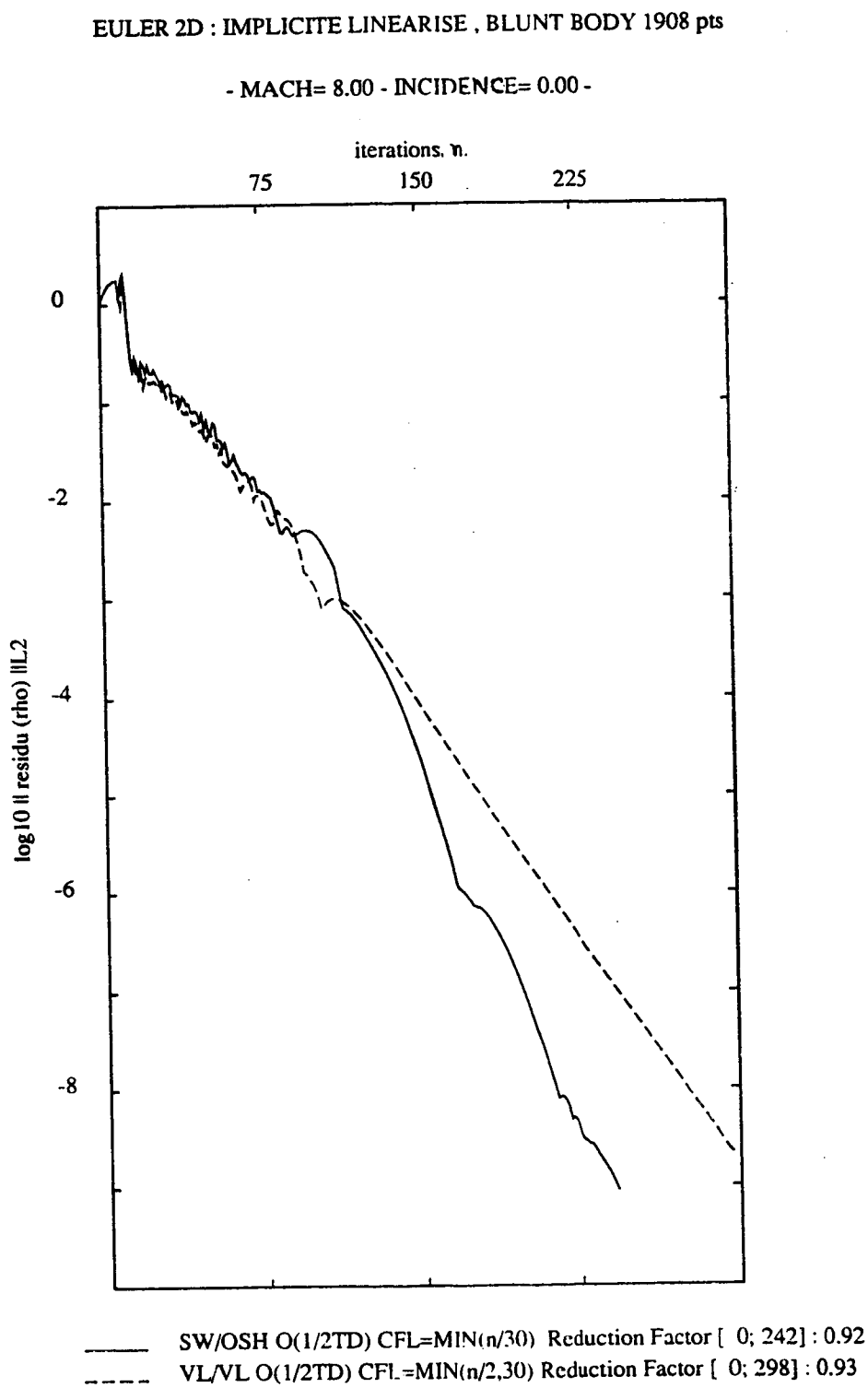
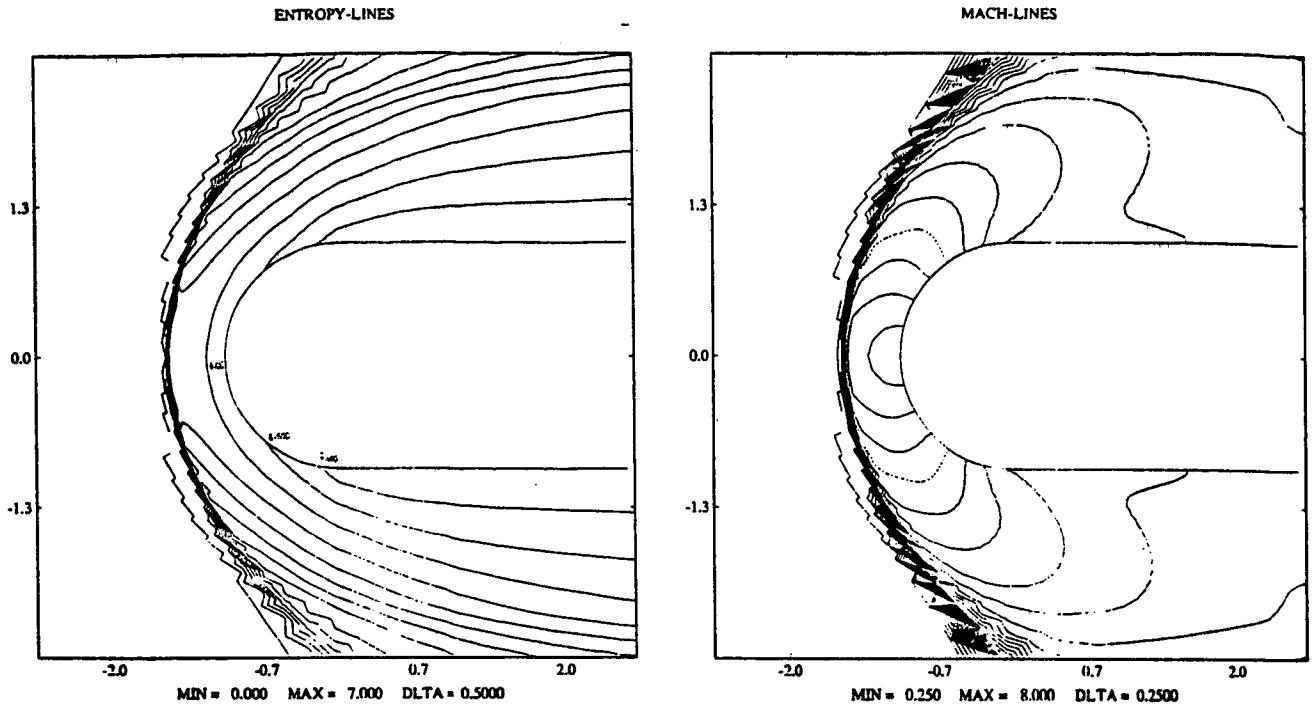


FIGURE 4.3 Courbe de convergence



ENTROPY DEVIATION

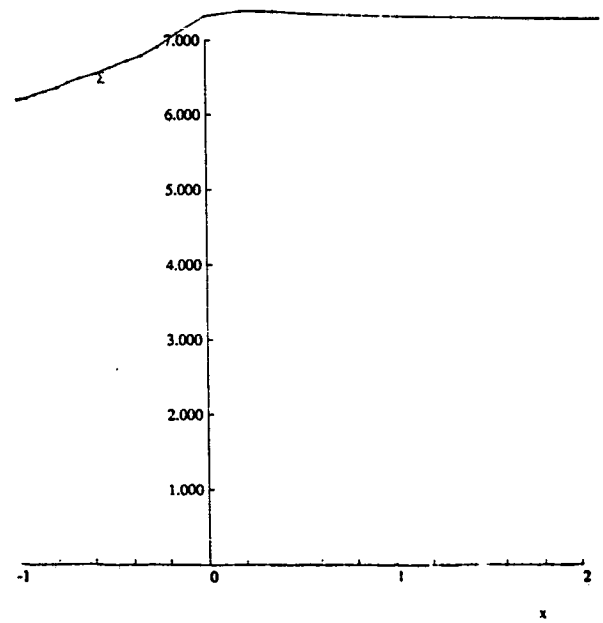
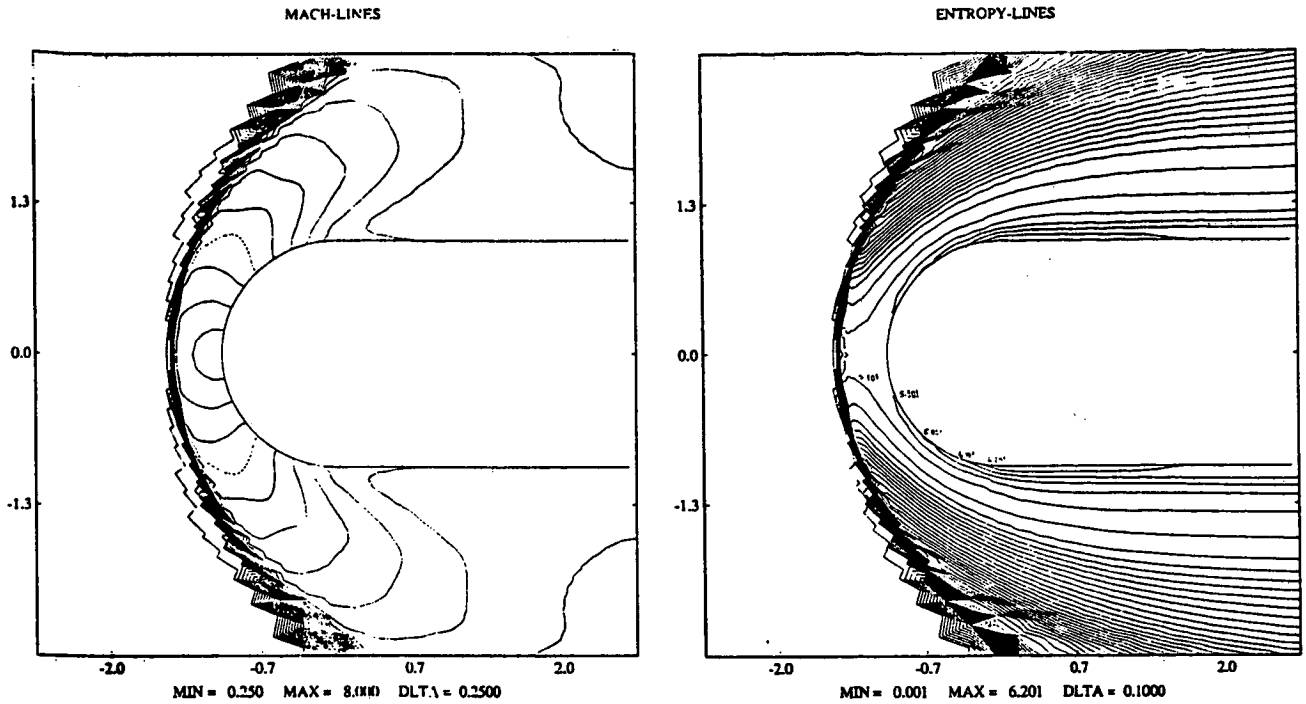


FIGURE 4.4 Solutions du corps arrondis : schéma implicite van Leer ordre un / van Leer ordre un



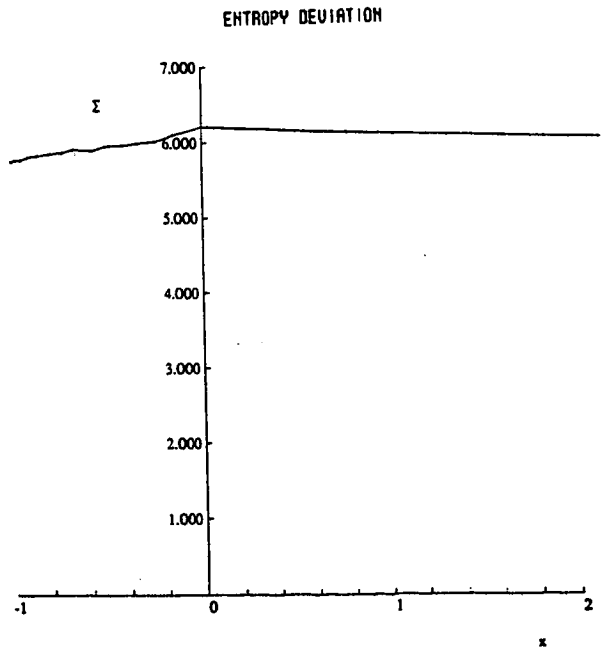
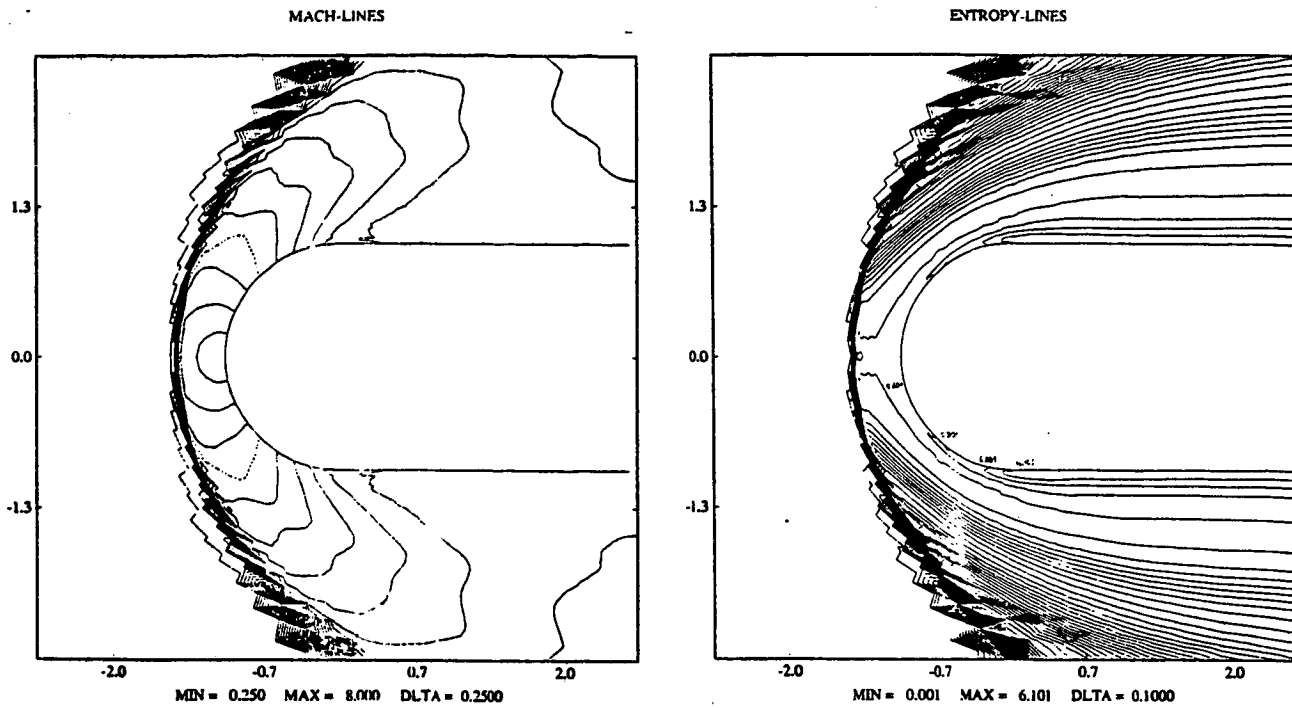


FIGURE 4.5 Solutions du corps arrondis : schéma implicite van Leer ordre un / van Leer ordre deux + limiteur en variables caractéristiques approchées



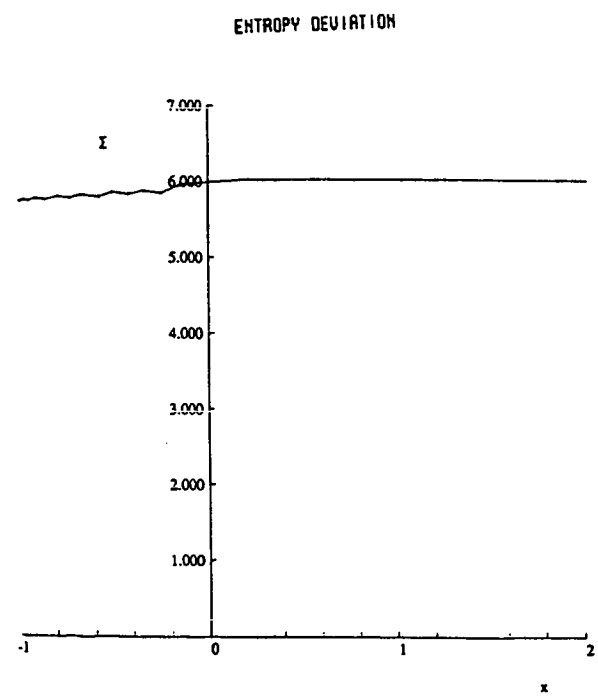


FIGURE 4.6 Solutions du corps arrondis : schéma implicite Steger-Warming ordre un / Osher ordre deux + limiteur en variables caractéristiques approchées

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique